

Họ và tên: PHAN PHƯỚC BẢO; Trường: HAI BÀ TRUNG; Lớp: 11

A. Nội dung

I. Giải tích: Từ §1 chương IV. Giới hạn đến §5 chương V. Đạo hàm.

II. Hình học: Từ §1 đến §5 chương III. Vectơ trong không gian. Quan hệ vuông góc.

B. Một số bài tập tham khảo

Xem lại các bài tập trong SGK và SBT Đại số & Giải tích, Hình học 11 cơ bản.

① CHỦ ĐỀ I. GIỚI HẠN

Câu 1. Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0 ?

A. $u_n = \left(\frac{-2}{3}\right)^n$

B. $u_n = \left(\frac{6}{5}\right)^n$

C. $u_n = \frac{n^3 - 3n}{n+1}$

D. $u_n = n^2 - 4n$

Lời giải: Vì $\begin{cases} \lim |u_n| \\ |u_n| < 1 \end{cases} \Rightarrow \lim |u_n| = 0 \Rightarrow \lim u_n = 0$

Câu 2. Phát biểu nào trong các phát biểu sau là sai?

A. $\lim q^n = 0 \quad (|q| > 1)$

B. $\lim c = c$

C. $\lim \frac{1}{n^k} = 0 \quad (k > 1)$

D. $\lim \frac{1}{n} = 0$

Lời giải:

Theo định lý $\lim q^n = 0$ khi $(|q| < 1)$.

Câu 3. Tính giới hạn $\lim \frac{n^3 - 2n}{3n^2 + n - 2}$

A. $-\infty$

B. $\frac{1}{3}$

C. $+\infty$

D. 0

Lời giải:

$$\lim \frac{n^3 - 2n}{3n^2 + n - 2} = \lim n \cdot \frac{1 - \frac{2}{n^2}}{3 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}}$$

$$\lim n = +\infty$$

Tự luận : $\lim \frac{1 - \frac{2}{n^2}}{3 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}} = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \lim \frac{n^3 - 2n}{3n^2 + n - 2} = \lim n \cdot \frac{1 - \frac{2}{n^2}}{3 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}} = +\infty$$

MTCT: NHẬP $\frac{x^3 - 2x}{3x^2 + x - 2} \xrightarrow{CALC \quad x=10^{10}} \approx +\infty$

Câu 4. Cho $\lim \frac{a^2 n^3 + 5n^2 - n + 1}{4n^3 - bn + a} = b$. Có bao nhiêu giá trị a nguyên dương để $b \in [0; 4]$?

A. 0

B. 4

C. 16

D. 2

Lời giải: $\lim \frac{a^2 n^3 + 5n^2 - n + 1}{4n^3 - bn + a} = \frac{a^2}{4} \in [0; 4] \Leftrightarrow 0 < a \leq 4, a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a = \{1; 2; 3; 4\}$

Câu 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc $(-10;10)$ để $\lim [5n - 3(a^2 - 2)n^3] = -\infty$?

A. 16.

B. 3.

C. 5.

D. 10.

Lời giải:

$$\lim [5n - 3(a^2 - 2)n^3] = -\infty \Rightarrow \lim -3(a^2 - 2)n^3 = -\infty \Rightarrow a^2 - 2 > 0 \Rightarrow \begin{cases} a > \sqrt{2} \\ a < -\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{do } a \in (-10;10), a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \in \{-9; -8; \dots; -2; 2; 3; \dots; 8; 9\}$$

Câu 6. Tính giới hạn $I = \lim \frac{7n^2 - 2n^3 + 1}{3n^3 + 2n^2 + 1}$.

A. $\frac{7}{3}$.

B. $-\frac{2}{3}$.

C. 0.

D. 1.

Lời giải:

$$I = \lim \frac{7n^2 - 2n^3 + 1}{3n^3 + 2n^2 + 1} = \lim \frac{n^3 \left(\frac{7}{n} - 2 + \frac{1}{n^3} \right)}{n^3 \left(3 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3} \right)} = -\frac{2}{3}$$

$$\text{MTCT: NHẬP } \frac{7x^2 - 2x^3 + 1}{3x^3 + 2x^2 + 1} \xrightarrow{\text{Calc } 10^{10}} -0,666 \approx -\frac{2}{3}$$

Câu 7. Biết $\lim \frac{2n^3 + n^2 - 4}{an^3 + 2} = \frac{1}{2}$ với a là tham số. Tính $a - a^2$.

A. -12.

B. -2.

C. 0.

D. -6.

Lời giải:

$$\text{Ta có } \lim \frac{2n^3 + n^2 - 4}{an^3 + 2} = \lim \frac{n^3 \left(2 + \frac{1}{n} - \frac{4}{n^3} \right)}{n^3 \left(a + \frac{2}{n} \right)} = \frac{2}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 4$$

$$\text{Vậy } a - a^2 = 4 - 4^2 = -12$$

Câu 8. Cho hai số thực $a; b$ thỏa mãn $\lim \frac{an^2 - 5 + 3n}{5n^3 - 4 + 2n^2 + bn^3} = -1$. Tính $S = a - b$.

A. $S = 5$.

B. $S = -3$.

C. $S = 3$.

D. $S = -5$.

Lời giải:

Do tử có bậc 2 nên giới hạn đã cho về 1 số khác không khi tử và mẫu cùng bậc

Suy ra $b = -5$

$$\text{Từ đó } \lim \frac{an^2 - 5 + 3n}{-4 + 2n^2} = \frac{a}{2} = -1 \Rightarrow a = -2$$

$$\text{Vậy } S = a - b = -2 - (-5) = 3$$

Câu 9. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. Tính $\lim u_n$.

A. 0.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{4}$.

D. 1.

Lời giải:

Tự luận:

$$u_n = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$\lim u_n = \lim \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2}$$

MTCT CASIO – 580 : Bấm như sau

[SHIFT] [X] [=] [1] [▼] [(] [2] [X] [=] [1] [)] [(] [2] [X] [+] [1] [)] [▶] [▶] [1] [▲] [1] [0] [0] [=]

HIỂN THỊ

$$\sum_{k=1}^{100} \left(\frac{1}{(2x-1)(2x+1)} \right) \uparrow \frac{100}{201}$$

$$\text{KẾT QUẢ} \approx \frac{1}{2}$$

Câu 10. Có bao nhiêu giá trị nguyên lớn hơn -10 của tham số m để $\lim (\sqrt{4n^2 + 3} - mn - 5) = +\infty$?

A. 9.

B. 10.

C. 11.

D. 12.

Lời giải:

$$\lim (\sqrt{4n^2 + 3} - mn - 5) = \lim n \left(\sqrt{4 + \frac{3}{n^2}} - m - \frac{5}{n^2} \right) = +\infty \Rightarrow 2 - m < 0$$

Do $m \in \mathbb{Z}, -10 < m < 2 \Rightarrow m \in \{-9; -8; \dots; 1\}$ có 11 giá trị m .

Câu 11. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc khoảng $(0; 2018)$ để có $\lim \sqrt{\frac{9^n + 3^{n+1}}{5^n + 9^{n+a}}} \leq \frac{1}{2187}$?

A. 2011.

B. 2016.

C. 2019.

D. 2009.

Lời giải:

Bước 1: Dùng MTCT CASIO -580 sử dụng công cụ FACT

[2] [1] [8] [7] [=] [SHIFT] [“”]

$$2187^{\sqrt{x}} \uparrow$$

Xuất hiện ở màn hình MTCT

$$3^7$$

$$\text{Bước 2: } \lim \sqrt{\frac{9^n + 3^{n+1}}{5^n + 9^{n+a}}} = \lim \sqrt{\frac{9^n \left(1 + \frac{3^{n+1}}{9^n} \right)}{9^{n+a} \left(\frac{5^n}{9^{n+a}} + 1 \right)}} = \lim \frac{1}{3^a} \leq \frac{1}{3^7} \Rightarrow a \geq 7$$

Do a thuộc khoảng $(0; 2018)$ nên $a \in \{7; 8; \dots; 2017\}$ có 2011 giá trị a nguyên thỏa mãn.

Câu 12. Tính giới hạn lim $\left[\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \right]$.

A. 1.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{4}$.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải:

Tự luận: nhớ lại hằng đẳng thức và áp dụng

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$\begin{aligned} \lim \left[\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \right] &= \lim \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \lim \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}\right) \dots \left(\frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

MTCT CASIO - 580

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$$

Xuất hiện ở màn hình kết quả

$$\prod_{x=2}^{100} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)$$

KẾT QUẢ $\approx \frac{1}{2}$

Câu 13. Tính tổng tất cả các giá trị thực của tham số a để $\lim(\sqrt{n^2 + a^2n} - \sqrt{n^2 + (a+2)n+1}) = 2$.

A. -1.

B. -5

C. 1.

D. 5.

Lời giải:

$$\lim\left(\sqrt{n^2+a^2n}-\sqrt{n^2+(a+2)n+1}\right)=\lim\frac{n^2+a^2n-n^2-(a+2)n-1}{\sqrt{n^2+a^2n}+\sqrt{n^2+(a+2)n+1}}=$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(a^2 - a - 2 - \frac{1}{n} \right)}{n \left(\sqrt{1 + \frac{a^2}{n}} + \sqrt{1 + \frac{a+2}{n} + \frac{1}{n^2}} \right)} = \frac{a^2 - a - 2}{2} = 2 \Leftrightarrow a^2 - a - 6 = 0$$

$$\Rightarrow S_a = 1(\text{theo Viet})$$

Câu 14. Tính tổng $S = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \dots$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

A. $S = 1$.

B. $S = \frac{3}{4}$.

C. $S = +\infty$.

D. $S = \frac{3}{2}$.

Lời giải:

Tự luận

Nhắc lại tổng của 1 cấp số nhân lùi vô hạn $S_n = \frac{u_1}{1-q}$

$$S = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \dots = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{4}$$

MTCT CASIO -580VN

$$\sum_{k=0}^{100} \left(\left(-\frac{1}{3}\right)^k \right)$$

$$\frac{3}{4}$$

Xuất hiện ở màn hình kết quả

Câu 15. Giả sử ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = b$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)g(x)] = ab$.

B. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = a - b$.

C. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$.

D. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + g(x)] = a + b$.

Lời giải: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$ vì có thể $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = b = 0$

Câu 16. Cho các giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 3$. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} [3f(x) - 4g(x)]$.

A. 5.

B. 2.

C. -6.

D. 3.

Lời giải:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [3f(x) - 4g(x)] = 3 \cdot 2 - 4 \cdot 3 = -6$$

Câu 17. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-3}{1-3x}$.

A. $\frac{2}{3}$.

B. $-\frac{2}{3}$.

C. $-\frac{3}{2}$.

D. -3.

Lời giải:

Tự luận $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-3}{1-3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(2 - \frac{3}{x}\right)}{x \left(\frac{1}{x} - 3\right)} = -\frac{2}{3}$

MTCT CASIO -580VN

$$\frac{2x-3}{1-3x} \xrightarrow{\text{Calc } x=10^{10}} \approx \frac{-2}{3}$$

kết quả xuất hiện ở màn hình MTCT

$$\frac{2x-3}{1-3x}$$

-0.6666666666

Câu 18. Cho $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + ax + 5} + x) = 5$ thì a là 1 nghiệm của phương trình nào trong các phương trình sau?

- A. $x^2 - 11x + 10 = 0$. B. $x^2 - 5x + 6 = 0$. C. $x^2 - 8x + 15 = 0$. **D. $x^2 + 9x - 10 = 0$.**

Lời giải:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + ax + 5} + x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + ax + 5 - x^2}{\sqrt{x^2 + ax + 5} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(a + \frac{5}{x} \right)}{|x| \sqrt{1 + \frac{a}{x} + \frac{5}{x^2}} - x} = \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(a + \frac{5}{x} \right)}{-x \sqrt{1 + \frac{a}{x} + \frac{5}{x^2}} - x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(a + \frac{5}{x} \right)}{-x \left(\sqrt{1 + \frac{a}{x} + \frac{5}{x^2}} + 1 \right)} = \frac{a}{-2} = 5 \Rightarrow a = -10 \end{aligned}$$

Mà D. $x^2 + 9x - 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -10 \end{cases}$. (thỏa)

Câu 19. Tính giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 4x + 1} + x)$.

- A. $I = -2$.** B. $I = -4$. C. $I = 1$. D. $I = -1$.

Lời giải:

Tự luận: $I = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 4x + 1} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 4x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 4x + 1} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 + \frac{1}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1} = -2$

MTCT CASIO -580VN

$\sqrt{x^2 + 4x + 1} + x \xrightarrow{\text{Calc } x=-10^{10}} -2$



kết quả màn hình xuất hiện

$\sqrt{x^2 + 4x + 1} + x$

-2

Câu 20. Cho $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 10}{x - 1} = 5$. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 10}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{4f(x) + 9} + 3)}$.

- A. 1.** B. 2. C. 10. **D. $\frac{5}{3}$.**

Lời giải:

Bình luận: khi giải dạng này ta luôn đối chiếu với định nghĩa đạo hàm

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 10}{x - 1} = 5 \equiv \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(1) = 10 \\ f'(1) = 5 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 10}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{4f(x) + 9} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 10}{x - 1} \cdot \frac{(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{4f(x) + 9} + 3)} = 5 \cdot \frac{1 + 1}{\sqrt{4 \cdot 10 + 9} + 3} = 1$$

Câu 21. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3 + 5x^2 - 9\sqrt{2}x - 2017)$.

A. $-\infty$.

B. 3.

C. -3.

D. $+\infty$.

Lời giải:

Bình luận: các giới hạn khi x tiến về **+ vô cùng** (hoặc - vô cùng) ta chỉ quan tâm đến bậc lớn nhất của x

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3 + 5x^2 - 9\sqrt{2}x - 2017) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(3 + \frac{5}{x} - \frac{9\sqrt{2}}{x^2} - \frac{2017}{x^3} \right) = -\infty.$$

Câu 22. Cho hai số thực a và b thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^2 - 3x + 1}{2x + 1} - ax - b \right) = 0$. Tính $a + 2b$.

A. -4.

B. -5.

C. 4.

D. -3.

Lời giải:

Tự luận:

$$\frac{4x^2 - 3x + 1}{2x + 1} = 2x - \frac{5}{2} + \frac{\frac{7}{2}}{2x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^2 - 3x + 1}{2x + 1} - ax - b \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(2x - \frac{5}{2} + \frac{\frac{7}{2}}{2x + 1} \right) - (ax + b) \right] = 0$$

$$\text{vì } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{7}{2}}{2x + 1} = 0 \text{ nên } 2x - \frac{5}{2} \equiv ax + b \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } a + 2b = 2 + 2 \cdot \left(-\frac{5}{2} \right) = -3$$

*** MTCT CASIO -580VN (sau khi thi xong và hè sẽ luyện tập MTCT thêm)**

dùng thủ thuật Calc 100 (lấy 2 chữ số)

ta có $97,5 > 50$ ta lấy $97,5 - 100 = 2,5$ sau đó làm tròn hàng tiếp theo lên 1 đơn vị :

$$\text{tức } 1 + 1 = 2 < 50. \text{ ta có } 2x - \frac{5}{2}$$

$$\frac{4x^2 - 3x + 1}{2x + 1} \xrightarrow{\text{Calc } x=100} 197,5 \dots \rightarrow 2x - \frac{5}{2}$$

Câu 23. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3 + 2x}{x - 2}$.

A. $-\infty$.

B. 2.

C. $+\infty$.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (3 + 2x) = 7, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} (x - 2) = 0, \quad x \rightarrow 2^- \Leftrightarrow x < 2 \Rightarrow x - 2 < 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3 + 2x}{x - 2} = -\infty$$

MTCT CASIO -580VN

$$\frac{3 + 2x}{x - 2} \xrightarrow{\text{Calc } x=1,9999} -\infty$$

Câu 24. Biết $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{3x^2 - 4x - 4} + \frac{1}{x^2 - 12x + 20} \right)$ là một phân số tối giản $\frac{a}{b}$ ($b > 0$). Tính $S = 6a^2 - b$.

A. $S = -10$.

B. $S = 10$.

C. $S = 32$.

D. $S = 21$.

Lời giải:

Tự luận

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{3x^2 - 4x - 4} + \frac{1}{x^2 - 12x + 20} \right) &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{1}{(x-2)(3x+2)} + \frac{1}{(x-2)(x-10)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)} \cdot \frac{3x+2+x-10}{(3x+2)(x-10)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4(x-2)}{(x-2)(3x+2)(x-10)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4}{(3x+2)(x-10)} = \frac{4}{8 \cdot (-8)} = \frac{-1}{16} = \frac{a}{b} \end{aligned}$$

$$b > 0 \Leftrightarrow b = 16; a = -1$$

$$S = 6a^2 - b = 6 \cdot (-1)^2 - 16 = -10$$

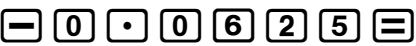
MTCT CASIO -580VN

 màn hình xuất hiện

$$\frac{1}{-4x-4} + \frac{1}{x^2-12x+20}$$

tiếp tục  màn hình xuất hiện

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3x^2-4x-4} + \frac{1}{x^2-12x+20} \\ &-0.06250156256 \\ &-0.0625 \end{aligned}$$



kết quả $\approx -0,0625 \rightarrow \frac{-1}{16}$

$$-\frac{1}{16}$$

Câu 25. Biết $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 - 3x + 1} - (ax + b) \right) = 0$. Tính $a - 4b$.

A. 3.

B. 5.

C. -1.

D. 2.

Lời giải:

Tự luận

cách 1:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 - 3x + 1} - (ax + b) \right) = 0 \Rightarrow a > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 - 3x + 1} - (ax + b) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 3x + 1 - (ax + b)^2}{\sqrt{4x^2 - 3x + 1} + (ax + b)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 3x + 1 - a^2x^2 - 2abx - b^2}{x \left(\sqrt{4 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + a + \frac{b}{x} \right)} = 0$$

khi bậc tử < bậc mẫu

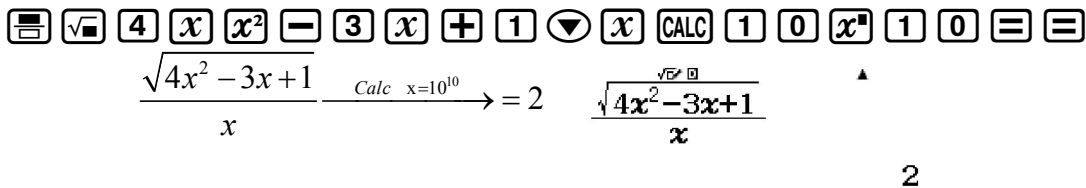
$$\text{tức là } \begin{cases} 4 - a^2 = 0 \\ -3 - 2ab = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -\frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow a - 4b = 2 - 4 \cdot \frac{-3}{4} = 5$$

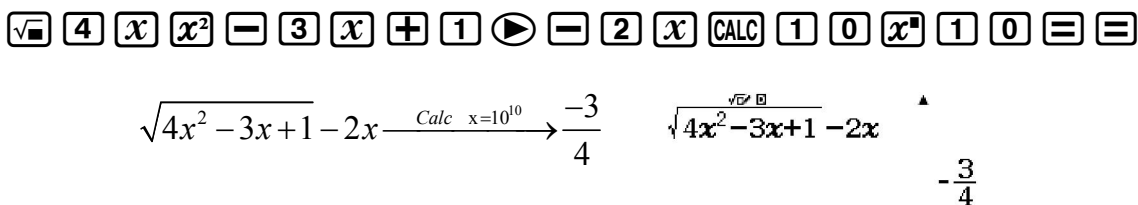
$$\text{cách 2 : bí kíp } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax^n + bx^{n-1} + \dots)] \Rightarrow \begin{cases} a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^n} \\ b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax^n] \\ \dots \end{cases}$$

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 3x + 1}}{x} = 2$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 - 3x + 1} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 3x + 1 - 4x^2}{\left(\sqrt{4x^2 - 3x + 1} + 2x \right)} = \frac{-3}{2 + 2} = \frac{-3}{4}$$

MTCT CASIO -580VN





Câu 26. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{4x^2 + 1}}{2x + 3}$.

A. $-\frac{1}{2}$.

B. $+\infty$.

C. $-\infty$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải:

Tự luận

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{4x^2 + 1}}{2x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x}} - \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} \right)}{x \left(2 + \frac{3}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x}} - \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} \right)}{x \left(2 + \frac{3}{x} \right)} = \frac{-(1-2)}{2} = \frac{1}{2}$$

MTCT CASIO -580VN

$$\frac{\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{4x^2 + 1}}{2x + 3} \xrightarrow{\text{Calc } x=-10^{10}} \frac{1}{2}$$



$$\frac{\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{4x^2 + 1}}{2x + 3}$$

xuất hiện

0.5000000001

Câu 27. Cho $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a\sqrt{x^2 + 1} + 2017}{x + 2018} = \frac{1}{2}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + bx + 1} - x) = 2$. Tính $P = 4a + b$.

A. $P = 3$.

B. $P = -1$.

C. $P = 2$.

D. $P = 1$.

Lời giải:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a\sqrt{x^2 + 1} + 2017}{x + 2018} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 2017}{x + 2018} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a(-x) \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 2017}{x + 2018} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(-a \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \frac{2017}{x} \right)}{x \left(1 + \frac{2018}{x} \right)} = \frac{-a}{1} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + bx + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + bx + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + bx + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(b + \frac{1}{x} \right)}{x \left(\sqrt{1 + \frac{b}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} = \frac{b}{1+1} = 2 \Rightarrow b = 4$$

$$P = 4a + b = 4 \left(-\frac{1}{2} \right) + 4 = 2$$

Câu 28. Giá trị của số thực m sao cho $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x^2 - 1)(mx + 3)}{x^3 + 4x + 7} = 6$ là

A. $m = -3$.

B. $m = 3$.

C. $m = 2$.

D. $m = -2$.

Lời giải:

Tự luận

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x^2 - 1)(mx + 3)}{x^3 + 4x + 7} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(2 - \frac{1}{x^2}\right) x \left(m + \frac{3}{x}\right)}{x^3 \left(1 + \frac{4}{x^2} + \frac{7}{x^3}\right)} = \frac{2m}{1} = 6 \Rightarrow m = 3$$

*** MTCT CASIO -580VN**

gán $m = Y$

thử đáp án A ta có

$\boxed{\frac{1}{x}} \boxed{(} \boxed{2} \boxed{x} \boxed{x^2} \boxed{-} \boxed{1} \boxed{)} \boxed{(} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{x} \boxed{+} \boxed{3} \boxed{)} \boxed{\nabla} \boxed{x} \boxed{x^3} \boxed{3} \boxed{\rightarrow} \boxed{+} \boxed{4} \boxed{x} \boxed{+} \boxed{7} \boxed{\text{CALC}}$
 $\boxed{1} \boxed{0} \boxed{x^3} \boxed{1} \boxed{0} \boxed{=} \boxed{-} \boxed{3} \boxed{=} \boxed{=}$

$$\frac{(2x^2 - 1)(yx + 3)}{x^3 + 4x + 7}$$

-5.999999999

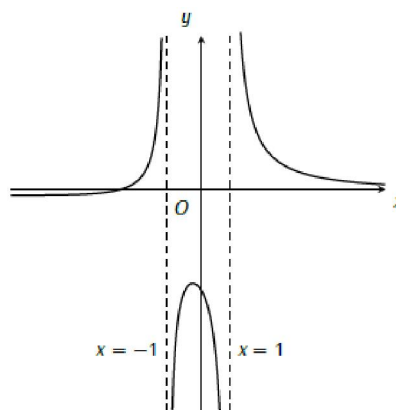
thử đáp án B ta có

$\boxed{\frac{1}{x}} \boxed{(} \boxed{2} \boxed{x} \boxed{x^2} \boxed{-} \boxed{1} \boxed{)} \boxed{(} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{x} \boxed{+} \boxed{3} \boxed{)} \boxed{\nabla} \boxed{x} \boxed{x^3} \boxed{3} \boxed{\rightarrow} \boxed{+} \boxed{4} \boxed{x} \boxed{+} \boxed{7} \boxed{\text{CALC}}$
 $\boxed{1} \boxed{0} \boxed{x^3} \boxed{1} \boxed{0} \boxed{=} \boxed{3} \boxed{=} \boxed{=}$

$$\frac{(2x^2 - 1)(yx + 3)}{x^3 + 4x + 7}$$

6.000000001

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào **đúng**?



A. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = +\infty$.

B. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -\infty$.

C. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = +\infty$.

D. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = -\infty$.

Lời giải:

Bình luận

Khi gặp dạng đồ thị cần nhớ :

khi x từ phía lớn hơn về vị trí không xác định (kí hiệu là $+$) nhánh đồ thì hướng lên là $+$ vô cùng

khi x từ phía nhỏ hơn về vị trí không xác định (kí hiệu là $-$) nhánh đồ thì hướng xuống là $-$ vô cùng

Câu 30. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{3x+1}-4}{3-\sqrt{x+4}}$.

A. $-\frac{9}{4}$.

B. -3 .

C. -18 .

D. $-\frac{3}{8}$.

Lời giải: tự luận dạng vô định $\frac{0}{0}$ nhân liên hợp khử vô định

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{3x+1}-4}{3-\sqrt{x+4}} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(3+\sqrt{x+4})(\sqrt{3x+1}-4)(\sqrt{3x+1}+4)}{(3-\sqrt{x+4})(3+\sqrt{x+4})(\sqrt{3x+1}+4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x+1-16}{9-x-4} \cdot \frac{(3+\sqrt{x+4})}{(\sqrt{3x+1}+4)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3(x-5)}{-(x-5)} \cdot \frac{(3+\sqrt{x+4})}{(\sqrt{3x+1}+4)} = \frac{3}{-1} \cdot \frac{3+3}{4+4} = -\frac{9}{4} \end{aligned}$$

MTCT CASIO -580VN

cách 1: dùng Calc $\frac{\sqrt{3x+1}-4}{3-\sqrt{x+4}} \xrightarrow{\text{Calc } x=4,99999} -\frac{9}{4}$



xuất hiện $\frac{\sqrt{3x+1}-4}{3-\sqrt{x+4}}$
-2.25000043

sau đó  $-\frac{9}{4}$

cách 2: dùng công cụ đạo hàm





 $\frac{dx}{dx} \frac{(\sqrt{3x+1}-4)}{(3-\sqrt{x+4})} \Big|_{x=5}$
-2.25

$$\frac{d}{dx} (\sqrt{3x+1}-4) \Big|_{x=5}$$

$$\frac{\frac{d}{dx} (\sqrt{3x+1}-4) \Big|_{x=5}}{\frac{d}{dx} (3-\sqrt{x+4}) \Big|_{x=5}}$$

Câu 31. Tính giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1}$.

A. $I = \frac{7}{8}$.

B. $I = \frac{3}{2}$.

C. $I = \frac{3}{8}$.

D. $I = \frac{3}{4}$.

Lời giải: dạng vô định $\frac{0}{0}$

tự luận nhân liên hợp khử vô định

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x - \sqrt{x+3})}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{(2x + \sqrt{x+3})}{(2x + \sqrt{x+3})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - x - 3}{(x-1)(x+1)(2x + \sqrt{x+3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(4x+3)}{(x-1)(x+1)(2x + \sqrt{x+3})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(4x+3)}{(x+1)(2x + \sqrt{x+3})} = \frac{7}{8} \end{aligned}$$

MTCT CASIO -580VN tương tự câu 30 (bấm tại lớp để rèn luyện và học hỏi)

Câu 32. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - \sqrt{x^2+x+2}}{x-1}$.

A. $\frac{1}{12}$

B. $+\infty$

C. $-\frac{3}{2}$

D. $-\frac{2}{3}$.

Lời giải: dạng vô định $\frac{0}{0}$

tự luận nhân liên hợp khử vô định

$$x \rightarrow 1 \Rightarrow \sqrt[3]{x+7} \rightarrow 2, \sqrt{x^2+x+2} \rightarrow 2$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - \sqrt{x^2+x+2}}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt[3]{x+7} - 2}{x-1} - \frac{\sqrt{x^2+x+2} - 2}{x-1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+7-8}{(x-1) \left[\sqrt[3]{(x+7)^2} + 2\sqrt[3]{x+7} + 4 \right]} - \frac{x^2+x+2-4}{(x-1)(\sqrt{x^2+x+2}+2)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{(x-1) \left[\sqrt[3]{(x+7)^2} + 2\sqrt[3]{x+7} + 4 \right]} - \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(\sqrt{x^2+x+2}+2)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\left[\sqrt[3]{(x+7)^2} + 2\sqrt[3]{x+7} + 4 \right]} - \frac{(x+2)}{(\sqrt{x^2+x+2}+2)} \right) \\ &= \frac{1}{12} - \frac{3}{4} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

MTCT CASIO -580VN tương tự câu 30 (bấm tại lớp để rèn luyện và học hỏi)

Câu 33. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^3 - a^3}$.

A. $\frac{a-1}{3a^2}$.

B. $+\infty$.

C. $\frac{a+1}{3a^2}$.

D. $\frac{a-1}{3a}$.

Lời giải: dạng vô định $\frac{0}{0}$

tự luận $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^3 - a^3} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x-1)}{(x-a)(x^2 + xa + a^2)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-1)}{(x^2 + xa + a^2)} = \frac{a-1}{3a^2}$

MTCT CASIO -580VN tương tự câu 30 (bấm tại lớp để rèn luyện và học hỏi)
gán $a = 3$ (vì mẫu có kết quả bội 3)

Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(a; b)$. Điều kiện cần và đủ để hàm số liên tục trên $[a; b]$ là

A. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = f(b)$.

B. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

C. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

D. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = f(b)$.

Lời giải:
định lý sgk

Câu 35. Tìm tham số thực m để hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 12}{x + 4} & \text{khi } x \neq -4 \\ mx + 1 & \text{khi } x = -4 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = -4$.

A. $m = 4$.

B. $m = 3$.

C. $m = 2$.

D. $m = 5$.

Lời giải:

Để hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = -4$ thì

$$\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = f(-4) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + x - 12}{x + 4} = -4m + 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -4} \frac{(x+4)(x-3)}{x+4} = -4m + 1$$

$$\Leftrightarrow -7 = -4m + 1 \Rightarrow m = 2$$

Câu 36. Có tất cả bao nhiêu giá trị của a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{ax^2 - (a-2)x - 2}{\sqrt{x+3} - 2} & \text{khi } x \neq 1 \\ 8 + a^2 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại $x = 1$?

A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. 2.

Lời giải:

để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ thì

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 - (a-2)x - 2}{\sqrt{x+3} - 2} = 8 + a^2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(ax+2)(\sqrt{x+3}+2)}{x+3-4} = 8 + a^2$$

$$\Leftrightarrow (a+2) \cdot 4 = 8 + a^2 \Rightarrow a^2 - 4a = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 4 \end{cases}$$

Vậy có 2 giá trị a.

Câu 37. Hàm số nào trong các hàm số dưới đây **không** liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. $y = |x|$.

B. $y = \frac{x}{x+1}$.

C. $y = \sin x$.

D. $y = \frac{2x-1}{x^2+1}$.

Lời giải:

bí kíp: Các hàm số **không** liên tục trên $\mathbb{R}$ là các hàm phân thức với mẫu bằng 0 có nghiệm

Câu 38. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} (mx+n)^2 & \text{khi } x \geq 1 \\ 2mnx+3 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Tính $m^2 + n^2$.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải:

Để hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thì

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} (mx+n)^2 = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2mnx+3) \Leftrightarrow (m+n)^2 = 2mn+3$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 2mn + n^2 = 2mn + 3 \Rightarrow m^2 + n^2 = 3.$$

Câu 39. Gọi a, b là hai số thực để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+ax+b}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 2ax-1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Tính $a-b$.

A. 0.

B. -1.

C. -5.

D. 7.

Lời giải:

Để hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thì

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+ax+b}{x-1} = 2ax-1$$

suy ra $x=1$ là nghiệm của tử $x^2+ax+b \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0 \Rightarrow 1+a+b=0$ nghiệm còn lại là $x=b$ (đl Viet)

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+ax+b}{x-1} = 2a-1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-b)}{x-1} = 2a-1$$

vậy

$$\Rightarrow \begin{cases} 1+a+b=0 \\ 1-b=2a-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-4 \end{cases} \Rightarrow a-b=7$$

bí kíp: MTCT 580 VN

đối với phân thức ta lấy đạo hàm tử tại $x=1$ và chia cho đạo hàm mẫu tại $x=1$, còn đa thức thay $x=1$.

lưu ý hàm phân thức có tử và mẫu chung 1 nghiệm (dạng $\frac{0}{0}$)

$$\frac{(x^2+ax+b) \Big|_{x=1}}{(x-1) \Big|_{x=1}} = \frac{2+a}{1} = 2+a = 2a-1 \Rightarrow a=3$$

$$1+a+b=0 \Rightarrow b=-4$$

$$a-b=7$$

Câu 40. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[a; b]$. Tìm mệnh đề **đúng**.

A. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f(a)f(b) > 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm trong khoảng $(a; b)$.

B. Nếu $f(a)f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(a; b)$.

C. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục, tăng trên $[a; b]$ và $f(a)f(b) > 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm trong khoảng $(a; b)$.

D. Nếu phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trong khoảng $(a; b)$ thì hàm số $f(x)$ liên tục trên $(a; b)$.

Lời giải:

định lý sgk

Câu 41. Phương trình nào dưới đây có nghiệm trong khoảng $(0;1)$

- A.** $2x^2 - 3x + 4 = 0$. **B.** $(x-1)^5 - x^7 - 2 = 0$. **C.** $3x^4 - 4x^2 + 5 = 0$. **D.** $3x^{2017} - 8x + 4 = 0$.

Lời giải:

thay $x = 0, x = 1$ vào các đáp án A,B,C,D.

biểu thức nào cho kết quả trái dấu (1 kết quả âm và 1 kết quả dương) đó là đáp án.

Câu 42. Cho phương trình $2x^4 - 5x^2 + x + 1 = 0$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A.** (1) có nghiệm trong khoảng $(-1;1)$. **B.** (1) chỉ có một nghiệm trong khoảng $(-2;1)$.
C. (1) có ít nhất hai nghiệm trong $(1;2)$. **D.** (1) không có nghiệm trong khoảng $(-2;0)$.

Lời giải: dùng công cụ Table

MTCT CASIO -580VN là Mode 8

kiểm tra các vùng đổi dấu

Tự luận

Đặt $f(x) = 2x^4 - 5x^2 + x + 1$

$f(-1) = -1, f(0) = 1$

$f(-1)f(0) < 0 \Rightarrow \exists x_0 \in (-1;0), f(x_0) = 0$

Câu 43. Cho phương trình $(m^2 + 3)(x-1)(x^2 - 4) - x^3 + 3 = 0$ (1), với m là tham số. Khẳng định nào sau đây về phương trình (1) là khẳng định **đúng**?

A. (1) có đúng 4 nghiệm phân biệt.

B. (1) vô nghiệm.

C. (1) có ít nhất 2 nghiệm phân biệt.

D. (1) có đúng một nghiệm.

Lời giải:

Bí kíp:

chọn các giá trị x sao cho biểu thức không còn phụ thuộc m (hoặc biểu thức có m xác định 1 loại dấu)

$$(m^2 + 3)(x-1)(x^2 - 4) \xrightarrow[x=\pm 2]{x=1} 0$$

chẳng hạn

$$P = -x^3 + 3 \begin{cases} x=1 \rightarrow P=2 \\ x=2 \rightarrow P=-5 \\ x=-2 \rightarrow P=11 \end{cases}$$

! số nghiệm của 1 phương trình nhỏ hơn hoặc bằng bậc của phương trình

Tự luận

Đặt $f(x) = (m^2 + 3)(x-1)(x^2 - 4) - x^3 + 3$

ta có

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(m^2 + 3)(x-1)(x^2 - 4) - x^3 + 3] = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left[(m^2 + 3) \left(1 - \frac{1}{x}\right) \left(1 - \frac{4}{x^2}\right) - 1 + \frac{3}{x^3} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 (m^2 + 3 - 1) = -\infty < 0$$

$$f(-2) = 11 > 0$$

$$f(2) = -5 < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(m^2 + 3)(x-1)(x^2 - 4) - x^3 + 3] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left[(m^2 + 3) \left(1 - \frac{1}{x}\right) \left(1 - \frac{4}{x^2}\right) - 1 + \frac{3}{x^3} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 (m^2 + 3 - 1) = +\infty > 0$$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm.

MTCT CASIO -580VN

giá trị cực đại . giá trị cực tiểu > 0 thì pt có 1 nghiệm

giá trị cực đại . giá trị cực tiểu = 0 thì pt có 2 nghiệm

giá trị cực đại . giá trị cực tiểu < 0 thì pt có 3 nghiệm

cho $m=y=1, x=100$

$$(y^2+3)(x-1)(x^2-4) \triangleright (y^2+3)(x-1)(x^2-4) \triangleright$$

$$y = 11$$

kết quả

$$2958419$$

dùng Calc 100 suy ra $f(x) = 3x^3 - 4x^2 - 16x + 19$

Mode 9 chọn 2 chọn 3 nhập

$$\begin{array}{r} ax^3+bx^2+cx+d \\ 3x^3- \\ + \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} i \\ 4x^2- \\ 16x \end{array}$$

sau đó bấm = liên tiếp

$$19$$

$$\begin{array}{l} \text{Cực đại của} \\ y=ax^3+bx^2+cx+d \\ y= \end{array}$$

$$28.01940496$$

$$\begin{array}{l} \text{Cực tiểu của} \\ y=ax^3+bx^2+cx+d \\ y= \end{array}$$

$$-5.295125124$$

kết luận: 3 nghiệm. hihi. lợi hại quá

Câu 44. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $m(x^{2019} - 1)(x - 2)^{2020} + 2x - 3 = 0$ vô nghiệm.

A. $m = 1$

B. $\forall m \in \mathbb{R}$

C. $m = 0$

D. Không có giá trị m

Lời giải:

Bí kíp : pt bậc lẻ luôn có nghiệm

$m(x^{2019} - 1)(x - 2)^{2020} + 2x - 3 = 0$ bậc 4039 nên luôn có nghiệm.

Tự luận

Đặt $f(x) = m(x^{2019} - 1)(x - 2)^{2020} + 2x - 3$

ta có $f(1) = -1 < 0, f(2) = 1 > 0, f(1) \cdot f(2) < 0 \Rightarrow \exists x_0 \in (1; 2), f(x_0) = 0$.

Vậy pt luôn có nghiệm.

②. CHỦ ĐỀ 2. ĐẠO HÀM

Câu 45. Cho $y = x^3 + 1$. Gọi Δx là số gia của đối số tại x và Δy là số gia tương ứng của hàm số, tính $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

A. $3x^2 - 3x\Delta x + \Delta x^3$.

B. $3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2$.

C. $3x^2 + 3x\Delta x - \Delta x^2$.

D. $3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^3$.

Lời giải:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^3 + 1 - (x^3 + 1)}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2)}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2$$

Câu 46. Số gia Δ_y của hàm số $y = x^2 + 2x - 5$ tại điểm $x_0 = 1$ là

A. $(\Delta_x)^2 + 2\Delta_x - 5$.

B. $(\Delta_x)^2 - 2\Delta_x$.

C. $(\Delta_x)^2 - 4\Delta_x$.

D. $(\Delta_x)^2 + 4\Delta_x$.

Lời giải:

$$\Delta_y = f(\Delta_x + 1) - f(1) = (\Delta_x + 1)^2 + 2(\Delta_x + 1) - 5 - (1^2 + 2 \cdot 1 - 5) = (\Delta_x)^2 + 4\Delta_x$$

Câu 47. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm thỏa mãn $f'(6) = 2$. Giá trị của biểu thức $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - f(6)}{x - 6}$ bằng

A. 12.

B. 2.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải: theo định nghĩa đạo hàm $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - f(6)}{x - 6} = f'(6) = 2$.

Câu 48. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 1 \\ 2x, & x < 1. \end{cases}$ Mệnh đề **sai** là

A. $f'(1) = 2$.

B. $f'(1) \nexists$.

C. $f'(0) = 2$.

D. $f'(2) = 4$.

Lời giải:

$$y = f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 1 \\ 2x, & x < 1. \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 1 \\ 2, & x < 1. \end{cases}$$

$$f'(1^+) = f'(1^-) = 2$$

nên tồn tại đạo hàm tại $x = 1$.

Câu 49. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ ax - b - 1 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Biết $f(x)$ có đạo hàm tại $x = 0$. Tính $T = a + 2b$.

A. $T = -4$.

B. $T = 0$.

C. $T = -6$.

D. $T = 4$.

Lời giải:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ ax - b - 1 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \Rightarrow 1 = -b - 1 \Rightarrow b = -2$$

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ ax - b - 1 & \text{khi } x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 2ax + b & \text{khi } x < 0 \\ a & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

$$f'(0^+) = f'(0^-) \Rightarrow a = b$$

$$a = b = -2$$

$$T = a + 2b = -6$$

Câu 50. Đạo hàm của hàm số $y = 2x^5 - 4x^3 - x^2$ là

A. $y' = 10x^4 - 3x^2 - 2x$. B. $y' = 5x^4 - 12x^2 - 2x$. C. $y' = 10x^4 + 12x^2 - 2x$. D. $y' = 10x^4 - 12x^2 - 2x$.

Lời giải:

$$y = 2x^5 - 4x^3 - x^2 \Rightarrow y' = 10x^4 - 12x^2 - 2x$$

Câu 51. Cho hàm số $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Đạo hàm của hàm số $f(x)$ là

A. $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$. B. $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$. C. $f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$. D. $f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$.

Lời giải: nhắc lại công thức đạo hàm nhanh $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$$

MTCT CASIO -580VN

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{2x-1}{x+1} \right) \Big|_{x=x} \times (x+1)^2 \quad \left(\frac{2x-1}{x+1} \right) \Big|_{x=x} \times (x+1)^2$$

và nhân với bình phương mẫu

$$\text{dùng Calc 100 kết quả } \frac{d}{dx} \left(\frac{2x-1}{x+1} \right) \Big|_{x=x} \times (x+1)^2 \quad \text{vậy tử} = 3.$$

3

Câu 52. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{2x^2 + 2x + 3}{x^2 + x + 3}$.

A. $2 - \frac{3}{x^2 + x + 3}$.

B. $\frac{6x+3}{(x^2 + x + 3)^2}$.

C. $\frac{3}{(x^2 + x + 3)^2}$.

D. $\frac{x+3}{x^2 + x + 3}$.

Lời giải:

$$y = \frac{2x^2 + 2x + 3}{x^2 + x + 3} \Rightarrow y' = \frac{6x+3}{(x^2 + x + 3)^2}$$

MTCT CASIO -580VN

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{2x^2 + 2x + 3}{x^2 + x + 3} \right) \Big|_{x=x} \times (x^2 + x + 3)^2$$

tương tự

602. 99999999

kết quả Calc 100 là : 603 suy ra tử = 6x+3

Câu 53. Cho hàm số $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$. Tính $f'(0)$.

A. 42.

B. 24.

C. -24.

D. 0.

Lời giải:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{x} = (-1) \cdot (-2) \cdot \dots \cdot (-4) = 4! = 24$$

dạng này tổng quát

$$f(x) = (x-0)(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \dots (x-n)$$

$$f'(0) = (-1)^n \cdot n!$$

$$f'(1) = (-1)^{n-1} \cdot n!$$

ứng dụng đạo hàm giải 2 câu trong đề Trần Biên - ĐN

Câu 38(TB-ĐN) Cho $f(x) = \frac{x}{(x-1)(x-2) \dots (x-2018)}$. Tính $f'(0)$.

Lời giải:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{(x-1)(x-2) \dots (x-2018)} - 0}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x-1)(x-2) \dots (x-2018)} = \frac{1}{(-1) \cdot (-2) \cdot \dots \cdot (-2018)} = \frac{1}{2018!} \end{aligned}$$

Câu 40(TB-ĐN) Cho $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2018} + x - 2}{x^{2017} + x - 2} = \frac{a}{b}$. Tính $a^2 - b^2$

Dạng $\frac{0}{0}$ dùng MTCT 580 VN như sau

SHIFT **∫dx** **x** **x^□** **2** **0** **1** **8** **▶** **+** **x** **-** **2** **▶** **1** **=**

$$\frac{d}{dx} (x^{2018} + x - 2) \Big|_{x=1}$$

$$\frac{d}{dx} (x^{2017} + x - 2) \Big|_{x=1}$$

2019

$a = 2019$

SHIFT **∫dx** **x** **x^□** **2** **0** **1** **7** **▶** **+** **x** **-** **2** **▶** **1** **=**

$$\frac{d}{dx} (x^{2017} + x - 2) \Big|_{x=1}$$

2018

$b = 2018$

Suy ra: $a^2 - b^2 = 4037$

Câu 54. Cho $\left(\frac{2x^2-3x+5}{x-3}\right)' = \frac{ax^2-bx+c}{(x-3)^2}$. Tính $S = a+b+c$.

A. $S = 0$.

B. $S = 12$.

C. $S = -6$.

D. $S = 18$.

Lời giải:

tự luận

$$\left(\frac{2x^2-3x+5}{x-3}\right)' = \frac{2x^2-12x+4}{(x-3)^2} = \frac{ax^2-bx+c}{(x-3)^2} \Rightarrow a=2, b=12, c=4.$$

MTCT CASIO -580VN

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2x^2-3x+5}{x-3}\right)\Big|_{x=3}$$

18804

Calc 100 phân tích 1/88/04 thì từ $= 2x^2 - 12x + 4 \Rightarrow a=2, b=12, c=4$

$$S = a+b+c = 2+12+4 = 18$$

Câu 55. Biết $\left(\frac{3-2x}{\sqrt{4x-1}}\right)' = \frac{ax-b}{(4x-1)\sqrt{4x-1}}$. Tính $E = \frac{a}{b}$.

A. $E = -1$.

B. $E = -4$.

C. $E = -2$.

D. $E = 4$.

Lời giải:

$$\begin{aligned} \left(\frac{3-2x}{\sqrt{4x-1}}\right)' &= \frac{-2\sqrt{4x-1} - \frac{4(3-2x)}{2\sqrt{4x-1}}}{(4x-1)} = \frac{-4(4x-1) - 4(3-2x)}{2(4x-1)\sqrt{4x-1}} = \frac{-8x-8}{2(4x-1)\sqrt{4x-1}} \\ &= \frac{-4x-4}{(4x-1)\sqrt{4x-1}} = \frac{ax-b}{(4x-1)\sqrt{4x-1}} \Rightarrow a=-4, b=4 \\ E &= \frac{a}{b} = -1 \end{aligned}$$

Câu 56. Tính đạo hàm của hàm số $y = (x-2)\sqrt{x^2+1}$.

A. $y' = \frac{2x^2-2x-1}{\sqrt{x^2+1}}$.

B. $y' = \frac{2x^2+2x+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

C. $y' = \frac{2x^2-2x+1}{\sqrt{x^2-1}}$.

D. $y' = \frac{2x^2-2x+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Lời giải:

$$y = (x-2)\sqrt{x^2+1} \Rightarrow y' = \frac{2x^2-2x+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Câu 57. Hàm số nào sau đây không có đạo hàm trên $\mathbb{R}$?

A. $y = |x-1|$.

B. $y = \sqrt{x^2-4x+5}$.

C. $y = \sin x$.

D. $y = \sqrt{2-\cos x}$.

Lời giải:

các hàm giá trị tuyệt đối không có đạo hàm tại nghiệm của nó.

$$y = |x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{kh}i x \geq 1 \\ 1-x & \text{kh}i x < 1 \end{cases}$$

$$f'(1^+) = 1 \neq f'(1^-) = -1$$

Câu 58. Tính đạo hàm của hàm số $y = (x^2-x+1)^3$ tại điểm $x = -1$.

A. 27.

B. -27.

C. 81.

D. -81.

Lời giải:

$$y' = 3(x^2-x+1)^2(2x-1)$$

$$y'(-1) = -81$$

$$\frac{d}{dx}((x^2-x+1)^3)\Big|_{x=-1}$$

-81

Câu 59. Cho hàm số $f(x) = \frac{m}{3}x^3 - (m-2)x^2 + x + 2$. Để đạo hàm $f'(x)$ bằng bình phương của một nhị thức bậc nhất thì giá trị m là

A. -1 hoặc 1 .

B. 1 hoặc 4 .

C. -4 hoặc 4 .

D. Không có giá trị nào.

Lời giải:

$$f(x) = \frac{m}{3}x^3 - (m-2)x^2 + x + 2$$

$$f'(x) = mx^2 - 2(m-2)x + 1$$

Để đạo hàm $f'(x)$ bằng bình phương của một nhị thức bậc nhất thì $\Delta = 0$

$$\Delta = 4(m-2)^2 - 4m = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 4 \end{cases}$$

Câu 60. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - (m-1)x^2 + 2x + m^3$ có $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

A. $[-1-2\sqrt{6}; -1+2\sqrt{6}]$. B. $[1-2\sqrt{6}; 1+2\sqrt{6}]$. C. $[-1-\sqrt{6}; -1+\sqrt{6}]$. D. $[1-\sqrt{6}; 1+\sqrt{6}]$.

Lời giải:

$$y = x^3 - (m-1)x^2 + 2x + m^3$$

$$y' = 3x^2 - 2(m-1)x + 2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 > 0 \\ 4(m-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow m^2 - 2m - 5 \leq 0 \Rightarrow 1 - \sqrt{6} \leq m \leq 1 + \sqrt{6}$$

Câu 61. Cho hàm số $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 7x - 11$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x) \geq 0$ là

A. $[1; 7]$.

B. $(-\infty; 1] \cup [7; +\infty)$.

C. $[-7; -1]$.

D. $[-1; 7]$.

Lời giải:

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 7x - 11$$

$$f'(x) = -x^2 + 8x - 7 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 7$$

Câu 62. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{-5x^2 + 14x - 9}$. Tập hợp các giá trị của x để $f'(x) < 0$ là

A. $(-\infty; \frac{7}{5})$.

B. $(\frac{7}{5}; \frac{9}{5})$.

C. $(1; \frac{7}{5})$.

D. $(\frac{7}{5}; +\infty)$.

Lời giải:

$$f(x) = \sqrt{-5x^2 + 14x - 9}, D = \left[1; \frac{9}{5}\right]$$

$$f'(x) = \frac{-10x + 14}{2\sqrt{-5x^2 + 14x - 9}} < 0 \Rightarrow \frac{9}{5} > x > \frac{7}{5}$$

Câu 63. Biết hàm số $f(x) - f(2x)$ có đạo hàm bằng 18 tại $x = 1$ và đạo hàm bằng 1000 tại $x = 2$. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) - f(4x)$ tại $x = 1$.

A. 2018.

B. 1982.

C. -2018.

D. 1018.

Lời giải:

$$[f(x) - f(2x)]' = f'(x) - 2f'(2x)$$

$$x = 1 \Rightarrow f'(1) - 2f'(2) = 18$$

$$x = 2 \Rightarrow f'(2) - 2f'(4) = 1000$$

$$\Rightarrow f'(1) - 4f'(4) = 2018$$

$$\text{Vậy } [f(x) - f(4x)]' = f'(x) - 4f'(4x)$$

$$x = 1 \Rightarrow f'(1) - 4f'(4) = 2018$$

Câu 64. Cho hàm số $f(x) = x + 2$ và $g(x) = x^2 - 2x + 3$. Đạo hàm của hàm số $y = g(f(x))$ tại $x = 1$ bằng

A. 4.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Lời giải:

cách 1: $y' = [g(f(x))]' = f'(x) \cdot g'(f(x))$

$$f(x) = x + 2 \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 3 \\ f'(x) = 1 \rightarrow f'(1) = 1 \end{cases}$$

$$g(x) = x^2 - 2x + 3 \Rightarrow g'(x) = 2x - 2$$

$$g'(3) = 4$$

$$\text{Đạo hàm của hàm số } y = g(f(x)) \text{ tại } x = 1 \text{ ta có } f'(1) \cdot g'(f(1)) = f'(1) \cdot g'(3) = 1 \cdot 4 = 4$$

cách 2:

$$y = g(f(x)) = f^2(x) - 2f(x) + 3$$

$$= (x + 2)^2 - 2(x + 2) + 3 = x^2 + 2x + 3$$

$$y' = 2x + 2$$

$$y'(1) = 4$$

Câu 65. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm với mọi $x \in \mathbb{R}$ và thỏa $f(2x) = 4 \cos x \cdot f(x) - 2x$. Tính $f'(0)$.

A. 1.

B. $\frac{\pi}{2}$.

C. 2.

D. 0.

Lời giải:

$$[f(2x)]' = [4 \cos x \cdot f(x) - 2x]'$$

$$\Leftrightarrow 2f'(2x) = -4 \sin x \cdot f(x) + 4 \cos x \cdot f'(x) - 2$$

$$x = 0 \Rightarrow 2f'(0) = 0 + 4f'(0) - 2 \Rightarrow f'(0) = 1$$

Câu 66. Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{3-4x}{x-2}$ tại điểm có tung độ $y = -1$ là

- A. -10 . B. $\frac{9}{5}$. C. $-\frac{5}{9}$. D. $\frac{5}{9}$.

Lời giải:

$$y = \frac{3-4x}{x-2} = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$y' = \left(\frac{3-4x}{x-2} \right)' = \frac{5}{(x-2)^2}$$

$$\text{Hệ số góc tiếp tuyến là } y' \left(\frac{1}{3} \right) = \frac{5}{\left(\frac{1}{3} - 2 \right)^2} = \frac{9}{5}$$

Câu 67. Cho đường cong (C) có phương trình $y = \frac{x-1}{x+1}$. Gọi M là giao điểm của (C) với trục tung. Tiếp tuyến của (C) tại M có phương trình là

- A. $y = -2x - 1$. B. $y = 2x + 1$. C. $y = 2x - 1$. D. $y = x - 2$.

Lời giải:

M là giao điểm của (C) $y = \frac{x-1}{x+1}$ với trục tung nên $x_M = 0, y_M = -1$

$$y' = \frac{2}{(x+1)^2} \Rightarrow y'(0) = 2. \text{ Tiếp tuyến của } (C) \text{ tại } M \text{ có phương trình là } y = 2x - 1$$

Câu 68. Phương trình các tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 1$ tại các điểm có tung độ bằng 5 là

- A. $y = 20x - 35$. B. $y = -20x - 35$ và $y = 20x + 35$.
C. $y = 20x - 35$ và $y = -20x - 35$. D. $y = -20x + 35$.

Lời giải:

$$y = x^4 - 3x^2 + 1 = 5 \Rightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$y' = 4x^3 - 6x$$

Phương trình các tiếp tuyến là $y = 20x - 35$ và $y = -20x - 35$.

Câu 69. Cho hàm số $y = x^4 - 6x^2 - 3$. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm A có hoành độ $x = 1$ cắt đồ thị hàm số tại điểm B (B khác A). Tọa độ điểm B là

- A. $B(-3; 24)$. B. $B(-1; -8)$. C. $B(3; 24)$. D. $B(0; -3)$.

Lời giải:

$$y = x^4 - 6x^2 - 3$$

$$y' = 4x^3 - 12x$$

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm A có hoành độ $x = 1$ là

$$y = y'(1)(x-1) + y(1) = -8(x-1) + (-8) = -8x$$

$$\text{phương trình hoành độ giao điểm } -8x = x^4 - 6x^2 - 3 \Leftrightarrow x^4 - 6x^2 + 8x - 3 = 0$$

Phương trình đa thức bậc 4

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

MTCT CASIO -580VN Chọn 2~4

chọn 4

0

$$ax^4 + bx^3 + \dots + e = 0$$

$$ax^4 + bx^3 + \dots + e = 0$$

nhập hệ số ta có

1

-3

Tọa độ điểm B là $B(-3; 24)$

Câu 70. Cho hàm số $y = \cos x + m \sin 2x (C)$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị m để tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x = \pi$, $x = \frac{\pi}{3}$ song song hoặc trùng nhau.

A. $m = -\frac{\sqrt{3}}{6}$.

B. $m = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

C. $m = \sqrt{3}$.

D. $m = -2\sqrt{3}$.

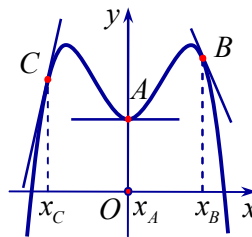
Lời giải:

$$y' = (\cos x + m \sin 2x)' = -\sin x + 2m \cos 2x$$

Để tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x = \pi$, $x = \frac{\pi}{3}$ song song hoặc trùng nhau thì

$$y'(\pi) = y'\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow 2m = -\frac{\sqrt{3}}{2} + 2m \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) \Rightarrow m = -\frac{\sqrt{3}}{6}$$

Câu 71. Hình bên là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Biết rằng tại các điểm A , B , C đồ thị hàm số có tiếp tuyến được thể hiện trên hình vẽ bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f'(x_C) < f'(x_A) < f'(x_B)$.

B. $f'(x_B) < f'(x_A) < f'(x_C)$.

C. $f'(x_A) < f'(x_C) < f'(x_B)$.

D. $f'(x_A) < f'(x_B) < f'(x_C)$.

Lời giải:

Hệ số góc của tiếp tuyến dương khi đường thẳng đi qua góc phân tư thứ nhất và thứ ba.

Hệ số góc của tiếp tuyến âm khi đường thẳng đi qua góc phân tư thứ hai và thứ tư.

Từ đồ thị đề cho ta có $f'(x_B) < 0 = f'(x_A) < f'(x_C)$

Câu 72. Trên đồ thị $(C): y = \frac{x-1}{x-2}$ có bao nhiêu điểm M mà tiếp tuyến với (C) tại M song song với đường thẳng $d: x + y = 1$.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Lời giải:

$$d: x + y = 1 \Rightarrow y = -x + 1$$

$$(C): y = \frac{x-1}{x-2} \Rightarrow y' = \frac{-1}{(x-2)^2} < 0, \forall x \neq 2$$

tiếp tuyến với (C) tại M song song với đường thẳng $d: x + y = 1$ thì

$$y' = -1 = \frac{-1}{(x-2)^2} \Leftrightarrow (x-2)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

khi $x = 1 \Rightarrow y = 0$ tiếp tuyến là $y = -x + 1 \equiv d$ (loại)

khi $x = 3 \Rightarrow y = 2$ tiếp tuyến là $y = -(x-3) + 2 = -x + 5 \not\equiv d$ (thỏa)

Lưu ý: cẩn thận khi gặp loại này vì chủ quan nghĩ rằng có 2 nghiệm sẽ có 2 tiếp tuyến //d.

Câu 73. Tìm phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng

$y = \frac{1}{3}x - 5$ và tiếp điểm có hoành độ dương.

A. $y = -3x + 10$.

B. $y = -3x + 2$.

C. $y = -3x + 6$.

D. $y = -3x - 2$.

Lời giải:

$$y' = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{3}x - 5$ $\frac{-3}{(x-1)^2} \cdot \frac{1}{3} = -1 \Rightarrow (x-1)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

do tiếp điểm có hoành độ dương nên $x = 2$

Vậy phương trình tiếp tuyến là $y = -3x + 10$

Câu 74. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C): $y = 2x^3 - 6x^2 + 3$ có hệ số góc nhỏ nhất là

A. $6x + y - 5 = 0$.

B. $6x + y + 5 = 0$.

C. $6x - y + 3 = 0$.

D. $6x + y - 7 = 0$.

Lời giải:

$$y' = 6x^2 - 12x = 6(x-1)^2 - 6 \geq -6$$

Vậy hệ số góc nhỏ nhất bằng -6 khi $x = 1$. Suy ra phương trình tiếp tuyến là $6x + y - 5 = 0$.

Câu 75. Có tất cả bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ đi qua điểm $A(-1; 0)$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải:

Gọi $d: y = k(x+1)$ đi qua $A(-1; 0)$.

d tiếp xúc (C): $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ khi

$$\begin{cases} k(x+1) = x^3 - 3x^2 + 2x \\ k = 3x^2 - 6x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x^2 - 6x + 2)(x+1) = x^3 - 3x^2 + 2x \\ k = 3x^2 - 6x + 2 \end{cases} \quad (1)$$

số nghiệm (1) là số tiếp tuyến nên **MTCT CASIO -580VN** nhập ta thấy có 3 nghiệm, suy ra có 3 tiếp tuyến đi qua A.

Phương trình đa thức bậc 4

Chọn 2~4

Câu 76. Gọi d là tiếp tuyến của hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ tại điểm có hoành độ bằng -3. Khi đó d tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích là

A. $S = \frac{169}{6}$.

B. $S = \frac{121}{6}$.

C. $S = \frac{25}{6}$.

D. $S = \frac{49}{6}$.

Lời giải:

d là tiếp tuyến của hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ tại điểm có hoành độ bằng -3 có phương trình là:

$$y = 3(x+3) + 4 = 3x + 13$$

d cắt hai trục tọa độ tại $A(0; 13), B\left(-\frac{13}{3}; 0\right)$.

Tam giác OAB có diện tích là $S = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{169}{6}$

Câu 77. Cho hàm số $y = \frac{x+b}{ax-2}$ ($ab \neq -2$). Biết rằng a và b là các giá trị thỏa mãn tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $A(1; -2)$ song song với đường thẳng $d: 3x + y - 4 = 0$. Tính $a - 3b$.

A. -2 .

B. 4 .

C. -1 .

D. 5 .

Lời giải:

$$d: 3x + y - 4 = 0 \Rightarrow y = -3x + 4$$

$$y' = \frac{-2-ab}{(ax-2)^2}$$

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $A(1; -2)$ song song với đường thẳng $d: 3x + y - 4 = 0$ nên

$$\begin{cases} A \in (C) \Rightarrow \frac{1+b}{a-2} = -2 \\ \frac{-2-ab}{(a-2)^2} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a + 3 \\ -2 - a(-2a + 3) = -3(a-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a^2 - 15a + 10 = 0 \\ b = -2a + 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = 1, b = 1 \end{cases}$$

Vậy $a - 3b = -2$.

Câu 78. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{2x+3}$ biết tiếp tuyến đó cắt trục tung và cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB cân là

A. $y = -x - 2$.

B. $y = x + 2$.

C. $y = x - 2$.

D. $y = -x + 2$.

Lời giải:

Bình luận:

Tiếp tuyến đó cắt trục tung và cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB cân là khi có hệ số góc bằng 1 hoặc -1.

$$y' = \frac{-1}{(2x+3)^2} = -1 \Rightarrow (2x+3)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Khi $x = -1, y = 1$ phương trình tiếp tuyến là $y = -1(x+1) + 1 = -x$ (loại vì đi qua O).

Khi $x = -2, y = 0$ phương trình tiếp tuyến là $y = -1(x+2) = -x - 2$ (thỏa)

Câu 79. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $2f(2x) + f(1-2x) = 12x^2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là

A. $y = 2x + 2$.

B. $y = 4x - 6$.

C. $y = 2x - 6$.

D. $y = 4x - 2$.

Lời giải:

$$2f(2x) + f(1-2x) = 12x^2$$

$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow 2f(0) + f(1) = 0 \\ x = \frac{1}{2} \rightarrow 2f(1) + f(0) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = -1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$$

$$\text{Đạo hàm 2 vế ta có } 4f'(2x) - 2f'(1-2x) = 24x$$

$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow 4f'(0) - 2f'(1) = 0 \\ x = \frac{1}{2} \rightarrow 4f'(1) - 2f'(0) = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(0) = 2 \\ f'(1) = 4 \end{cases}$$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = 4(x-1) + 2 = 4x - 2$$

Câu 80. Một vật rơi tự do với phương trình chuyển động là $S = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó t tính bằng giây (s), S tính bằng mét m và $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 4\text{s}$ là?

A. $v = 9,8 \text{ m/s}$

B. $v = 78,4 \text{ m/s}$

C. $v = 39,2 \text{ m/s}$

D. $v = 19,6 \text{ m/s}$

Lời giải:

nhắc lại $v = S'$

$a = v' = S''$

$$S = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow v = gt$$

$$t = 4 \rightarrow v = 9,8 \cdot 4 = 39,2 (\text{m/s})$$

Câu 81. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + 9t$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và S (mét) là quãng đường vật chuyển động trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của chất điểm là

A. 88(m/s).

B. 25(m/s).

C. 100(m/s).

D. 11(m/s).

Lời giải:

$$S = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + 9t$$

$$v = S' = -t^2 + 8t + 9$$

$$0 < t < 10$$

$$v_{\max} \Leftrightarrow (-t^2 + 8t + 9)_{\max} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-b}{2a} = 4 \\ v_{\max} = 25 \end{cases}$$

* MTCT CASIO -580VN sử dụng chức năng Mode 9

Phương trình đa thức bậc?

$$ax^2+bx+c \quad 0x^2+0x+0 \quad ax^2+bx+c \quad 1x^2+8x+9$$

Chọn 2~4

0

9

bấm = liên tiếp ta có

$$\text{GTLN } y = ax^2 + bx + c$$

$$\text{GTLN } y = ax^2 + bx + c$$

4

25

Câu 82. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sin^2 2x - \cos 3x$.

A. $2 \sin 4x - 3 \sin 3x$.

B. $2 \sin 4x + 3 \sin 3x$.

C. $\sin 4x + 3 \sin 3x$.

D. $2 \sin 2x + 3 \sin 3x$

Lời giải:

$$f'(x) = (\sin^2 2x - \cos 3x)' = 4 \sin 2x \cos 2x + 3 \sin 3x = 2 \sin 4x + 3 \sin 3x$$

Câu 83. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{\cos 4x}{2} + 3 \sin 4x$.

A. $12 \cos 4x - 2 \sin 4x$.

B. $12 \cos 4x + 2 \sin 4x$.

C. $-12 \cos 4x + 2 \sin 4x$.

D. $3 \cos 4x - \frac{1}{2} \sin 4x$.

Lời giải:

$$y' = \left(\frac{\cos 4x}{2} + 3 \sin 4x \right)' = 12 \cos 4x - 2 \sin 4x$$

Câu 84. Tính đạo hàm của hàm số $y = \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

A. $y' = -\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}$. B. $y' = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}$. C. $y' = \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}$. D. $y' = -\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}$.

Lời giải:

$$y = \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \Rightarrow y' = -\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}$$

Câu 85. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{\cos 2x}$.

A. $y' = \frac{\sin 2x}{2\sqrt{\cos 2x}}$. B. $y' = \frac{-\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$. C. $y' = \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$. D. $y' = \frac{-\sin 2x}{2\sqrt{\cos 2x}}$.

Lời giải: $y = \sqrt{\cos 2x} \Rightarrow y' = \frac{-\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$

Câu 86. Tính đạo hàm của hàm số sau $y = \frac{\sin x}{\sin x - \cos x}$.

A. $y' = \frac{-1}{(\sin x - \cos x)^2}$. B. $y' = \frac{1}{(\sin x - \cos x)^2}$. C. $y' = \frac{-1}{(\sin x + \cos x)^2}$. D. $y' = \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$.

Lời giải:

$$y = \frac{\sin x}{\sin x - \cos x} \Rightarrow y' = \frac{-1}{(\sin x - \cos x)^2}$$

Câu 87. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x \cos^2 x$.

A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

Lời giải:

$$y = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 = 1$$

$$y' = 0$$

Câu 88. Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{2 + \cos^2 2x}$ bằng

A. $y' = \frac{-\sin 2x}{\sqrt{2 + \cos^2 2x}}$. B. $y' = \frac{-\sin 4x}{2\sqrt{2 + \cos^2 2x}}$. C. $y' = \frac{\cos 2x}{\sqrt{2 + \cos^2 2x}}$. D. $y' = \frac{-\sin 4x}{\sqrt{2 + \cos^2 2x}}$.

Lời giải:

$$y = \sqrt{2 + \cos^2 2x} \Rightarrow y' = \frac{-\sin 4x}{\sqrt{2 + \cos^2 2x}}$$

Câu 89. Đạo hàm của hàm số $y = x \sin x$ là

A. $y' = \sin x - x \cos x$. B. $y' = \sin x + x \cos x$. C. $y' = x \cos x$. D. $y' = -x \cos x$.

Lời giải:

$$y = x \sin x \Rightarrow y' = \sin x + x \cos x$$

Câu 90. Cho hàm số $y = \sin^2 x$. Tìm hệ thức liên hệ giữa y và y' không phụ thuộc vào x .

A. $4(y')^2 + y^2 = 4$. B. $2(y')^2 + 4y^2 = 1$. C. $(y')^2 + (1 - 2y)^2 = 1$. D. $(y')^2 + 4y^2 = 4$.

Lời giải:

$$y' = (\sin^2 x)' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$$

$$(y')^2 = (\sin 2x)^2$$

$$\text{do } (\sin 2x)^2 + (\cos 2x)^2 = 1$$

$$\Rightarrow (y')^2 + (1 - 2y)^2 = (\sin 2x)^2 + (1 - 2\sin^2 x)^2 = (\sin 2x)^2 + (\cos 2x)^2 = 1$$

Câu 91. Vi phân của hàm số $f(x) = 3x^2 - x$ tại điểm $x = 2$ ứng với $\Delta x = 0,1$ là

A. $-0,07$.

B. 10 .

C. $1,1$.

D. $-0,4$.

Lời giải:

$$\Delta y = (6x - 1)\Delta x$$

$$x = 2, \Delta x = 0,1 \rightarrow \Delta y = (6 \cdot 2 - 1) \cdot 0,1 = 1,1$$

Câu 92. Cho hàm số $y = x^3 - 9x^2 + 12x - 5$. Vi phân của hàm số là

A. $dy = (3x^2 - 18x + 12)dx$.

B. $dy = (-3x^2 - 18x + 12)dx$.

C. $dy = -(3x^2 - 18x + 12)dx$.

D. $dy = (3x^2 + 18x - 12)dx$.

Lời giải:

$$y = x^3 - 9x^2 + 12x - 5$$

có vi phân $dy = (3x^2 - 18x + 12)dx$

Câu 93. Hàm số $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ có vi phân là

A. $dy = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}dx$.

B. $dy = \frac{1}{(x^2 + 1)^2}dx$.

C. $dy = \frac{1 - x^2}{x^2 + 1}dx$.

D. $dy = \frac{2x}{x^2 + 1}dx$.

Lời giải:

$$y = \frac{x}{x^2 + 1} \text{ có vi phân là } dy = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}dx$$

Câu 94. Hàm số $y = \tan x - \cot x$ có vi phân là

A. $dy = \frac{1}{\cos^2 2x}dx$.

B. $dy = \frac{4}{\sin^2 2x}dx$.

C. $dy = \frac{4}{\cos^2 2x}dx$.

D. $dy = \frac{1}{\sin^2 2x}dx$.

Lời giải:

$$y = \tan x - \cot x \text{ có vi phân là } dy = \frac{4}{\sin^2 2x}dx$$

Câu 95. Vi phân của hàm số $y = \sin \sqrt{2 + x^2}$ là

A. $dy = \frac{2x + 2}{\sqrt{2 + x^2}} \cos \sqrt{2 + x^2} dx$.

B. $dy = -\frac{x}{\sqrt{2 + x^2}} \cos \sqrt{2 + x^2} dx$.

C. $dy = \frac{x}{\sqrt{2 + x^2}} \cos \sqrt{2 + x^2} dx$.

D. $dy = \frac{(x + 1)}{\sqrt{2 + x^2}} \cos \sqrt{2 + x^2} dx$.

Lời giải:

$$\text{Vi phân của hàm số } y = \sin \sqrt{2 + x^2} \text{ là } dy = \frac{x}{\sqrt{2 + x^2}} \cos \sqrt{2 + x^2} dx$$

Câu 96. Hàm số $y = \tan^2 \frac{x}{2}$ có vi phân là

A. $dy = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos^3 \frac{x}{2}} dx$.

B. $dy = \frac{2 \sin \frac{x}{2}}{\cos^3 \frac{x}{2}} dx$.

C. $dy = \frac{\sin \frac{x}{2}}{2 \cos^3 \frac{x}{2}} dx$.

D. $dy = \tan^3 \left(\frac{x}{2} \right) dx$.

Lời giải:

$$\text{Hàm số } y = \tan^2 \frac{x}{2} \text{ có vi phân là } dy = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos^3 \frac{x}{2}} dx$$

Câu 97. Hàm số $y = \sqrt{\cot 2x}$ có vi phân là

A. $dy = \frac{1 + \cot^2 2x}{\sqrt{\cot 2x}} dx$. **B.** $dy = \frac{-(1 + \cot^2 2x)}{\sqrt{\cot 2x}} dx$. **C.** $dy = \frac{1 + \tan^2 2x}{\sqrt{\cot 2x}} dx$. **D.** $dy = \frac{-(1 + \tan^2 2x)}{\sqrt{\cot 2x}} dx$.

Lời giải:

Hàm số $y = \sqrt{\cot 2x}$ có vi phân là $dy = \frac{-(1 + \cot^2 2x)}{\sqrt{\cot 2x}} dx$

Câu 98. Hàm số $y = x \sin x + \cos x$ có vi phân là

A. $dy = (x \cos x - \sin x) dx$.

B. $dy = (x \cos x) dx$.

C. $dy = (\cos x - \sin x) dx$.

D. $dy = (x \sin x) dx$.

Lời giải:

Hàm số $y = x \sin x + \cos x$ có vi phân là $dy = (x \cos x) dx$

Câu 99. Cho hàm số $y = x + \sqrt{x^2 + 1}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $\sqrt{1 + x^2} dy - y dx = 0$.

B. $\sqrt{1 + x^2} dx - dy = 0$.

C. $x dx + \sqrt{1 + x^2} dy = 0$.

D. $\sqrt{1 + x^2} dy + y dx = 0$.

Lời giải:

$$dy = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) dx = \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \frac{y}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} dy = y dx \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} dy - y dx = 0.$$

Câu 100. Tính đạo hàm cấp hai của hàm số $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ tại điểm $x = 2$.

A. $f''(2) = 14$.

B. $f''(2) = 10$.

C. $f''(2) = 28$.

D. $f''(2) = 1$.

Lời giải:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x$$

$$f''(x) = 6x - 2$$

$$f''(2) = 6 \cdot 2 - 2 = 10.$$

Câu 101. Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x) = x \sin x - 3$ là biểu thức nào trong các biểu thức sau?

A. $2 \cos x - x \sin x$.

B. $-x \sin x$.

C. $\sin x - x \cos x$.

D. $1 + \cos x$.

Lời giải:

$$y' = (x \sin x - 3)' = \sin x - x \cos x$$

$$y'' = 2 \cos x - x \sin x$$

Câu 102. Một chất điểm chuyển động có phương trình $S = 2t^4 + 6t^2 - 3t + 1$ với t tính bằng giây (s) và S tính bằng mét (m). Hỏi gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 3(s)$ bằng bao nhiêu?

A. $64 \text{ (m/s}^2\text{)}$.

B. $228 \text{ (m/s}^2\text{)}$.

C. $88 \text{ (m/s}^2\text{)}$.

D. $76 \text{ (m/s}^2\text{)}$.

Lời giải:

$$S = 2t^4 + 6t^2 - 3t + 1$$

$$v = S' = 8t^3 + 12t - 3$$

$$a = v' = S'' = 24t^2 + 12$$

$$t = 3 \rightarrow a = 228 \text{ (m/s}^2\text{)}$$

- Câu 103.** Một chất điểm chuyển động trong 20 giây đầu tiên có phương trình $s(t) = \frac{1}{12}t^4 - t^3 + 6t^2 + 10t$, trong đó $t > 0$ với t tính bằng giây (s) và $s(t)$ tính bằng mét (m). Hỏi tại thời điểm gia tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất thì vận tốc của vật bằng bao nhiêu?
- A. 17(m/s). B. 18(m/s). C. 28(m/s). D. 13(m/s).

Lời giải:

$$s(t) = \frac{1}{12}t^4 - t^3 + 6t^2 + 10t$$

$$v = s' = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 12t + 10$$

$$a = v' = t^2 - 6t + 12 = (t - 3)^2 + 3 \geq 3$$

$$a_{\min} = 3 \Leftrightarrow t = 3 \Rightarrow v = 28(m/s)$$

- Câu 104.** Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S = -t^3 + 3t^2 + 9t$, trong đó t tính bằng giây và S tính bằng mét. Tính vận tốc của chuyển động tại thời điểm gia tốc triệt tiêu.

- A. 12 m/s. B. 0 m/s. C. 11 m/s. D. 6 m/s.

Lời giải:

$$S = -t^3 + 3t^2 + 9t$$

$$v = S' = -3t^2 + 6t + 9$$

$$a = v' = -6t + 6$$

$$\text{Khi gia tốc triệt tiêu } a = 0 \Rightarrow t = 1 \rightarrow v = 12(m/s)$$

- Câu 105.** Cho hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $y^3 \cdot y'' + 1 = 0$. B. $y^2 \cdot y'' - 1 = 0$. C. $3y^2 \cdot y'' + 1 = 0$. D. $2y^3 \cdot y'' + 3 = 0$.

Lời giải:

$$y' = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$$

$$y'' = \frac{-\sqrt{2x-x^2} - \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}(1-x)}{2x-x^2} = \frac{-(2x-x^2) - (1-x)^2}{(2x-x^2)\sqrt{2x-x^2}} = \frac{-1}{(2x-x^2)\sqrt{2x-x^2}}$$

$$y'' = \frac{-1}{y^3} \Leftrightarrow y^3 \cdot y'' + 1 = 0$$

- Câu 106.** Cho hàm số $y = \sin 2x$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $y^2 - (y')^2 = 4$. B. $4y + y'' = 0$. C. $4y - y'' = 0$. D. $y = y' \cdot \tan 2x$.

Lời giải:

$$y' = 2\cos 2x$$

$$y'' = -4 \cdot \sin 2x = -4y$$

$$y'' + 4y = 0$$

Câu 107. Cho hàm số $y = x \cdot \cos x$. Chọn khẳng định đúng?

A. $2(\cos x - y') - x(y'' + y) = 1$.

B. $2(\cos x - y') + x(y'' + y) = 0$.

C. $2(\cos x - y') + x(y'' + y) = 1$.

D. $2(\cos x - y') - x(y'' + y) = 0$.

Lời giải:

$$y' = \cos x - x \cdot \sin x$$

$$y'' = -2\sin x - x \cdot \cos x = -2\sin x - y$$

$$y'' + y = -2\sin x$$

$$\Rightarrow 2(\cos x - y') + x(y'' + y) = 0$$

Câu 108. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2x+1}{1-x}$. Phương trình $f'(x) + f''(x) = 0$ có nghiệm là

A. $x = 3$.

B. $x = -\frac{3}{2}$.

C. $x = -\frac{1}{2}$.

D. $x = \frac{1}{2}$.

Lời giải:

$$f'(x) = \frac{3}{(1-x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-6}{(1-x)^3}$$

$$f'(x) + f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{(1-x)^2} = \frac{-6}{(1-x)^3}$$

$$1-x = -2 \Rightarrow x = 3$$

Câu 109. Tính y'' , biết $y = x\sqrt{1+x^2}$.

A. $y'' = \frac{x(3+2x^2)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$.

B. $y'' = \frac{2x(3+2x^2)}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

C. $y'' = \frac{x(3-2x^2)}{\sqrt{(1+x^2)^2}}$.

D. $y'' = \frac{x(1+x^2)}{2\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

Lời giải:

$$y = x\sqrt{1+x^2}$$

$$y'' = \frac{x(3+2x^2)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

Câu 110. Đạo hàm cấp n của hàm số $y = \frac{1}{ax+b}$, $a \neq 0$ là

A. $y^{(n)} = \frac{2^n \cdot a^n \cdot n!}{(ax+b)^{n+1}}$.

B. $y^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot a^n \cdot n!}{(x+1)^{n+1}}$.

C. $y^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(ax+b)^{n+1}}$.

D. $y^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot a^n \cdot n!}{(ax+b)^{n+1}}$.

Lời giải:

$$y = \frac{1}{ax+b}$$

$$y' = \frac{-1 \cdot a \cdot 1!}{(ax+b)^2}$$

$$y'' = \frac{(-1)^2 \cdot a^2 \cdot 2!}{(ax+b)^3}$$

....

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot a^n \cdot n!}{(ax+b)^{n+1}}$$

③. CHỦ ĐỀ 3. VECTO TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ VUÔNG GÓC

Câu 111. Cho tứ diện $ABCD$. Hỏi có bao nhiêu vector khác vector $\vec{0}$ mà mỗi vector có điểm đầu, điểm cuối là hai đỉnh của tứ diện $ABCD$?

A. 12.

B. 4.

C. 10.

D. 8.

Lời giải:

Số vector khác vector $\vec{0}$ mà mỗi vector có điểm đầu, điểm cuối là hai đỉnh của tứ diện $ABCD$ là số các chỉnh hợp chập 2 của phần tử $\Rightarrow$ số vector là $A_4^2 = 12$.

Câu 112. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC và G là trung điểm của MN . Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

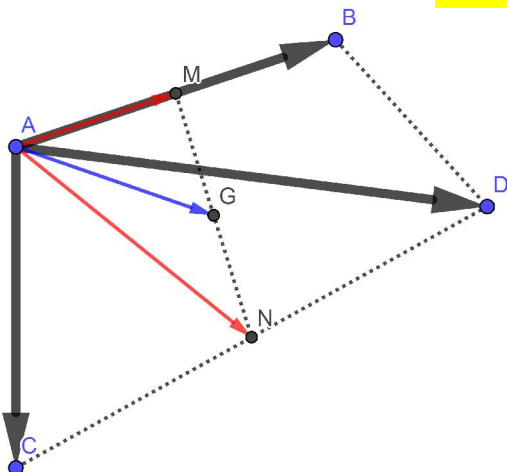
A. $\vec{NM} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{DC})$.

B. $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = 3\vec{AG}$.

C. $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = \vec{0}$.

D. $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = 4\vec{AG}$.

Lời giải:



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC và G là trung điểm của MN nên G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ do đó:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{AB} = \vec{AM} + \vec{MN} + \vec{NB} \\ \vec{DC} = \vec{DM} + \vec{MN} + \vec{NC} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{DC}) \text{ A sai}$$

$$+ \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\vec{GA} + \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AG} = \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}) \text{ B, C sai}$$

Câu 113. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ với G là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Đặt $\vec{AA'} = \vec{a}$, $\vec{AB} = \vec{b}$, $\vec{AC} = \vec{c}$. Khi đó $\vec{AG}$ bằng

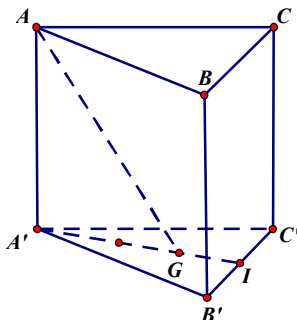
A. $\vec{a} + \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c})$.

B. $\vec{a} + \frac{1}{4}(\vec{b} + \vec{c})$.

C. $\vec{a} + \frac{1}{6}(\vec{b} + \vec{c})$.

D. $\vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$.

Lời giải:



$$G \text{ là trọng tâm của tam giác } A'B'C' \Rightarrow \vec{A'G} = \frac{1}{3}(\vec{A'B'} + \vec{A'C'})$$

$$\vec{AG} = \vec{AA'} + \vec{A'G} = \vec{AA'} + \frac{1}{3}(\vec{A'B'} + \vec{A'C'}) = \vec{a} + \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c}).$$

Câu 114. Cho tứ diện đều $ABCD$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ bằng

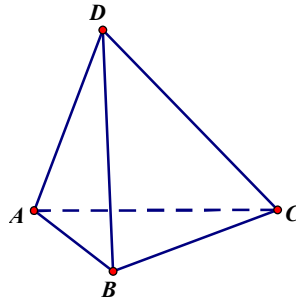
A. a^2 .

B. $\frac{a^2}{2}$.

C. 0.

D. $-\frac{a^2}{2}$.

Lời giải:



Cho tứ diện đều $ABCD$ có 4 mặt là 4 tam giác đều.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} &= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} \\ &= -CA \cdot CD \cdot \cos 60^\circ + CB \cdot CD \cdot \cos 60^\circ = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}\end{aligned}$$

Câu 115. Cho tứ diện $ABCD$ và các điểm M, N xác định bởi $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DB} + x\overrightarrow{DC}$. Tìm x để các vectơ $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

A. $x = -1$.

B. $x = -3$.

C. $x = -2$.

D. $x = 2$.

Lời giải:

Phân tích hướng giải: Khi gặp loại này chúng ta vẽ hình $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$

Đặt $2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE}, -3\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AF} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$

M là đỉnh thứ 4 của hình bình hành AEMF.

$$\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DB} + x\overrightarrow{DC} \Rightarrow x\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DN} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BN} \rightarrow BN \parallel DC$$

Giải như sau:

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = (3\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + x\overrightarrow{DC}.$$

$$= (3\overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{DC} - 2\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{DB}) + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + x\overrightarrow{DC}$$

$$= 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DB} + (x+3)\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + (x+3)\overrightarrow{DC}$$

$$= 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + (x+2)\overrightarrow{DC}.$$

Ba vectơ $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng khi và chỉ khi $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$.

Câu 116. Trong không gian, cho các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

A. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc thì vuông góc với đường thẳng còn lại.

B. Hai đường thẳng cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau

C. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng còn lại.

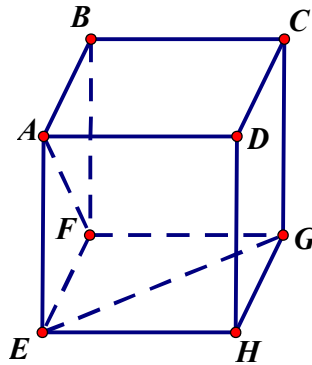
D. Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

Lời giải:

Dựa vào định nghĩa hai đường thẳng vuông góc trong không gian ta suy ra đáp án C đúng.

Câu 117. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AF}$ và $\overrightarrow{EG}$ bằng
A. 0° . **B.** 60° . **C.** 90° . **D.** 30° .

Lời giải:



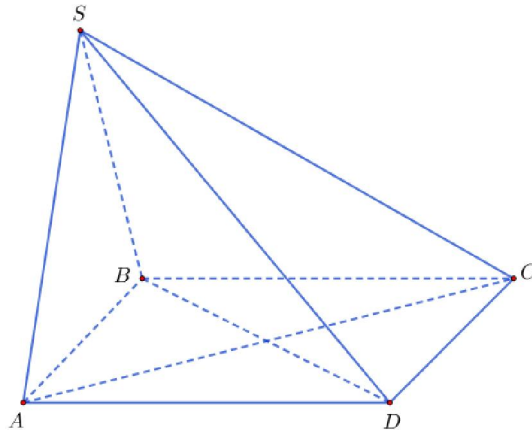
Nhận xét $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$ nên $(\overrightarrow{AF}; \overrightarrow{EG}) = (\overrightarrow{AF}; \overrightarrow{AC}) = \widehat{FAC}$.

Tam giác FAC là tam giác đều nên $\widehat{FAC} = 60^\circ$.

Câu 118. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $SA = SB = 2a$, $AB = a$. Gọi φ là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AS}$. Tính $\cos \varphi$?

A. $\cos \varphi = -\frac{7}{8}$. **B.** $\cos \varphi = -\frac{1}{4}$. **C.** $\cos \varphi = \frac{7}{8}$. **D.** $\cos \varphi = \frac{1}{4}$.

Lời giải:



$$\text{Ta có } SB^2 = (\overrightarrow{AS} - \overrightarrow{AB})^2 \Leftrightarrow SB^2 = AS^2 - 2\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AB} + AB^2$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{SB^2 - SA^2 - AB^2}{2} = -\frac{a^2}{2}.$$

$$\text{Vậy } \cos \varphi = \cos(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AS}) = \frac{\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AS}}{CD \cdot AS} = \frac{-\frac{a^2}{2}}{a \cdot 2a} = -\frac{1}{4}.$$

Câu 119. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 2a$, $BC = a$. Các cạnh bên của hình chóp cùng bằng $a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và SC .

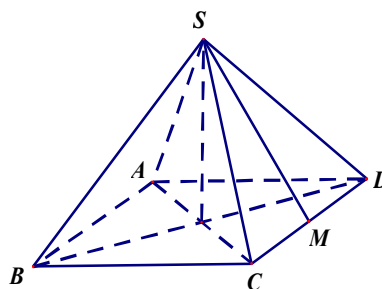
A. 45° .

B. 30° .

C. 60° .

D. $\arctan 2$.

Lời giải:



Ta có $AB \parallel CD$ nên $(\widehat{AB; SC}) = (\widehat{CD; SC}) = \widehat{SCD}$.

Gọi M là trung điểm của CD . Tam giác SCM vuông tại M và có $SC = a\sqrt{2}$, $CM = a$ nên là tam giác vuông cân tại M nên $\widehat{SCD} = 45^\circ$. Vậy $(\widehat{AB; SC}) = 45^\circ$.

Câu 120. Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC . Khi đó $\cos(AB, DM)$ bằng

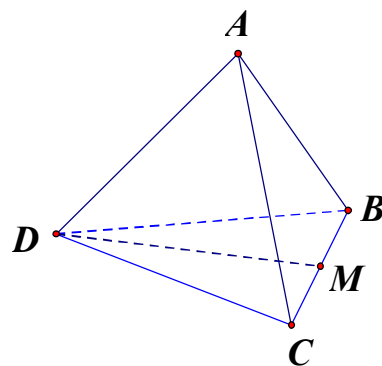
A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải:



Giả sử tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a ta có: $DM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

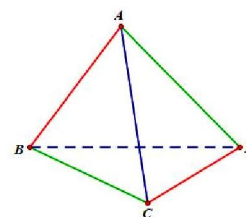
Ta lại có: $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DM}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{DM}|} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM}}{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{a \cdot a \cdot \cos 60^\circ + a \cdot a \cdot \cos 120^\circ}{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Vậy $\cos(AB, DM) = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Cách 2: dùng bí kíp góc

**CÔNG THỨC TÍNH NHANH
GÓC GIỮA 2 ĐƯỜNG THẲNG:**

$$\cos(AB, DM) = \frac{|AD^2 + BM^2 - AM^2 - BD^2|}{2 \cdot AB \cdot DM} = \frac{\left| \frac{a^2}{4} - \frac{3}{4}a^2 \right|}{2 \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$



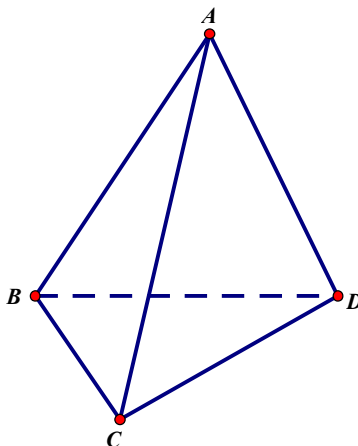
$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{|AC^2 + BD^2 - AD^2 - BC^2|}{2 \cdot AB \cdot CD}$$

Cách nhớ: Cosin (đỏ, đỏ) = (tổng bình phương 2 xanh nước biển - tổng bình phương 2 xanh lá) : (2 lần tích 2 cạnh đỏ).

hehe - quá lợi hại phải không

Tương tự câu 120.

Cho tứ diện $ABCD$ biết $AB = BC = CA = 4$, $AD = 5$, $CD = 6$, $BD = 7$. Góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng?

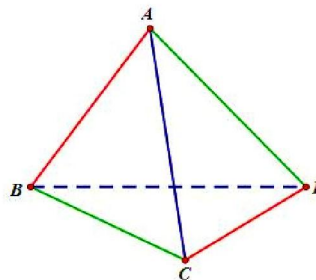
A. 120° .**B.** 60° .**C.** 150° .**D.** 30° .**Hướng dẫn giải****Chọn B**

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} &= (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) \cdot \overrightarrow{CD} = CB \cdot CD \cdot \cos \widehat{BCD} - CA \cdot CD \cdot \cos \widehat{ACD} \\ &= CB \cdot CD \cdot \frac{CB^2 + CD^2 - BD^2}{2 \cdot CB \cdot CD} - CA \cdot CD \cdot \frac{CA^2 + CD^2 - AD^2}{2 \cdot CA \cdot CD} = \frac{CB^2 + AD^2 - BD^2 - CA^2}{2} = -12 \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \cos(\widehat{AB, CD}) = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}|}{AB \cdot CD} = \frac{12}{4 \cdot 6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{AB, CD} = 60^\circ.$$

hoặc dùng bí kíp ra liền

**CÔNG THỨC TÍNH NHANH
GÓC GIỮA 2 ĐƯỜNG THẲNG:**



$$\cos(\widehat{AB, CD}) = \frac{|AC^2 + BD^2 - AD^2 - BC^2|}{2AB \cdot CD}$$

Cách nhớ: Cosin (đỏ, đỏ) = (tổng bình phương 2 xanh nước biển – tổng bình phương 2 xanh lá) : (2 lần tích 2 cạnh đỏ).

Câu 121. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên $AA' = 2a$, góc giữa đường thẳng $A'B$ với mặt phẳng (ABC) là 60° . Gọi M là trung điểm BC . Tính cosin của góc giữa $A'C$ và AM .

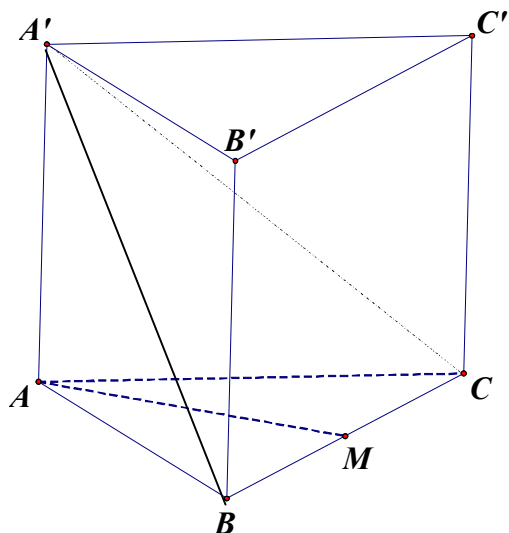
A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải:



$$AM \perp BC \Rightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

$$\text{Góc giữa đường thẳng } A'B \text{ với mặt phẳng } (ABC) \text{ là } 60^\circ \Rightarrow \widehat{A'BA} = 60^\circ$$

$$AA' = 2a \Rightarrow AB = \frac{2}{\sqrt{3}}a$$

$$A'C = A'B = \frac{4}{\sqrt{3}}a$$

$$AM = \frac{2}{\sqrt{3}}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A'C} \cdot \overrightarrow{AM} &= A'C \cdot AM \cdot \cos(\widehat{A'CA}) = (\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'A} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AM} \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = AB \cdot AM \cdot \cos \widehat{BAM} \end{aligned}$$

$$\cos(\widehat{A'CA}) = \frac{AB \cdot AM \cdot \cos \widehat{BAM}}{A'C \cdot AM} = \frac{AB \cdot \cos \widehat{BAM}}{A'C} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{4}{\sqrt{3}}a} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Câu 122. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC vuông tại B , SA vuông góc với đáy. Khẳng định nào **sai**?

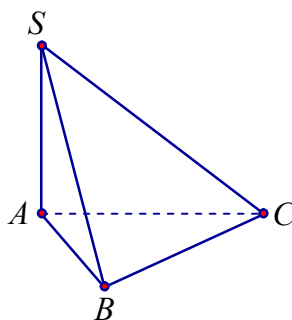
A. $SB \perp AC$.

B. $SA \perp AB$.

C. $SB \perp BC$.

D. $SA \perp BC$.

Lời giải:



Nếu $SB \perp AC$.

Từ $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AC$, do đó $\begin{cases} AC \perp SB \\ AC \perp SA \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SAB) \Rightarrow AC \perp AB$.

Điều này là vô lý vì $\triangle ABC$ vuông tại B nên đáp án A sai.

Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AB, SA \perp BC$ nên đáp án B và D đúng.

Lại có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$ nên đáp án C đúng.

Câu 123. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. SA vuông góc với $(ABCD)$ và H là hình chiếu vuông góc của A lên SB . Khẳng định nào sau đây là **sai**?

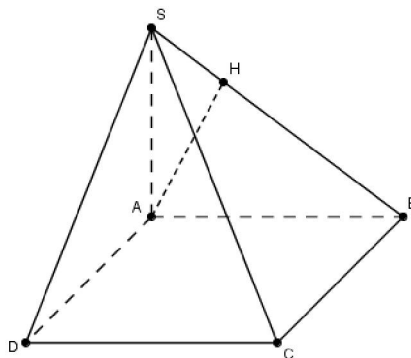
A. $AH \perp BC$.

B. $AH \perp SC$.

C. $BD \perp SC$.

D. $AC \perp SB$.

Lời giải:



Ta có $BC \perp SA$ và $BC \perp AB$ nên $BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$.

Mặt khác $(SBC) \cap (SAB) = SB$. Do đó từ A kẻ $AH \perp SB \Rightarrow AH \perp (SBC)$

$AC \perp SA$, AC không vuông góc AB nên $AC \perp SB$ là sai

Câu 124. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và tam giác ABC vuông tại B . Vẽ $SH \perp (ABC)$, $H \in (ABC)$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

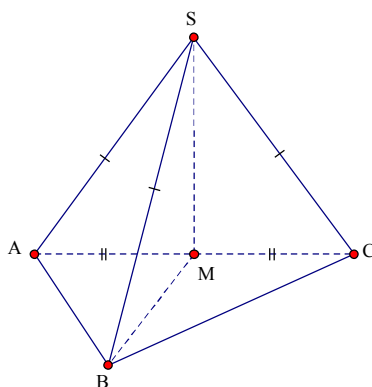
A. H trùng với trực tâm tam giác ABC .

B. H trùng với trọng tâm tam giác ABC .

C. H trùng với trung điểm AC .

D. H trùng với trung điểm BC .

Lời giải:



Gọi M là trung điểm của $AC \Rightarrow BM = AM = CM = \frac{1}{2} AC$.

ΔSAC cân tại $S \Rightarrow SM \perp AC$ (1).

ΔSMA vuông tại $M \Rightarrow SA^2 = AM^2 + SM^2 \Leftrightarrow SB^2 = BM^2 + SM^2$.

$\Rightarrow \Delta SMB$ vuông tại M hay $SM \perp BM$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $SM \perp (ABC)$.

Theo giả thiết: $SH \perp (ABC)$, $H \in (ABC) \Rightarrow H \equiv M$.

Vậy H trùng với trung điểm AC .

Câu 125. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt đáy, góc giữa cạnh SD và mặt đáy bằng 30° . Độ dài cạnh SD bằng

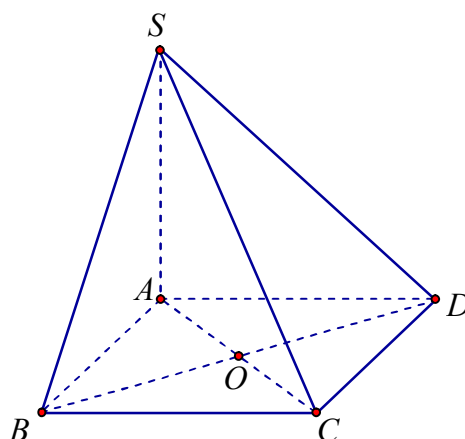
A. $2a$.

B. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{a}{2}$.

D. $a\sqrt{3}$.

Lời giải:



SA vuông góc với mặt đáy, góc giữa cạnh SD và mặt đáy bằng $30^\circ \Rightarrow \widehat{SDA} = 30^\circ$

$$AD = a \Rightarrow SD = \frac{AD}{\cos 30^\circ} = a \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Câu 126. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Kẻ OH vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại H . Khẳng định nào sau đây là **sai**?

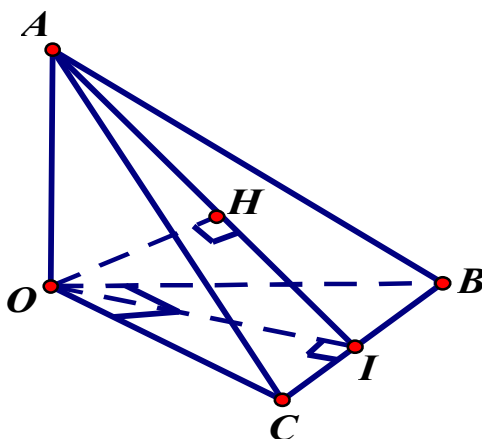
A. $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

B. H là trực tâm tam giác ABC .

B. $OA \perp BC$.

D. $AH \perp (OBC)$.

Lời giải:



Ta có $OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \perp BC$ và $OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC$.

Suy ra $BC \perp (AOH) \Rightarrow BC \perp AH$ (1)

Ta lại có $OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \perp AC$ và $OB \perp (OAC) \Rightarrow OB \perp AC$

Suy ra $AC \perp (BOH) \Rightarrow AC \perp BH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra H là trực tâm tam giác ABC .

Gọi I là chân đường vuông góc của O lên đường thẳng BC

Ta có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{OA^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OA^2}$.

Vậy D là đáp án sai.

Câu 127. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và SA vuông góc đáy. Mệnh đề nào **sai**?

A. $BC \perp (SAB)$.

B. $AC \perp (SBD)$.

C. $BD \perp (SAC)$.

D. $CD \perp (SAD)$.

Lời giải:

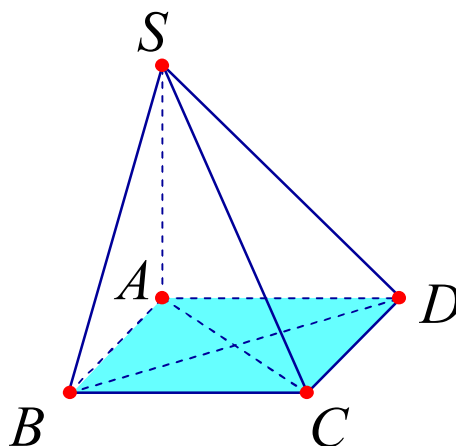
Ta có:

+ $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

+ $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$.

+ $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$.

Suy ra: đáp án B sai.



Câu 128. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình vuông cạnh a , tâm O . Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng SC và mặt phẳng đáy. Mệnh đề nào **đúng**?

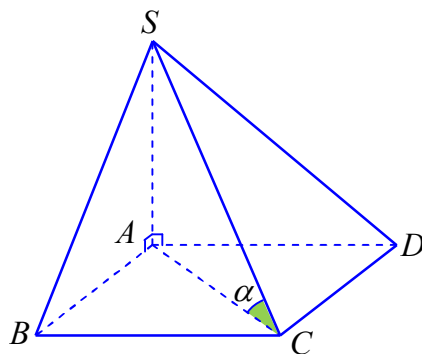
A. $\alpha = 60^\circ$.

B. $\alpha = 75^\circ$.

C. $\tan \alpha = 1$.

D. $\tan \alpha = \sqrt{2}$.

Lời giải:



Ta có AC là hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng $(ABCD)$.

$$\Rightarrow \widehat{(SC, (ABCD))} = \widehat{SCA} = \alpha.$$

Tam giác SAC vuông tại A có $\tan \alpha = \frac{SA}{AC}$, với $AC = a\sqrt{2}$ thì $\tan \alpha = \sqrt{2}$.

Câu 129. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SD = a$ và SD vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD) .

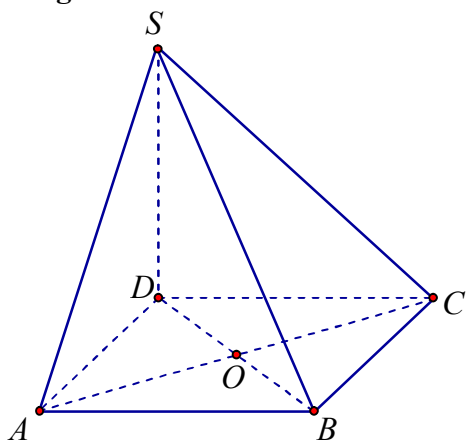
A. 45° .

B. $\arcsin(1/4)$.

C. 30° .

D. 60° .

Lời giải:



$$\left. \begin{array}{l} SD \perp (ABCD) \Rightarrow SD \perp AC \\ AC \perp BD \end{array} \right\} \Rightarrow AC \perp (SBD) \Rightarrow AO \perp (SBD)$$

Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD) là $\widehat{ASO}$

$$SA = a\sqrt{2}$$

$$AO = a \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \widehat{ASO} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{ASO} = 30^\circ$$

Câu 130. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = 2a$. Gọi M là trung điểm của SC . Tính cosin của góc α là góc giữa BM và (ABC) .

A. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{14}$.

B. $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{7}}{7}$.

C. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{7}$.

D. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải:

Gọi H là trung điểm AC ta có MH là đường trung bình của tam giác SAC nên MH song song SA .

SA vuông góc (ABC) thì MH vuông góc (ABC)

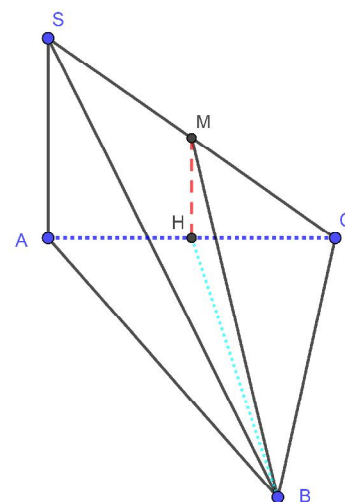
suy ra góc giữa BM và (ABC) là $\widehat{MBH}$

$$HM = \frac{SA}{2} = a.$$

$$BH = AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$BM^2 = MH^2 + BH^2$$

$$\cos \alpha = \frac{BH}{BM} = \frac{a \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{a^2 + a^2 \frac{3}{4}}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$$



Câu 131. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (hình bên). Tính góc giữa AB' và mặt phẳng $(BDD'B')$.

A. 60° .

B. 90° .

C. 45° .

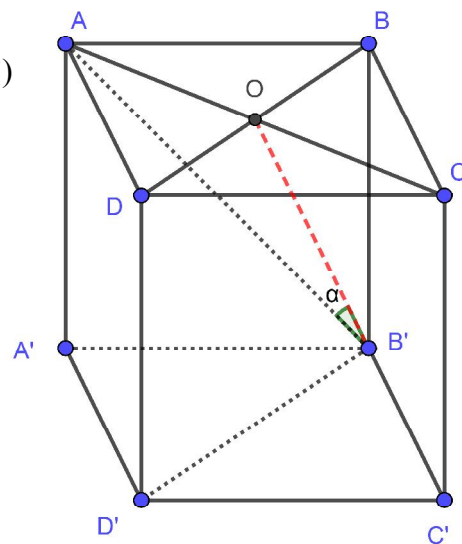
D. 30° .

Lời giải:

Gọi O là giao điểm AC và BD . Ta có AO vuông góc $(BDD'B')$

Góc giữa AB' và mặt phẳng $(BDD'B')$ là $\widehat{AB'O}$

$$\sin \widehat{AB'O} = \frac{AO}{AB'} = \frac{a \frac{\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{AB'O} = 30^\circ$$



Câu 132. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A , đáy lớn $AD = 10\text{ cm}$, $BC = 8\text{ cm}$, SA vuông góc với mặt đáy và $SA = 8\text{ cm}$. Gọi M là trung điểm của AB . Mặt phẳng (P) đi qua M và vuông góc với AB . Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P) .

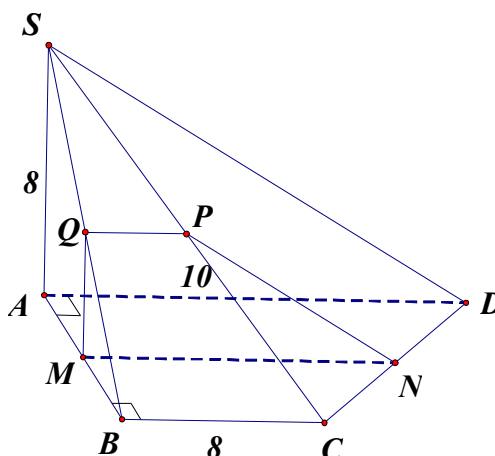
A. 26 cm^2 .

B. 20 cm^2 .

C. 52 cm^2 .

D. 18 cm^2 .

Lời giải:



Gọi N , P và Q lần lượt là trung điểm của CD , SC và SB .

Ta có: $(P) \cap (SAB) = MQ$, $(P) \cap (ABCD) = MN$, $(P) \cap (SCD) = NP$.

Do đó, thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) là tứ giác $MNPQ$.

Để thấy $MNPQ$ là hình thang vuông tại M , Q và $MQ = PQ = 4$, $MN = 9$.

Vậy diện tích hình thang $MNPQ$ là: $S_{MNPQ} = \frac{MQ \cdot (MN + PQ)}{2} = \frac{4 \cdot (9 + 4)}{2} = 26$.

Câu 133. Trong các khẳng định sau khẳng định nào là **đúng**?

A. Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ đều.

B. Hình lăng trụ có đáy là một đa giác đều là một hình lăng trụ đều.

C. Hình lăng trụ đứng có đáy là một đa giác đều là hình lăng trụ đều.

D. Hình lăng trụ tứ giác đều là hình lập phương.

Lời giải:

Theo định nghĩa: Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng có đáy là một đa giác đều.

Câu 134. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. Hình chóp đều có các cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy các góc bằng nhau.

B. Hình chóp đều có tất cả các cạnh bằng nhau.

C. Hình chóp đều có các mặt bên là các tam giác cân bằng nhau.

D. Một hình chóp có đáy là một đa giác đều và có chân đường cao trùng với tâm của đa giác đáy đó là hình chóp đều.

Lời giải:

Theo định nghĩa :

Một hình chóp có đáy là một đa giác đều và có chân đường cao trùng với tâm của đa giác đáy đó là hình chóp đều.

Hình chóp đều có các cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy các góc bằng nhau.

Hình chóp đều có các mặt bên là các tam giác cân bằng nhau.

Hình chóp đều có các cạnh bên bằng nhau, đáy là đa giác đều (tam giác đều hoặc hình vuông)

Câu 135. Cho hai mặt phẳng cắt nhau (α) và (β) . M là một điểm nằm ngoài hai mặt phẳng trên. Qua M dựng được bao nhiêu mặt phẳng đồng thời vuông góc với (α) và vuông góc với (β) ?

A. Vô số.

B. Một.

C. Hai.

D. Không.

Lời giải:

Cho hai mặt phẳng cắt nhau (α) và (β) tạo ra giao tuyến là 1 đường thẳng d

Qua M dựng được duy nhất 1 mặt phẳng vuông góc với d , khi đó cũng vuông góc với (α) và vuông góc với (β)

Câu 136. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B . Kết luận nào sau đây **sai**?

A. $(SAC) \perp (SBC)$.

B. $(SAB) \perp (ABC)$.

C. $(SAC) \perp (ABC)$.

D. $(SAB) \perp (SBC)$.

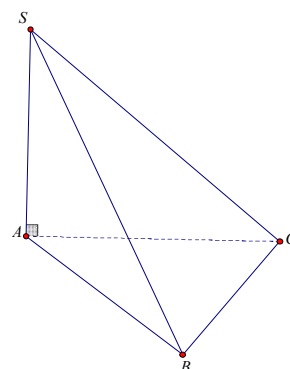
Lời giải:

Chọn A

Ta có: $\begin{cases} SA \perp (ABC) \\ SA \subset (SAB), (SAC) \end{cases} \Rightarrow (SAB), (SAC) \perp (ABC) \Rightarrow B, C \text{ đúng.}$

$SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$ mà $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB); BC \subset (SBC) \Rightarrow (SAB) \perp (SBC) \Rightarrow D \text{ đúng.}$

Vậy đáp án sai là A.



Câu 137. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A và $AB = a\sqrt{2}$. Biết $SA \perp (ABC)$ và $SA = a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) .

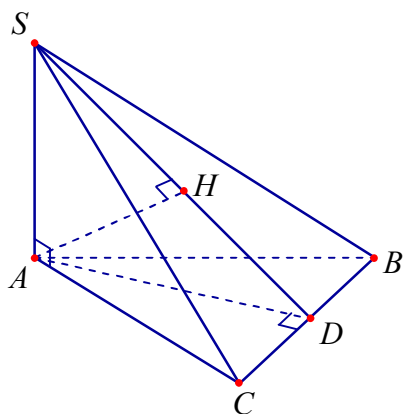
A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải:



Kẻ AD vuông góc BC suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là $\widehat{SDA}$

ABC là tam giác vuông cân tại A và $AB = a\sqrt{2} \Rightarrow AD = a$

$$\tan \widehat{SDA} = 1 \Rightarrow \widehat{SDA} = 45^\circ$$

Câu 138. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$, $SA = 2a$. Tính tang của góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$.

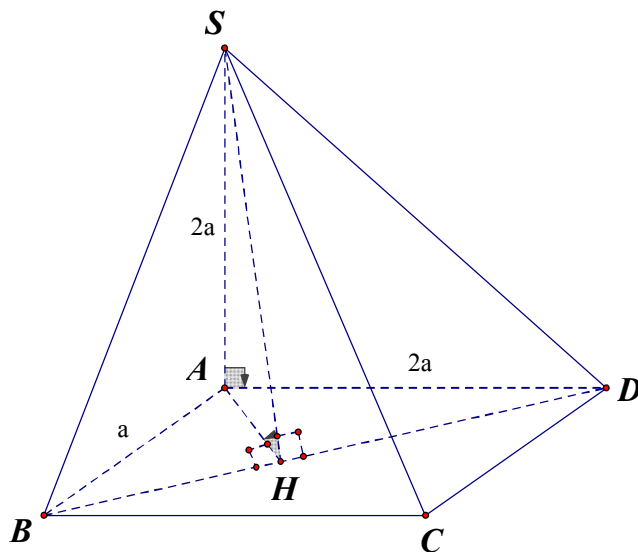
A. $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

B. $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

C. $\sqrt{5}$.

D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải:



Kẻ $AH \perp BD$, ($H \in BD$) (1).

$$\begin{cases} BD \perp SA \text{ (} SA \perp (ABCD) \text{)} \\ BD \perp AH \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAH) \Rightarrow BD \perp SH \text{ (2)}.$$

Và: $(SBD) \cap (ABCD) = BD$ (3).

Từ (1) (2) và (3) suy ra: góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ là $\widehat{SHA}$.

Xét $\triangle ABD$ vuông tại A : $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow AH = \frac{2a}{\sqrt{5}}$.

Xét $\triangle SAH$ vuông tại A : $\tan \widehat{SHA} = \frac{SA}{AH} = \sqrt{5}$.

Câu 139. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng a . Tính góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(A'B'C')$.

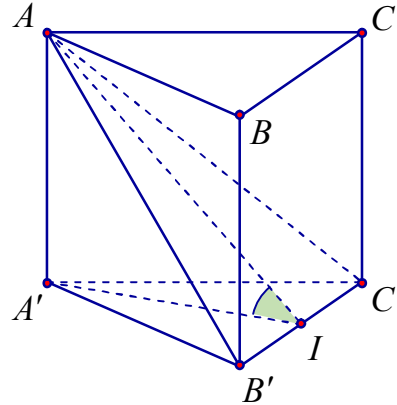
A. $\frac{\pi}{6}$.

B. $\frac{\pi}{3}$.

C. $\arccos \frac{\sqrt{3}}{4}$.

D. $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải:



Gọi I là trung điểm của $B'C'$. Ta có: $\begin{cases} B'C' \perp A'I \\ B'C' \perp A'A \end{cases} \Rightarrow B'C' \perp (AIA')$

Khi đó: $\begin{cases} (AB'C') \cap (A'B'C') = B'C' \\ AI \perp B'C' \\ A'I \perp B'C' \end{cases}$

$\Rightarrow$ góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(A'B'C')$ là góc $\widehat{AIA'}$.

Xét tam giác AIA' vuông tại A' ta có: $\tan \widehat{AIA'} = \frac{AA'}{A'I} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{AIA'} = \frac{\pi}{6}$.

Câu 140. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$. Gọi M và N là hai điểm thay đổi trên cạnh CB và CD sao cho $CM = 2x$, $CN = x$ $\left(0 < x < \frac{a}{2}\right)$. Tìm hệ thức liên hệ giữa a và x để $(SAM) \perp (SMN)$.

A. $2a = x$.

B. $2a(a - 3x) = 0$.

C. $4x^2 - ax = 0$.

D. $x^2 - 3ax = 0$.

Lời giải:

$$\left. \begin{matrix} SA \perp MN \\ AM \perp MN \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} (SAM) \perp MN \\ MN \subset (SMN) \end{matrix} \right\} \Rightarrow (SAM) \perp (SMN)$$

Vậy tam giác AMN vuông tại M .

$$AM^2 = AB^2 + BM^2$$

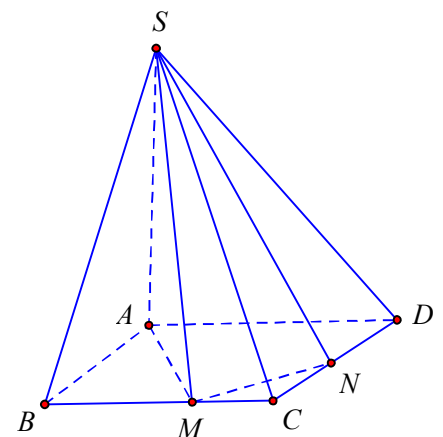
$$MN^2 = MC^2 + NC^2$$

$$AN^2 = AM^2 + MN^2 = AB^2 + BM^2 + MC^2 + NC^2$$

$$AN^2 = AD^2 + DN^2 = AB^2 + BM^2 + MC^2 + NC^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + (a-x)^2 = a^2 + (a-2x)^2 + (2x)^2 + x^2$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - ax = 0$$



Câu 141. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

- A. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng là khoảng cách từ điểm đó đến hình chiếu của nó lên mặt phẳng.
- B. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm tùy ý trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.
- C. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song với nhau lần lượt chứa hai đường thẳng đó.
- D. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là khoảng cách từ một điểm tùy ý trên đường thẳng này đến đường thẳng kia.

Lời giải:

D sai vì khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song với nhau lần lượt chứa hai đường thẳng đó.

Cách tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau d và d'

Cách 1:

- + Xác định đường thẳng vuông góc chung của d và d'
- + Tính độ dài đoạn vuông góc chung.

Cách 2:

Kẻ d' và song song với d , suy ra $mp(P)$ chứa d' và song song d .

- + Khi đó $d(d, d') = d(d, (P)) = d(A, (P))$ với A là một điểm bất kỳ thuộc d

Chú ý: $mp(P)$ có thể có sẵn hoặc chúng ta phải dựng

(Cách dựng: qua một điểm $B \in d'$ dựng đường thẳng Δ song song với d , lúc đó $mp(P) \equiv (d', \Delta)$).

Các ví dụ mẫu cho cách 1

Ví dụ 1: Cho tứ diện ABCD có $AB=a$, tất cả các cạnh còn lại bằng $3a$. Tính $d(AB, CD)$

Giải:

- + Gọi I, J lần lượt là trung điểm của CD và AB .

+ Vì $\triangle ACD$ và $\triangle BCD$ là các tam giác đều nên:

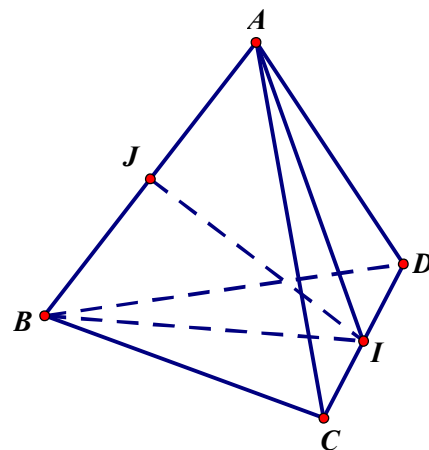
$$CD \perp AI, CD \perp BI \Rightarrow CD \perp (AIB) \Rightarrow CD \perp IJ \quad (1)$$

Mặt khác, $\triangle ACD = \triangle BCD$ nên tam giác AIB cân tại I . Do đó,
 $IJ \perp AB \quad (2)$

- + Từ (1), (2) suy ra: IJ là đường vuông góc chung của AB và CD .

$$+ \text{Ta có: } IJ = \sqrt{AI^2 - AJ^2} = \sqrt{\left(\frac{3a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{26}}{2}.$$

$$\text{Vậy } d(AB, CD) = \frac{a\sqrt{26}}{2}$$



Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AD, H là giao điểm của CN và DM, $SH \perp (ABCD)$, $SH = a\sqrt{3}$. Tính $d(DM, SC)$

Giải:

+ Trong mp(SCH) kẻ $HK \perp SC$ (1), ($K \in SC$).

+ Mặt khác, $\left. \begin{array}{l} SH \perp (ABCD) \\ DM \subset (ABCD) \end{array} \right\} \Rightarrow SH \perp DM$ (*)

Xét hai tam giác vuông AMD và DNC có $AM = DN$,
 $AD = DC \Rightarrow \triangle AMD = \triangle DNC$.

Từ đó ta có:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{AMD} = \widehat{DNC} \\ \widehat{ADM} = \widehat{DCN} \\ \widehat{AMD} + \widehat{ADM} = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{DNC} + \widehat{ADM} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{NHD} = 90^\circ \text{ hay}$$

$DM \perp CN$ (**).

Từ (*), (**) suy ra: $DM \perp (SCH) \Rightarrow DM \perp HK$ (2).

Từ (1), (2) suy ra: HK là đoạn vuông góc chung của DM và SC.

+ Ta có: $\triangle HCD \sim \triangle DCN \Rightarrow HC = \frac{CD^2}{CN} = \frac{a^2}{\sqrt{CD^2 - DN^2}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Xét tam giác vuông SHC ta có: $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HC^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{5}{3a^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{15}}{5}$

Vậy $d(DM, SC) = HK = \frac{a\sqrt{15}}{5}$

các ví dụ cho cách 2

Ví dụ 1: Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C', đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $AA' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tính $d(AB, CB')$

Giải: + Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và A'B'.

+ Ta có:

$AB \parallel (CA'B') \Rightarrow d(AB, CB') = d(AB, (CA'B')) = d(I, (CA'B'))$

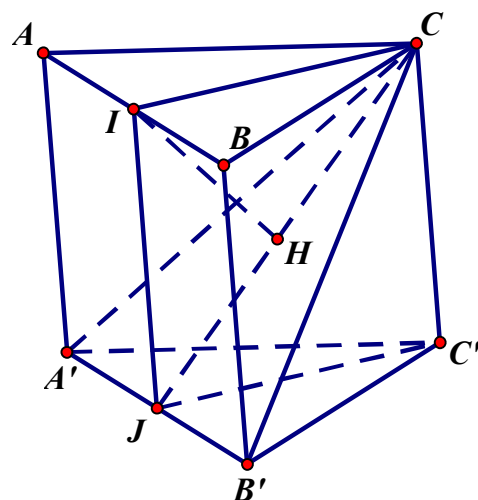
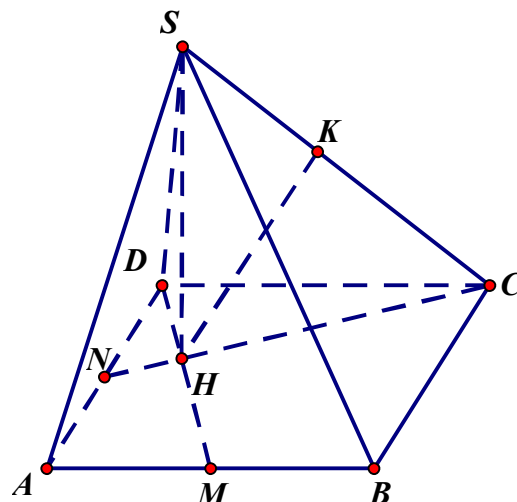
+ Trong mp(CIJ) kẻ $IH \perp CJ$ (1), ($H \in CJ$)

Ta có: $A'B' \perp (IJ)$ (vì ABC. A'B'C' là hình lăng trụ đứng) và $IC \perp A'B'$ (vì $\triangle ABC$ là tam giác đều) nên $A'B' \perp (CIJ) \Rightarrow IH \perp A'B'$ (2).

Từ (1), (2) suy ra: $IH \perp (CA'B')$ hay $d(AB, CB') = IH$

+ Xét tam giác vuông CIJ có: $\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{IC^2} + \frac{1}{IJ^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{2}{a^2} = \frac{10}{3a^2} \Rightarrow IH = \frac{a\sqrt{30}}{10}$

Vậy $d(AB, CB') = IH = \frac{a\sqrt{30}}{10}$



Ví dụ 2: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Tính $d(AD, SB)$

Giải: + Vì $AD \parallel (SBC) \Rightarrow d(AD, SB) = d(AB, (SBC))$

+ Gọi O là giao điểm của AC và BD. I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC.

+ Trong mp(SIJ) kẻ $IH \perp SJ, (H \in SJ)$ (1).

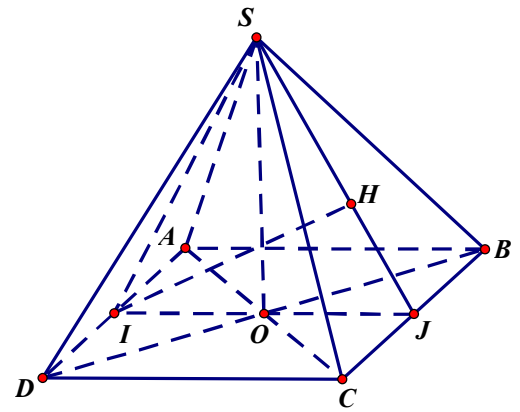
Theo giả thiết ta có: $\left. \begin{array}{l} SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp BC \\ IJ \parallel AB \Rightarrow IJ \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SIJ) \Rightarrow IH \perp BC$ (2)

Từ (1), (2) suy ra: $IH \perp (SBC)$ hay $d(AD, SB) = IH$

+ Xét tam giác SIJ có: $S_{SIJ} = \frac{1}{2} IH \cdot SJ = \frac{1}{2} SO \cdot IJ \Rightarrow IH = \frac{SO \cdot IJ}{SJ}$. Với: $IJ = a$,

$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = a \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}, SJ = \sqrt{SB^2 - BJ^2} = \frac{a \cdot \sqrt{7}}{4}$. Suy ra: $IH = \frac{SO \cdot IJ}{SJ} = \frac{2a\sqrt{21}}{7}$.

Vậy $d(AD, SB) = IH = \frac{2a\sqrt{21}}{7}$



Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABCD, có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tam giác SAD là tam giác đều, (SAD) vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính $d(SA, BD)$

Giải: + Qua A kẻ đường thẳng d song song với BD. Gọi O là giao điểm của AC và BD; I, M lần lượt là trung điểm của AD và OD; N là giao điểm của d và IM.

+ Ta có: $d(SA, BD) = d((SA, d), BD) = d(M, (SA, d))$

+ Trong mp(SMN) kẻ $MH \perp SN$ (1), ($H \in SN$)

Theo giả thiết:

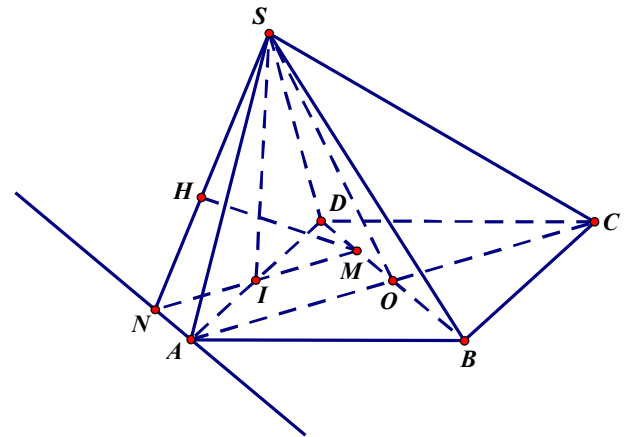
$\left. \begin{array}{l} SI \perp AD \\ (SAD) \perp (ABCD) \end{array} \right\} \Rightarrow SI \perp (ABCD) \Rightarrow SI \perp d$ (*) Mặt

khác ta có: $\left. \begin{array}{l} d \parallel BD \\ AO \perp BD \\ AO \parallel MN \end{array} \right\} \Rightarrow d \perp MN$ (**). Từ (*), (**) suy ra: $d \perp (SMN) \Rightarrow d \perp MH$ (2). Từ (1), (2) suy ra: $MH \perp (SA, d)$.

+ Xét tam giác SMN có: $S_{SMN} = \frac{1}{2} MH \cdot SN = \frac{1}{2} SI \cdot MN \Rightarrow MH = \frac{SI \cdot MN}{SN}$

với $SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}, MN = AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}, SN = \sqrt{SI^2 - IN^2} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$. Do đó, $MH = \frac{SI \cdot MN}{SN} = \frac{a\sqrt{15}}{5}$. Vậy

$d(SA, BD) = \frac{a\sqrt{15}}{5}$



Ví dụ 4: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = BC = 2a$, hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là trung điểm của AB, mặt phẳng qua SM và song song với BC cắt AC tại N, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60° . Tính $d(AB, SN)$

Giải:

+ Gọi I là trung điểm của BC.

Do $MN \parallel BC$ nên N là trung điểm của AC. Do đó, $IN \parallel AB$

hay $d(AB, SN) = d(AB, (SNI))$.

+ Trong mp(ABC) kẻ $AJ \perp IN, (J \in IN)$ (*)

Trong mp(SAJ) kẻ $AH \perp SJ, (H \in SJ)$ (1)

+ Theo giả thiết ta có:

$$\left. \begin{array}{l} (SAB) \perp (ABC) \\ (SAC) \perp (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp IN \quad (**)$$

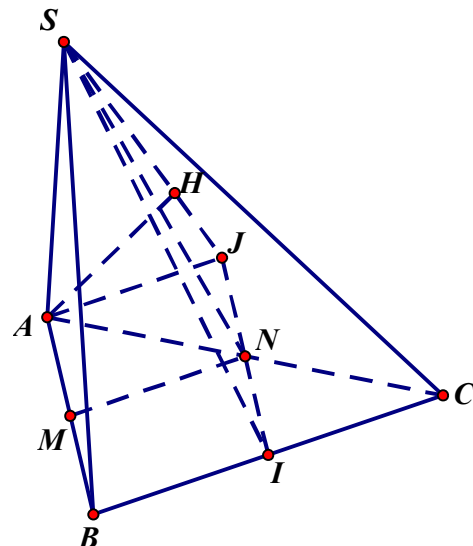
Từ (*), (**) ta có: $IN \perp (SAJ) \Rightarrow IN \perp AH$ (2).

Từ (1), (2) ta có: $AH \perp (SIN) \Rightarrow d(AB, SN) = AH$.

+ Ta có: $((SBC), (ABC)) = \widehat{SBA} = 60^\circ \Rightarrow SA = AB \cdot \tan 60^\circ = 2a\sqrt{3}; AJ = BI = a$.

+ Xét tam giác vuông SAJ có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AJ^2} = \frac{13}{12a^2} \Rightarrow AH = a \cdot \sqrt{\frac{12}{13}}$.

$$\text{Vậy } d(AB, SN) = AH = \frac{a \cdot \sqrt{156}}{13}$$



Câu 142. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các mặt bên là các tam giác đều cạnh $2a$. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $2a\sqrt{2}$.

B. $2a$.

C. $a\sqrt{2}$.

D. a .

Lời giải:

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các mặt bên là các tam giác đều cạnh $2a$.

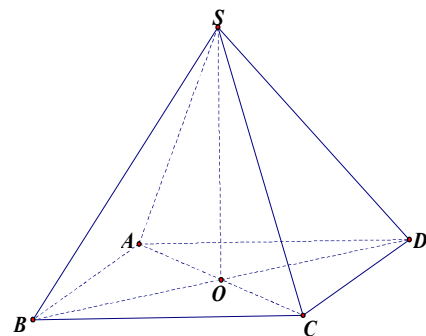
Gọi O là giao điểm AC và BD nên SO vuông góc $(ABCD)$

(**tính chất hình chóp đều**)

$ABCD$ là hình vuông cạnh $2a \Rightarrow AC = 2a\sqrt{2}$

$$SO^2 = SA^2 - AO^2 = (2a)^2 - (a\sqrt{2})^2 = 2a^2$$

$$\Rightarrow SO = a\sqrt{2}$$



Câu 143. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABCD)$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) .

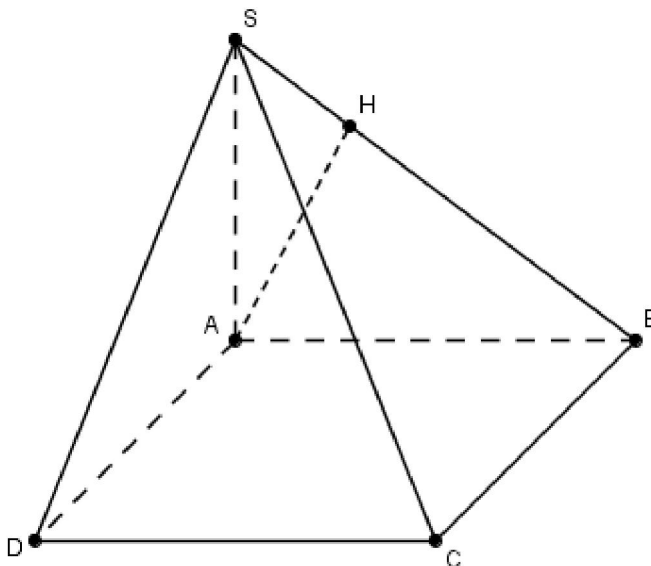
A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{2}{a\sqrt{3}}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

D. a .

Lời giải:



Ta có $BC \perp SA$ và $BC \perp AB$ nên $BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$.

Mặt khác $(SBC) \cap (SAB) = SB$. Do đó từ A kẻ $AH \perp SB \Rightarrow AH \perp (SBC)$

hay $AH = d(A, (SBC))$. Trong tam giác vuông SAB ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2}.$$

$$\text{Vậy } AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 144. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$. Cạnh bên $AA' = a$, ABC là tam giác vuông tại A có $BC = 2a$, $AB = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ đỉnh A đến mặt phẳng $(A'BC)$.

A. $\frac{a\sqrt{7}}{21}$.

B. $\frac{a\sqrt{21}}{21}$.

C. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{7}$.

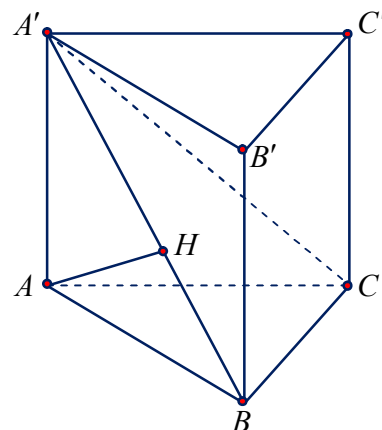
Lời giải:

Lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A
 $BC = 2a$, $AB = a\sqrt{3} \Rightarrow AC = a$.

khoảng cách từ đỉnh A đến mặt phẳng $(A'BC)$ là

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{3a^2}$$

$$d_{(A, (A'BC))} = AH = \frac{a\sqrt{21}}{7}$$



Câu 145. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách h từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) .

A. $h = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

B. $h = a$.

C. $h = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

D. $h = \frac{a\sqrt{3}}{7}$.

Lời giải:

Gọi M và F là trung điểm AB , CD

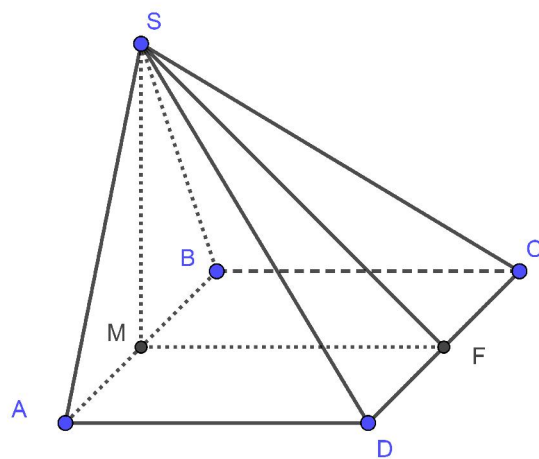
$$\left. \begin{array}{l} (SAB) \perp (ABCD) \\ SM \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow SM \perp (ABCD)$$

$$SM = a \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$MF = a$$

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel CD \\ AB \not\subset (SCD) \end{array} \right\} \Rightarrow AB \parallel (SCD) \Rightarrow d_{(A, (SCD))} = d_{(M, (SCD))} = h$$

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{SM^2} + \frac{1}{MF^2} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{21}}{7}$$



Câu 146. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $(AD'B')$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

C. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

D. a .

Lời giải:

Gọi O, O' lần lượt là tâm của hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$.

Ta có $BO \parallel B'O' \subset (AB'D') \Rightarrow BO \parallel (AB'D')$.

Dựng $OK \perp AO'$, ta có

$$\begin{cases} B'D' \perp A'C' \\ B'D' \perp AA' \end{cases} \Rightarrow B'D' \perp (AA'C'C) \Rightarrow OK$$

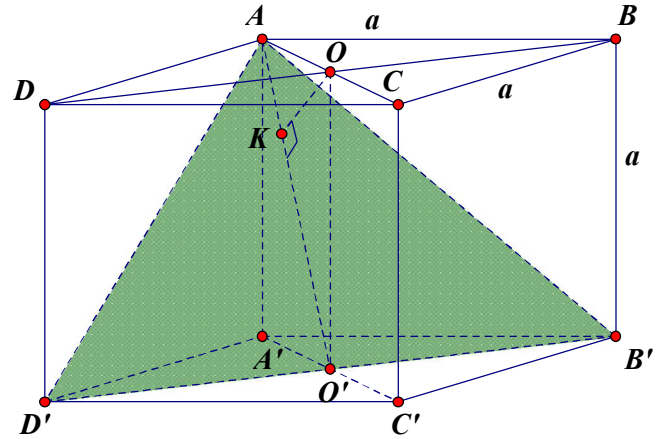
$$\Rightarrow B'D' \perp OK.$$

$$\Rightarrow OK \perp (AB'D').$$

$$\Rightarrow d(B, (AB'D')) = d(O, (AB'D')) = OK.$$

Xét $\triangle AOO'$ vuông tại O có OK là đường cao.

$$\Rightarrow \frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OO'^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow OK = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$



Câu 147. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O cạnh a , SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SO = a$. Tính khoảng cách giữa SC và AB .

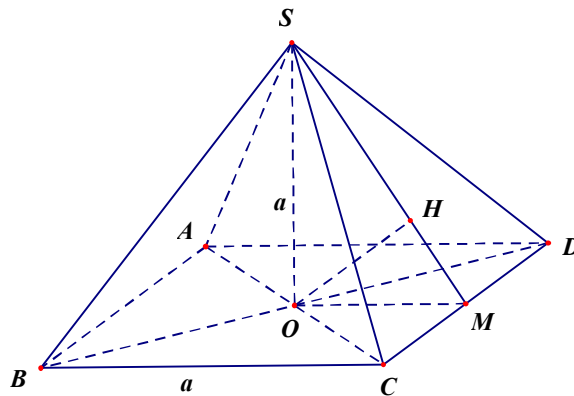
A. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

B. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

C. $\frac{2a\sqrt{3}}{15}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{15}$.

Lời giải:



Gọi M là trung điểm CD ; H là hình chiếu vuông góc của O lên SM .

$$\text{Ta có } d(AB, SC) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD)) = 2d(O, (SCD)) = 2OH.$$

$$\text{Xét tam giác } SMO \text{ vuông tại } O \text{ có: } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{OS^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{a^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{Vậy } d(AB, SC) = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 148. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh $SA = a$ và vuông góc với mặt đáy ($ABCD$). Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BD .

A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

B. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

C. $\frac{a}{2}$.

D. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

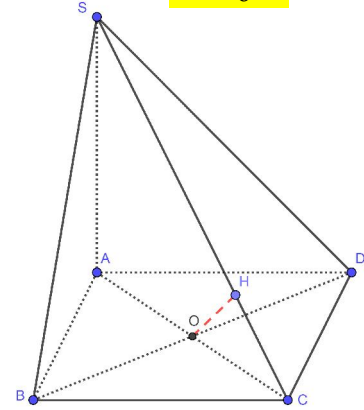
Lời giải:

$$\left. \begin{array}{l} SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD \\ AC \perp BD \end{array} \right\} \Rightarrow BD \perp (SAC)$$

Ta có $AC \cap BD = O$

$$OH \perp SC$$

$$OH \subset (SAC) \Rightarrow OH \perp BD$$



Vậy OH là đoạn vuông góc chung của BD và SC.

$$d_{(SC, BD)} = OH = OC \cdot \sin \widehat{HCO} = OC \cdot \sin \widehat{DCA} = \frac{AC}{2} \cdot \frac{SA}{SC} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a}{2a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

Câu 149. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $BA = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$, M là trung điểm của BC . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

D. $\frac{a\sqrt{7}}{7}$.

Lời giải:

Phương pháp 2 xác định khoảng cách giữa 2 đường chéo nhau

Bước 1: dựng mặt phẳng song song

Gọi D là trung điểm BB'

ta có $MD \parallel B'C \Rightarrow (AMD) \parallel B'C$

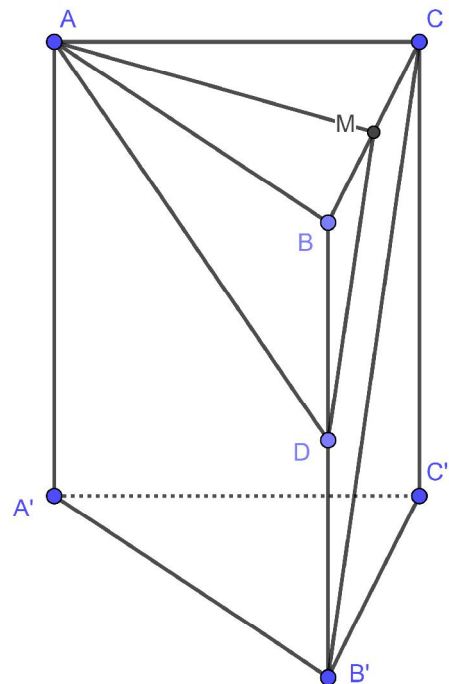
Bước 2: tỉ lệ khoảng cách

$$d_{(AM, B'C)} = d_{(B'C, (AMD))} = d_{(B', (AMD))} = d_{(B, (AMD))} = h$$

ABC là tam giác vuông, $BA = BC = a \Rightarrow \widehat{B} = 90^\circ$

Bí kíp: công thức tam diện vuông
(3 đường đôi 1 vuông góc nhau)

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BD^2} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{7}}{7}$$



Luyện tập tương tự

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $BA = BC = a$, cạnh bên $AA' = 2a$, M là trung điểm của BC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

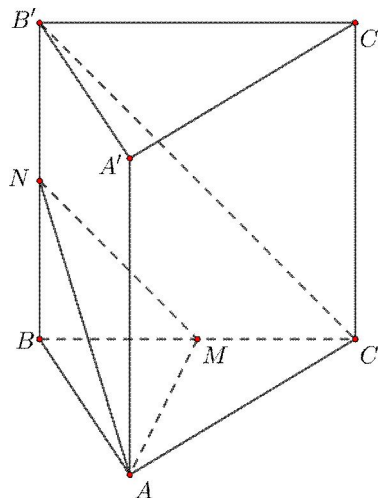
B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

D. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi N là trung điểm BB' nên $MN \parallel B'C \Rightarrow d(AM; B'C) = d(B'C; (AMN)) = d(C; (AMN)) = d(B; (AMN))$.

Gọi H là hình chiếu của B lên (AMN) , do tứ diện $B.AMN$ là tứ diện vuông đỉnh B nên

$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BN^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{6}{a^2}.$$

Vậy $BH = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Câu 150. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB .

A. $\frac{\sqrt{6}a}{2}$.

B. $\frac{2a}{3}$.

C. $\frac{a}{2}$.

D. $\frac{a}{3}$.

Lời giải:

Phương pháp 2 xác định khoảng cách giữa 2 đường chéo nhau

Bước 1: kẻ đường thẳng d đi qua B và song song AC

Bước 2: kẻ AE vuông góc xuống đường d .

Bước 3: Kẻ AH vuông góc SE.

Ta có $AC \parallel (SBE) \Rightarrow d_{(AC, SB)} = d_{(AC, (SBE))} = d_{(A, (SBE))} = AH = h$

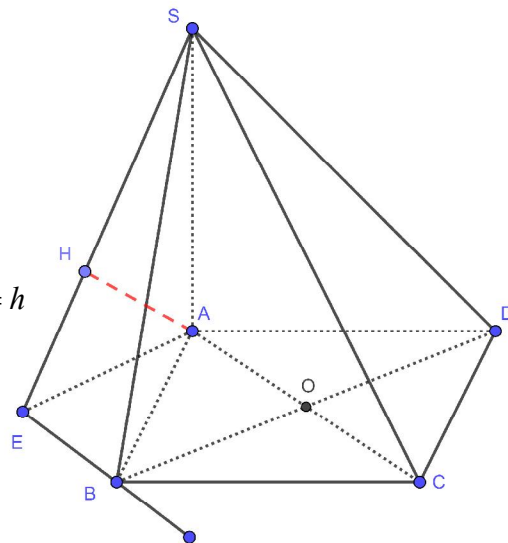
$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{SA^2}$$

$$SA = a$$

$$AE = d_{(D, AC)} = k$$

$$\frac{1}{k^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{DC^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AB^2}$$

$$\text{suy ra } \frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{9}{4a^2} \Rightarrow h = \frac{2}{3}a$$



Bí kíp: công thức tam diện vuông (3 đường đôi 1 vuông góc nhau)

$$\frac{1}{d_{(AC, SB)}^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2}$$

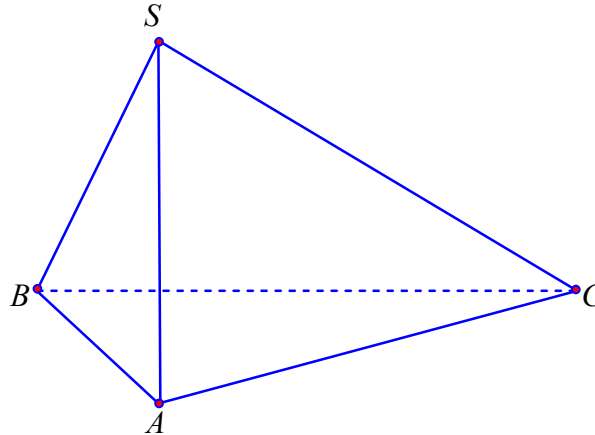
--- HẾT ---

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 1.5.2019

1. Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , biết $AB = AC = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) .
- A. 30° . B. 150° . C. 60° . **D. 120° .**

Lời giải

Chọn D



Vì $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp AB$ và $SA \perp AC$.

$$\text{ta có: } \begin{cases} (SAB) \cap (SAC) = SA \\ SA \perp AB \\ SA \perp AC \end{cases} \Rightarrow \widehat{((SAB), (SAC))} = \widehat{(AB, AC)} = \widehat{BAC}.$$

$$\text{Xét } \triangle ABC \text{ có } \cos \widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{a^2 + a^2 - (a\sqrt{3})^2}{2 \cdot a \cdot a} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} = 120^\circ.$$

$$\text{Vậy } \widehat{((SAB), (SAC))} = 120^\circ.$$

2. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và đáy là tam giác vuông tại B , $AB = SA = a$. Gọi H là hình chiếu của A trên SB . Khoảng cách giữa AH và BC bằng:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. B. a . C. $\frac{a}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $AH \perp SB$ (nên $AH \perp HB$).

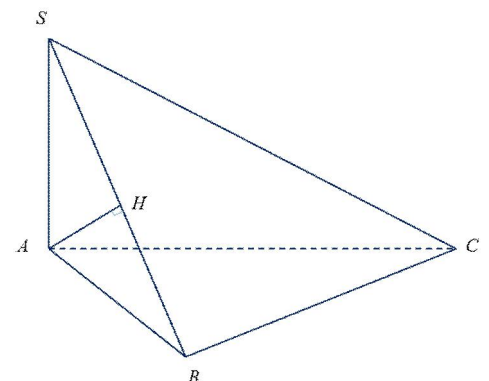
$$\left. \begin{array}{l} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH \text{ (nên } BC \perp BH \text{)}.$$

Do đó, $d(BC, AH) = HB$.

Tam giác SAB vuông cân tại A , AH là đường cao

$$\Rightarrow BH = \frac{SB}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + a^2}}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Vậy } d(BC, AH) = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$



3. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC tạo với mặt đáy các góc bằng nhau và bằng 60° . Biết $BC = a, \widehat{BAC} = 45^\circ$. Tính khoảng cách h từ đỉnh S đến mặt phẳng (ABC) .

A. $h = a\sqrt{6}$. B. $h = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. C. $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. D. $h = \frac{a}{\sqrt{6}}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) , suy ra

$$d(S, (ABC)) = SH \text{ và } \widehat{SAH} = \widehat{SBH} = \widehat{SCH} = 60^\circ$$

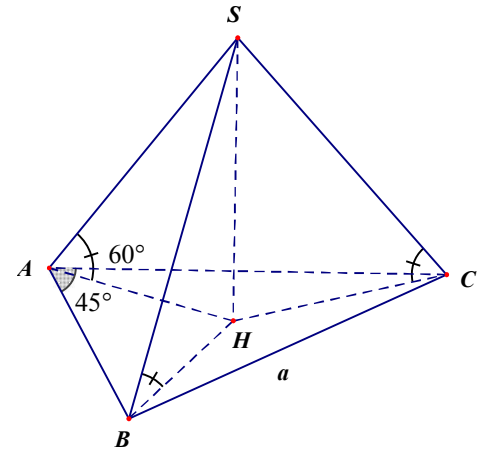
$$\Rightarrow HA = HB = HC.$$

Do đó H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

$$\text{Xét } \triangle ABC, \text{ có: } \frac{BC}{\sin A} = 2HA \Rightarrow HA = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Xét $\triangle SAH$ vuông tại H ,

$$\text{có } SH = AH \cdot \tan \widehat{SAH} = \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

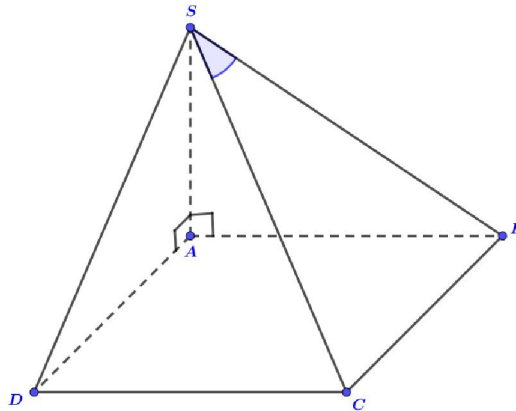


4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a\sqrt{2}, AD = a, SA$ vuông góc với đáy và $SA = a$. Tính góc giữa SC và (SAB) .

A. 90° . B. 60° . C. 45° . D. 30° .

Lời giải

Chọn D



$$\text{Ta có: } \begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow SA \perp (SAB) \Rightarrow SB \text{ là hình chiếu vuông góc của } SC \text{ lên}$$

$$(SAB) \Rightarrow (\widehat{SC, (SAB)}) = \widehat{CSB}.$$

$$\text{Tam giác } SAB \text{ vuông tại } A \text{ có: } SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Tam giác } SBC \text{ vuông tại } B \text{ có: } \tan \widehat{CSB} = \frac{BC}{SB} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{CSB} = 30^\circ.$$

5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh $SA = a$ và vuông góc với mặt đáy ($ABCD$). Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BD bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

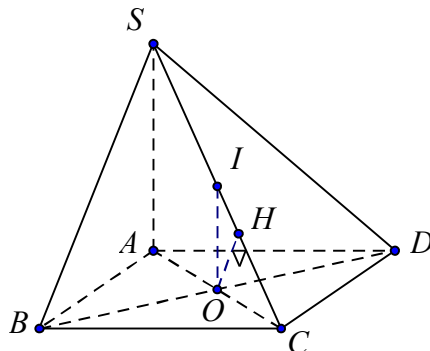
B. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

C. $\frac{a}{2}$.

D. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải

Chọn D



Do $BD \perp AC$ và $BD \perp SA$ nên $BD \perp (SAC)$.

Trong mặt phẳng (SAC) dựng $OH \perp SC$ tại H .

$\Rightarrow OH$ là đường vuông góc chung của BD và SC .

Gọi I là trung điểm SC . Tam giác OIC vuông tại O có đường cao OH .

$$\text{Ta có } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{OC^2} \Rightarrow OH = \frac{OI \cdot OC}{\sqrt{OI^2 + OC^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

6. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD

A. $a\sqrt{2}$.

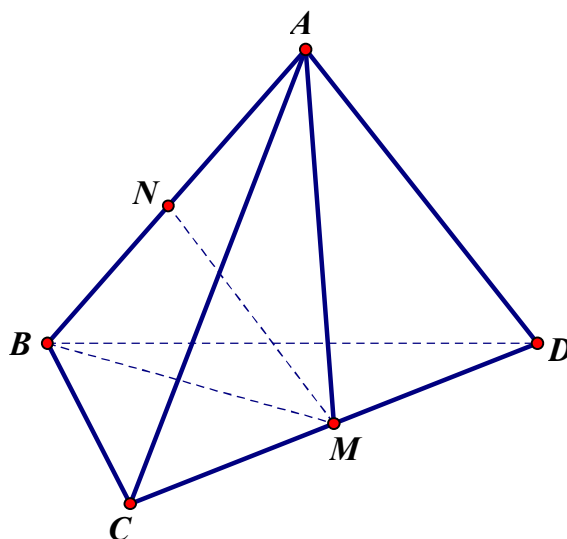
B. $\frac{a}{2}$.

C. a .

D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D



Gọi M là trung điểm của CD .

Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt AB tại trung điểm N ($\triangle AMN$ cân tại M)

$$\text{Suy ra } d(AB, CD) = MN = \sqrt{BM^2 - BN^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

7. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $AA' = 2a$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BC)$.

A. $2\sqrt{5}a$. B. $\frac{2\sqrt{5}a}{5}$. C. $\frac{\sqrt{5}a}{5}$. D. $\frac{3\sqrt{5}a}{5}$.

Lời giải

Chọn B

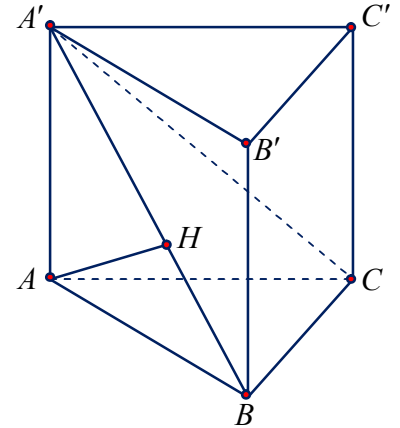
Dựng $AH \perp A'B$.

Ta có $\left. \begin{array}{l} BC \perp AB \\ BC \perp AA' \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (A'AB) \Rightarrow BC \perp AH$

Vậy $AH \perp (A'BC) \Rightarrow d(A, (A'BC)) = AH$.

Xét tam giác vuông $A'AB$ có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AB^2}$

$$\Rightarrow AH = \frac{AA' \cdot AB}{\sqrt{AA'^2 + AB^2}} = \frac{2a \cdot a}{\sqrt{4a^2 + a^2}} = \frac{2\sqrt{5}a}{5}.$$



8. Cho chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, tam giác ABC vuông tại B . Biết $SA = AB = BC$. Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) .

A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. $\arccos \frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi I là trung điểm của $AC \Rightarrow BI \perp AC$ (vì $\triangle ABC$ vuông cân tại A). (1)

Mặt khác: $SA \perp BI$ (vì $SA \perp (ABC)$) (2)

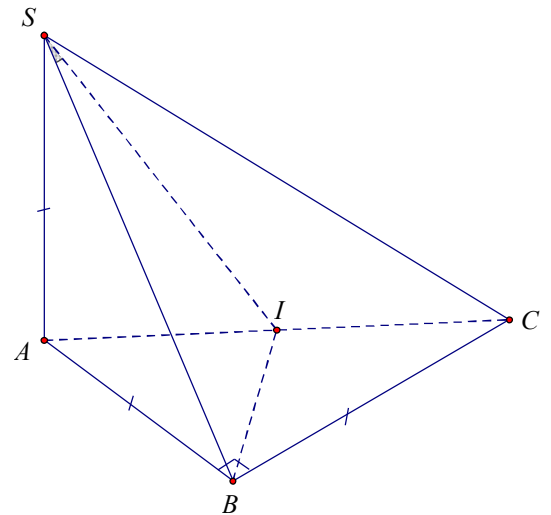
Từ (1) và (2), suy ra: $BI \perp (SAC)$.

$\Rightarrow SI$ là hình chiếu của SB lên (SAC) .

$$\Rightarrow \widehat{(SB, (SAC))} = \widehat{(SB, SI)} = \widehat{BSI}.$$

Xét $\triangle BSI$ vuông tại I , ta có:

$$\sin \widehat{BSI} = \frac{BI}{SB} = \frac{\frac{AB\sqrt{2}}{2}}{AB\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BSI} = 30^\circ.$$



9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D ; SD vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$; $AD = 2a$; $SD = a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa đường thẳng CD và mặt phẳng (SAB) .

A. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$.

B. $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

C. $a\sqrt{2}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A

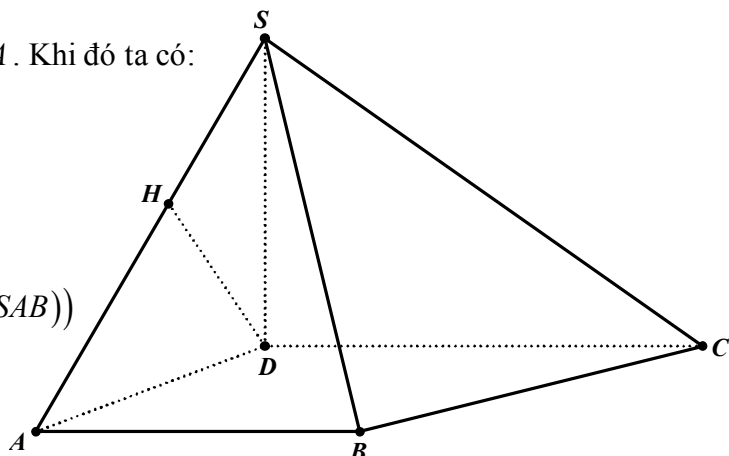
Gọi H là hình chiếu vuông góc của D trên SA . Khi đó ta có:

$$\begin{cases} AB \perp AD \\ AB \perp SD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SDA) \Rightarrow AB \perp DH;$$

$$\begin{cases} DH \perp AB \\ DH \perp SA \end{cases} \Rightarrow DH \perp (SAB).$$

Ta có $CD \parallel (SAB) \Rightarrow d(CD, (SAB)) = d(D, (SAB))$

$$= DH = \frac{SD \cdot AD}{\sqrt{SD^2 + AD^2}} = \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$



10. Cho hình chóp $S.ABC$ trong đó SA , AB , BC vuông góc với nhau từng đôi một. Biết $SA = a\sqrt{3}$, $AB = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) .

A. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

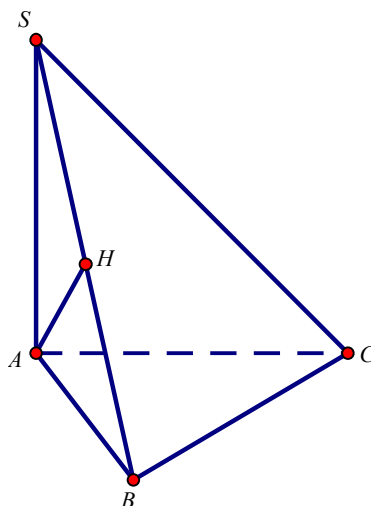
B. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D



Hạ $AH \perp SB$.

Ta có $BC \perp SA$ và $BC \perp AB$ nên $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$ do đó $AH \perp (SBC)$ hay $AH = d(A, (SBC))$.

$$\text{Khi đó } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

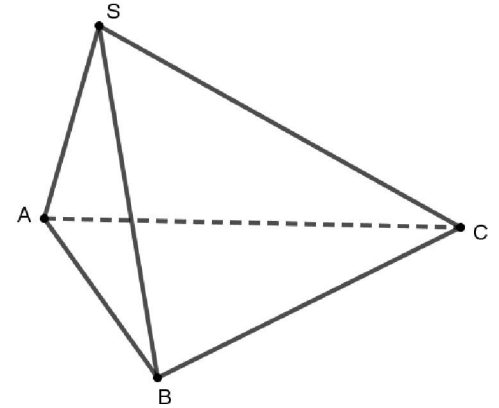
11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = a$, $SB = 2a$, $SC = 3a$, $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = 60^\circ$, $\widehat{CSA} = 90^\circ$. Gọi α là góc giữa hai đường thẳng SA và BC . Tính $\cos \alpha$.

A. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{7}$. **B.** $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{7}$. **C.** $\cos \alpha = 0$. **D.** $\cos \alpha = \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \left| \cos(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BC}) \right| = \frac{|\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{BC}|}{SA \cdot BC} = \frac{|\overrightarrow{SA} \cdot (\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB})|}{SA \cdot BC} \\ &= \frac{|\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB}|}{SA \cdot BC} = \frac{|SA \cdot SC \cdot \cos 90^\circ - SA \cdot SB \cdot \cos 60^\circ|}{a \cdot \sqrt{4a^2 + 9a^2 - 2 \cdot 2a \cdot 3a \cdot \cos 60^\circ}} = \frac{\sqrt{7}}{7}. \end{aligned}$$

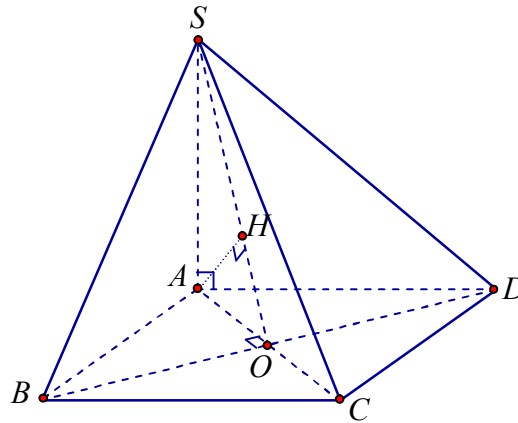


12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Biết SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mp(SBD).

A. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{a}{\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{a}{2\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{6}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi O là giao điểm của AC và BD .

Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC), BD \subset (SBD) \Rightarrow (SBD) \perp (SAC) \text{ và } (SAC) \cap (SBD) = SO$

Trong mặt phẳng (SAC) , kẻ $AH \perp SO$ thì $AH \perp (SBD) \Rightarrow AH = d(A, (SBD))$.

Mặt khác

Tam giác SAO vuông tại A có $OA = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $SA = a$ và $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{OA^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{2}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow AH = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Vậy $d(A, (SBD)) = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

13. Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác BCD đều cạnh a , AB vuông góc với $mp(BCD)$, $AB = 2a$. M là trung điểm đoạn AD , gọi φ là góc giữa CM với $mp(BCD)$. khi đó:

A. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\tan \varphi = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. C. $\tan \varphi = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. D. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải.

Chọn B

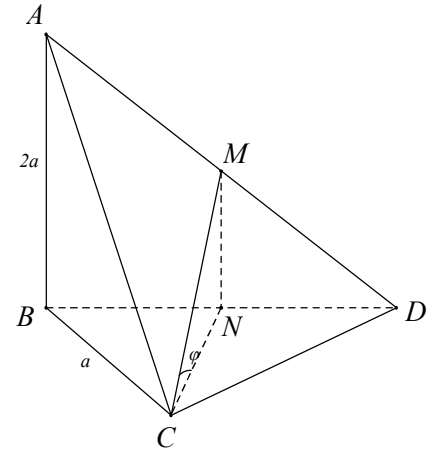
Gọi N là trung điểm BC .

Ta có góc giữa CM với $mp(BCD)$ bằng góc $\widehat{MCN}$.

$$+ MN = \frac{AB}{2} = a.$$

$$+ CN = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } \tan \varphi = \frac{MN}{CN} = a \cdot \frac{2}{a\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$



14. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a , góc $\widehat{BAC} = 60^\circ$, SA vuông góc với $mp(ABCD)$ góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 60° . Khoảng cách từ A đến $mp(SBC)$ bằng:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. B. $2a$. C. $\frac{3a}{4}$. D. a .

Lời giải.

Chọn C

+ $ABCD$ là hình thoi, góc $\widehat{BAC} = 60^\circ$ nên ta có tam giác ABC đều.

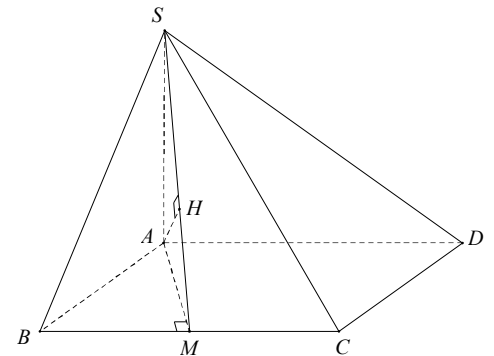
+ Gọi M là trung điểm BC ta có góc giữa (SBC) và đáy $(ABCD)$ bằng góc $\widehat{SMA} = 60^\circ$.

+ Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SM ta có:

$$+ \begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AM \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp AH.$$

$$\text{Lại có: } AH \perp SM \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AH.$$

$$+ AM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{AH}{AM} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{4}.$$



15. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau và $SA = SB = SC = a$. Gọi M là trung điểm của AB . Tính góc giữa hai đường thẳng SM và BC .

A. 60° .

B. 30° .

C. 90° .

D. 120° .

Lời giải

Chọn A

Gọi N là trung điểm của AC . Khi đó góc giữa SM và BC bằng góc giữa SM và MN .

Ta có:

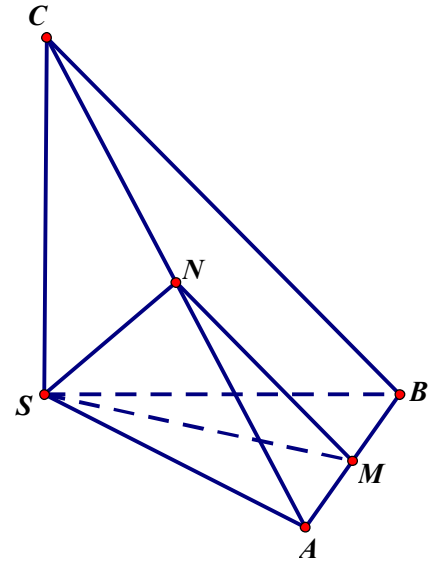
☐ $AB = BC = CA$

☐ $SM = \frac{1}{2}AB$ (trung tuyến trong tam giác vuông ứng với cạnh huyền).

☐ $SN = \frac{1}{2}AC$ (trung tuyến trong tam giác vuông ứng với cạnh huyền).

☐ $MN = \frac{1}{2}BC$.

Suy ra $SM = MN = SN$ hay tam giác SMN đều. Do đó $(\widehat{SM; BC}) = \widehat{SMN} = 60^\circ$.



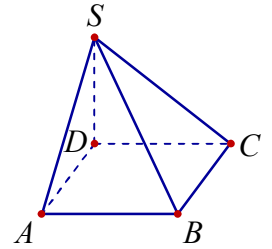
16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Khi đó khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) bằng

A. $d(B, (SAC)) = a$.

B. $d(B, (SAC)) = a\sqrt{2}$.

C. $d(B, (SAC)) = 2a$.

D. $d(B, (SAC)) = \frac{a}{\sqrt{2}}$.



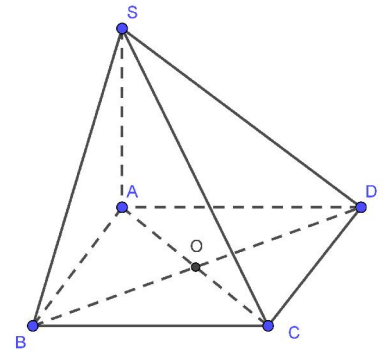
Lời giải

Chọn D

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$.

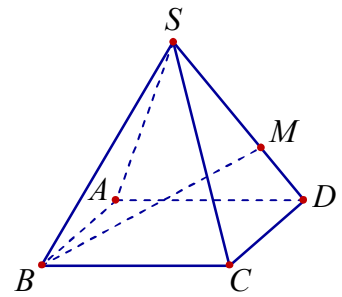
Ta có: $\begin{cases} BO \perp AC \\ BO \perp SA \end{cases} \Rightarrow BO \perp (SAC)$

$\Rightarrow d(B, (SAC)) = BO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.



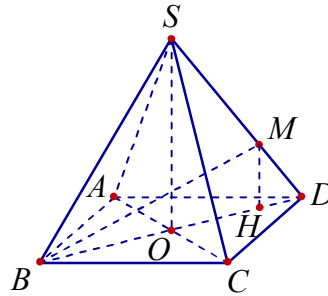
17. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là điểm trên đoạn SD sao cho $SM = 2MD$. Tan góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ là

- A. $\frac{1}{3}$.
 B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.
 C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
 D. $\frac{1}{5}$.



Lời giải

Chọn D



Ta có $BD = a\sqrt{2} \Rightarrow OD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Xét tam giác SOD vuông tại O có: $SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Kẻ $MH \perp BD$ tại H nên $(BM; (ABCD)) = \widehat{MBH}$

Do $MH \perp BD \Rightarrow MH \parallel SO$. Ta có $\frac{MH}{SO} = \frac{MD}{SD} = \frac{HD}{OD} = \frac{1}{3}$.

$\Rightarrow MH = \frac{SO}{3} = \frac{a\sqrt{2}}{6}$ và $HD = \frac{1}{3}OD = \frac{a\sqrt{2}}{6} \Rightarrow BH = BD - HD = a\sqrt{2} - \frac{a\sqrt{2}}{6} = \frac{5a\sqrt{2}}{6}$.

Xét tam giác BHM vuông tại H có:

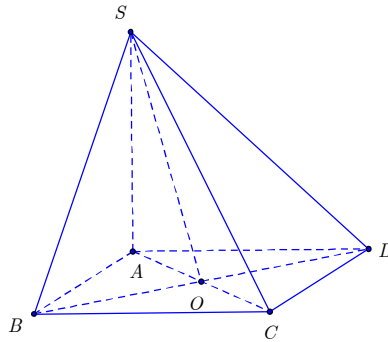
$\tan(BM; (ABCD)) = \widehat{MBH} = \frac{MH}{BH} \Rightarrow \tan(BM; (ABCD)) = \frac{1}{5}$.

18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) , khi đó α thỏa mãn hệ thức nào sau đây:

A. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{8}$. B. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{8}$. **C. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$.** D. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Chọn C



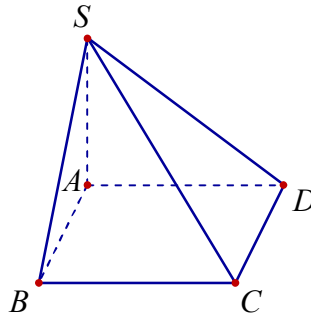
Gọi O là tâm của đáy $ABCD$.

Ta có $BO \perp AC$ và $BO \perp SA$ nên SO là hình chiếu của SB trên (SAC) .

Suy ra $\alpha = \widehat{BSO}$.

Lại có $BO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = 2a$. Suy ra $\sin \alpha = \frac{BO}{SB} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{6}$ (hình vẽ). Gọi α là góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) . Tính $\sin \alpha$ ta được kết quả là



A. $\frac{1}{\sqrt{14}}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{1}{5}$.

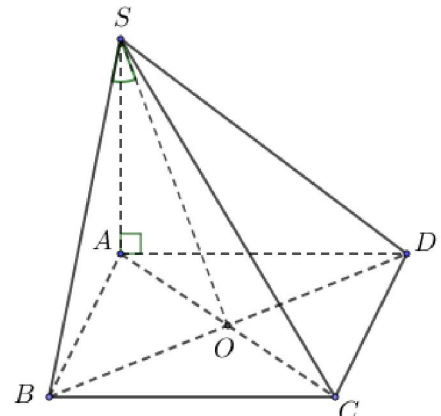
Lời giải

Chọn A

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ thì $BO \perp (SAC)$

$\Rightarrow \alpha = (\widehat{SB, (SAC)}) = \widehat{BSO}$.

Ta có $SB = a\sqrt{7}$, $\sin \alpha = \frac{BO}{SB} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$.

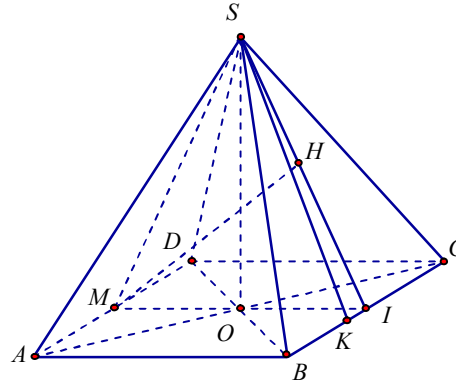


20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng nhau và bằng $2a$, đáy là hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2a$, $AD = a$. Gọi K là điểm thuộc BC sao cho $3\vec{BK} + 2\vec{CK} = \vec{0}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SK .

- A. $\frac{\sqrt{165}a}{15}$. B. $\frac{2\sqrt{165}a}{15}$. C. $\frac{2\sqrt{135}a}{15}$. D. $\frac{\sqrt{135}a}{15}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi O là tâm của hình chữ nhật $ABCD$ thì SO là chiều cao của hình chóp $S.ABCD$.

$$SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{5a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{11}}{2}.$$

Do $SK \subset (SBC)$ mà $BC \parallel AD$ nên khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SK là khoảng cách giữa đường thẳng AD và mặt phẳng (SBC) không phụ thuộc SK .

Gọi I, M lần lượt là trung điểm của BC, AD suy ra $SI = \sqrt{SO^2 + OI^2} = \frac{a\sqrt{15}}{2}$.

Trong tam giác SMI dựng đường cao MH thì MH là khoảng cách cần tìm.

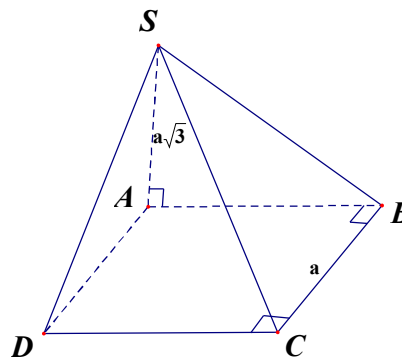
Ta có: $MH \cdot SI = SO \cdot MI \Leftrightarrow MH = \frac{SO \cdot MI}{SI} = \frac{2a\sqrt{165}}{15}$.

21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{3}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD là

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{a}{2}$. C. $a\sqrt{3}$. D. a .

Lời giải

Chọn D



Ta có: $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$ và $BC \perp DC$.

Do đó, BC chính là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng SB và DC .

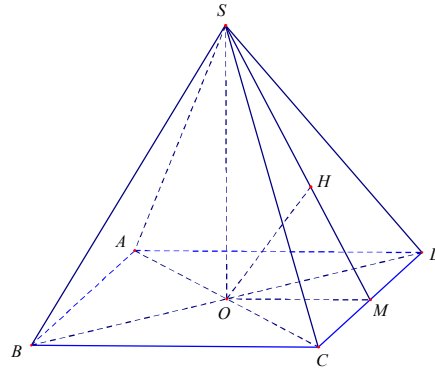
Nên khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và DC là $BC = a$.

22. Cho hình chóp $S.ABCD$ đều có $AB = 2a$, $SO = a$ với O là giao điểm của AC và BD . Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $a\sqrt{2}$. C. $\frac{a}{2}$. **D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.**

Lời giải

Chọn D



Gọi M là trung điểm của cạnh CD , ta có $\begin{cases} CD \perp OM \\ CD \perp SO \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SOM) \Rightarrow (SCD) \perp SOM$.

Trong mặt phẳng (SOM) kẻ $OH \perp SM$, ($H \in SM$) thì OH là khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SCD) .

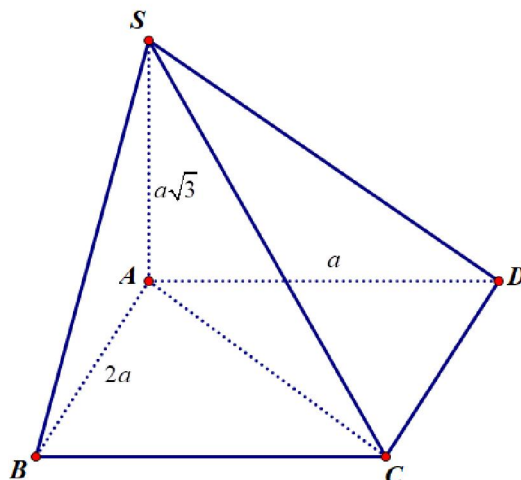
Ta có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{2}{a^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2a$, $AD = a$. SA vuông góc với mặt phẳng đáy. $SA = a\sqrt{3}$. Cosin của góc giữa SC và mặt đáy bằng

A. $\frac{\sqrt{5}}{4}$. B. $\frac{\sqrt{7}}{4}$. C. $\frac{\sqrt{6}}{4}$. **D. $\frac{\sqrt{10}}{4}$.**

Lời giải

Chọn D



Hình chiếu của SC lên $(ABCD)$ là AC

Do đó $\widehat{[SC, (ABCD)]} = \widehat{SCA}$

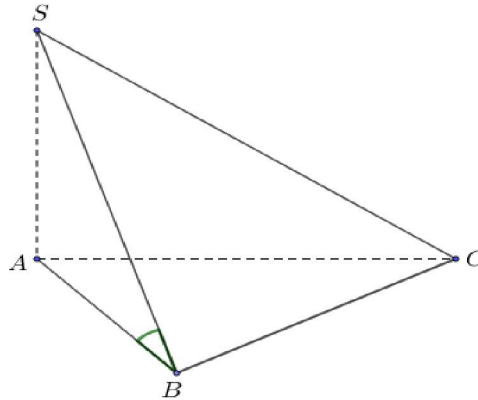
Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{4a^2 + a^2} = a\sqrt{5} \Rightarrow SC = 2a\sqrt{2}$

Trong tam giác vuông SAC : $\cos \widehat{SCA} = \frac{AC}{SC} = \frac{a\sqrt{5}}{2a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$.

24. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông cân tại B , $AB = BC = a$, $SA = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABC)$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là
- A. 45° . **B. 60° .** C. 90° . D. 30° .

Lời giải

Chọn B



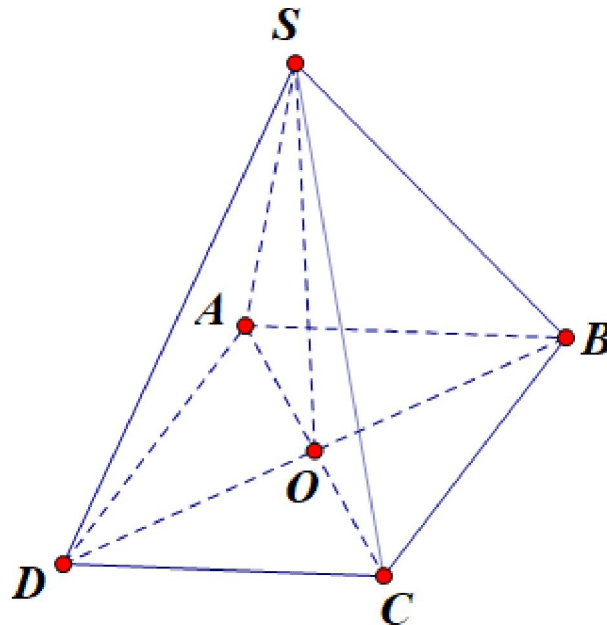
Ta có $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SA$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc $\widehat{SBA}$.

$$\tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ.$$

25. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, $\widehat{ADC} = 60^\circ$. Gọi O là giao điểm của AC và BD , $SO \perp (ABCD)$ và $SO = a$. Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng
- A. 60° . B. 75° . **C. 30° .** D. 45° .

Lời giải

Chọn C



Ta có $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, và $\widehat{ADC} = 60^\circ$ nên $\triangle ACD$ đều và $OD = \frac{2a \cdot \sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{SDO}$ và $\tan \widehat{SDO} = \frac{SO}{DO} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ suy ra

$$\widehat{SDO} = 30^\circ.$$

26. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

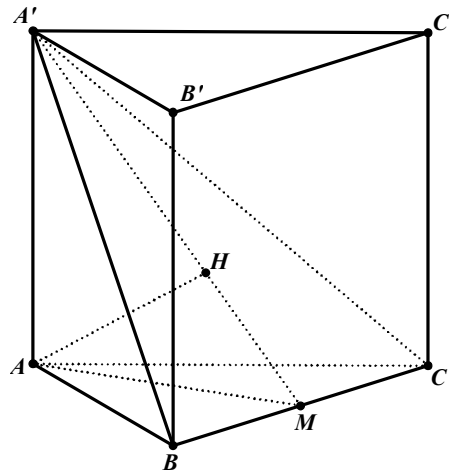
B. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

C. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm của BC , H là hình chiếu của A trên $A'M$ ta có:

$$\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AA'M) \text{ mà } AH \subset (AA'M) \Rightarrow BC \perp AH.$$

$$\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp A'M \end{cases} \Rightarrow AH \perp (A'BC) \text{ nên } d(A, (A'BC)) = AH.$$

Trong tam giác $AA'M$ vuông tại A có $AH = \frac{AM \cdot AA'}{\sqrt{AM^2 + AA'^2}} = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$

27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a\sqrt{2}$, $AD = a$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB (tham khảo hình vẽ). Góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SDM) bằng

A. 45° .

B. 60° .

C. 30° .

D. 90° .

Lời giải

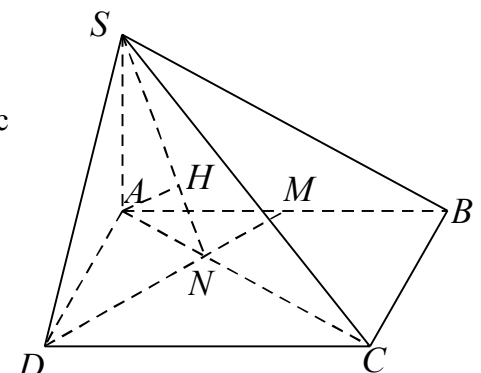
Chọn D

Gọi $N = AC \cap DM$. Ta có $\frac{AM}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, do đó hai tam giác

ABC và DAM đồng dạng, suy ra $\widehat{AMN} + \widehat{MAN} = 90^\circ$.

Vậy $AC \perp DM \Rightarrow DM \perp (SAC)$ mà $DM \subset (SDM)$

nên góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SDM) là 90° .



28. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a . Góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 60° . Tính khoảng cách từ đỉnh S đến mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $a\sqrt{2}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. a .

Lời giải

Chọn B

Trong $(ABCD)$ gọi O là giao điểm của AC và BD .

Ta có: $SO \perp (ABCD)$.

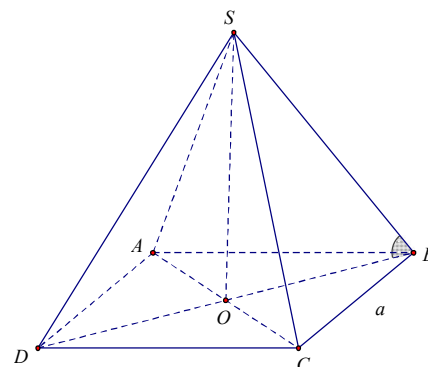
$\Rightarrow d(S, (ABCD)) = SO$.

Ta lại có: OB là hình chiếu của SB lên mặt phẳng $(ABCD)$

$\Rightarrow \widehat{(SB, (ABCD))} = \widehat{(SB, OB)} = \widehat{SBO} = 60^\circ$.

Xét $\triangle SOB$ vuông tại O , ta có: $SO = OB \cdot \tan \widehat{SBO} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Vậy $d(S, (ABCD)) = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

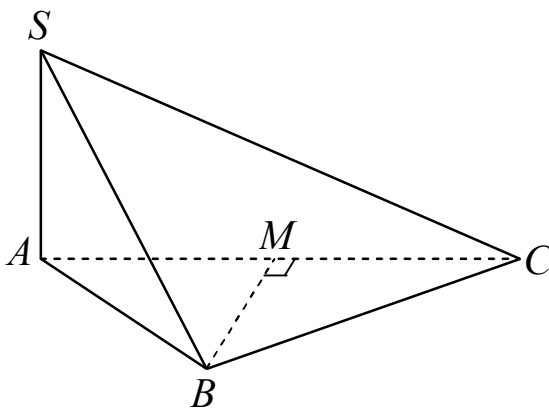


29. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B , $AB = 2a$. Biết SA vuông góc với đáy (ABC) (Hình tham khảo). Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) bằng

A. $2a$. B. $\frac{3a}{2}$. C. $\sqrt{2}a$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $AC = 2\sqrt{2}a$. Gọi M là trung điểm AC .

Ta có: $\begin{cases} BM \perp AC \\ BM \perp SA \end{cases} \Rightarrow BM \perp (SAC) \Rightarrow d(B, (SAC)) = BM = \frac{AC}{2} = a\sqrt{2}$.

30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$. Tính khoảng cách d từ điểm C đến mặt phẳng (SBD) .

A. $d = \frac{2a\sqrt{57}}{19}$.

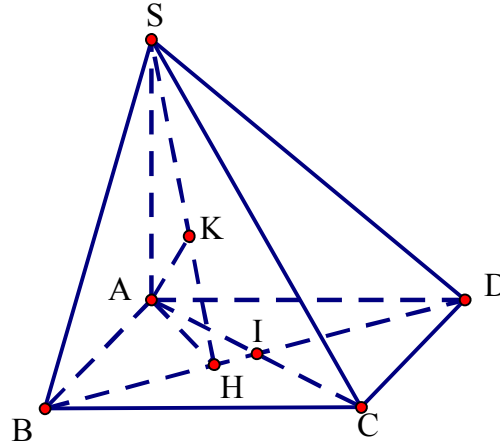
B. $d = \frac{2a}{\sqrt{5}}$.

C. $d = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

D. $\frac{a\sqrt{57}}{19}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là hình chiếu của A lên BD .

Gọi K là hình chiếu của A lên SH . Suy ra $AK \perp (SBD)$ tại K nên $d(A, (SBD)) = AK$.

Tam giác ABD vuông tại A có $AH \perp BD$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a\sqrt{3})^2} \Leftrightarrow AH^2 = \frac{3a}{4} \Leftrightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

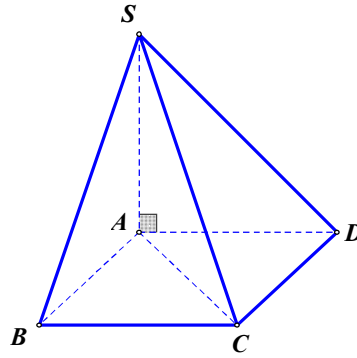
Tam giác SAH vuông tại A có $AK \perp SH$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{(2a)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{19}{12a^2} \Leftrightarrow AK^2 = \frac{12a^2}{19} \Leftrightarrow AK = \frac{2a\sqrt{57}}{19}.$$

Gọi $I = AC \cap BD \Leftrightarrow I = AC \cap (SBD) \Rightarrow \frac{d(A, (SBD))}{d(C, (SBD))} = \frac{IA}{IC}$. Mà $ABCD$ là hình chữ nhật nên

$$I \text{ là trung điểm } AC \text{ nên } \frac{IA}{IC} = 1 \text{ nên } d(C, (SBD)) = d(A, (SBD)) = \frac{2a\sqrt{57}}{19}.$$

31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với mặt đáy (tham khảo hình vẽ bên). Góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ bằng



- A.** Góc $\widehat{SDA}$. **B.** Góc $\widehat{SCA}$. **C.** Góc $\widehat{SCB}$. **D.** Góc $\widehat{ASD}$.

Lời giải

Chọn A

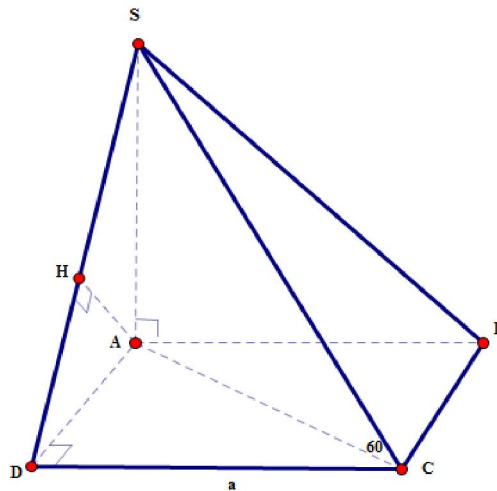
$$\text{Ta có } \begin{cases} CD \perp (SAD) \\ (ABCD) \cap (SCD) = CD \end{cases} \Rightarrow ((ABCD), (SCD)) = \widehat{SDA}.$$

32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a , SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Tính khoảng cách h từ B đến mặt phẳng (SCD) .

- A.** $\frac{a\sqrt{10}}{5}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** a . **D.** $\frac{a\sqrt{42}}{7}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $AB \parallel (SCD)$ nên $h = d(B, (SCD)) = d(A, (SCD)) = AH$

Vì $CD \perp (SAD) \Rightarrow (SCD) \perp (SAD)$ theo giao tuyến SD , dựng $AH \perp SD \Rightarrow AH \perp (SCD)$.

Theo đề góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° nên $\widehat{SCA} = 60^\circ$.

$$\text{Ta có: } \tan 60^\circ = \frac{SA}{AC} \Rightarrow SA = a\sqrt{6}$$

$$\text{Và } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{42}}{7}.$$

33. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $a\sqrt{2}$ tính khoảng cách của hai đường thẳng CC' và BD .

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

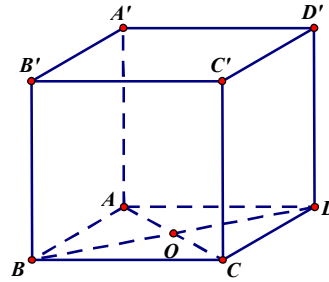
B. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

C. a .

D. $a\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có vì $ABCD.A'B'C'D' \Rightarrow \begin{cases} OC \perp BD \\ OC \perp CC' \end{cases}$

$\Rightarrow OC$ là khoảng cách của hai đường thẳng CC' và BD

Mà $ABCD$ là hình vuông có cạnh bằng $a\sqrt{2} \Rightarrow AC = 2a \Rightarrow OC = a$.

34. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và $SA \perp (ABCD)$. Biết $SA = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Góc giữa SC và $(ABCD)$ là:

A. 45° .

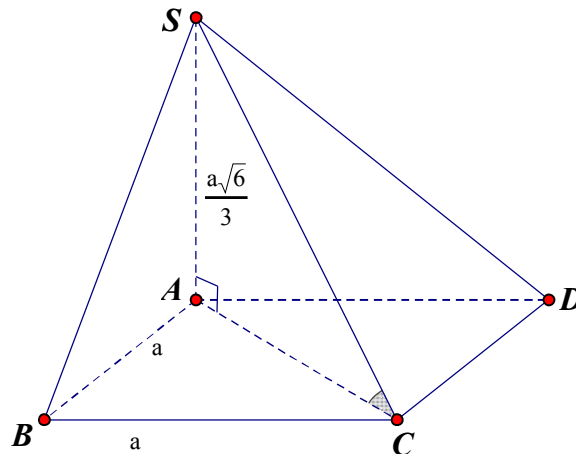
B. 30° .

C. 75° .

D. 60° .

Lời giải

Chọn B



Ta có: $SA \perp (ABCD)$.

Do đó AC là hình chiếu của SC lên $(ABCD)$.

$\Rightarrow (SC, (ABCD)) = (SC, AC) = \widehat{SCA}$.

Xét tam giác SAC vuông tại A có $\tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\Rightarrow \widehat{SCA} = 30^\circ$.

Vậy góc giữa SC và $(ABCD)$ là 30° .

35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a có $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm SB . Tính tan góc giữa đường thẳng DM và $(ABCD)$.

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

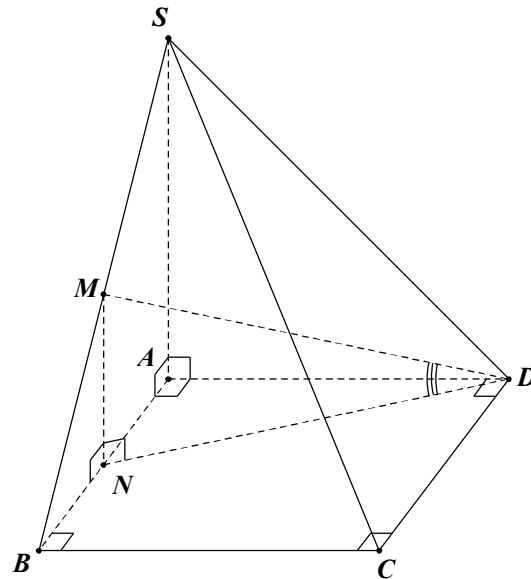
B. $\frac{\sqrt{2}}{5}$.

C. $\frac{2}{5}$.

D. $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi N là trung điểm AB .

Ta có: MN là đường trung bình của $\triangle SAB$ nên $MN \parallel SA$ và $MN = \frac{1}{2}SA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lại có: $SA \perp (ABCD)$.

Do đó $MN \perp (ABCD)$ (1).

Suy ra $MN \perp DN$.

Ta có: N là hình chiếu vuông góc của M lên $(ABCD)$ (do (1)) và D là hình chiếu vuông góc của D lên $(ABCD)$.

Suy ra $(DM; (ABCD)) = (DM; ND) = \widehat{MDN}$ ($\widehat{MDN}$ nhọn vì $\triangle MND$ vuông tại N).

Ta có: $DN = \sqrt{AD^2 + AN^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Xét $\triangle MND$ vuông tại N , có:

$$\tan MDN = \frac{MN}{DN} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

$$\text{Vậy } \tan(DM; (ABCD)) = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

36. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh là $a > 0$. Khi đó, khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AB' và BC' là

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

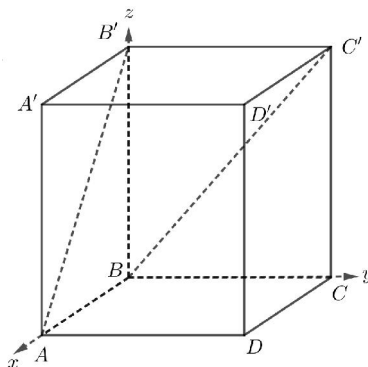
B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

D. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Trong mặt phẳng $(ACC'A')$, kẻ $CH \perp C'O$ tại H ,
mà $CH \perp BD$ (do $BD \perp (ACC'A')$) nên $CH \perp (C'BD) \Rightarrow d(C; C'BD) = CH$

Ta có: $AB' \parallel (C'BD) \Rightarrow d(AB', BC') = d(AB', (C'BD)) = d(A, (C'BD)) = d(C, (C'BD)) = CH$

Xét $\Delta C'CO$ vuông tại C , đường cao CH :

$$\frac{1}{CH^2} = \frac{1}{CO^2} + \frac{1}{CC'^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

37. Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng $a > 0$. Khi đó khoảng cách từ đỉnh A đến $mp(BCD)$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

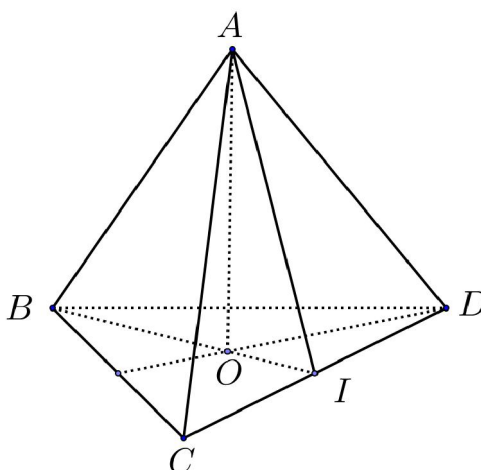
B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{a\sqrt{8}}{3}$.

D. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là trọng tâm tam giác $BCD \Rightarrow AO \perp (BCD) \Rightarrow d(A; (BCD)) = AO$.

Gọi I là trung điểm CD .

Ta có: $BO = \frac{2}{3}BI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Vậy $d(A; (BCD)) = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

38. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O' là trung điểm của $A'C'$. Tính $\tan \alpha$ với α là góc tạo bởi BO' và mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $\sqrt{3}$.

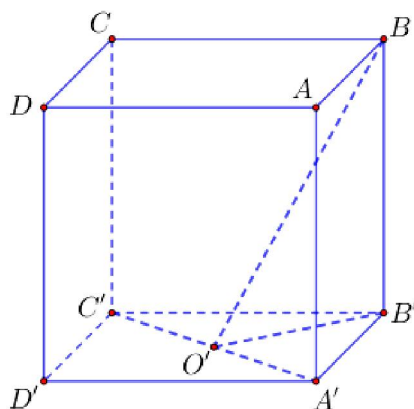
B. $\sqrt{2}$.

C. 1.

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Đặt cạnh hình lập phương bằng a .

Ta có $\widehat{(BO', (ABCD))} = \widehat{(BO', (A'B'C'D'))}$.

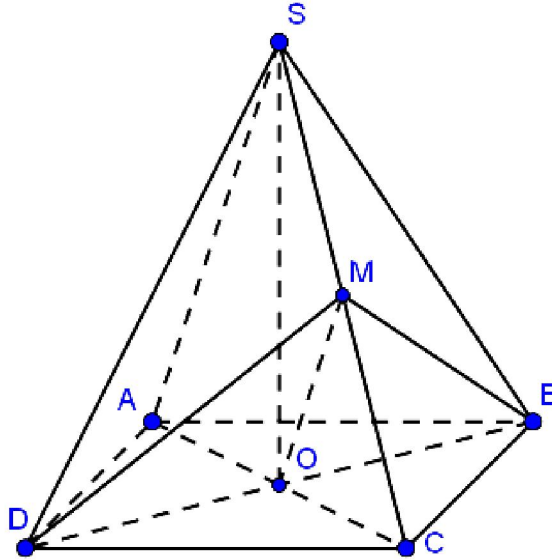
Ta có $O'B'$ là hình chiếu của BO' trên $(A'B'C'D')$

$$\Rightarrow \widehat{(BO', (ABCD))} = \widehat{(BO', B'O')} = \widehat{BO'B'} = \alpha, \tan \alpha = \frac{BB'}{O'B'} = \frac{a}{\frac{a}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}.$$

39. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên bằng cạnh đáy và bằng a . Gọi M là trung điểm của SC . Góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và $(ABCD)$ bằng
- A. 90° . B. 30° . **C. 45° .** D. 60° .

Lời giải

Chọn C



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, Ta có:

$$\square \begin{cases} BD \perp SO \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SOC) \Rightarrow BD \perp OM.$$

$$\square \begin{cases} (MBD) \cap (ABCD) = BD \\ BD \perp OM \\ BD \perp OC \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(MBD), (ABCD)} \right) = \left(\widehat{OM, OC} \right) = \widehat{MOC}.$$

$$\square OM = MC = \frac{SC}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow \Delta MOC \text{ cân tại } M; OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\square \cos \widehat{MOC} = \cos \widehat{MCO} = \frac{OC}{SC} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{MOC} = 45^\circ.$$

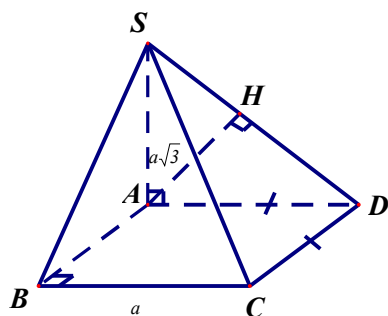
$$\text{Vậy } \left(\widehat{(MBD), (ABCD)} \right) = 45^\circ.$$

40. Hình chóp $S.ABCD$ đáy hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$; $SA = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng:

A. $a\sqrt{3}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $2a\sqrt{3}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $AB \parallel (SCD) \Rightarrow d(B, (SCD)) = d(A, (SCD))$.

Kẻ $AH \perp SD$ (1).

$CD \perp SA$, $CD \perp AD \Rightarrow CD \perp (SAD) \supset AH \Rightarrow CD \perp AH$ (2).

Từ (1), (2) ta có: $AH \perp (SCD) \Rightarrow d(A, (SCD)) = AH$.

Trong tam giác vuông SAD : $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow AH^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.