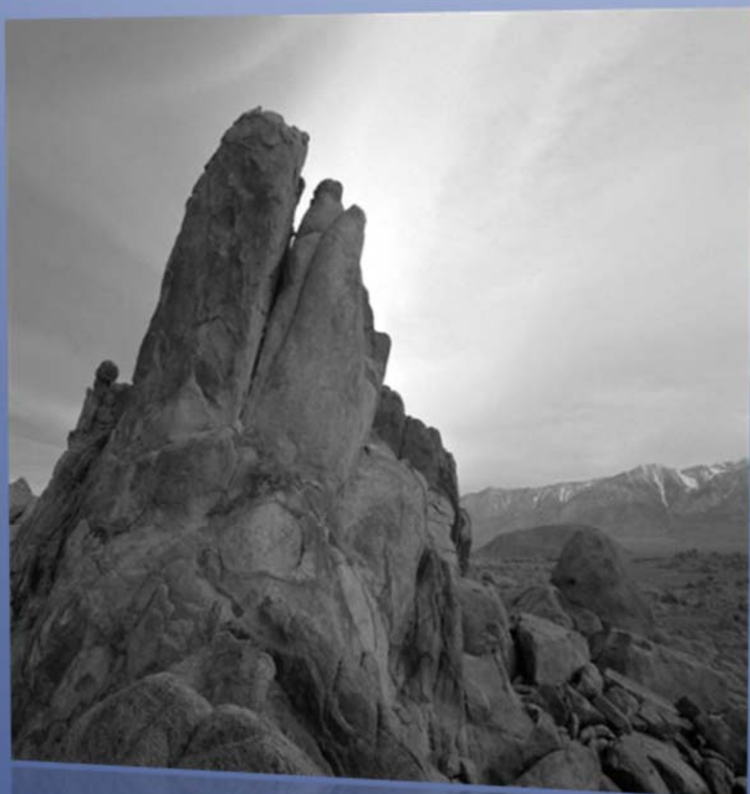
PMT

2810



50 CÂU HỎI HAY VÀ KHÓ TRONG ĐỀ THI THỬ 2018

Sưu tâm và biên soạn: Phạm Minh Tuấn

Chúc các em đỗ vào trường Đại Học mà mình mong muốn <3

Bài 1. *Cho cấp số cộng (u_n) có các số hạng đều dương, số hạng đầu $u_1 = 1$ và tổng của 100 số hạng đầu tiên bằng 14950. Tính giá trị của tổng*

$$S = \frac{1}{u_2\sqrt{u_1} + u_1\sqrt{u_2}} + \frac{1}{u_3\sqrt{u_2} + u_2\sqrt{u_3}} + \ldots + \frac{1}{u_{2018}\sqrt{u_{2017}} + u_{2017}\sqrt{u_{2018}}}$$

A. $\frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{6052}}\right)$ B. $\frac{1}{3}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{6052}}\right)$

B. $\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{6052}}\right)$ D. $\frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{6052}}\right)$

Hướng dẫn giải

Tổng của n số hạng đầu của cấp số cộng được gọi là tổng riêng thứ *n*:

$$S_n = \frac{n\left[2u_1 + (n-1)d\right]}{2}$$

Áp dụng : $S_{100} = \frac{100\left[2 + 99d\right]}{2} = 14950 \leftrightarrow d = 3$ và $u_{n+1} - u_n = d,\ u_{2018} = u_1 + 2017d = 6052$

Ta có: $\frac{1}{u_{n+1}\sqrt{u_n} + u_n\sqrt{u_{n+1}}} = \frac{1}{\sqrt{u_{n+1}.u_n}\left(\sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}\right)} = \frac{\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n}}{\sqrt{u_{n+1}.u_n}\left(u_{n+1} - u_n\right)} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{\sqrt{u_n}} - \frac{1}{\sqrt{u_{n+1}}}\right)$

Khi đó:

$$S = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{\sqrt{u_1}} - \frac{1}{\sqrt{u_2}}\right) + \frac{1}{d}\left(\frac{1}{\sqrt{u_2}} - \frac{1}{\sqrt{u_3}}\right) + \ldots + \frac{1}{d}\left(\frac{1}{\sqrt{u_{2017}}} - \frac{1}{\sqrt{u_{2018}}}\right) = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{\sqrt{u_1}} - \frac{1}{\sqrt{u_{2018}}}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{6052}}\right)$$

Bài 2. *Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = 1$, $z_1z_2 \neq -1$ và $z_1 \neq -z_2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $P = \left|\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1z_2} + \frac{1 + z_1z_2}{z_1 + z_2}\right|$

A. 1 B. 2 C. $\sqrt[3]{2}$ D. 4

Hướng dẫn giải

Đặt $t=\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$, ta có:

$$\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}-\frac{\overline{z_1}+\overline{z_2}}{1+\overline{z_1}.\overline{z_2}}=\frac{z_1+z_2+\overline{z_1}.\overline{z_2}\left(z_1+z_2\right)-\overline{z_1}-\overline{z_2}-z_1z_2\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right)}{\left(1+z_1z_2\right)\left(1+\overline{z_1}.\overline{z_2}\right)}$$

$$=\frac{z_1-\overline{z_1}+z_2-\overline{z_2}-z_1\overline{z_1}\left(z_2-\overline{z_2}\right)-z_2\overline{z_2}\left(z_1-\overline{z_1}\right)}{\left(1+z_1z_2\right)\left(1+\overline{z_1}.\overline{z_2}\right)}=\frac{z_1-\overline{z_1}+z_2-\overline{z_2}-\left(z_2-\overline{z_2}\right)-\left(z_1-\overline{z_1}\right)}{\left(1+z_1z_2\right)\left(1+\overline{z_1}.\overline{z_2}\right)}=0$$

Suy ra t là số thực, khi đó $P=\left|t+\dfrac{1}{t}\right|$, khảo sát hàm số ta được GTNN của P là 2, đạt được khi $t=\pm1$

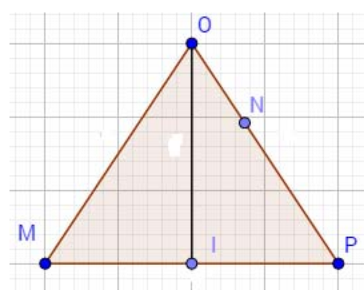
<u>Chú ý:</u> $z-\overline{z}=0$ thì z là số thực và $z+\overline{z}=0$ thì z là số thuần ảo

Bài 3. *Cho các số phức z_1,z_2 thỏa mãn $\left|z_1\right|=6$, $\left|z_2\right|=2$. Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z_1, iz_2. Biết $\angle MON=60^0$. Tính giá trị của biểu thức $T=\left|z_1^2+9z_2^2\right|$.*

A. $24\sqrt{3}$ *B.* $36\sqrt{2}$ *C.* 36 *D.* $36\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

$T=\left|z_1^2+9z_2^2\right|=\left|z_1+3iz_2\right|\left|z_1-3iz_2\right|=\left|\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OP}\right|\left|\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OP}\right|$



Với P là điểm biểu diễn số phức $3iz_2\rightarrow\begin{cases}P\in ON\\OP=\left|3iz_2\right|=6\end{cases}$

Ta có: $\begin{cases}OM=OP\\\angle MON=60^0\end{cases}\rightarrow\ \Delta OMP$ đều, gọi I là trung điểm MP $\rightarrow T=2OI.PM=2.\dfrac{6\sqrt{3}}{2}.6=36\sqrt{3}$

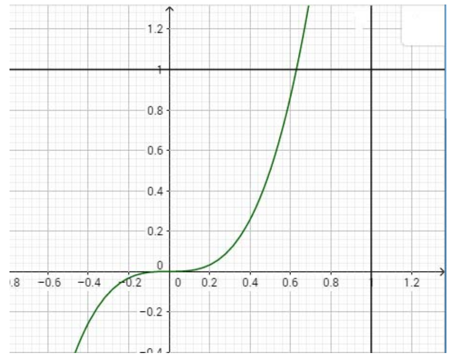
Bài 4. *Cho ngẫu nhiên hai số thực $a,b\in\left[0;1\right]$. Tính xác suất để phương trình $x^3-3ax^2+b=0$ có tối đa hai nghiệm*

A. $\dfrac{3}{4\sqrt[3]{4}}$ *B.* $\dfrac{1}{4\sqrt[3]{4}}$ *C.* $1-\dfrac{1}{4\sqrt[3]{4}}$ *D.* $1-\dfrac{3}{4\sqrt[3]{4}}$

Hướng dẫn giải

Xét $y = x^3 - 3ax^2 + b$; $y' = 3x^2 - 6ax$; $y' = 0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2a \end{array}\right.$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y(0).y(2a) \geq 0 \Leftrightarrow b\left(b - 4a^3\right) \geq 0$



- Nếu $b = 0 \rightarrow a = 0$
- Nếu $b > 0 \rightarrow b \geq 4a^3$

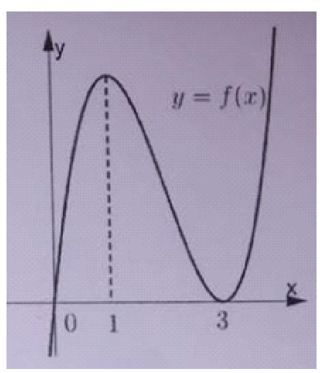
Ta có: $4a^3 = 1 \leftrightarrow a = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$

Xác suất cần tìm là diện tích của miền được giới hạn bởi:

$y = 4a^3$, $y = 1$, $a = 0$, $a = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$

Vậy xác suất cần tìm là $P = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{4}}} \left(1 - 4a^3\right) da = \dfrac{3}{4\sqrt[3]{4}}$

Bài 5. *Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \left|f^2(x) + f(x) + m\right|$ có đúng 3 điểm cực trị.*



A. $m > \dfrac{1}{4}$ B. $m \geq \dfrac{1}{4}$ C. $m < 1$ D. $m \leq 1$

Hướng dẫn giải

Ta có $y = \sqrt{\left[f^2(x) + f(x) + m\right]^2} \Rightarrow y' = \dfrac{\left[f^2(x) + f(x) + m\right]\left[2f'(x)f(x) + f'(x)\right]}{2\sqrt{\left[f^2(x) + f(x) + m\right]^2}}$

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1; x=3 \\ f(x)=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=x_0<0 \\ f^2(x)+f(x)+m=0 \qquad (1) \end{array}\right.$$

Đặt $t=f(x)$, từ (1) ta được: $t^2+t+m=0$ (*)

Ta đã tìm ra 3 điểm cực trị là $x=1; x=3; x=x_0<0$, nên để hàm số đã cho có đúng 3 điểm cực trị thì $(*)$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $t=-\dfrac{1}{2}$, hay $\Delta=1-4m\le 0 \Leftrightarrow m\ge\dfrac{1}{4}$.

Thử lại ta thấy $m=-\dfrac{1}{4}\to\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2=0\leftrightarrow t=-\dfrac{1}{2}$ (thỏa)

Vậy đáp số là $m\ge\dfrac{1}{4}$

Bài 6. *[CHUYÊN HẠ LONG] Cho hai hộp đựng bi, đựng 2 loại bị trắng và bi đen, tổng số bi trong hai hộp là 20 bi và hộp thứ nhất đựng ít bi hơn hộp thứ hai. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp 1 bi. Cho biết xác suất để lấy được hai viên bi đen là* $\dfrac{55}{84}$*, tính xác suất để lấy được 2 viên bi trắng.*

A. $\dfrac{1}{28}$ *B.* $\dfrac{15}{84}$ *C.* $\dfrac{11}{84}$ *D. Đáp án khác*

Hướng dẫn giải

Gọi x, y lần lượt là số bi ở hộp thứ nhất và hộp thứ hai, $x,y\in(0;20)$

Vì $x+y=20\Rightarrow\begin{cases}0\le x\le 9\\ 11\le y\le 19\end{cases}$ (*). Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi bất kỳ từ 2 hộp $n(\Omega)=x.y$

Gọi m, n lần lượt là số bi đen ở hộp thứ nhất và hộp thứ hai, $m\in(0;x), n\in(0;y)$

Gọi A là biến cố: "Lấy được hai viên bi đen" $\Rightarrow P(A)=\dfrac{m.n}{x.y}=\dfrac{55}{84}\Rightarrow m.n=\dfrac{55}{84}x.y$

Mặt khác $m,n\in\mathbb{Z}\Rightarrow(x.y)\,\vdots\,84$. Từ điều kiện (*) thì chỉ có $x=6; y=14$ thỏa mãn

Suy ra $m.n=55=5.11$ nên $m=5; n=11$

Gọi c, d lần lượt là số bị trắng ở hộp thứ nhất và hộp thứ hai, khi đó $\begin{cases} c = x - m = 1 \\ d = y - n = 3 \end{cases}$

Vậy xác suất để lấy được 2 viên bi trắng là $P = \frac{1.3}{6.14} = \frac{1}{28}$

Bài 7. *Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho bốn điểm* $A(7;2;3)$, $B(1;4;3)$, $C(1;2;6)$ $D(1;2;3)$ *và điểm M tùy ý. Tính độ dài đoạn OM khi biểu thức* $P = MA + MB + MC + \sqrt{3}MD$ *đạt giá trị nhỏ nhất.*

A. $OM = \sqrt{14}$ B. $OM = \sqrt{26}$ C. $OM = \frac{3\sqrt{17}}{4}$ D. $OM = \frac{3\sqrt{21}}{4}$

Hướng dẫn giải

$\overrightarrow{DA} = (6;0;0)$, $\overrightarrow{DB} = (0;2;0)$, $\overrightarrow{DC} = (0;0;3)$ nên tứ diện ABCD là tứ diện vuông đỉnh D

Dự đoán $M \equiv D$ nên ta giả sử $M(x+1;y+2;z+3) \to MD = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \geq \frac{x+y+z}{\sqrt{3}}$

Ta có: $MA = \sqrt{(x-6)^2 + y^2 + z^2} \geq |x-6| \geq 6 - x$

Tương tự $MB = \sqrt{x^2 + (y-2)^2 + z^2} \geq |y-2| \geq 2 - y$, $MC = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-3)^2} \geq |z-3| \geq 3 - z$

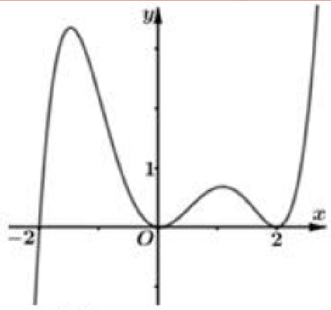
Suy ra $P \geq 6 - x + 2 - y + 3 - z + x + y + z = 11$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 0$ hay $M \equiv D \to OM = \sqrt{14}$

BTTL. *Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho bốn điểm* $A(2;2;2)$, $B(0;2;2)$ $C(2;0;2)$, $D(2;2;0)$ *và điểm M tùy ý. Tính độ dài đoạn OM khi biểu thức* $P = \sqrt{3}MA + MB + MC + MD$ *đạt giá trị nhỏ nhất.*

A. $OM = 3\sqrt{2}$ B. $OM = 2\sqrt{3}$ C. $OM = \sqrt{2}$ D. $OM = \sqrt{3}$

Bài 8. *Cho hàm số* $f(x)$ *liên tục trên* $\mathbb{R}$ *và có đồ thị như hình bên dưới*



Gọi hàm $g(x)=f\left[f(x)\right]$. *Phương trình* $g'(x)=0$ *có bao nhiêu nghiệm phân biệt.*

A. 8 B. 10 C. 14 D. 12

Hướng dẫn giải

Ta có: $g'(x)=f'(x).f'\left[f(x)\right]$;

$$g'(x)=0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f'\left[f(x)\right]=0 \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f'(x)=0 & (1) \\ f(x)=0 & (2) \\ f(x)=2 & (3) \\ f(x)=m\ (-2<m<-1) & (4) \\ f(x)=n\ (1<n<2) & (5) \end{array}\right.$$

- Đồ thi hàm số $y=f(x)$ có 4 điểm cực trị nên (1) có 4 nghiệm phân biệt
- Đồ thị $y=f(x)$ giao với Ox tại 3 điểm nên (2) có 3 nghiệm, trong đó có 2 nghiệm trùng với (1). Suy ra (2) có 1 nghiệm phân biệt
- Đồ thị $y=f(x)$ giao với $y=2$ tại 3 điểm nên (3) có 3 nghiệm phân biệt
- Đồ thị $y=f(x)$ giao với $y=m$ $(-2<m<-1)$ tại 1 điểm nên (3) có 1 nghiệm phân biệt
- Đồ thị $y=f(x)$ giao với $y=n$ $(1<m<2)$ tại 3 điểm nên (3) có 3 nghiệm phân biệt

Vậy tổng có có $4+1+3+1+3=12$ nghiệm phân biệt

Bài 9. *Cho cấp số nhân* $u_1,u_2,u_3,..,u_n$; *trong đó* $u_i>0,\ \forall i=1,2,...,n$. *Biết rằng* $u_1+u_2+u_3+...+u_n=2018$, $\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}+...+\frac{1}{u_n}=2019$ *và* $P=u_1.u_2.u_3....u_n>\frac{1}{100}$. *Hỏi số tự nhiên nhỏ nhất thỏa mãn P là:*

A. 9295 B. 9296 C. 18592 D. 18591

Hướng dẫn giải

Ta có: $u_1+u_2+u_3+...+u_n=2018 \to \dfrac{u_1\left(q^n-1\right)}{q-1}=2018$ (1)

Và $\dfrac{1}{u_1}+\dfrac{1}{u_2}+\dfrac{1}{u_3}+...+\dfrac{1}{u_n}=2019 \to \dfrac{\dfrac{1}{u_1}\left[\left(\dfrac{1}{q}\right)^n-1\right]}{\dfrac{1}{q}-1}=2019 \leftrightarrow \dfrac{\left(1-q^n\right)}{u_1q^{n-1}\left(1-q\right)}=2019$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{\left(1-q^n\right)}{u_1q^{n-1}\left(1-q\right)}.\dfrac{q-1}{u_1\left(q^n-1\right)}=\dfrac{2019}{2018} \leftrightarrow u_1^2q^{n-1}=\dfrac{2018}{2019}$

Ta có: $u_1.u_2.u_3....u_n>\dfrac{1}{100}$

$\leftrightarrow u_1.\left(u_1.q\right).\left(u_1.q^2\right)....\left(u_1.q^{n-1}\right)>\dfrac{1}{100}$

$\leftrightarrow u_1^nq^{\frac{n(n-1)}{2}}>\dfrac{1}{100} \leftrightarrow \left(u_1^2q^{n-1}\right)^{\frac{n}{2}}>\dfrac{1}{100} \leftrightarrow \left(\dfrac{2018}{2019}\right)^{\frac{n}{2}}>\dfrac{1}{100}$

$\leftrightarrow n>2\log_{\frac{2018}{2019}}\left(\dfrac{1}{100}\right)\approx 18591,1 \to n=18592$

Bài 10. *Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình*

$$\sqrt[3]{4\sin x+m}+\sin x=\sqrt[3]{\sin^3 x+4\sin x+m-8}+2$$

có nghiệm thực

A. 20 *B.* 21 *C.* 22 *D.* 19

Hướng dẫn giải

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt[3]{4\sin x+m} \\ b=\sin x \end{cases}$. Phương trình trở thành:

$a+b=\sqrt[3]{a^3+b^3-8}+2 \leftrightarrow \left(a+b-2\right)^3=a^3+b^3-8 \leftrightarrow 3\left(a+b\right)\left(a-2\right)\left(b-2\right)=0$

$\leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2 \\ b=2\ \left(VN\right) \\ a+b=0 \end{array}\right.$

TH1: $a=2 \leftrightarrow \sin x=\dfrac{8-m}{4} \to -1 \le \dfrac{8-m}{4} \le 1 \to 4 \le m \le 12$

TH2: $a+b=0 \leftrightarrow m=-\sin^3 x-4\sin x \leftarrow -5 \le m \le 5$

Vậy có 20 giá trị nguyên m thỏa mãn

Bài 11. *Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số*

$$y=\left|\ln x-2x^2+m\right|$$

là nhỏ nhất trên đoạn $\left[1;2\right]$

A. 1 *B.* 2 *C.* 3 *D. vô số*

Hướng dẫn giải

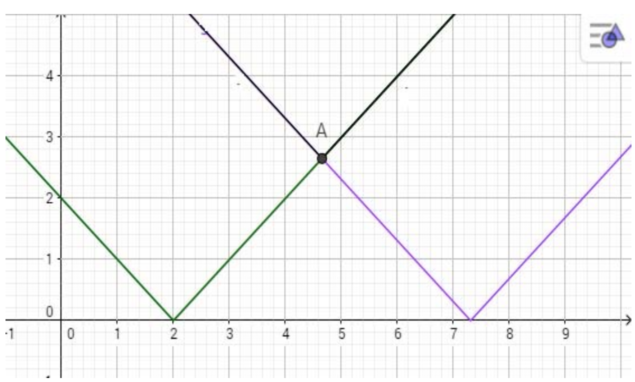
Xét $g\left(x\right)=\ln x-2x^2;\ g'\left(x\right)=\dfrac{1}{x}-4x;\ g'\left(x\right)=0 \leftrightarrow x=\pm\dfrac{1}{2}$ (loại)

$g\left(1\right)=-2;\ g\left(2\right)=\ln 2-8 \to \max\left|g\left(x\right)+m\right|=\max\left\{\left|m-2\right|;\left|m+\ln 2-8\right|\right\}=h\left(m\right)$

Đường màu xanh, tím, đen lần lượt là đồ thị $y\left(m\right)=\left|m-2\right|$, $y\left(m\right)=\left|m+\ln 2-8\right|$ và $h\left(m\right)$

Phương trình hoành độ giao điểm : $-m-\ln 2+8=m-2 \leftrightarrow m=5-\dfrac{1}{2}\ln 2$

Dựa vào đồ thị ta thấy $h\left(m\right)$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $m=5-\dfrac{1}{2}\ln 2$



Bài 12. *[CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH-LẦN 1] Giả sử* z_1, z_2 *là hai trong số các số phức z thỏa mãn* $\left|iz+\sqrt{2}-i\right|=1$ *và* $\left|z_1-z_2\right|=2$. *Giá trị lớn nhất của* $\left|z_1\right|+\left|z_2\right|$ *bằng:*

A. 4 *B.* $2\sqrt{3}$ *C.* $3\sqrt{2}$ *D.* 3

Hướng dẫn giải

Cách 1: *Đại số*

Ta có: $\left|iz+\sqrt{2}-i\right|=1 \leftrightarrow \left|z-1-i\sqrt{2}\right|=1$

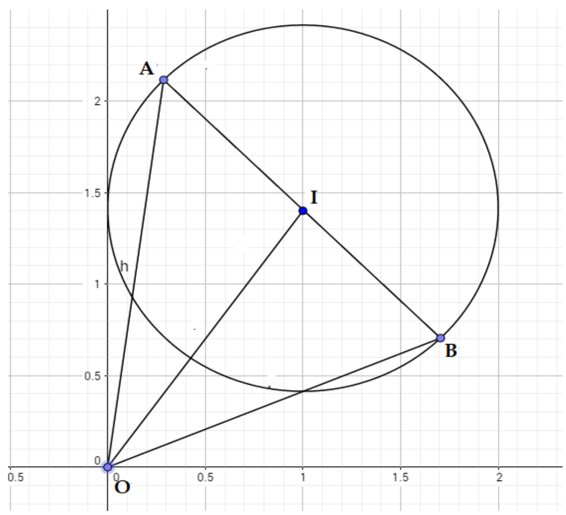
Đặt $\begin{cases} w_1 = z_1 - 1 - i\sqrt{2} \\ w_2 = z_2 - 1 - i\sqrt{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \left|w_1 - w_2\right| = 2 \\ \left|w_1\right| = \left|w_2\right| = 1 \end{cases}$

$\rightarrow \left|w_1+w_2\right|^2 + \left|w_1-w_2\right|^2 = 2\left|w_1\right|^2 + 2\left|w_2\right|^2 \rightarrow \left|w_1+w_2\right| = 0 \rightarrow w_1 + w_2 = 0$

$\rightarrow z_1 + z_2 = 2\left(1+i\sqrt{2}\right) \rightarrow \left|z_1+z_2\right| = 2\sqrt{3}$

Ta có: $P = \left|z_1\right| + \left|z_2\right| \le \sqrt{2\left|z_1\right|^2 + 2\left|z_2\right|^2} = \sqrt{\left|z_1+z_2\right|^2 + \left|z_1-z_2\right|^2} = \sqrt{12+4} = 4$

Cách 2: *Hình học*



Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn số phức $z_1, z_2 \rightarrow$ A, B thuộc đường tròn (C) tâm $I\left(1;\sqrt{2}\right)$, bán kính $R=1$

Khi đó, $\left|z_1 - z_2\right| = \left|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{BA}\right| = AB = 2 \rightarrow AB$ là đường kính của đường tròn (C)

Và $\left|z_1 + z_2\right| = \left|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right| = 2\left|\overrightarrow{OI}\right| = 2OI$, với I là trung điểm AB

Áp dụng công thức đường trung tuyến:

$$OI^2=\frac{OA^2+OB^2}{2}-\frac{AB^2}{4}\rightarrow OA^2+OB^2=2\left(OI^2+\frac{AB^2}{4}\right)=2\left(3+\frac{2^2}{4}\right)=8$$

Ta có $P=|z_1|+|z_2|=OA+OB\le\sqrt{2\left(OA^2+OB^2\right)}=\sqrt{2.8}=4$

BTTL1. *Giả sử z_1,z_2 là hai số phức thỏa mãn $|z_1+1-i|=2$ và $z_2=iz_1$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1-z_2|$ bằng:*

A. $2\sqrt{2}-1$ B. $2\sqrt{2}+1$ C. $2\sqrt{2}-2$ D. $2\sqrt{2}+2$

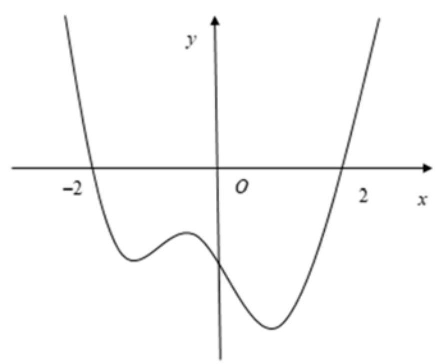
BTTL2. *Giả sử z_1,z_2 là hai số phức thỏa mãn $|z_1-i|=|(1+i)z_1|$ và $|z_2|=|\overline{z_2}-3+4i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1-z_2|$ bằng:*

A. $\sqrt{2}$ B. $\frac{33}{10}-\sqrt{2}$ C. $\frac{33}{5}-\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{2}-1$

BTTL3. *Giả sử z_1,z_2 là hai trong số các số phức z thỏa mãn $|z-3-4i|=2$ và $|z_1-z_2|=1$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1|^2-|z_2|^2$ bằng:*

A. -10 B. -5 C. $-6-2\sqrt{5}$ D. $-4-3\sqrt{5}$

Bài 13. *Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có $f(-2)<0$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?*



A. *Hàm số $y=\left|f\left(1-x^{2018}\right)\right|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.*

B. *Hàm số $y=\left|f\left(1-x^{2018}\right)\right|$ có hai cực tiểu.*

C. Hàm số $y=\left|f\left(1-x^{2018}\right)\right|$ có hai cực đại và một cực tiểu.

D. Hàm số $y=\left|f\left(1-x^{2018}\right)\right|$ đồng biến trên khoảng $\left(2;+\infty\right)$.

Hướng dẫn giải

Từ đồ thì của $f'\left(x\right)$ ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$			0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-2)$	$\searrow$			$f(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ giả thiết $f\left(-2\right)<0$ và $1-x^{2018}\le 1\Rightarrow f\left(1-x^{2018}\right)<0$ với mọi x.

Đặt $t=1-x^{2018}$, ta có: $\begin{cases} f_t'\left(t\right)<0 \text{ khi } t\in\left(-2;1\right)\Leftrightarrow x\in\left(-\sqrt[2018]{3};\sqrt[2018]{3}\right) \\ f'\left(t\right)>0 \text{ khi } t\in\left(-\infty;-2\right)\cup\left(2;+\infty\right)\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\sqrt[2018]{3}\right)\cup\left(\sqrt[2018]{3};+\infty\right) \end{cases}$

Đặt $g\left(x\right)=\left|f\left(1-x^{2018}\right)\right|$, ta có: $g'\left(x\right)=-\dfrac{2018.x^{2017}.f_t'\left(t\right).f\left(t\right)}{2\sqrt{f^2\left(t\right)}}$

Do đó, ta có bảng biến thiên của $y=g\left(x\right)$ như sau:

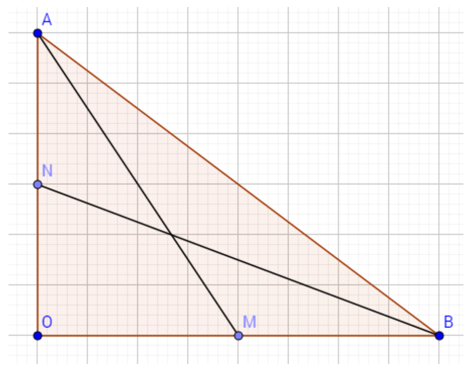
x	$-\infty$		$-\sqrt[2018]{3}$		0		$-\sqrt[2018]{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Vậy chọn C.

Bài 14. *Cho các số phức z_1,z_2 thỏa mãn $\left|z_1\right|=r_1$, $\left|z_2\right|=\sqrt{2}r_2$ và $\left|iz_1-\left(1+i\right)z_2\right|=\sqrt{r_1^2+4r_2^2}$. Gọi A,B,M,N lần lượt là điểm biểu diễn các số phức $2iz_1$, $\left(2+2i\right)z_2$, $\left(1+i\right)z_2$, iz_1. Biết α là góc giữa AM và BN. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\cos\alpha$.*

A. $(\cos\alpha)_{\min} = \frac{4}{5}$ B. $(\cos\alpha)_{\min} = \frac{3}{4}$ C. $(\cos\alpha)_{\min} = \frac{3}{5}$ D. $(\cos\alpha)_{\min} = \frac{2}{3}$

Hướng dẫn giải



Từ đề suy ra $OA = 2r_1;\ OB = 4r_2$ và M ,N lần lượt là trung điểm OB và OA

Ta có: $\left|iz_1 - (1+i)z_2\right| = \sqrt{r_1^2 + 4r_2^2} \leftrightarrow \left|2iz_1 - 2(1+i)z_2\right| = 2\sqrt{r_1^2 + 4r_2^2} \to \left|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right| = AB = 2\sqrt{r_1^2 + 4r_2^2}$

Do đó tam giác OAB vuông tại O

Ta có: $\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BN}\right|}{AM.BN} = \frac{\left|\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AB}\right).\left(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{BA}\right)\right|}{4AM.BN} = \frac{\left|\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{BO} - \overrightarrow{AO}\right) - \overrightarrow{AB}^2\right|}{4AM.BN}$

Vì $OA \perp OB \to \overrightarrow{AO}.\overrightarrow{BO} = 0 \to \cos\alpha = \frac{\left|-2\overrightarrow{AB}^2\right|}{4AM.BN} = \frac{AB^2}{2AM.BN}$

Lại có:

$$2AM.BN \le AM^2 + BN^2 = \left(\frac{OA^2 + AB^2}{2} - \frac{OB^2}{4}\right) + \left(\frac{OB^2 + AB^2}{2} - \frac{OA^2}{4}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(OA^2 + OB^2\right) + AB^2 = \frac{5AB^2}{4} \quad \left(do\ AB^2 = OA^2 + OB^2\right)$$

Vậy $\cos\alpha \ge \frac{AB^2}{\frac{5}{4}AB^2} = \frac{4}{5}$

Nhận xét: Ngoài cách trên ta có thể chuẩn hóa r_1 bằng một số dương bất kì rồi đưa $\cos\alpha$ về hàm theo biến r_2, khi đó việc tìm min sẽ dễ dàng hơn.

Bài 15. *Gọi* z_1, z_2, z_3 *và* z_4 *là các nghiệm của phương trình* $\left(\dfrac{z-1}{2z-\mathrm{i}}\right)^4=\dfrac{2018}{2019}$. *Tính giá trị của biểu thức* $P=\left(z_1^2+1\right)\left(z_2^2+1\right)\left(z_3^2+1\right)\left(z_4^2+1\right)$.

A. $\dfrac{(4.2019+2018)(4.2019+2018.81)}{(2018.16-2019)^2}$ *B.* $\dfrac{(4.2019+2018)(4.2019-2018.81)}{(2018.16-2019)^2}$

C. $\dfrac{(4.2019-2018)(4.2019+2018.81)}{(2018.16-2019)^2}$ *D.* $\dfrac{(4.2019-2018)(4.2019-2018.81)}{(2018.16-2019)^2}$

Hướng dẫn giải

Đặt $f(z)=2018(2z-\mathrm{i})^4-2019(z-1)^4=(2018.16-2019)(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)$.

$$\therefore\ f(i)=(2018.16-2019)(i-z_1)(i-z_2)(i-z_3)(i-z_4)$$
$$=2018(2i-\mathrm{i})^4-2019(i-1)^4=4.2019+2018$$
$$\Rightarrow (z_1-i)(z_2-i)(z_3-i)(z_4-i)=\frac{4.2019+2018}{2018.16-2019}$$
$$\therefore\ f(-i)=(2018.16-2019)(-i-z_1)(-i-z_2)(-i-z_3)(-i-z_4)$$
$$=2018(2.(-i)-\mathrm{i})^4-2019(-i-1)^4=4.2019+2018.81$$
$$\Rightarrow (z_1+i)(z_2+i)(z_3+i)(z_4+i)=\frac{4.2019+2018.81}{2018.16-2019}$$

Mà $P=(z_1+i)(z_2+i)(z_3+i)(z_4+i)(z_1-i)(z_2-i)(z_3-i)(z_4-i)$

$$=\left(\frac{4.2019+2018}{2018.16-2019}\right).\left(\frac{4.2019+2018.81}{2018.16-2019}\right)=\frac{(4.2019+2018)(4.2019+2018.81)}{(2018.16-2019)^2}.$$

Bài 16. *Cho hàm số* $f(x)$ *không âm và liên tục trên* $[0;+\infty)$ *thỏa mãn:*

$$\begin{cases} f(x)\le 2018+2\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt,\ \forall x\ge 0\\ \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=1009\left(e^2-1\right)\end{cases}$$

Tính tích phân $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{e^x}dx$

A. $2018(e-1)$ *B.* $1009(e+1)$ *C.* $2018(e-2)$ *D.* $2018(e-2)$

Hướng dẫn giải

Ta có $f(x) \le 2018 + 2\int_0^x f(t)dt \leftrightarrow f(x) - 2018 - 2\int_0^x f(t)dt \le 0 \quad (1)$

Đặt $g(x) = e^{ax}\left(\int_0^x f(t)dt + b\right)$; $g'(x) = e^{ax}\left(a\int_0^x f(t)dt + f(x) + ab\right)$

Từ (1) thực hiện phép đồng nhất suy ra $\begin{cases} a = -2 \\ ab = -2018 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1009 \end{cases}$

Vậy $g'(x) \le 0, \ \forall x \ge 0$, tức $g(x)$ nghịch biến trên $[0; +\infty)$

$\rightarrow e^{-2x}\left(\int_0^x f(t)dt + 1009\right) = g(x) \le g(0) = 1009 \rightarrow 2\int_0^x f(t)dt + 2018 \le 2018e^{2x}$

Vậy $f(x) \le 2018e^{2x} \rightarrow \int_0^1 f(x)dx \le 1009e^2 - 1009$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $f(x) = 2018e^{2x} \Rightarrow \int_0^1 \frac{f(x)}{e^x}dx = 2018(e-1)$

Bài 17. *Cho 16 phiếu ghi các số thứ tự từ 1 đến 16. Lấy lần lượt 8 phiếu không hoàn lại, gọi* a_i *là số ghi trên phiếu thứ* i *lấy được* $(1 \le i \le 8)$. *Tính xác suất* P *để 8 phiếu lấy được thỏa mãn* $a_1 < a_2 < ... < a_8$ *và không có bất kỳ hai phiếu nào có tổng các số bằng 17.*

A. $P = \frac{3^8}{A_{16}^8}$ *B.* $P = \frac{2^8}{A_{16}^8}$ *C.* $P = \frac{2^8}{C_{16}^8}$ *D.* $P = \frac{3^8}{C_{16}^8}$

Hướng dẫn giải

Ta có $|\Omega| = A_{16}^8$. Do 8 phiếu lấy được thỏa mãn điều kiện $a_1 < a_2 < ... < a_8$, nên ta có thể xem 8 phiếu lấy được như là một tập con của tập có 16 phần tử.

Gọi $S = \{1, 2, 3, ...16\}$ và $E \subset S$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Từ 1 đến 16 có 8 cặp số có tổng bằng 17 chia thành hai tập tương ứng là $M = \{1, 2, ..., 8\}$ và $N = \{16, 15, ..., 9\}$. Nếu E có k phần tử thuộc M thì có C_8^k cách chọn và khi đó E sẽ có tối đa $8 - k$ phần tử thuộc N

nên có 2^{8-k} cách chọn, với $k \in \{0,1,...,8\}$. Vậy số tập hợp E thỏa mãn yêu cầu bài toán là

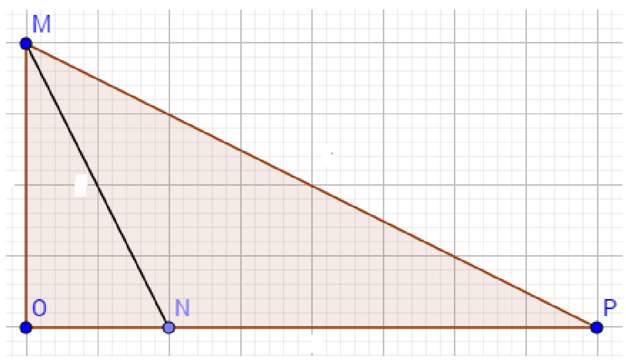
$C_8^0.2^8 + C_8^1.2^7 + ... + C_8^8.2^0 = 3$. vậy $P = \dfrac{3^8}{A_{16}^8}$.

Bài 18. *Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 1$, $|z_2| = r$. Gọi M, N, P lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z_1, $iz_2, 4iz_2$. Biết $\begin{cases} \angle NMP = \alpha \\ \angle MOP = 90^o \end{cases}$. Khi $r = r_0$ thì góc α là lớn nhất. Khẳng định nào sau đây đúng?*

A. $r \in (1;2)$ *B.* $r \in (0;1)$ *C.* $r \in (2;3)$ *D.* $r \in (3;4)$

Hướng dẫn giải

Từ đề suy ra $\begin{cases} N \in OP; OP = 4ON = 4r \\ OM = 1 \end{cases}$



Ta có: $\tan \angle OMN = r$

Và $\tan(\angle OMN + \alpha) = \dfrac{\tan \angle OMN + \tan\alpha}{1 - \tan\angle OMN.\tan\alpha} = \dfrac{r + \tan\alpha}{1 - r\tan\alpha} = \dfrac{OP}{OM} = 4r$

Suy ra $\tan\alpha = \dfrac{3r}{4r^2+1} \le \dfrac{3}{2\sqrt{4r^2.1}} = \dfrac{3}{4} \to \max\{\alpha\}$ đạt được khi $r = \dfrac{1}{2}$

Bài 19. *Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm khác 0 và liên tục đến cấp hai trên $[1;2]$ thỏa mãn*

$$\begin{cases} \ln 2 f'(1) = f(1) = 1 \\ f'(x) = \sqrt[3]{\dfrac{f'(x) - xf''(x)}{2^{f(x)-1}\ln^2 2}}, \ \forall x \in [1;2] \end{cases}$$

Tính tích phân $I=\int_1^2 xf(x)dx$

A. $I=\log_2 5+\frac{1}{2\ln 2}+1$

B. $I=3\log_2 5-\frac{3}{4\ln 2}-2$

C. $I=\log_2 5-\frac{3}{\ln 2}+2$

D. $I=2\log_2 5-\frac{3}{2\ln 2}-1$

Hướng dẫn giải

Ta có: $f'(x)=\sqrt[3]{\frac{f'(x)-xf''(x)}{2^{f(x)-1}\ln^2 2}} \Leftrightarrow f'(x)2^{f(x)}\ln^2 2=\frac{2f'(x)-2xf''(x)}{\left[f'(x)\right]^2}$

$$\Leftrightarrow \left(2^{f(x)}\ln 2\right)'=\left(\frac{2x}{f'(x)}\right)' \Leftrightarrow 2^{f(x)}\ln 2=\frac{2x}{f'(x)}+C_1$$

Vì $\ln 2 f'(1)=f(1)=1\to C_1=0$

Khi đó:

$$f'(x)2^{f(x)}\ln 2=2x \Leftrightarrow \left(2^{f(x)}\right)'=2x \Leftrightarrow 2^{f(x)}=\int 2xdx=x^2+C_2 \Leftrightarrow f(x)=\log_2\left(x^2+C_2\right)$$

Vì $f(1)=1\Rightarrow C_2=1$, khi đó: $f(x)=\log_2\left(x^2+1\right)$

Xét $I=\int_1^2 x\log_2\left(x^2+1\right)dx$, Đặt $\begin{cases} u=\log_2\left(x^2+1\right) \\ dv=xdx \end{cases} \to \begin{cases} v=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)\ln 2} \\ v=\frac{x^2}{2} \end{cases}$

Suy ra $I=\frac{1}{2}x^2\log_2\left(x^2+1\right)\Big|_1^2-\frac{1}{\ln 2}\int_1^2\frac{x^3}{x^2+1}=2\log_2 5-\frac{1}{2}-\frac{1}{\ln 2}\int_0^1\left(x-\frac{x}{x^2+1}\right)$

$$=2\log_2 5-\frac{1}{2}-\frac{1}{\ln 2}\left[\frac{x^2}{2}\Big|_1^2-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big|_1^2\right]=2\log_2 5-\frac{3}{2\ln 2}-1$$

BTTL. *Cho hàm số* $f(x)$ *đồng biến và có đạo hàm liên tục đến cấp hai trên* $[0;1]$ *thỏa mãn*

$$\begin{cases} f(0) = f'(0) = 1 \\ \left(f''(x)f(x) - [f'(x)]^2\right)(x^2+1) = 2xf(x)f'(x) \end{cases}, \forall x \in [0;1]$$

Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = (x^2+1)f(x)$, *hai trục tọa độ và đưởng thẳng* $x = 1$

A. $\frac{47}{12}$ B. $\frac{101}{30}$ C. $e\sqrt[3]{e} - \frac{9}{20}$ D. $e\sqrt[3]{e} - 1$

Bài 20. *Cho dãy số* (u_n) *thỏa mãn* $\log_3(2u_5 - 63) = 2\log_4(u_n - 8n + 8)$, $\forall \in \mathbb{N}^*$. *Đặt* $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$. *Tìm số nguyên dương lớn nhất n thỏa mãn* $\frac{u_n S_{2n}}{u_{2n} S_n} < \frac{148}{75}$

A. $n = 16$ B. $n = 17$. C. $n = 18$ D. $n = 19$

Hướng dẫn giải

Xét với $n = k,\ n = k+1$: $\begin{cases} \log_3(2u_5 - 63) = 2\log_4(u_k - 8k + 8) \\ \log_3(2u_5 - 63) = 2\log_4(u_{k+1} - 8(k+1) + 8) \end{cases}$

$\rightarrow \log_4(u_k - 8k + 8) = \log_4(u_{k+1} - 8(k+1) + 8) \rightarrow u_{k+1} = u_k + 8$

Suy ra (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = 8 \rightarrow u_5 = u_1 + 8(5-1) = u_1 + 32$

Mặc khác với $n = 1$:

$\log_3(2u_5 - 63) = 2\log_4 u_1 \leftrightarrow \log_3(2u_1 + 1) = 2\log_4 u_1 \xrightarrow{\text{SHIFT SOLVE}} u_1 = 4$

$$\rightarrow \begin{cases} u_n = 4 + 8(n-1) = 8n - 4 \\ S_n = \frac{[2.4 + 8(n-1)].n}{2} = 4n^2 \end{cases}$$

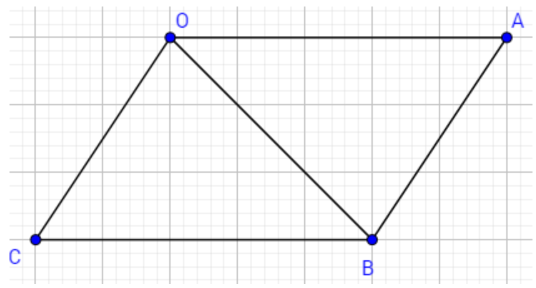
Ta có: $\frac{(8n-4).16n^2}{(16n-4).4n^2} < \frac{148}{75} \leftrightarrow n < 19$. Vậy số nguyên dương lớn nhất là $n = 18$

Bài 21. *Trong mặt phẳng phức, xét hình bình hành tạo bởi các điểm* 0, z, $\frac{1}{z}$ *và* $z + \frac{1}{z}$. *Biết* z

có phần thực dương và diện tích hình bình hành bằng $\frac{35}{37}$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của* $\left|z+\frac{1}{z}\right|^2$

A. $\frac{53}{37}$ B. $\frac{49}{37}$ C. $\frac{43}{37}$ D. $\frac{50}{37}$

Hướng dẫn giải



Gọi O, A, C, B lần lượt là điểm biểu diễn các số phức $0,\ z,\ \frac{1}{z}$ *và* $z+\frac{1}{z}$

Suy ra $OA=|z|, OC=AB=\frac{1}{|z|}$, $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\rightarrow OB=\left|\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right|=\left|z+\frac{1}{z}\right|$

Diện tích hình bình hành:

$S=OA.AB.\sin\angle OAB=\frac{35}{37}\rightarrow\sin\angle OAB=\frac{35}{37}\rightarrow\cos\angle OAB=\frac{12}{37}$

Ta có: $OC^2=\frac{1}{|z|^2}+|z|^2-2\cos\angle OAB\geq 2\sqrt{\frac{1}{|z|^2}.|z|^2}-2\cos\angle OAB=2-2.\frac{12}{37}=\frac{50}{37}$

Bài 22. *Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho 4 đường thẳng* $\Delta_1:\frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-1}{-1}$;

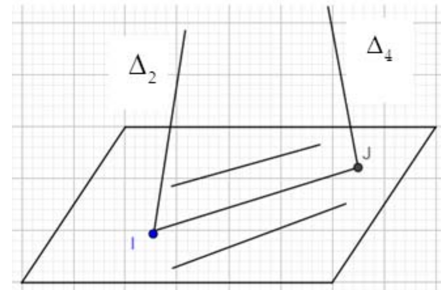
$\Delta_2:\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$; $\Delta_3:\frac{x}{-1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+1}{1}$; $\Delta_4:\frac{x-5}{1}=\frac{y-a}{3}=\frac{z-b}{1}$. *Biết không tồn tại đường thẳng nào trong không gian mà cắt được đồng thời cả bốn đường thẳng trên. Tính giá trị của biểu thức* $T=a-2b$

A. -2 B. -3 C. 2 D. 3

Hướng dẫn giải

Ta có: $\Delta_1//\Delta_3$

Gọi P là mặt phẳng chứa Δ_1 và $\Delta_3 \Rightarrow (P): x+2y-z+3=0$



Gọi $I=\Delta_2 \cap (P) \Rightarrow I(0;-1;1)$

Gọi $J=\Delta_4 \cap (P) \Rightarrow J\left(\frac{-2a+b+22}{6};\frac{3b-24}{6};\frac{-2a+7b-8}{6}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{IJ}=\left(\frac{-2a+b+22}{6};\frac{3b-18}{6};\frac{-2a+7b-14}{6}\right)$

Để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì $\overrightarrow{IJ}$ phải cùng phương với $\overrightarrow{u_{\Delta_1}}=(1;-1;-1)$, hay:

$$\frac{-2a+b+22}{6}=\frac{3b-18}{-6}=\frac{-2a+7b-14}{-6} \Leftrightarrow a-2b=2$$

Bài 23. *Cho cấp số cộng (u_n) có tất cả các số hạng đều dương thỏa mãn: $u_1+u_2+...+u_{2018}=4(u_1+u_2+...+u_{1009})$. Giá trị nhỏ nhất của $P=\log_3^2 u_2+\log_3^2 u_5+\log_3^2 u_{14}$*

A. -2 *B.* -3 *C.* 2 *D.* 3

Hướng dẫn giải

Ta có: $u_1+u_2+...+u_{2018}=4(u_1+u_2+...+u_{1009}) \Leftrightarrow \frac{2018(2u_1+2017d)}{2}=2.1009(2u_1+1008d)$

$\Leftrightarrow u_1=\frac{d}{2} \Rightarrow (u_n):\ \frac{d}{2};\frac{3d}{2};\frac{5d}{2};...$

Khi đó: $P=\log_3^2\frac{3d}{2}+\log_3^2\frac{9d}{2}+\log_3^2\frac{27d}{2} \xrightarrow{MODE\ 7} \min P=2$

Bài 24. *Cho dãy số (u_n) thỏa mãn: $\ln(u_1^2+u_2^2+10)=\ln(2u_1+6u_2)$ và $u_{n+2}+u_n=2u_{n+1}+1, \forall n\ge 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n>5050$*

A. 100 *B.* 99 *C.* 101 *D.* 102

Hướng dẫn giải

Ta có: $\ln(u_1^2+u_2^2+10)=\ln(2u_1+6u_2)_2 \Leftrightarrow (u_1-1)^2+(u_2-3)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=1 \\ u_2=3 \end{cases}$

Mặt khác: $u_{n+2}+u_n=2u_{n+1}+1 \Leftrightarrow u_{n+2}-u_{n+1}=u_{n+1}-u_n+1$. Đặt $v_n=u_{n+1}-u_n$

Suy ra $v_{n+1}=v_n+1 \Rightarrow \left(v_n\right)$ là một dãy CSC có công sai $d=1$

$\Rightarrow v_n=v_1+n-1=u_2-u_1+n-1=n+1$

Khi đó $u_{n+1}=u_n+n+1 \Rightarrow \begin{cases} u_2=u_1+2 \\ u_3=u_2+3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ u_n=u_{n-1}+n \end{cases}$

Cộng vế theo vế ta được: : $u_n=u_1+\left(2+3+\dots+n\right)=1+2+3+\dots+n=\dfrac{n\left(n+1\right)}{2}$

Vậy: $\dfrac{n\left(n+1\right)}{2}>5050 \Leftrightarrow n>100$, suy ra *Giá trị nhỏ nhất* $n_{\min}=101$

Bài 25. *Xét các số thức dương x,y,z thay đổi sao cho tồn tại các số thực $a,b,c>1$ và thỏa mãn $\sqrt{abc}=a^x=b^y=c^z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức và $P=x+y+2z^2$*

A. $4\sqrt{2}$ *B.* 4 *C.* 6 *D.* 10

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\begin{cases} a^{2x}=abc \\ b^{2y}=abc \\ c^{2z}=abc \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=\log_a\left(abc\right) \\ 2y=\log_b\left(abc\right) \\ 2z=\log_c\left(abc\right) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{2z}=\log_{abc}a+\log_{abc}b+\log_{abc}c=\log_{abc}\left(abc\right)=1$$

Suy ra $1-\dfrac{1}{2z}=\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{2y}>0 \Rightarrow \begin{cases} z>\dfrac{1}{2} \\ 1-\dfrac{1}{2z}\ge\dfrac{2}{x+y} \Rightarrow x+y\ge\dfrac{4z}{2z-1} \end{cases}$

Khi đó, $P\ge\dfrac{4z}{2z-1}+2z^2$, $z>\dfrac{1}{2}$. Khảo sát hàm số suy ra $MinP=6$

Chú ý: BĐT Cauchy – Schwarz: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\ge\dfrac{4}{a+b}$

Bài 26. *Cho số phức* $z = x + yi$ *với* $x, y \in \mathbb{R}$ *thỏa mãn* $|z - 1 - i| \geq 1$ *và* $|z - 3 - 3i| \leq \sqrt{5}$. *Gọi M, m lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức* $P = x + 2y$. *Tính tỉ số* $\frac{M}{m}$.

A. $\frac{9}{4}$ *B.* $\frac{7}{2}$ *C.* $\frac{5}{4}$ *D.* $\frac{14}{5}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $|z - 3 - 3i| \leq \sqrt{5} \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-3)^2 \leq 5 \quad (1)$

Thế $x = P - 2y$ vào (1) ta được:

$$(P - 2y - 3)^2 + (y-3)^2 \leq 5 \Leftrightarrow 5y^2 + 2(3 - 2P)y + P^2 - 6P + 13 \leq 0 \quad (*)$$

Vậy (*) có nghiệm với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi:

$$\Delta'_{*} \geq 0 \Leftrightarrow (3 - 2P)^2 - 5(P^2 - 6P + 13) \geq 0 \Leftrightarrow 4 \leq P \leq 14 \Rightarrow \frac{M}{m} = \frac{7}{2}$$

Nhận xét: Cách đại số đơn giản dễ hiểu và với cách giải đó anh nhận ra rằng đề cho thừa dữ kiện $|z - 1 - i| \geq 1$.

Bài 27. *Cho các số phức* z_1, z_2, z_3 *thỏa mãn* $|z_1| = 4, |z_2| = 3, |z_3| = 2$ *và* $|4z_1z_2 + 16z_2z_3 + 9z_3z_1| = 48$. *Giá trị của biểu thức* $P = |z_1 + z_2 + z_3|$ *bằng:*

A. 2 *B.* 3 *C.* 4 *D.* 1

Hướng dẫn giải

Ta có: $\begin{cases} |z_1| = 4 \\ |z_2| = 3 \\ |z_3| = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1\overline{z_1} = 16 \\ z_2\overline{z_2} = 9 \\ z_3\overline{z_3} = 4 \end{cases}$. Thay vào $|4z_1z_2 + 16z_2z_3 + 9z_3z_1| = 48$ ta được:

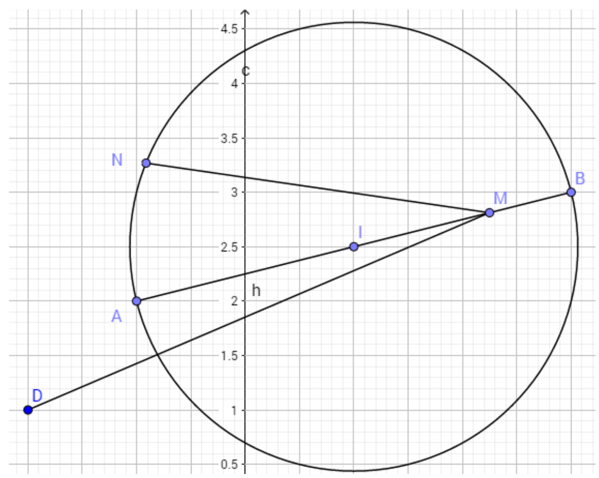
$$|z_3\overline{z_3}.z_1z_2 + z_1\overline{z_1}.z_2z_3 + z_2\overline{z_2}.z_3z_1| = 48 \Leftrightarrow |z_1||z_2||z_3||\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}| = 48$$

$$\Leftrightarrow |\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}| = \frac{48}{|z_1||z_2||z_3|} = 2 \Rightarrow |\overline{z_1 + z_2 + z_3}| = 2 \Rightarrow |z_1 + z_2 + z_3| = 2$$

Bài 28. *Cho hai số phức* z_1, z_2 *thỏa mãn* $\left|z_1+1-2i\right|+\left|z_1-3-3i\right|=2\left|z_2-1-\frac{5}{2}i\right|=\sqrt{17}$. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức* $P=\left|z_1-z_2\right|+\left|z_1+2-i\right|$.

A. $\sqrt{17}+2\sqrt{29}$ *B.* $\sqrt{17}+\sqrt{29}$ *C.* $2\sqrt{17}$ *D.* $3\sqrt{29}$

Hướng dẫn giải



Gọi M , N lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z_1, z_2

Ta có : $A(-1;2), B(3;3) \Rightarrow AB=\sqrt{17}$ và $I\left(1;\frac{5}{2}\right)$ là trung điểm AB

Mà $\left|z_1+1-2i\right|+\left|z_1-3-3i\right|=\sqrt{17} \Leftrightarrow MA+MB=AB \Rightarrow$ M thuộc đoạn AB

N thuộc đường tròn (C) có tâm $I\left(1;\frac{5}{2}\right)$, $R=\frac{\sqrt{17}}{2} \Rightarrow$ AB là đường kính của (C)

Ta có: $P=\left|z_1-z_2\right|+\left|z_1+2-i\right|=\left|\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}\right|+MD=MN+MD$, với $D(-2;1)$

Vì $\begin{cases} M\in[AB] \\ N\in(C) \end{cases}$ nên $MN\le 2R$ và $MD\le BD$

Vậy $P\le 2R+BD=\sqrt{17}+\sqrt{29}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $M\equiv D, N\equiv A$

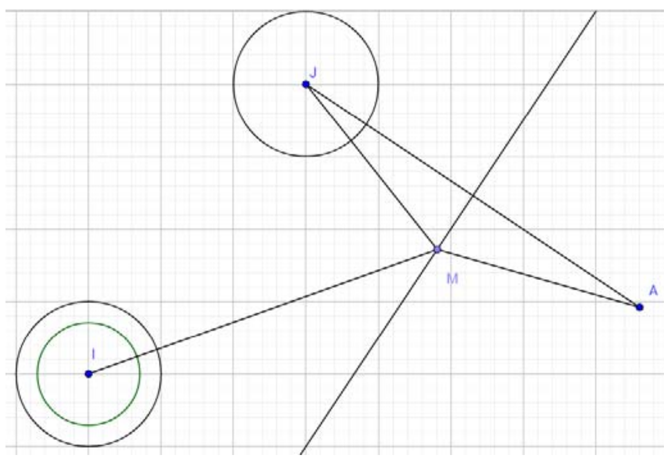
BTTL. *Cho các số phức* z, z_1, z_2 *thỏa mãn* $|z_1 - 1 - 2i| = |z_2 + 5 - 2i| = 4$ *và* $|z - 3 - 2i| + |z + 7 - 2i| = 10$. *Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $P = |z_1 - z_2| + |z - 3 + i|$. *Tính* $T = M + m$

A. $9 + 2\sqrt{26}$ *B.* $15 + \sqrt{109}$ *C.* $8 + \sqrt{107}$ *D.* $11 + \sqrt{110}$

Bài 29. *Cho hai số phức* z_1, z_2 *thỏa mãn* $|z_1 - 3 - 4i| = 1$, $|z_2 - 3 - 4i| = \frac{1}{2}$. *Số phức z có phần thực bằng a, phần ảo bằng b thỏa mãn* $3a - 2b = 12$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $P = |z - z_1| + |z - 2z_2| + 2$.

A. $\frac{\sqrt{8845}}{15}$ *B.* $\frac{\sqrt{9945}}{13}$ *C.* $\frac{\sqrt{9091}}{12}$ *D.* $\frac{\sqrt{9667}}{17}$

Hướng dẫn giải



Tập hợp điểm biểu diễn SP z_1, z_2 là đường tròn tâm $I(3;4)$ có bán kính lần lượt là 1, $\frac{1}{2}$

Gọi M là điểm biểu diễn số phức $z \Rightarrow$ M thuộc đường thẳng $3x - 2y = 12$

Đặt $z_3 = 2z_2 \Rightarrow |z_3 - 6 - 8i| = 1$ là đường tròn tâm $J(6;8)$ có bán kính $R = 1$

Ta có: $P = |z - z_1| + |z - z_3| + 2 = MI - 1 + MJ - 1 + 2 = MI + MJ$

Gọi A là điểm đối xứng của J qua $3x - 2y = 12 \Rightarrow A\left(\frac{138}{13}; \frac{64}{13}\right)$

Khi đó, $P = MI + MA \geq IA = \frac{\sqrt{9945}}{13}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi M, I, A thẳng hàng

Bài 30. *Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn:*

$$\begin{cases} 2[f(2)]^2 - [f(1)]^2 = 63 \\ 2[f(x)]^2 + x^2[f'(x)]^2 = 27x^2 \end{cases}, \quad \forall x \in [1;2]$$

Tính giá trị của tích phân $\int_1^2 [f(x)]^2 dx$.

A. 15 B. 18 C. 21 D. 25

Hướng dẫn giải

Từ đề $\Rightarrow \int_1^2 [f(x)]^2 dx + \int_1^2 [f(x)]^2 dx + \int_1^2 x^2[f'(x)]^2 dx = \int_1^2 27x^2 dx = 63$ (1)

Xét $I = \int_1^2 [f(x)]^2 dx$. Đặt $\begin{cases} u = [f(x)]^2 \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2f'(x)f(x) \\ v = x \end{cases}$

$$\Rightarrow I = x[f(x)]^2\Big|_1^2 - 2\int_1^2 xf'(x)f(x)dx = 63 - 2\int_1^2 xf'(x)f(x)dx$$

$$(1) \Leftrightarrow \int_1^2 [f(x)]^2 dx - 2\int_1^2 xf'(x)f(x)dx + \int_1^2 x^2[f'(x)]^2 dx = 0 \Leftrightarrow \int_1^2 [f(x) - xf'(x)]^2 dx = 0$$

Do đó $f(x) - xf'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}f(x)\right)' = 0 \Rightarrow f(x) = Cx$

Ta có: $2[Cx]^2 + x^2C^2 = 3C^2x^2 = 27x^2 \Rightarrow C = 3 \Rightarrow \int_1^2 [f(x)]^2 dx = 21$

Bài 31. *Cho x, y là 2 góc thỏa mãn $x + y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $\sin x = 2\sin(x+y)$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \tan(x+y)$. Tính $Q = M^2 + m^2$*

A. $\frac{2}{5}$ B. 1 C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{5}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\sin x = \sin\left(\left(x+y\right)-y\right) = \sin\left(x+y\right)\cos y - \sin y.\cos\left(x+y\right)$

$\Rightarrow \sin\left(x+y\right)\cos y - \sin y.\cos\left(x+y\right) = 2\sin\left(x+y\right) \Leftrightarrow \tan\left(x+y\right)\cos y - \sin y = 2\tan\left(x+y\right)$

$\Leftrightarrow \tan\left(x+y\right) = \dfrac{\sin y}{\cos y - 2}$

Ta có: $P = \dfrac{\sin y}{\cos y - 2} \Leftrightarrow \sin y - P\cos y = -2$

Điều kiện có nghiệm: $1+P^2 \ge 4 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \le P \le \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow Q = \dfrac{2}{3}$

Bài 32. *Cho số phức z khác 0 thay đổi và thỏa mãn điều kiện* $\left(m^2-\sqrt{2}\left|z\right|\right)\overline{z} = \left(\dfrac{1}{z}-\overline{z}\right)i+\overline{z}$ *với* m *là số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của* m.

A. $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ B. $2+\sqrt{2}$ C. $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ D. $1+\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

$\left(m^2-\sqrt{2}\left|z\right|\right)\overline{z} = \left(\dfrac{1}{z}-\overline{z}\right)i+\overline{z} \Leftrightarrow m^2-\sqrt{2}\left|z\right| = \left(\dfrac{1}{\overline{z}.z}-1\right)i+1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\left|z\right| + \dfrac{i}{\left|z\right|^2} = \left(m^2-1\right)+i$

$\Rightarrow \left|\sqrt{2}\left|z\right| + \dfrac{i}{\left|z\right|^2}\right| = \left|\left(m^2-1\right)i+1\right| \Leftrightarrow \sqrt{2\left|z\right|^2+\dfrac{1}{\left|z\right|^4}} = \sqrt{\left(m^2-1\right)^2+1}$

Xét $2\left|z\right|^2+\dfrac{1}{\left|z\right|^4} = \left|z\right|^2+\left|z\right|^2+\dfrac{1}{\left|z\right|^4} \ge 3\sqrt[3]{\left|z\right|^2.\left|z\right|^2.\dfrac{1}{\left|z\right|^4}} = 3$

Suy ra $\sqrt{\left(m^2-1\right)^2+1} \ge \sqrt{3} \Leftrightarrow \left(m^2-1\right)^2 \ge 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge \sqrt{1+\sqrt{2}} \\ m \le -\sqrt{1+\sqrt{2}}\ \left(Loai\right) \end{array}\right.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của m là $\sqrt{1+\sqrt{2}}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\left|z\right|=1$

Bài 33*. Cho hàm số* $f\left(x\right)$ *có đạo hàm liên tục trên* $\left[0;1\right]$ *thỏa mãn:*

$$\begin{cases} ef(1) = 4f(0) = 4 \\ \int_0^1 e^{2x}\left[\left(f'(x)\right)^2 - \left(f(x)\right)^2\right]dx + 4\int_0^1 e^x f(x)dx = \dfrac{11}{3} \end{cases}$$

Tính $I = \int_0^1 f(x)dx$.

A. $I = \dfrac{4(e-1)}{e}$ B $I = \dfrac{3(e-1)}{e}$ C. $I = \dfrac{2(e+2)}{e}$ D. $I = \dfrac{5(e-2)}{e}$

Hướng dẫn giải

Xét $J = \int_0^1 e^{2x}\left[\left(f'(x)\right)^2 - \left(f(x)\right)^2\right]dx + 4\int_0^1 e^x f(x)dx = \dfrac{11}{3}$

Đặt $u(x) = e^x f(x) \Rightarrow u' = e^x f(x) + e^x f'(x) \Rightarrow e^x f'(x) = u' - u$

Khi đó $J = \int_0^1 \left[(u'-u)^2 - u^2 + 4u\right]dx = \int_0^1 \left[(u')^2 - 2u.u' + 4u\right]dx$, với $u(1) = 4,\ u(0) = 1$

Ta có $\int_0^1 u.u'dx = \left.\dfrac{u^2}{2}\right|_0^1 = \dfrac{15}{2}$ và $\int_0^1 udx = xu\Big|_0^1 - \int_0^1 xu'dx = 4 - \int_0^1 xu'dx$

Suy ra $J = \int_0^1 \left[(u')^2 - 4xu'\right]dx = \dfrac{8}{3}$

Chọn $m \in \mathbb{R}$ sao cho:

$$\int_0^1 \left[u' - 2x - m\right]^2 dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left[(u')^2 - 4xu'\right]dx - 2m\int_0^1 u'dx + \int_0^1 (2x+m)^2 dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{3} - 6m + m^2 + 2m + \frac{4}{3} = 0 \Leftrightarrow m = 2$$

Vậy $\int_0^1 \left[u' - 2x - 2\right]^2 dx = 0 \Leftrightarrow e^x f(x) + e^x f'(x) = 2x + 2$

$$\Leftrightarrow \left(e^x f(x)\right)' = 2x + 2 \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^2 + 2x + C}{e^x} \xrightarrow{f(0)=1} f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{e^x} \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = \frac{5(e-2)}{e}$$

***Bài 34**. Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z-i|=1$ và $2\left(z_1+\overline{z_1}\right)+3\left(z_2+\overline{z_2}\right)=-3$. Giá trị lớn nhất M của biểu thức $P=|z_1-2-i|+|z_2-3-i|$ thuộc khoảng nào sau đây?*

A. $M\in(4;6)$ *B.* $M\in(5;7)$ *C.* $M\in(6;8)$ *D.* $M\in(7;9)$

Hướng dẫn giải

Từ đề suy ra $|z_1-i|=|z_2-i|=1$

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki: $P=|z_1-2-i|+|z_2-3-i|\le\sqrt{2\left(|z_1-2-i|^2+|z_2-3-i|^2\right)}$

Ta có: $|z_1-2-i|^2=(z_1-2-i)\left(\overline{z_1}-2+i\right)=|z_1-i|^2-2\left(z_1+\overline{z_1}\right)+4$

Và $|z_2-3-i|^2=(z_2-3-i)\left(\overline{z_2}-3+i\right)=|z_2-i|^2-3\left(z_2+\overline{z_2}\right)+9$

$$\Rightarrow P\le\sqrt{2\left[|z_1-i|^2+|z_2-i|^2-2\left(z_1+\overline{z_1}\right)-3\left(z_2+\overline{z_2}\right)+13\right]}=\sqrt{2(2+3+13)}=6$$

***Bài 35**. Cho hình đa giác đều H có 24 đỉnh, chọn ngẫu nhiên 4 đỉnh của hình H. Tính xác suất để 4 đỉnh chọn được tạo thành một hình chữ nhật không phải là hình vuông?*

A. $\frac{10}{1771}$ *B.* $\frac{15}{1771}$ *C.* $\frac{20}{1771}$ *D.* $\frac{18}{1771}$

Hướng dẫn giải

Số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega|=C_{24}^4=10626$.

Đa giác đều 24 đỉnh có 12 đường chéo qua tâm. Cứ 2 đường chéo qua tâm tương ứng cho ta một hình chữ nhật hoặc hình vuông. Số hình chữ nhật và hình vuông được tạo thành là C_{12}^2.

Giả sử $A_1, A_2, ..., A_{24}$ là 24 đỉnh của hình H. Vì H là đa giác đều nên 24 đỉnh nằm trên 1 đường tròn tâm O

Góc $\widehat{A_iOA_{i+1}}=\frac{360^0}{24}=15^0$ với $i=1,2,...,23$

Ta thấy: $\widehat{A_1OA_7}=\widehat{A_7OA_{14}}=\widehat{A_{14}OA_{21}}=90^0$, do đó $A_1A_7A_{14}A_{21}$ là một hình vuông, xoay hình vuông này 15^0 ta được hình vuông $A_2A_8A_{15}A_{22}$, cứ như vậy ta được 6 hình vuông.

Số hình chữ nhật không là hình vuông là: $C_{12}^2 - 6 = 60$.

Vậy xác suất cần tính là: $\frac{60}{C_{24}^4} = \frac{10}{1771}$.

Bài 36. *Cho số phức z thỏa mãn* $\left|z^4 - z^2 - 2\right| + 3\left|z^2 - 2\right| = 9$. *Giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $P = \left|z^2 + 1\right| + \left|z\right|^2$ *bằng:*

A. $\sqrt{2}$ *B.* 1 *C.* $2\sqrt{3}$ *D.* 2

Hướng dẫn giải

Ta có $\left|z^4 - z^2 - 2\right| + 3\left|z^2 - 2\right| = 9 \leftrightarrow \left|z^2 - 2\right|\left|z^2 + 1\right| + 3\left|z^2 - 2\right| = 9 \leftrightarrow \left|z^2 + 1\right| = \frac{9}{\left|z^2 - 2\right|} - 3$

Cách 1:

Ta có $\left|z^2 + 1\right| = \frac{9}{\left|z^2 - 2\right|} - 3 \geq \frac{9}{\left|z\right|^2 + 2} - 3$

$$\rightarrow P \geq \frac{9}{\left|z\right|^2 + 2} - 3 + \left|z\right|^2 = \frac{9}{\left|z\right|^2 + 2} + \left|z\right|^2 + 2 - 5 \geq 2\sqrt{\frac{9}{\left|z\right|^2 + 2}.\left(\left|z\right|^2 + 2\right)} - 5 = 1$$

Cách 2:

Đặt

$$t = \left|z^2 - 2\right| \rightarrow t^2 = \left|z\right|^4 - 2\left(z^2 + \bar{z}^2\right) + 4 = \left|z\right|^4 - 2\left(z + \bar{z}\right)^2 + 4\left|z\right|^2 + 4 \leq \left|z\right|^4 + 4\left|z\right|^2 + 4 = \left(\left|z\right|^2 + 2\right)^2$$

Suy ra $\left|z\right|^2 \geq t - 2 \rightarrow P \geq \frac{9}{t} - 3 + t - 2 \geq 2\sqrt{\frac{9}{t}.t} - 5 = 1$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $z = \pm i$

Bài 37. *Cho hàm số* $f(x)$ *dương và có đạo hàm liên tục trên* $[0;1]$ *thỏa mãn* $f(0) = \frac{1}{16}$, $\int_0^1 (x+1)^3 f'(x)dx = -\frac{1}{8}$ *và* $\int_0^1 \frac{\left[f(x)\right]^3}{\left[f'(x)\right]^2}dx = \frac{1}{64}$. *Tính tích phân* $\int_0^1 f(x)dx$.

A. $\frac{1}{24}$ *B.* $\frac{1}{32}$ *C.* $\frac{1}{8}$

D. $\frac{1}{4}$

Hướng dẫn giải

$$\int_0^1 (x+1)^3 f'(x)dx = (x+1)^3 f(x)\Big|_0^1 - 3\int_0^1 (x+1)^2 f(x) = -\frac{1}{8} \to \int_0^1 (x+1)^2 f(x) = \frac{1}{16}$$

Áp dụng BĐT Holder ta có:

$$\frac{1}{16} = \int_0^1 \left| \frac{f(x)}{\left[f'(x)\right]^{\frac{2}{3}}} (x+1)^2 \left[f'(x)\right]^{\frac{2}{3}} \right| dx \le \left(\int_0^1 \left[\frac{f(x)}{\left[f'(x)\right]^{\frac{2}{3}}} \right]^3 dx \right)^{\frac{1}{3}} . \left(\int_0^1 \left[(x+1)^2 \left[f'(x)\right]^{\frac{2}{3}} \right]^{\frac{3}{2}} dx \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$= \left(\int_0^1 \frac{\left[f(x)\right]^3}{\left[f'(x)\right]^2} dx \right)^{\frac{1}{3}} . \left(\int_0^1 (x+1)^3 f'(x) dx \right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{64} \right)^{\frac{1}{3}} . \left(-\frac{1}{8} \right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{16}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\left(\frac{f(x)}{\left[f'(x)\right]^{\frac{2}{3}}} \right)^3 = k \left[(x+1)^2 \left[f'(x)\right]^{\frac{2}{3}} \right]^{\frac{3}{2}}$

$$\leftrightarrow \frac{\left[f'(x)\right]^3}{\left[f(x)\right]^3} = \frac{1}{k(x+1)^3} \qquad (1)$$

Ta có $\int_0^1 \frac{\left[f(x)\right]^3}{\left[f'(x)\right]^2} dx = \int_0^1 \frac{\left[f(x)\right]^3}{\left[f'(x)\right]^3} . f'(x) dx = \int_0^1 k(x+1)^3 f'(x) dx = \frac{1}{64} \to k = \frac{\frac{1}{64}}{-\frac{1}{8}} = -\frac{1}{8}$

$$(1) \leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{2}{x+1} \leftrightarrow \ln f(x) = -2\ln|x+1| + C \xrightarrow{f(0)=\frac{1}{16}} f(x) = \frac{1}{16(x+1)^2} \to \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{32}$$

Bài 38*.* *Cho hàm số* $f(x)$ *liên tục và có đạo hàm cấp 2 trên* $[0;+\infty)$ *thỏa mãn* $f(0)=1$, $f'(0)=0$, $f''(x)-5f'(x)+6f(x)\ge 0,\ \forall x\in[0;+\infty)$, $\int_0^{\ln 2} f(x)dx = -\frac{1}{6}$. *Tính tích phân* $\int_0^{\ln 2} f^2(x)dx$

A. $\frac{15}{4}$ *B.* $\frac{35}{17}$ *C.* $\frac{27}{20}$ *D.* $\frac{24}{7}$

Hướng dẫn giải

$f''(x)-5f'(x)+6f(x)\ge 0 \leftrightarrow f''(x)-2f'(x)-3\left[f'(x)-2f(x)\right]\ge 0 \quad (1)$

Đặt $g(x)=f'(x)-2f(x)$, từ (1) suy ra $g'(x)-3g(x)\ge 0$

Xét hàm số $h(x)=e^{-3x}g(x)\to h'(x)=-3e^{-3x}g(x)+e^{-3x}g'(x)=e^{-3x}\left[g'(x)-3g(x)\right]\ge 0$

Suy ra $h(x)$ đồng biến trên $[0;+\infty)\to h(x)\ge h(0)=g(0)=f'(0)-2f(0)=-2$

$\to e^{-3x}g(x)\ge -2 \leftrightarrow e^{-2x}\left[f'(x)-2f(x)\right]+2e^{x}\ge 0$

Xét hàm số $k(x)=e^{-2x}f(x)+2e^{x}\to k'(x)=e^{-2x}\left[f'(x)-2f(x)\right]+2e^{x}\ge 0$

Suy ra $k(x)$ đồng biến trên $[0;+\infty)\to k(x)\ge k(0)=f(0)+2=3$

$\to e^{-2x}f(x)+2e^{x}\ge 3 \leftrightarrow f(x)\ge 3e^{2x}-2e^{3x}\to \int_0^{\ln 2} f(x)dx\ge -\frac{1}{6}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $f(x)=3e^{2x}-2e^{3x}\to \int_0^{\ln 2}\left[f(x)\right]^2dx=\frac{27}{20}$

Bài 39*. Cho hai hộp bi mỗi hộp có 2 viên bi đỏ và 8 bi trắng. Các viên bi chỉ khá nhau về màu. Cho hai người lấy mỗi người một hộp và từ hộp của mình, mỗi người lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Tính xác suất để hai người lấy được số bi đỏ như nhau.*

A. $P=\frac{4}{5}$ *B.* $P=\frac{2}{9}$ *C.* $P=\frac{11}{25}$ *D.* $P=\frac{1}{5}$

Hướng dẫn giải

- Gọi A là biến cố lấy 0 bi đỏ, 3 bi trắng $\to P(A)=\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{15}$

A_1 là biến cố người thứ nhất lấy được 0 bi đỏ, 3 bi trắng $\to P(A_1)=\frac{7}{15}$

A_2 là biến cố người thứ hai lấy được 0 bi đỏ, 3 bi trắng $\to P(A_2)=\frac{7}{15}$

Vì A_1 và A_2 độc lập nên xác suất để hai người cùng lấy được 0 bi đỏ, 3 bi trắng là:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1).P(A_2) = \left(\frac{7}{15}\right)^2$$

- Gọi B là biến cố lấy 1 bi đỏ, 2 bi trắng $\rightarrow P(B) = \frac{C_2^1 C_8^2}{C_{10}^3} = \frac{7}{15}$

B_1 là biến cố người thứ nhất lấy được 1 bi đỏ, 2 bi trắng $\rightarrow P(B_1) = \frac{7}{15}$

B_2 là biến cố người thứ hai lấy được 1 bi đỏ, 2 bi trắng $\rightarrow P(B_2) = \frac{7}{15}$

Vì B_1 và B_2 độc lập nên xác suất để hai người cùng lấy được 1 bi đỏ, 2 bi trắng là:

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1).P(B_2) = \left(\frac{7}{15}\right)^2$$

- Gọi C là biến cố lấy 2 bi đỏ, 1 bi trắng $\rightarrow P(B) = \frac{C_2^2 C_8^1}{C_{10}^3} = \frac{1}{15}$

C_1 là biến cố người thứ nhất lấy được 2 bi đỏ, 1 bi trắng $\rightarrow P(C_1) = \frac{7}{15}$

C_2 là biến cố người thứ hai lấy được 2 bi đỏ, 1 bi trắng $\rightarrow P(C_2) = \frac{7}{15}$

Vì C_1 và C_2 độc lập nên xác suất để hai người cùng lấy được 2 bi đỏ, 1 bi trắng là:

$$P(C_1 \cap C_2) = P(C_1).P(C_2) = \left(\frac{1}{15}\right)^2$$

Vậy xác suất để hai người lấy được số bi đỏ như nhau là:

$$P = \left(\frac{7}{15}\right)^2 + \left(\frac{7}{15}\right)^2 + \left(\frac{1}{15}\right)^2 = \frac{11}{25}$$

Bài 40. *Cho số phức z thỏa mãn* $|z-1+3i| + |z+3-i| = 2|2z+2-i|$. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức* $P = |z+1-i|$.

A. $\frac{\sqrt{11}}{3}$ *B.* $\frac{\sqrt{46}}{5}$ *C.* $\frac{\sqrt{33}}{3}$ *D.* $\frac{\sqrt{35}}{5}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $|z-1+3i|+|z+3-i|=\sqrt{(x-1)^2+(y+3)^2}+\sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2}$

Và $2|2z+2-i|=2\sqrt{(2x+2)^2+(2y-1)^2}$

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki:

$$\sqrt{(x-1)^2+(y+3)^2}+\sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2}\le\sqrt{2\left[(x-1)^2+(y+3)^2+(x+3)^2+(y-1)^2\right]}$$

Suy ra $2\sqrt{(2x+2)^2+(2y-1)^2}\le\sqrt{2\left[(x-1)^2+(y+3)^2+(x+3)^2+(y-1)^2\right]}$

Thực hiện phép bình phương và rút gọn ta được:

$$(x+1)^2+(y-1)^2\le\frac{11}{3}\Rightarrow|z+1-i|\le\frac{\sqrt{33}}{3}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} z=\sqrt{\frac{5}{6}}+i\sqrt{\frac{5}{6}} \\ z=-\sqrt{\frac{5}{6}}-i\sqrt{\frac{5}{6}} \end{array}\right.$

Bài 41. *Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn:*

$$\begin{cases} f(1)=\dfrac{7}{3} \\ \dfrac{3x^3f(x)}{\left[f'(x)\right]^2+xf'(x)+x^2}=f'(x)-x \end{cases},\quad \forall x\in[1;2]$$

Tính $f(2)$.

A. $f(2)=\frac{7\sqrt{7}-1}{3}$ *B.* $f(2)=\frac{7\sqrt{7}+1}{3}$ *C.* $f(2)=\frac{2\sqrt{7}-1}{3}$ *D.* $f(2)=\frac{2\sqrt{7}+1}{3}$

Hướng dẫn giải

Đề $\Leftrightarrow 3x^3f(x)=\left[f'(x)-x\right]\left[\left[f'(x)\right]^2+xf'(x)+x^2\right]\Leftrightarrow 3x^3f(x)=\left[f'(x)\right]^3-x^3$

$$\Leftrightarrow x^3\left[3f(x)+1\right]=\left[f'(x)\right]^3\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{\sqrt[3]{3f(x)+1}}=x$$

Suy ra $\int_1^2\frac{f'(x)}{\sqrt[3]{3f(x)+1}}dx=\int_1^2 xdx=\frac{3}{2}\leftrightarrow\frac{1}{3}\int_1^2\left[3f(x)+1\right]^{-\frac{1}{3}}d\left(3f(x)+1\right)=\frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{3}.\frac{3}{2}\left[3f(x)+1\right]^{\frac{2}{3}}\Big|_1^2=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\left[3f(2)+1\right]^{\frac{2}{3}}-\left[3f(1)+1\right]^{\frac{2}{3}}=3\Rightarrow f(2)=\frac{7\sqrt{7}-1}{3}$$

BTTL1: *Cho hàm số $f(x)$ dương và có đạo hàm không âm, liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn:*

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ \dfrac{\left[f(x).f'(x)\right]^2}{e^{2x}}=1+\left[f(x)\right]^2 \end{cases}, \quad \forall x\in[0;1]$$

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\frac{5}{2}<f(1)<3$ B. $3<f(1)<\frac{7}{2}$ C. $2<f(1)<\frac{5}{2}$ D. $\frac{3}{2}<f(1)<2$

Bài 42. *Cho số phức z không phải là số thuần ảo thỏa mãn $|z|=2$ và số phức $w=\frac{z}{1+z^4}$ là số thuần ảo. Biết $\left(z+\bar{z}\right)^2=\frac{a}{b}$ $(a,b\in\mathbb{Z})$, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $T=a-ab+b^2$*

A. -125 B. 125 C. 75 D. -75

Hướng dẫn giải

Vì w là số thuần ảo nên: $\frac{z}{1+z^4}+\frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^4}=0$

$\Leftrightarrow z\left(1+\bar{z}^4\right)+\bar{z}\left(1+z^4\right)=0 \Leftrightarrow z+\bar{z}+z.\bar{z}^4+\bar{z}.z^4=0$

$\Leftrightarrow z+\bar{z}+z.\bar{z}\left(z^3+\bar{z}^3\right)=0 \Leftrightarrow z+\bar{z}+z.\bar{z}\left(z+\bar{z}\right)\left(z^2-z.\bar{z}+\bar{z}^2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(z+\bar{z}\right)\left[1+z.\bar{z}\left(z^2-z.\bar{z}+\bar{z}^2\right)\right]=0$

Vì z không phải là số thuẩn ảo nên $\left(z+\bar{z}\right)\neq 0$, suy ra:

$$1+z.\bar{z}\left(z^2-z.\bar{z}+\bar{z}^2\right)=0 \leftrightarrow |z|^2\left[\left(z+\bar{z}\right)^2-3z.\bar{z}\right]=-1$$
$$\Leftrightarrow |z|^2\left[\left(z+\bar{z}\right)^2-3|z|^2\right]=-1 \Rightarrow \left(z+\bar{z}\right)^2=-\frac{1}{4}+3.4=\frac{47}{4}$$

Bài 43. *Cho số phức z,w thỏa mãn $|z-5+3i|=3$ và $|iw+4+2i|=2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|3iz+2w|$*

A. $\sqrt{554}+5$ B. $\sqrt{578}+13$ C. $\sqrt{578}+5$ D. $\sqrt{554}+13$

Hướng dẫn giải

Đặt $\begin{cases} z_1 = 3iz \\ z_2 = -2w \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \dfrac{z_1}{3i} \\ w = -\dfrac{z_2}{2} \end{cases}$. Thay vào giả thiết ta được:

$$\begin{cases} \left|\dfrac{z_1}{3i} - 5 + 3i\right| = 3 \\ \left|-i.\dfrac{z_2}{2} + 4 + 2i\right| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|z_1 - 15i - 9\right| = 9 \\ \left|z_2 + 8i - 4\right| = 4 \end{cases}$$

Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z_1, z_2

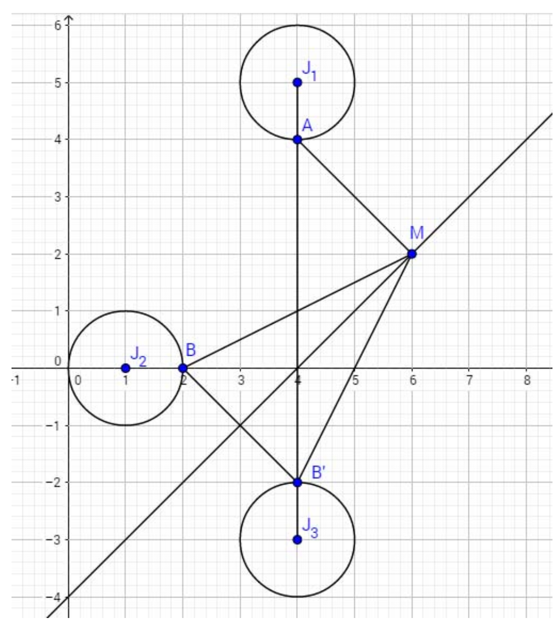
Suy ra A thuộc đường tròn tâm $I(9;15)$, bán kính $R_1 = 9$ và B thuộc đường tròn tâm $J(4;-8)$, bán kính $R_2 = 4$

Ta có: $P = |z_1 - z_2| = \left|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right| = AB \le IJ + R_1 + R_2 = \sqrt{554} + 13$

Bài 44. *Cho số phức z, z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 4 - 5i| = |z_2 - 1| = 1$ và $|\overline{z} + 4i| = |z - 8 + 4i|$. Tính $|z_1 - z_2|$ khi $P = |z - z_1| + |z - z_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất.*

A. $\sqrt{41}$ B. 6 C. $2\sqrt{5}$ D. 8

Hướng dẫn giải



*Gọi A là điểm biểu diễn $z_1 \Rightarrow$ A thuộc đường tròn (C_1) tâm $J_1(4;5), R_1 = 1$

*Gọi B là điểm biểu diễn $z_2 \Rightarrow$ B thuộc đường tròn (C_2) tâm $J_2(1;0), R_2 = 1$

*$|\overline{z} + 4i| = |z - 8 + 4i| \Leftrightarrow (d): y = 4 - x$

$\Rightarrow$ M thuộc đường thẳng (d), $z = x + yi$

Ta có: $P = \left|\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}\right| + \left|\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB}\right| = MA + MB$

*Gọi (C_3) có tâm $J_3(4;-3), R_3 = 1$ là đường tròn đối xứng của (C_2) qua (d) và B′ là điểm đối xứng của B qua (d), khi đó $B' \in (C_3)$

………………………………………………

………………………………………………

Khi đó: $P = MA + MB = MA + MB' \ge AB' = J_1J_3 - R_1 - R_3 = 6$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi J_1, A, M, B', J_3 thẳng hàng

Ta có $\overrightarrow{J_3B'} = \dfrac{1}{8}\overrightarrow{J_3J_1} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{B'} - 4 = 0 \\ y_{B'} + 3 = \dfrac{1}{8}.8 \end{cases} \Rightarrow B'(4;-2) \Rightarrow B(2;0)$

Lại có $\overrightarrow{J_1A}=\frac{1}{8}\overrightarrow{J_1J_3}\Leftrightarrow\begin{cases}x_A-4=0\\ y_A-5=-\frac{1}{8}.8\end{cases}\Rightarrow A(4;4)$

Vậy $|z_1-z_2|=|4+4i-2|=2\sqrt{5}$

Bài 45. *Cho dãy số* (u_n) *thỏa mãn* $u_1=1,\ u_{n+1}=\sqrt{au_n^2+1},\ \forall n\ge 1, a\ne 1$. *Biết rằng* $\lim\left(u_1^2+u_2^2+...+u_n^2-2n\right)=b$. *Giá trị của biểu thức* $T=ab$

A. –1 *B.* –2 *C.* 1 *D.* 2

Hướng dẫn giải

Đề $\Leftrightarrow u_{n+1}^2=au_n^2+1\Leftrightarrow u_{n+1}^2-\frac{1}{1-a}=a\left(u_n^2-\frac{1}{1-a}\right)$

Đặt $v_n=u_n^2-\frac{1}{1-a}\Rightarrow v_{n+1}=av_n\Rightarrow$ (v_n) là cấp số công với công bội $q=a$

Suy ra $v_n=v_1a^{n-1}=\left(u_1^2-\frac{1}{1-a}\right)a^{n-1}=a^{n-1}.\frac{a}{a-1}\Rightarrow u_n^2=a^{n-1}.\frac{a}{a-1}+\frac{1}{1-a}$

Ta có: $\begin{cases}u_1^2=\frac{a}{a-1}+\frac{1}{1-a}\\ u_2^2=a.\frac{a}{a-1}+\frac{1}{1-a}\\ \text{.............................}\\ u_n^2=a^{n-1}.\frac{a}{a-1}+\frac{1}{1-a}\end{cases}\Rightarrow u_1^2+u_2^2+...+u_n^2=\frac{a}{a-1}\left(1+a+...+a^{n-1}\right)+\frac{1}{1-a}.n$

$$\Rightarrow u_1^2+u_2^2+...+u_n^2-\frac{1}{1-a}.n=\frac{a}{a-1}.\frac{1-a^n}{1-a}$$

Thực hiện phép đồng nhất ta được:

$$\begin{cases}\frac{1}{1-a}=2\\ b=\lim\left(\frac{a}{a-1}.\frac{1-a^n}{1-a}\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\ b=\lim\left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}-1}\right]=-2\end{cases}\Rightarrow T=-1$$

BTTL. *Cho dãy số* (u_n) *thỏa mãn* $u_1=1,\ u_{n+1}=\sqrt{\frac{2}{3}u_n^2+a},\ \forall n\ge 1$. *Biết rằng* $\lim\left(u_1^2+u_2^2+...+u_n^2-2n\right)=b$. *Giá trị của biểu thức* $T=ab$

A. –1 *B.* –2 *C.* 1 *D.* 2

Hướng dẫn giải

***Bài 46**. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $2^{2u_1+1}+2^{3-u_2}=\dfrac{8}{\log_3\left(\frac{1}{4}u_3^2-4u_1+4\right)}$ và $u_{n+1}=2u_n$ với mọi $n\ge 1$. Đặt $S_n=u_1+u_2+...+u_n$. Giá trị nhỏ nhất của n để $S_n>28^{10}$ là:*

A. 53 B. 51 C. 50 D. 52

Hướng dẫn giải

Theo GT, $u_{n+1}=2u_n$ nên (u_n) là một CSN với công bội $q=2\Rightarrow u_n=u_1.2^{n-1}\Rightarrow\begin{cases}u_2=2u_1\\u_3=4u_1\end{cases}$

Xét $$2^{2u_1+1}+2^{3-u_2}=2.4^{u_1}+\frac{8}{4^{u_1}}\ge 2\sqrt{2.4^{u_1}.\frac{8}{4^{u_1}}}=8$$

Và $$\frac{8}{\log_3\left(\frac{1}{4}u_3^2-4u_1+4\right)}=\frac{8}{\log_3\left(\frac{1}{4}u_3^2-u_3+4\right)}=\frac{8}{\log_3\left(\frac{1}{4}(u_3-2)^2+3\right)}\le\frac{8}{\log_3 3}=8$$

Do đó dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}2.4^{u_1}=\dfrac{8}{4^{u_1}}\\u_3=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=\dfrac{1}{2}\\u_3=2\end{cases}$

Khi đó $S_n=u_1.\dfrac{1-2^n}{1-2}=\dfrac{2^n-1}{2}>28^{10}\Leftrightarrow n>\log_2\left(2.28^{10}+1\right)\approx 49,07\Rightarrow n_{\min}=50$

***Bài 47**. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn điều kiện:*

$$f(2018x+2017)=2018f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$$

Giá trị tích phân $\int_0^1\left[f(x)\right]^2dx$ bằng:

A. $\frac{4}{3}\left[f'(-1)\right]^2$ B. $\frac{5}{3}\left[f'(-1)\right]^2$ C. $\frac{7}{3}\left[f'(-1)\right]^2$ D. $\frac{8}{3}\left[f'(-1)\right]^2$

Hướng dẫn giải

Xét $f(2018x+2017)=2018f(x)$ (*)

Đạo hàm 2 vế của (*) :

$$2018f'(2018x+2017)=2018f'(x)$$

Thay x bởi $\frac{x-2017}{2018}$, ta được:

$$f'(x)=f'\left(\frac{x-2017}{2018}\right)=f'\left(\frac{x-2018+1}{2018}\right) \quad (1)$$

Tiếp tục thay x bởi $\frac{x-2017}{2018}$:

$$f'(x)=f'\left(\frac{\frac{x-2017}{2018}-2018+1}{2018}\right)=f'\left(\frac{x-2018^2+1}{2018^2}\right)$$

Thay đến n lần và bằng quy nạp ta chứng minh được:

$$f'(x)=f'\left(\frac{x-2018^n+1}{2018^n}\right)=f'\left(\frac{x}{2018^n}-1+\frac{1}{2018^n}\right)$$

Khi $n\to\infty$ thì $f'(x)=f'(-1)\Rightarrow f(x)=f'(-1)x+C \quad (2)$

Thay $x=-1$ vào đề ta được $f(-1)=2018f(-1)\Rightarrow f(-1)=0$

Thay $x=-1$ vào (2) ta được $f(-1)=-f'(-1)+C=0\Leftrightarrow f'(-1)=C$

Vậy $f(x)=f'(-1)(x+1)\Rightarrow \int_0^1\left[f(x)\right]^2dx=\frac{7}{3}\left[f'(-1)\right]^2$

Bài 48*. Trong không gian Oxyz, xét mặt phẳng* $(P):2mx+(m^2+1)y+(m^2-1)z-10=0$ *và điểm* $A(2;11;-5)$*. Biết khi* m *thay đổi, tồn tại hai mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng* (P) *và cùng đi qua* A*. Tính tổng bán kính của hai mặt cầu đó.*

A. $2\sqrt{2}$ B. $5\sqrt{2}$ C. $7\sqrt{2}$ D. $12\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

Gọi $I(a;b;c),r$ lần lượt là tâm và bán kính của mặt cầu . Do mặt cầu tiếp xúc với (P) nên ta có

$$r=d(I,(P))=\frac{\left|2ma+(m^2+1)b+(m^2-1)c-10\right|}{(m^2+1)\sqrt{2}}=\frac{\left|(b-c)m^2+2ma+b-c-10\right|}{(m^2+1)\sqrt{2}}$$

$$\left|(b+c)m^2+2ma+b-c-10\right|=r\left(m^2+1\right)\sqrt{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\left(b+c-r\sqrt{2}\right)m^2+2ma+b-c-r\sqrt{2}-10=0 & (1)\\ \left(b+c+r\sqrt{2}\right)m^2+2ma+b-c+r\sqrt{2}-10=0 & (2)\end{array}\right.$$

TH1: $\left(b+c-r\sqrt{2}\right)m^2+2ma+b-c-r\sqrt{2}-10=0 \quad (1)$

Do m thay đổi vẫn có mặt cầu cố định tiếp xúc với (P) nên yêu cầu bt trở thành tìm điều kiện a,b,c sao cho (1) không phụ thuộc vào m. Do đó (1) luôn đúng với mọi

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b+c-r\sqrt{2}=0\\ a=0\\ b-c-r\sqrt{2}-10=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=r\sqrt{2}+5\\ a=0\\ c=-5\end{cases}$$

Suy ra $I\left(0;5+r\sqrt{2};-5\right) \Rightarrow (S): x^2+\left(y-5-r\sqrt{2}\right)^2+(z+5)^2=r^2$.

Lại có $A\in(S)$ nên suy ra : $4+\left(-11-5-r\sqrt{2}\right)^2=r^2 \Leftrightarrow r^2-12\sqrt{2}r+40=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}r=2\sqrt{2}\\ r=10\sqrt{2}\end{array}\right.$

TH2: $\left(b+c+r\sqrt{2}\right)m^2+2ma+b-c+r\sqrt{2}-10=0$ làm tương tự TH1 (trường hợp này không thỏa đề bài)

Tóm lại : Khi m thay đổi, tồn tại hai mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (P) và cùng đi qua A và có tổng bán kính là : $12\sqrt{2}$ suy ra chọn D

***Bài 49**. Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(1;4;3)$ và mặt phẳng $(P): 2y-z=0$. Biết điểm B thuộc (P), điểm C thuộc (Oxy) sao cho chu vi tam giác ABC nhỏ nhất. Hỏi giá trị nhỏ nhất đó là :*

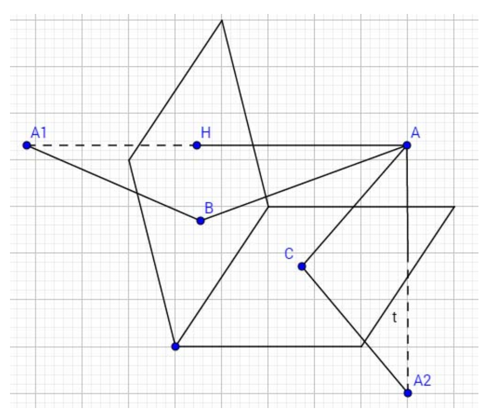
A. $4\sqrt{5}$ **B.** $2\sqrt{5}$ **C.** $\sqrt{5}$ **D.** $6\sqrt{5}$

Hướng dẫn giải

Gọi A_1, A_2 lần lượt là điểm đối xứng của A qua (P) và (Oxy).

Phương trình tham số

$$AA_1:\begin{cases}x=1\\ y=4+2t\\ z=3-t\end{cases}\Rightarrow H(1;4+2t;3-t) \text{ với } H=(P)\cap AA_1$$



Vì $H\in(P)$ nên

$$2(4+2t)-(3-t)=0\Leftrightarrow t=-1\Rightarrow A_1(1;0;5)$$

Tương tự ta tìm được $A_2(1;4;-3)$

Dễ thấy ΔAA_1B cân tại B và ΔAA_2C cân tại C nên $\begin{cases} AB = A_1B \\ AC = A_2C \end{cases}$. Vậy chu vi ΔABC bằng:

$C_{\Delta ABC} = AB + BC + CA = A_1B + BC + A_2C \geq A_1A_2 = 4\sqrt{5}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi A_1, B, C, A_2 thẳng hàng

Bài 50. *Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn:*

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(x) > 0 \\ f(x)\ln f(x) = xf'(x)\left[f(x) - 1\right] \end{cases}, \forall x \in [0;1]$$

Tính tích phân $\int_0^1 f(x)dx$.

A. $\int_0^1 f(x)dx = \frac{e-1}{3}$ *B.* $\int_0^1 f(x)dx = \frac{e-6}{6}$ *C.* $\int_0^1 f(x)dx = 4$ *D.* $\int_0^1 f(x)dx = 1$

Hướng dẫn giải

Đề $\Leftrightarrow f(x)\ln f(x) + xf'(x) = xf'(x)f(x) \Leftrightarrow \ln f(x) + x.\frac{f'(x)}{f(x)} = xf'(x)$

$\Leftrightarrow \left(x\ln f(x)\right)' = xf'(x) \Leftrightarrow x\ln f(x)\Big|_0^1 = \int_0^1 xf'(x)dx = xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)dx$

Suy ra $\int_0^1 f(x)dx = f(1) = 1$