

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm có 01 trang)

Họ tên thí sinh:.....

Số báo danh:..... Phòng thi:.....

Câu 1: (3,0 điểm):

a) Tìm các điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x) = 1 + 3x^2 - 2x^3$.

b) Tìm điều kiện của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{2x - \sqrt{mx^2 + 1}}{(x-1)^2}$ có đường tiệm cận đứng.

Câu 2 (5,0 điểm):

a) Tính tổng các nghiệm $x \in [-\pi; \pi]$ của phương trình:

$$2(\cos x + \sqrt{3} \sin x) \cos x = \cos x - \sqrt{3} \sin x + 1.$$

b) Giải phương trình $(3 + \sqrt{5})^x + (3 - \sqrt{5})^x - 7 \cdot 2^x = 0$.

c) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - y^3 + 3x^2 + 6x - 3y + 4 = 0 \\ (x+1)\sqrt{y+1} + (x+6)\sqrt{y+6} = x^2 - 5x + 12y \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$

Câu 3 (4,0 điểm):

Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a\sqrt{2}$, $BC = a$ và $SA = SB = SC = SD = 2a$. Gọi K là hình chiếu vuông góc của điểm B trên AC và H là hình chiếu vuông góc của K trên SA .

a) Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a .

b) Tính diện tích xung quanh của hình nón được tạo thành khi quay tam giác ADC quanh AD theo a .

c) Tính \cos góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (BKH) .

Câu 4 (4,0 điểm):

a) Tìm hệ số của x^7 trong khai triển nhị thức Newton của $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^n$, $x \neq 0$, biết rằng n là số nguyên dương thỏa mãn $4C_{n+1}^3 + 2C_n^2 = A_n^3$.

b) Cho đa giác lồi có 14 đỉnh. Gọi X là tập hợp các tam giác có ba đỉnh là ba đỉnh của đa giác đã cho. Chọn ngẫu nhiên trong X một tam giác. Tính xác suất để tam giác được chọn không có cạnh nào là cạnh của đa giác đã cho.

Câu 5 (2,0 điểm):

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho điểm $K(-2; -5)$ và đường tròn (C) có phương trình $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 10$. Đường tròn (C_2) tâm K cắt đường tròn (C) tại hai điểm A, B sao cho dây cung $AB = 2\sqrt{5}$. Viết phương trình đường thẳng AB .

Câu 6 (2,0 điểm):

a) Cho a và b là hai số thực dương. Chứng minh rằng $(a+b)^2(a^2+b^2) \geq 8a^2b^2$.

b) Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $x > y > z > 0$ và $x + y + z = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{8}{xz} + \frac{2}{y^3}$.

..... Hết

Câu	Nội dung	Điểm
1a (2đ)	Tập xác định của hàm số $D = \mathbb{R}$. $f'(x) = 6x(1-x)$	0,5
	$f'(x) = 0$ khi $x = 0, x = 1$ Xét dấu $f'(x)$.	1,0
	Kết luận đồ thị hàm số có một điểm cực đại có tọa độ $(1; 2)$ và một cực tiểu $(0; 1)$.	0,5
1b (1đ)	Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng khi và chỉ khi có một trong các giới hạn: $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \pm\infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = \pm\infty$	0,5
	Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1} (2x - \sqrt{mx^2 + 1}) = 2 - \sqrt{m+1}$ với $m \geq -1$. Do đó với $m < -1$ thì hàm số không có giới hạn khi $x \rightarrow 1$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.	
	Với $m \geq -1$ và $m \neq 3$ thì $\lim_{x \rightarrow 1} (2x - \sqrt{mx^2 + 1}) = 2 - \sqrt{m+1}$ khác 0 và $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0$ Khi đó $\lim_{x \rightarrow 1} y = \pm\infty$ nên đường thẳng $x = 1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.	0,5
Khi $m = 3$, ta có $\lim_{x \rightarrow 1} y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - \sqrt{3x^2 + 1}}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{(2x + \sqrt{3x^2 + 1})(x-1)^2}$ $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{(2x + \sqrt{3x^2 + 1})(x-1)} = \pm\infty$ Nên đường thẳng $x = 1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số. Tóm lại, giá trị m cần tìm là $m \geq -1$		
2a (1,5đ)	Pt đã cho $\Leftrightarrow \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x = \cos x - \sqrt{3} \sin x$	0,5
	$\Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) \Leftrightarrow x = \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$	0,5
	Vì $x \in [-\pi; \pi]$ nên $x_1 = 0; x_2 = \frac{2\pi}{3}; x_3 = \frac{-2\pi}{3}$ thỏa mãn	0,5
	Vậy tổng các nghiệm $x \in [-\pi; \pi]$ của phương trình đã cho là $S = 0$.	
2b (1,5đ)	Đưa PT về dạng $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x = 7$. Đặt $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x = t$ với $t > 0$.	0,5
	Ta có PT $t + \frac{1}{t} = 7 \Leftrightarrow t^2 - 7t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^2$	0,5
	Từ đó suy ra PT có 2 nghiệm $x = \pm 2$.	0,5
2c (2đ)	ĐK: $y \geq -1$	0,5
	Phương trình (1) tương đương: $(x+1)^3 + 3(x+1) = y^3 + 3y \Leftrightarrow y = x+1$	
		1,0

	$(x+1)\sqrt{x+2} + (x+6)\sqrt{x+7} = x^2 + 7x + 12$ $\Leftrightarrow (x+1)(\sqrt{x+2}-2) + (x+6)(\sqrt{x+7}-3) = x^2 + 2x - 8$ $\Leftrightarrow (x-2) \left[\frac{x+1}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{x+6}{\sqrt{x+7}+3} - x - 4 \right] = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \frac{x+1}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{x+6}{\sqrt{x+7}+3} - x - 4 = 0 (*) \end{cases}$	
	<p>Chứng minh phương trình (*) vô nghiệm</p> $\left(\frac{x+2}{\sqrt{x+2}+2} - \frac{x+2}{2} \right) + \left(\frac{x+6}{\sqrt{x+7}+3} - \frac{x+6}{2} \right) - \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} < 0 \quad \forall x \geq -2$ <p>Kết luận hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (2; 3)$</p>	0,5
3a (2đ)	<p>Gọi $O = AC \cap BD$. Ta có $SO \perp (ABCD)$.</p>	0,5
	$OA = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \quad SO^2 = SA^2 - OA^2 = 4a^2 - \frac{3a^2}{4} = \frac{13a^2}{4} \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{13}}{2}.$	0,5
	$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{13}}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot a = \frac{a^3 \cdot \sqrt{26}}{6}$	1,0
3b (1đ)	$S_{xq} = \pi \cdot DC \cdot AC = \pi a^2 \sqrt{6}.$	1,0
	<p>Chỉ ra được K là trọng tâm tam giác BCD, $KA = 2KC$.</p> <p>Chứng minh được $SA \perp (BKH)$.</p> <p>Do đó góc giữa SB và (BKH) là góc \widehat{SBH}.</p>	0,5
3c (1đ)	<p>Tính được $BK = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, $KH = \frac{2}{3} \frac{SO \cdot AC}{SA} = \frac{a\sqrt{39}}{6}$</p> <p>Tam giác BKH vuông ở K.</p> <p>Từ đó suy ra $BH^2 = \frac{2a^2}{3} + \frac{39a^2}{36} = \frac{7a^2}{4} \Rightarrow BH = \frac{a\sqrt{7}}{2}$</p> <p>và $\cos \widehat{SBH} = \frac{BH}{SB} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.</p>	0,5
4a	<p>Từ $4C_{n+1}^3 + 2C_n^2 = A_n^3$. Điều kiện $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 3$. Tìm được $n = 11$.</p>	1,0

(2đ)	Khai triển $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^{11} = \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k (x^2)^{11-k} (-2)^k \frac{1}{x^k} = \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k (-2)^k x^{22-3k}$	0,5
	Hệ số x^7 tương ứng với $22 - 3k = 7 \Rightarrow k = 5$. Vậy hệ số x^7 là $C_{11}^5 (-2)^5 = -14784$	0,5
	Tính số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{14}^3 = 364$.	0,5
	Gọi A là biến cố : “ Tam giác được chọn trong X không có cạnh nào là cạnh của đa giác ” Suy ra \bar{A} là biến cố : “ Tam giác được chọn trong X có ít nhất một cạnh là cạnh của đa giác ”	0,5
4b (2đ)	TH 1: Nếu tam giác được chọn có 2 cạnh là 2 cạnh của đa giác thì có 14 tam giác thỏa mãn. TH 2: Nếu tam giác được chọn có đúng một cạnh là cạnh của đa giác thì có $14 \cdot 10 = 140$ tam giác thỏa mãn.	0,5
	Suy ra $n(\bar{A}) = 14 + 140 = 154$ Vậy số phần tử của biến cố A là: $n(A) = n(\Omega) - n(\bar{A}) = 210$ Suy ra $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{15}{26}$	0,5
	Gọi H là giao điểm IK và AB . Tính được $IH = \sqrt{5}$	0,5
5 (2đ)	Viết PT đường thẳng $IK: -2x + y + 1 = 0$. $H \in IK \Rightarrow H(t; 2t - 1)$	0,5
	$IH = \sqrt{5} \Rightarrow H(0; -1)$ hoặc $H(2; 3)$	0,5
	Đường thẳng AB đi qua H và vuông góc với IK nên có phương trình: $x + 2y + 2 = 0$ hoặc $x + 2y - 8 = 0$.	0,5
6a (0,5đ)	$(a+b)^2 \geq 4ab > 0; (a^2 + b^2) \geq 2ab > 0$	0,5
	Nhân các vế tương ứng hai bất trên, suy ra điều phải chứng minh.	
6b (1,5đ)	Theo phần a) ta có $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{8}{(a+b)^2}$ với $a, b > 0$ nên $\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} \geq \frac{8}{(x-z)^2}$. Suy ra $P = \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{8}{xz} + \frac{2}{y^3} \geq \frac{8}{(x-z)^2} + \frac{8}{xz} + \frac{2}{y^3}$	0,5
	Ta chứng minh được bất đẳng thức : $\frac{m^2}{a} + \frac{n^2}{b} \geq \frac{(m+n)^2}{a+b}$ với $a, b, m, n > 0$ đẳng thức xảy ra khi $\frac{a}{m} = \frac{b}{n}$. Ta có: $\frac{1}{(x-z)^2} + \frac{4}{4xz} \geq \frac{(1+2)^2}{(x-z)^2 + 4xz} = \frac{9}{(x+z)^2}$.	
	Vì vậy $P \geq 8 \left(\frac{1}{(x-z)^2} + \frac{4}{4xz} \right) + \frac{2}{y^3} \geq \frac{72}{(x+z)^2} + \frac{2}{y^3} = \frac{72}{(1-y)^2} + \frac{2}{y^3}$.	
	Xét hàm số $f(t) = \frac{36}{(1-t)^2} + \frac{1}{t^3}$ với $0 < t < 1$. Ta được $\min_{(0;1)} f(t) = f\left(\frac{1}{3}\right) = 216$	0,5
	Vậy P nhỏ nhất bằng 216 khi $y = \frac{1}{3}$, và $x + z = \frac{2}{3}$, $(x-z)^2 = 2xz$ Hay $x + z = \frac{2}{3}, xz = \frac{2}{27}$. Tức là $x = \frac{1}{3} + \frac{1}{3\sqrt{3}}; y = \frac{1}{3}; z = \frac{1}{3} - \frac{1}{3\sqrt{3}}$	0,5