



TRƯỜNG THPT LƯƠNG THẾ VINH - QUẢNG BÌNH

GV: NGUYỄN HOÀNG VIỆT

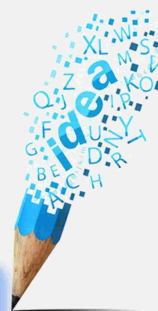


TÀI LIỆU HỌC TẬP

Chuyên đề

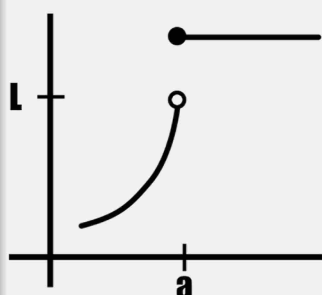


GIỚI HẠN



2022

CALCULUS



LIMITS

1

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$



* ĐẦY ĐỦ LÝ THUYẾT, VÍ DỤ MINH HỌA, PHÂN DẠNG BÀI TẬP

* HỆ THỐNG KIẾN THỨC VÀ DẠNG BÀI TỪ DỄ - KHÓ

* PHƯƠNG PHÁP GIẢI NHANH DỄ HIỂU

Học sinh:SBD:

Trường: Lớp:

LƯU HÀNH NỘI BỘ

MỤC LỤC

Chương 1. GIỚI HẠN	1
§1 – Giới hạn của dãy số	1
(A) Tóm tắt lý thuyết	1
(B) Các dạng toán	2
Dạng 1. Dùng định nghĩa chứng minh giới hạn	2
Dạng 2. Tính giới hạn dãy số dạng phân thức	5
Dạng 3. Tính giới hạn dãy số dạng phân thức chứa a^n	5
Dạng 4. Dãy số dạng Lũy thừa - Mũ	11
Dạng 5. Giới hạn dãy số chứa căn thức	13
§2 – Giới hạn hàm số	24
(A) Tóm tắt lý thuyết	24
(B) Các dạng toán	27
Dạng 1. Giới hạn của hàm số dạng vô định $\frac{0}{0}$	27
Dạng 2. Giới hạn dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}; \infty - \infty; 0 \cdot \infty$	45
Dạng 3. Tính giới hạn hàm đa thức, hàm phân thức và giới hạn một bên	50
§3 – Hàm số liên tục	57
(A) Tóm tắt lý thuyết	57
(B) Các dạng toán	58
Dạng 1. Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm	58
Dạng 2. Hàm số liên tục trên một tập hợp	64
Dạng 3. Dạng tìm tham số để hàm số liên tục - gián đoạn	68
Dạng 4. Chứng minh phương trình có nghiệm	71
§4 – Đề Kiểm tra Chương IV	77
(A) Đề số 1a	77
(B) Đề số 1b	79
(C) Đề số 2a	80
(D) Đề số 2b	82
(E) Đề số 3a	84
(F) Đề số 3b	87
(G) Đề số 4a	90
(H) Đề số 4b	92
(I) Đề số 5a	94

J	Đề số 5b.....	96
K	Đề số 6a.....	97
L	Đề số 6b.....	99

BÀI 1. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Giới hạn của dãy số

⇨ **Định nghĩa 1.1.** Dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới dương vô cực nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ hay $\lim u_n = 0$.

⇨ **Ví dụ 1.** $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

⇨ **Định nghĩa 1.2.** Dãy số (u_n) có giới hạn là a nếu $|u_n - a|$ có giới hạn bằng 0.

Nghĩa là: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - a) = 0$.

⇨ **Ví dụ 2.** $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{n+3} = 2$.

2. Các định lý về giới hạn hữu hạn

⇨ **Định lý 1.1.**

☑ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0; \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ với k là số nguyên dương.

☑ $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ nếu $|q| < 1$.

⇨ **Định lý 1.2.**

☑ Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$ thì $\lim (u_n \pm v_n) = a \pm b$, $\lim (u_n \cdot v_n) = a \cdot b$, $\lim \left(\frac{u_n}{v_n} \right) = \frac{a}{b}$ (nếu $b \neq 0$).

☑ Nếu $u_n \geq 0$ với mọi n và $\lim u_n = a$ thì $a \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.

3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

⇨ **Định nghĩa 1.3.** Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q thỏa mãn $|q| < 1$ được gọi là **cấp số nhân lùi vô hạn**.

❖ **Định lí 1.3.** Cho cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) , ta có tổng của cấp số nhân lùi vô hạn đó là

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \frac{u_1}{1-q}, (|q| < 1)$$

4. Giới hạn vô cực

⋈ Định nghĩa 1.4.

- ✔ Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $+\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu: $\lim u_n = +\infty$.

- 🍷 Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $-\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$, nếu $\lim(-u_n) = +\infty$.

Kí hiệu: $\lim u_n = -\infty$.

◀ ▶ Định lí 1.4.

a) Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$.

b) Nếu $\lim u_n = a > 0, \lim v_n = 0$ và $v_n > 0$ với mọi n thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = +\infty$.

c) Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = a > 0$ thì $\lim u_n v_n = +\infty$.

B – CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Dùng định nghĩa chứng minh giới hạn

Để chứng minh $\lim u_n = L$ ta chứng minh $\lim (u_n - L) = 0$.

⇒ Ví dụ 3. Chứng minh rằng

a. $\lim \left(\frac{-n^3}{n^3 + 1} \right) = -1$

b. $\lim \left(\frac{n^2 + 3n + 2}{2n^2 + n} \right) = \frac{1}{2}.$

 **Lời giải.**

🔗 **Ví dụ 4.** Chứng minh rằng

a. $\lim \left(\frac{3 \cdot 3^n - \sin 3n}{3^n} \right) = 3$

b. $\lim (\sqrt{n^2 + n} - n) = \frac{1}{2}.$

💬 **Lời giải.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

🔗 **Bài 1.** Chứng minh rằng

a. $\lim \frac{2n^2 + n}{n^2 + 4} = 2$

c. $\lim \frac{7^n - 2 \cdot 8^n}{8^n + 3^n} = -2$

b. $\lim \frac{6n + 2}{n + 5} = 6$

d. $\lim \frac{2 \cdot 3^n + 5^n}{5^n + 3^n} = 1.$

💬 **Lời giải.**

[illegible][illegible]

🔗 Bài 2. Chứng minh rằng

a. $\lim \left(\sqrt{4n^2 + 4n} - 2n \right) = 1$

b. $\lim \frac{\sqrt{n} + \sin^n n}{\sqrt{n} + 1} = 1$

c. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 2n} - n}{n} = 0$

d. $\lim \left(\sqrt[3]{n^3 + 2n} - n \right) = 0.$

 Lời giải.

[illegible]

❖ Bài 3. Chứng minh rằng

a. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^n \cos 3n + 5^n}{2^n + 2 \cdot 7^n} = 0$

b. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n \sin^n 2n + \cos^n 2n}{4n^2 + 8n} = 0$

💬 Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

📁 Dạng 2. Tính giới hạn dãy số dạng phân thức

Tính giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ trong đó $f(n)$ và $g(n)$ là các đa thức bậc n .

- ✔ Bước 1: Đặt n^k, n^i với k là số mũ cao nhất của đa thức $f(n)$ và i là số mũ cao nhất của đa thức $g(n)$ ra làm nhân tử chung.
- ✔ Đơn giản. Sau đó áp dụng kết quả $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0$.

📁 Dạng 3. Tính giới hạn dãy số dạng phân thức chứa a^n

- ✔ Bước 1: Đưa biểu thức về cùng một số mũ n .
- ✔ Bước 2: Chia tử và mẫu số cho a^n trong đó a là số có trị tuyệt đối lớn nhất.
- ✔ Bước 3: Áp dụng kết quả "Nếu $|q| < 1$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ ".

❖ Ví dụ 5. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 4n^3}{2n^3 + 5n - 2}$.

💬 Lời giải.

.....	
.....	
.....	

❖ Ví dụ 6. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 7n}{1 - 2n^2}$.

💬 Lời giải.

.....	
.....	
.....	



.....	
.....	
.....	

◀▶ **Ví dụ 7.** Tính $\lim \frac{n+2}{n^2+n+1}$

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	

◀▶ **Ví dụ 8.** Tính $\lim \frac{5^{n+1} - 4^n + 1}{2 \cdot 5^n - 6^n}$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	

BÀI TẬP TỰ LUYỆN (Cho mỗi dạng)

◀▶ **Bài 4.** Tính các giới hạn

a) $\lim \frac{3n+2}{2n+3}$.

b) $\lim \frac{4n^2-1}{2n^2+n}$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

◀▶ **Bài 5.** Tính các giới hạn

a) $\lim \frac{\sqrt{n^2+2n}-3}{n+2}$.

b) $\lim \frac{\sqrt{n^2+2n}-n-1}{\sqrt{n^2+n}+n}$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	

◀▶ **Bài 6.** Tính giới hạn $\lim \frac{\sqrt{4n^4 + 2n} - 3n^2}{\sqrt{n^3 + 2n} - n}$.

💬 **Lời giải.**

◀▶ **Bài 7.** Tính các giới hạn

a) $\lim \frac{7 \cdot 5^n - 2 \cdot 7^n}{5^n - 5 \cdot 7^n}.$

c) $\lim \frac{4^{n+1} + 6^{n+2}}{5^n + 8^n}.$

b) $\lim \frac{4 \cdot 3^n + 7^{n+1}}{2 \cdot 5^n + 7^n}.$

💬 **Lời giải.**

✧ Bài 8. Tính giới hạn của

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin 10n + \cos 10n}{n^2 + 1}.$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \sin n\pi}{n + 1}.$

💬 Lời giải.

✧ Bài 9. Tính giới hạn của

a) $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right].$

b) $B = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} \right].$

💬 Lời giải.

✧ Bài 10. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = \frac{2}{3} \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2(2n+1)u_n + 1}, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Tìm số hạng tổng quát u_n của dãy. Tính $\lim u_n$.

💬 Lời giải.

✧ Bài 11. Cho dãy số (a_n) thỏa mãn:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{4}{3} \\ \frac{(n+2)^2}{a_{n+1}} = \frac{n^2}{a_n} - (n+1) \end{cases} ; \forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}$$

. Tìm $\lim a_n$.

💬 Lời giải.

✧ Bài 12. Cho dãy số (u_n) xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2} - 1 \end{cases}$. Tìm $\lim u_n$.

💬 Lời giải.

✧ **Bài 13.** Cho dãy số (u_n) xác định như sau:
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases} . \text{ Tìm } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} .$$

 **Lời giải.**

✧ **Bài 14.** Cho dãy số (x_n) xác định bởi
$$\begin{cases} x_1 = 2017 \\ x_{n+1} = \frac{x_n^4 + 3}{4} \end{cases} \text{ với mọi } n \geq 1$$

Với mỗi số nguyên dương n đặt $y_n = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{x_i + 1} + \frac{2}{x_i^2 + 1} \right)$.

Chứng minh dãy số (y_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

 **Lời giải.**

Dạng 4. Dãy số dạng Lũy thừa - Mũ

☑ $\lim n^k = +\infty, k > 0.$

④ $\lim a^n = +\infty, a > 1.$

☑ $\lim \frac{1}{n^k} = 0, k > 0.$

👉 Nếu (u_n) là CSN lùi vô hạn với công bội q , ta có
$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \frac{u_1}{1 - q}.$$

☑ $\lim a^n = 0, -1 < a < 1.$



④ $\lim u_n = +\infty, \lim v_n = a > 0 \Rightarrow \lim u_n v_n = +\infty;$

④ $\lim u_n = +\infty, \lim v_n = a < 0 \Rightarrow \lim u_n v_n = -\infty$;

④ $\lim u_n = -\infty, \lim v_n = a > 0 \Rightarrow \lim u_n v_n = -\infty$;

④ $\lim u_n = -\infty, \lim v_n = a < 0 \Rightarrow \lim u_n v_n = +\infty.$

🔗 **Ví dụ 9.** Tìm các giới hạn sau

a) $\lim(2^n + 3^n)$;

b) $\lim [-4^n + (-2)^n]$.

 Lời giải.

🔗 **Ví dụ 10.** Tìm các giới hạn sau

a) $\lim \left(\frac{1 + 3^n}{3 \cdot 3^n + 2^n} \right);$

b) $\lim \left(\frac{4 \cdot 3^n - 2^n}{2 \cdot 5^n + 4^n} \right);$

c) $\lim \left(\frac{7^n + 1}{-2 \cdot 3^n - 3 \cdot 6^n} \right).$

 **Lời giải.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN (Cho mỗi dạng)

✧ Bài 15. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim \frac{2^{3n} + 3^{2n+1}}{2 \cdot 9^n + 4^n};$

b) $\lim(2 \cdot 3^n - 4^{n+1} + 7).$

💬 Lời giải.

✧ Bài 16. Tính giới hạn sau $\lim(2 \cdot 3^n - n + 1).$

💬 Lời giải.

✧ Bài 17. Tìm giới hạn sau $\lim \frac{1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 + \frac{2}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{5}\right)^n}$

💬 Lời giải.

❖ **Bài 18.** Tìm giới hạn sau $\lim \frac{1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n}{2 \cdot 3^{n+1} + 2^n}$

💬 **Lời giải.**

❖ **Bài 19.** Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1, u_{n+1} = \frac{u_n - 4}{u_n + 6}, \forall n \geq 1$. Tính giới hạn $\lim \frac{u_n + 1}{u_n + 4}$.

💬 **Lời giải.**

❖ **Bài 20.** Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 3, u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2}, \forall n \geq 1$. Tính giới hạn $\lim u_n$.

💬 **Lời giải.**

📁 Dạng 5. Giới hạn dãy số chứa căn thức

Ta thường gặp hai dạng sau:

Dạng 1. Sử dụng các tính chất giới hạn để tính.

Dạng 2. Dạng vô định, cần nhân lượng liên hợp hoặc thêm bớt hạng tử.

❖ **Ví dụ 11.** Tìm giới hạn

$$\lim \sqrt{\frac{8n+2}{2n-1}}$$

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 12.** Tính giới hạn của dãy số sau: $u_n = \sqrt{\frac{2n+9}{n+2}}, n \in \mathbb{N}^*$.

💬 **Lời giải.**

🔗 **Ví dụ 13.** Tính giới hạn:

$$\lim (\sqrt{4n^2 + 3n + 1} - 2n)$$

 Lời giải.

🔗 Ví dụ 14. Tính các giới hạn sau

a) $\lim \frac{\sqrt{4n^2 + 1} + 2n - 1}{\sqrt{n^2 + 4n + 1} + n}.$

b) $\lim \frac{n^2 + \sqrt[3]{1 - n^6}}{\sqrt{n^4 + 1} + n^2}.$

 **Lời giải.**

🔗 **Ví dụ 15.** Tính giới hạn:

$$\lim \frac{\sqrt{4n^2 + 1} - \sqrt{9n^2 + 2}}{2 - n}.$$

💬 **Lời giải.**

🔗 **Ví dụ 16.** Tính giới hạn:

$$\lim (\sqrt{n+3} - \sqrt{n-5})n$$

💬 **Lời giải.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN (Cho mỗi dạng)

🔗 Bài 21. Tính giới hạn của các dãy số sau:

a) $u_n = \sqrt{n^2 + 1}, n \in \mathbb{N}^*$;

$$\text{b) } v_n = \sqrt{\frac{n^2 + 2n + 4}{2n - 3}}, n \geq 2.$$

 **Lời giải.**

🔗 Bài 22. Tính giới hạn:

$$\lim (\sqrt{3}n - \sqrt{3n^2 - 2n - 1})$$

 **Lời giải.**

🔗 **Bài 23.** Tìm giới hạn

$$\lim (\sqrt{n^2 + 2n} - n)$$

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

🔗 **Bài 24.** Tìm giới hạn

$$\lim (\sqrt{n^3 + 2n} - n^2)$$

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

🔗 **Bài 25.**

$$\lim (\sqrt{n^2 + 3n + 2} - n + 1)$$

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

🔗 **Bài 26.**

$$\lim (\sqrt{n^2 + 2n + 3} - n)$$

💬 **Lời giải.**



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

◈ Bài 27.

$$\lim \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n+3}}$$

💬 Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

◈ Bài 28.

$$\lim(\sqrt{n^2 + 3n - 1} - \sqrt{n+1})$$

💬 Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

◈ Bài 29. Tìm giới hạn của dãy (u_n) , với

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^3 + 2} \end{cases}$$

💬 Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

✎ **Bài 30.** Tính $\lim \frac{\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n+5}}{3n+3}$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✎ **Bài 31.** Tính giới hạn của dãy số sau $u_n = \frac{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{2n^2+4n-4}}{3n+15}, n \in \mathbb{N}^*$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✎ **Bài 32.** Tính giới hạn của dãy số (u_n) với $u_n = (\sqrt{n^2-n+2} - n)$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

🔗 **Bài 33.** Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3 + 3n^2 - 2n + 1}}{n - 1}$.

 **Lời giải.**

🔗 Bài 34. Tính các giới hạn sau

a) $\lim (\sqrt{n^2 + 2n} - n - 1).$

$$\text{b) } \lim \frac{\sqrt{4n^2 + 1} - 2n - 1}{\sqrt{n^2 + 4n + 1} - n}.$$

 Lời giải.

❖ **Bài 35.** Tính giới hạn $\lim(\sqrt{n^2 + 2n + 3} - 1 + n)$.

 **Lời giải.**

✎ **Bài 36.** Tính giới hạn $\lim \sqrt[n]{a}$ với $a > 0$.

 **Lời giải.**

🔗 Bài 37. Tính giới hạn

$$\lim(\sqrt[3]{n^3-3}-\sqrt{n^2+n-2})$$

 Lời giải.

🔗 **Bài 38.** Tìm $\lim u_n$ biết $u_n = \frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$.

 Lời giải.

❖ **Bài 39.** Tính giới hạn $\lim \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} \right)$.

 **Lời giải.**

✧ Bài 40. Cho dãy số u_n thỏa:

$$\begin{cases} u_1 = 3, u_2 = 6 \\ 2u_n = u_{n-1} + u_{n+1} - 2; \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3.$$

Biết rằng u_n có duy nhất một công thức, tính: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+2-\sqrt{u_n}}{n+1-\sqrt{u_n+3n-2}}$.

 **Lời giải.**

◈ Bài 41. Tính giới hạn $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-2n}{\sqrt{n^2+1}} \right)$.

💬 Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

◈ Bài 42. Tính giới hạn của $B = \lim \frac{\sqrt{1+2+\dots+n} - n}{\sqrt[3]{1^2+2^2+\dots+n^2+2n}}$.

💬 Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

BÀI 2. GIỚI HẠN HÀM SỐ

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm

1.1. Định nghĩa

✧ **Định nghĩa 2.1.** Cho khoảng $\mathcal{K}$ chứa điểm x_0 và hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathcal{K}$ hoặc trên $\mathcal{K} \setminus \{x_0\}$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kỳ, $x_n \in \mathcal{K} \setminus \{x_0\}$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $\lim f(x_n) = L$.

Kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow x_0$.

✧ **Ví dụ 1.** Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$. Chứng minh rằng $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -4$.

💬 **Lời giải.**

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Giả sử (x_n) là một dãy số bất kỳ, thỏa mãn $x_n \neq -2$ và $x_n \rightarrow -2$ khi $n \rightarrow +\infty$.

Ta có $\lim f(x_n) = \lim \frac{x_n^2 - 4}{x_n + 2} = \lim \frac{(x_n + 2) \cdot (x_n - 2)}{(x_n + 2)} = \lim (x_n - 2) = -4$. □

Do đó $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -4$.

⚠ $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$; $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$, với c là hằng số.

1.2. Định lý về giới hạn hữu hạn

✧ **Định lý 2.1. a)** Giả sử $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$. Khi đó

☑ $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$.

☑ $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = L - M$.

☑ $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$.

☑ $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ (nếu $M \neq 0$).

b) Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, thì

$$L \geq 0 \text{ và } \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}.$$

(Dấu của $f(x)$ được xét trên khoảng đang tìm giới hạn, với $x \neq x_0$).

✧ **Ví dụ 2.** Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$.

💬 **Lời giải.**

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1) \cdot (x + 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 2) = 3.$$



1.3. Giới hạn một bên

◀ Định nghĩa 2.2.

- ☑ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$.
Số L được gọi là **giới hạn bên phải** của hàm số $y = f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$.
Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$.
- ☑ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; x_0)$.
Số L được gọi là **giới hạn bên trái** của hàm số $y = f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $a < x_n < x_0$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$.
Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$.

◀ Định lý 2.2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$.

◀ Ví dụ 3. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 5x + 2 & \text{nếu } x \neq 1 \\ x^2 - 3 & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$.

Tìm $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, và $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ (nếu có).

💬 Lời giải.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 3) = 1^2 - 3 = -2$;

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (5x + 2) = 5 \cdot 1 + 2 = 7$.

Theo định lý 2, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ không tồn tại.



2. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực

◀ Định nghĩa 2.3. a) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi $x \rightarrow +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$.

Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow +\infty$.

b) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty; a)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi $x \rightarrow -\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n < a$ và $x_n \rightarrow -\infty$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$.

Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow -\infty$.

◀ Ví dụ 4. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2x + 3}{x - 1}$. Tìm $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

💬 Lời giải.

Hàm số đã cho xác định trên $(-\infty; 1)$ và trên $(1; +\infty)$.

Giả sử (x_n) là một dãy số bất kì, thỏa mãn $x_n < 1$ và $x_n \rightarrow -\infty$.

$$\text{Ta có } \lim f(x_n) = \lim \frac{2x_n + 3}{x_n - 1} = \lim \frac{2 + \frac{3}{x_n}}{1 - \frac{1}{x_n}} = 2.$$

$$\text{Vậy } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 3}{x - 1} = 2.$$

Giả sử (x_n) là một dãy số bất kì, thỏa mãn $x_n > 1$ và $x_n \rightarrow +\infty$.

$$\text{Ta có } \lim f(x_n) = \lim \frac{2x_n + 3}{x_n - 1} = \lim \frac{2 + \frac{3}{x_n}}{1 - \frac{1}{x_n}} = 2.$$

$$\text{Vậy } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 3}{x - 1} = 2.$$

□

! Với c, k là các hằng số và k nguyên dương, ta luôn có:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} c = c; \lim_{x \rightarrow -\infty} c = c; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{c}{x^k} = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{c}{x^k} = 0.$$

Định lí 1 về giới hạn hữu hạn của hàm số khi $x \rightarrow x_0$ còn đúng khi $x \rightarrow +\infty$ hoặc $x \rightarrow -\infty$.

VD Ví dụ 5. Tìm $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 1}$.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{3 - 0}{1 + 0} = 3.$$

□

3. Giới hạn vô cực của hàm số

3.1. Giới hạn vô cực

Định nghĩa 2.4. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là $-\infty$ khi $x \rightarrow +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$, ta có $f(x_n) \rightarrow -\infty$.

Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ hay $f(x) \rightarrow -\infty$ khi $x \rightarrow +\infty$.

Nhận xét: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (-f(x)) = -\infty$.

3.2. Một vài giới hạn đặc biệt

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$ với k nguyên dương.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = -\infty$ nếu k là số lẻ.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$ nếu k là số chẵn.

3.3. Một vài quy tắc về giới hạn vô cực

- Quy tắc tìm giới hạn của tích $f(x).g(x)$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

b) Quy tắc tìm giới hạn của thương $\frac{f(x)}{g(x)}$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$
α	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L > 0$	0	+	$+\infty$
		-	$-\infty$
$L < 0$	0	+	$-\infty$
		-	$+\infty$

Các quy tắc trên vẫn đúng cho các trường hợp $x \rightarrow x_0^+$, $x \rightarrow x_0^-$, $x \rightarrow +\infty$, và $x \rightarrow -\infty$.

❖ **Ví dụ 6.** Tìm $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x)$.

💬 **Lời giải.**

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{2}{x^2}\right) = -\infty$, vì

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{2}{x^2}\right) = 1 > 0$. □

❖ **Ví dụ 7.** Tính $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x-3}{x-1}$.

💬 **Lời giải.**

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x-3}{x-1} = +\infty$, vì

$\lim_{x \rightarrow 1^-} (2x-3) = 2 \cdot 1 - 3 = -1 < 0$, và $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) = 0$, $x-1 < 0 \forall x < 1$. □

B – CÁC DẠNG TOÁN

📁 Dạng 1. Giới hạn của hàm số dạng vô định $\frac{0}{0}$

* Biểu thức có dạng $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ trong đó $f(x), g(x)$ là các đa thức và $f(x_0) = g(x_0) = 0$.

Khử dạng vô định bằng cách phân tích cả tử và mẫu thành nhân tử với nhân tử chung là $x - x_0$.

Giả sử $f(x) = (x - x_0) \cdot f_1(x)$ và $g(x) = (x - x_0) \cdot g_1(x)$. Khi đó:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

Nếu giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ vẫn ở dạng vô định $\frac{0}{0}$ thì ta lặp lại quá trình khử đến khi không còn dạng vô định.

Việc phân tích thành nhân tử ở trên được thực hiện bằng phương pháp chia Horner.

* Biểu thức có dạng $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ trong đó $f(x), g(x)$ là các biểu thức có chứa căn thức và $f(x_0) = g(x_0) = 0$.

Khử dạng vô định bằng cách nhân cả tử và mẫu với biểu thức liên hợp tương ứng của biểu thức chứa căn thức để trục các nhân tử $x - x_0$ ra khỏi các căn thức, nhằm khử các thành phần có giới hạn bằng 0. Lưu ý có thể nhân liên hợp một hay nhiều lần để khử dạng vô định.

Chú ý: Các hằng đẳng thức

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B).$$

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2).$$

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2).$$

❖ **Ví dụ 8.** Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + 4x}.$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 + x - 6}.$

b) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 5x + 2}{1 - 2x}.$

d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + x^3}{1 - x^2}.$

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

❖ **Ví dụ 9.** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{2x + \sqrt{3x^2 + 1}}.$

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	

❖ **Ví dụ 10.** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x - 5\sqrt{x-1}}{3 - \sqrt{x+4}}.$

💬 **Lời giải.**



.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

❖ **Ví dụ 11.** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{12x+1}}{4x}$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	

❖ **Ví dụ 12.** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{2x+9} - x - 5}{\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+3}}$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

❖ **Ví dụ 13.** Tính giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x}$ với n là số nguyên dương.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	

❖ **Ví dụ 14.** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+ax} - 1}{x}$ với $a \neq 0$.

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 15.** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+ax} - 1}{x}$ với $a \neq 0$.

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 16.** Tính giới hạn $J = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - 1}{x}$ với $a \neq 0$, n là số nguyên và $n \geq 2$.

💬 **Lời giải.**

⚠ **Chú ý:** Các giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x} = n$ với $n \in \mathbb{N}$; và $J = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - 1}{x} = \frac{a}{n}$ với $a \neq 0$, n là số nguyên và $n \geq 2$ được gọi là các “giới hạn cơ bản”.

❖ **Ví dụ 17.** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x^3} - \sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}$.

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 18.** Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x - 3}{x^2 - 3x}$.

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - (1+3x)}{x^2 + x^3}$.

b) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1}$.

d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^{2017} + 1}{x^{2018} + 1}$.

💬 **Lời giải.**



--	--

◀ Ví dụ 19. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - \sqrt{3x+1}}{x^2 - 1}$.

💬 Lời giải.

--	--

◀ Ví dụ 20. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{2x - 2}}{x^2 - 2x}$.

💬 Lời giải.

--	--

◀ Ví dụ 21. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} - 1}$.

💬 Lời giải.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

◀▶ **Ví dụ 22.** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x^2 - 2x} - \sqrt{2 - x}}{x^2 + 5x + 6}$.

💬 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

◀▶ **Ví dụ 23.** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - \sqrt{x})(1 - \sqrt[3]{x}) \cdots (1 - \sqrt[n]{x})}{(1 - x)^{n-1}}$.

💬 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

❖ **Ví dụ 24.** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 1998)\sqrt[7]{1 - 2x} - 1998}{x}$.

💬 **Lời giải.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

❖ **Bài 1.** Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 - x - 5}{7x^2 + 5x - 2}$.

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x - 3}$.

b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4 - x^2}{x + 2}$.

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 4}$.

💬 **Lời giải.**

❖ **Bài 2.** Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 - 3x + 2}$.

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^5 + 1}{x^3 + 1}$.

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^3 - 2x^2 + 1}$.

d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x^4 - 8x^2 - 9}$.

💬 **Lời giải.**



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

◇◇ **Bài 3.** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x}-1}{2x}$.

💬 Lời giải.

.....

.....

.....

.....

◇◇ **Bài 4.** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{x^2 - 4}$.

💬 Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

◇◇ **Bài 5.** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{2x^3-3x^2}$.

💬 Lời giải.

.....

.....

.....

.....

◇◇ **Bài 6.** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+7}-x-2}{x^3-4x+3}$.

💬 Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

◇◇ **Bài 7.** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-8x-9}{\sqrt{4-3x^2}-2x-3}$.

💬 Lời giải.

.....

.....

 Lời giải.

 **Lời giải.**

 **Lời giải.**

 **Lời giải.**



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

❖ **Bài 12.** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt[3]{x+4} + \sqrt[3]{4-3x}}{\sqrt{x^2+9} - \sqrt{x+21}}$.

💬 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

❖ **Bài 13.** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{8x^3+x^2+6x+9} - \sqrt[3]{9x^2+27x+27}}{x^3}$.

💬 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

✎ **Bài 14.** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x^3} - \sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}$.

💬 Lời giải.

✎ **Bài 15.** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{8x+11} - \sqrt{x+7}}{x^2-3x+2}$.

💬 Lời giải.

✎ **Bài 16.** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} + \sqrt{x^2+8} - 5}{x^2-3x+2}$.

💬 Lời giải.

✎ **Bài 17.** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x - \sqrt{x+2} - \sqrt{5x+26}}{x-2}$.

💬 Lời giải.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

❖ **Bài 18.** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x^2 - x + 2} + \sqrt{x + 3} - 3}{2x^2 + 5x + 2}$.

💬 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

BÀI TẬP TỔNG HỢP

❖ **Bài 19.** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}}$.

💬 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

❖ **Bài 20.** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1}$.

💬 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

❖ **Bài 21.** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^5} - 1}{1 - x^4}$.

💬 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

◀▶ **Bài 22.** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x} - 5}{x - 1}$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

◀▶ **Bài 23.** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x} + x^2 + x + 1}{x + 1}$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

◀▶ **Bài 24.** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1} + x^4 - 3x^3 + x^2 + 3}{\sqrt{2x} - 2}$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

◀▶ **Bài 25.** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+4x} \cdot \sqrt{1+6x} - 1}{x}$.

💬 **Lời giải.**

 **Lời giải.**

 Lời giải.

 **Lời giải.**

🔗 **Bài 29.** Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt[4]{x+9} - 2}{x-7}$.

 **Lời giải.**

🔗 **Bài 30.** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{8-x}}{x}$.

 **Lời giải.**

❖ **Bài 31.** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[5]{2x-1} - \sqrt[6]{3x-2}}{x-1}$.

 **Lời giải.**

❖ **Bài 32.** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x}\sqrt[3]{1+3x}\sqrt[4]{1+4x}-1}{x}$.

 **Lời giải.**



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

✧ **Bài 33.** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt[3]{3x+1}}{x^2}$.

💬 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

✧ **Bài 34.** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} \cdot \sqrt[n]{1+\beta x} - 1}{x}$ với $\alpha \cdot \beta \neq 0$ và m, n là các số nguyên dương.

💬 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

✧ **Bài 35.** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta}$ với $a \neq 0$ và α, β là các số nguyên dương.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

⇨ **Bài 36.** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1}$ với n là số nguyên dương.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

⇨ **Bài 37.** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2}$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

⇨ **Bài 38.** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^n - a^n) - na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

◀▶ **Bài 39.** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$.

💬 Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

◀▶ **Bài 40.** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$.

💬 Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

◀▶ **Bài 41.** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}} - \sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1 - \sqrt{1-\frac{x}{2}}}$.

💬 Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

✧ **Bài 42.** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - \sqrt{x})(1 - \sqrt[3]{x}) \cdots (1 - \sqrt[n]{x})}{(1 - x)^{n-1}}$.

💬 **Lời giải.**

✧ **Bài 43.** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2} + x)^n - (\sqrt{1+x^2} - x)^n}{x}$.

💬 **Lời giải.**

📁 Dạng 2. Giới hạn dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}; \infty - \infty; 0 \cdot \infty$

Dạng 1: $I = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ với $P(x), Q(x)$ là đa thức hoặc các hàm đại số.

Phương pháp: Gọi $p = \deg P(x), q = \deg Q(x)$ và $m = \min(p, q)$. Chia cả tử và mẫu cho x^m ta có kết luận. ($\deg P(x)$ là bậc cao nhất của đa thức $P(x)$).

+ Nếu $p \leq q$ thì tồn tại giới hạn.

+ Nếu $p > q$ thì không tồn tại giới hạn.

Dạng 2: Giới hạn $\infty - \infty$.

Phương pháp sử dụng các biểu thức liên hợp đưa về dạng $\frac{\infty}{\infty}$

Dạng 3: Giới hạn $0 \cdot \infty$.

Phương pháp sử dụng các biểu thức liên hợp đưa về dạng $\frac{\infty}{\infty}$.

◀ Ví dụ 25. Tính $D = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 4x + 1}{x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x + 3}$

💬 Lời giải.

◀ Ví dụ 26. Tính $D = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 2}}{\sqrt[3]{8x^3 + x^2 + 1}}$

💬 Lời giải.

◀ Ví dụ 27. Tìm giới hạn $D = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x})$.

💬 Lời giải.

◀ Ví dụ 28. Tìm giới hạn $D = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$.

💬 Lời giải.

◀ Ví dụ 29. Tìm giới hạn $D = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 (\sqrt{9x^4 + 7} - \sqrt[3]{27x^6 - 5})$.

💬 Lời giải.



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

✧ **Bài 1.** Tính $D = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 4x + 1}{x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x + 3}$

💬 Lời giải.

✧ **Bài 2.** Tính $D = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 2}}{\sqrt[3]{8x^3 + x^2 + 1}}$

💬 Lời giải.

✧ **Bài 3.** Tính $D = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x^5 + 7x^3 - 4x + 3}{8x^5 - 5x^4 + 2x^2 - 1}$.

💬 Lời giải.

✧ **Bài 4.** Tính $D = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-6x^5 + 7x^3 - 4x + 3}{8x^5 - 5x^4 + 2x^2 - 1}$.

💬 Lời giải.

✧ Bài 5. Tính $D = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 2} - \sqrt[3]{6x^2 + 5}}{\sqrt[4]{16x^4 + 3} - \sqrt[5]{8x^4 + 7}}.$

💬 Lời giải.

✧ Bài 6. Tính $D = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 2} - \sqrt[3]{6x^2 + 5}}{\sqrt[4]{16x^4 + 3} - \sqrt[5]{8x^4 + 7}}.$

💬 Lời giải.

✧ Bài 7. Tính giới hạn $D = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x - 3)^{20}(3x + 2)^{30}}{(2x + 1)^{50}}.$

💬 Lời giải.

✧ Bài 8. Tính giới hạn $D = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3x}}{\sqrt{4x^2 + 1} - x + 2}.$

💬 Lời giải.

✎ Bài 9. Tính giới hạn $D = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3x}}{\sqrt{4x^2 + 1 - x + 2}}.$

💬 Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	

✎ Bài 10. Tính giới hạn $D = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{(x+a)(x+b)} - x).$

💬 Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✎ Bài 11. Tính giới hạn $D = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 5 - \sqrt{4x^2 - 4x - 1}).$

💬 Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✎ Bài 12. Tính giới hạn $D = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 2} - \sqrt{x^2 + 1}).$

💬 Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✧ **Bài 13.** Tính giới hạn $D = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x^3 + 1} - \sqrt{x^3 - 1})$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✧ **Bài 14.** Tìm giới hạn $D = \lim_{x \rightarrow +\infty} x (\sqrt{4x^2 + 5} - \sqrt[3]{8x^3 - 1})$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

📁 **Dạng 3. Tính giới hạn hàm đa thức, hàm phân thức và giới hạn một bên.**

• Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$ thì:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } L \text{ và } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \text{ cùng dấu} \\ -\infty & \text{nếu } L \text{ và } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \text{ trái dấu.} \end{cases}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty \\ +\infty & \text{nếu } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \text{ và } L \cdot g(x) > 0 \\ -\infty & \text{nếu } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \text{ và } L \cdot g(x) < 0. \end{cases}$$

• $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$.

✧ **Ví dụ 1.** Tính giới hạn của các hàm số sau:

$$\text{a) } I_1 = \lim_{x \rightarrow \sqrt[3]{2}} (x^3 - 2x^6 + 1);$$

$$\text{b) } I_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^5 - x^4 + 4x^3 - 3);$$

$$\text{c) } I_3 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^5 - x^4 + 4x^3 - 3);$$

$$\text{d) } I_4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 - x^2 + 4x + 2);$$

$$\text{e) } I_5 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 - x^2 + 4x + 2);$$

$$\text{f) } I_6 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^6 + 2x^3 - 4x^2 + 4x).$$

 **Lời giải.**

 **Ví dụ 2.** Tính giới hạn của các hàm số sau:

$$\text{a) } I_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2 - 2x + 6};$$

$$\text{b) } I_2 = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-x^2 + 5}{x - 3};$$

$$\text{c) } I_3 = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x^2 + \sqrt{3-x}}{x-3};$$

$$\text{d) } I_4 = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{|x^2 - 4|}{x + 2}.$$

 **Lời giải.**

❖ Ví dụ 3. Tính giới hạn một bên của các hàm số sau tại điểm được chỉ ra:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} & \text{khi } x < 1 \\ x & \text{khi } x \geq 1 \end{cases} \text{ tại } x = 1;$$

$$\text{b) } g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{x - 2} & \text{khi } x > 2 \\ \frac{x - 1}{6} & \text{khi } x \leq 2 \end{cases} \text{ tại } x = 2.$$

💬 Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

❖ Bài 1. Tính các giới hạn sau:

$$\text{a) } I_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-6x^4 + 2x^3 - x + 5);$$

$$\text{c) } I_3 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 - 3} - 2x);$$

$$\text{b) } I_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - 3} + 2x);$$

$$\text{d) } I_4 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt[3]{x^3 - 1}).$$

💬 Lời giải.

❖ Bài 2. Tính các giới hạn sau:

$$\text{a) } I_1 = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\sqrt{-4 - 4x} + 3x^2}{x + 1};$$

$$\text{c) } I_3 = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2 - 5x + 2}{(x - 2)^2};$$

$$\text{b) } I_2 = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x + 1}{2 - x};$$

$$\text{d) } I_4 = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{\sqrt{x+7} - 2}{|x^2 - 9|}.$$

💬 Lời giải.

✧ Bài 3. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 3)^2}$.

💬 Lời giải.

✧ Bài 4. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2 - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1} & \text{khi } x > 1 \\ m - 2x & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$. Xác định các giá trị của tham số m để $f(x)$ có giới hạn tại điểm $x = 1$.

💬 Lời giải.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

✧ Bài 5. Tính các giới hạn sau:

a) $I_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^3 - \sqrt{x^2 + 2})$;

c) $I_3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{2x^6 + x^4 - 1}}{1 - x^2}$;

b) $I_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt[3]{2x^6 + x^4 - 1}}{x^2 + \sqrt{x}}$;

d) $I_4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{16x^8 + 3} - x^2}{x(x+2)(x+4)(x+6)}$.

💬 Lời giải.

✧ Bài 6. Tính các giới hạn sau:

a) $I_1 = \lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{x^3 - 16x}{|x + 4|}$;

b) $I_2 = \lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{|x + 4|}$.

💬 Lời giải.

Kết nối tri thức với cuộc sống

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2$.

d) $I_4 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^{2018} - 2018}{x^2 - 1}$.

Th.S Nguyễn Hoàng Việt – 0905.193.688

✧ **Bài 10.** Tính các giới hạn sau:

$$\text{a) } I_1 = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-1+\sqrt{5-2x}}{x^2+x-2};$$

$$\text{c) } I_3 = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{7+6x}-\sqrt{5+4x}}{(x+1)^2};$$

$$\text{b) } I_2 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{2-x}-\sqrt[3]{9-x}}{1-x};$$

$$\text{d) } I_4 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2017x} \cdot \sqrt[3]{1+2018x}-1}{x}.$$

💬 **Lời giải.**

✧ **Bài 11.** Tính các giới hạn sau:

$$\text{a) } I_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+2x-1}-x-1);$$

$$\text{c) } I_3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2-x}-\sqrt[3]{8x^3+3x^2});$$

$$\text{b) } I_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2-2x-1}+x-1);$$

$$\text{d) } I_4 = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2017}{1-x^{2017}} - \frac{2018}{1-x^{2018}} \right).$$

💬 **Lời giải.**



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

BÀI 3. HÀM SỐ LIÊN TỤC

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hàm số liên tục tại một điểm

↔ **Định nghĩa 3.1.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục** tại x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

⚠ Hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại x_0 được gọi là **gián đoạn** tại điểm đó.

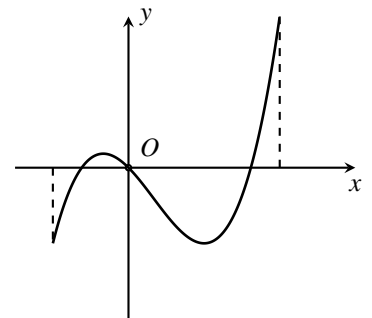
2. Hàm số liên tục trên một khoảng

↔ **Định nghĩa 3.2.** Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục trên một khoảng** nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.

↔ **Định nghĩa 3.3.** Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục trên đoạn** $[a; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a; b)$ và $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

⚠ Khái niệm hàm số liên tục trên nửa khoảng, như $(a; b]$, $[a; +\infty)$, ... được định nghĩa một cách tương tự.

⚠ Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một “đường liền” trên khoảng đó



3. Một số định lý cơ bản

↔ **Định lý 3.1.**

- Hàm số đa thức liên tục trên toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$.
- Hàm số phân thức hữu tỉ (thương của hai đa thức) và các hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng của tập xác định của chúng.

↔ **Định lý 3.2.** Giả sử $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số liên tục tại điểm x_0 . Khi đó

- Các hàm số $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$ và $y = f(x) \cdot g(x)$ liên tục tại x_0 .
- Hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

↔ **Định lý 3.3.** Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a)f(b) < 0$, thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$.

⚠ Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a)f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm nằm trong khoảng $(a; b)$.

B – CÁC DẠNG TOÁN**Dạng 1. Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm**

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D . Để xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x_0 \in D$, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Tính $f(x_0)$.

Bước 2. Tìm $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Bước 3. So sánh và rút ra kết luận.

✔ Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ thì hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm x_0 .

✔ Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ thì hàm số $f(x)$ không liên tục (gián đoạn) tại điểm x_0 .

❖ **Ví dụ 1.** Cho hàm số: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ a & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$ với a là hằng số.

Xét tính liên tục của hàm số tại $x_0 = 1$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

❖ **Ví dụ 2.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{nếu } x > 0 \\ x & \text{nếu } x \leq 0 \end{cases}$.

Xét tính liên tục của hàm số tại điểm $x_0 = 0$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

❖ **Ví dụ 3.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ -2 & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$.

Xét tính liên tục của hàm số $f(x)$ tại điểm $x_0 = 1$.

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 4.** Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{2x - 3}}{2 - x} & \text{nếu } x \neq 2 \\ 1 & \text{nếu } x = 2 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 2$.

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 5.** Cho hàm số $f(x)$ xác định bởi: $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x+5} - 3} & \text{khi } x \neq 4 \\ -\frac{3}{2} & \text{khi } x = 4 \end{cases}$.

Xét tính liên tục của hàm số $f(x)$ tại điểm $x_0 = 4$.

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 6.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax + \frac{1}{4} & \text{nếu } x \leq 2 \\ \frac{\sqrt[3]{3x+2} - 2}{x-2} & \text{nếu } x > 2 \end{cases}$. Tìm a để hàm số liên tục tại $x_0 = 2$.

💬 **Lời giải.**

3. Hàm số liên tục

Kết nối tri thức với cuộc sống

❖ **Ví dụ 7.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{nếu } x \neq 2 \\ m^2 + 3m & \text{nếu } x = 2 \end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại $x_0 = 2$.

 **Lời giải.**

⇒ **Ví dụ 8.** Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} & \text{nếu } x < 0 \\ m + \frac{x^3-3x+1}{x+2} & \text{nếu } x \geq 0 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = 0$.

 Lời giải.

❖ **Ví dụ 9.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^3 - \sqrt{8-4x}}{x-1} & \text{nếu } x < 1 \\ 14ax & \text{nếu } x \geq 1 \end{cases}$. Tìm a để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 1$.

 Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

❖ **Bài 1.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x - 1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ 5a^2 - 3 & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$. Tìm a để hàm số liên tục tại $x_0 = 1$.

 **Lời giải.**

❖ **Bài 2.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 2a - \frac{5}{4} & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$. Tìm a để hàm số liên tục tại $x_0 = 0$.

 Lời giải.

❖ **Bài 3.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{3x + a} & \text{nếu } x \neq 1 \\ 3x + a & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$. Tìm các giá trị của tham số a để $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

 **Lời giải.**

3. Hàm số liên tục

Kết nối tri thức với cuộc sống

✧ **Bài 4.** Tìm a, b để hàm số $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 3 & \text{nếu } x < 1 \\ 5 & \text{nếu } x = 1 \text{ liên tục tại } x_0 = 1. \\ 2x - 3b & \text{nếu } x > 1 \end{cases}$

 **Lời giải.**

✧ **Bài 5.** Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}{x} & \text{nếu } x < 0 \\ m + \frac{x^3 - 3x + 1}{x+2} & \text{nếu } x \geq 0 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = 0$.

 **Lời giải.**

 Lời giải.

 Lời giải.

 **Lời giải.**

Th.S Nguyễn Hoàng Việt – 0905.193.688

⇔ **Ví dụ 11.** Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của chúng.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & \text{khi } x \geq 2 \\ 6x + 1 & \text{khi } x < 2. \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 5 & \text{khi } x > 1 \\ 3 & \text{khi } x = 1 \\ 2x + 1 & \text{khi } x < 1. \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{khi } x \geq 3 \\ 2x + 4 & \text{khi } 0 \leq x < 3 \\ 3x^2 - 5 & \text{khi } x < 0. \end{cases}$$

💬 **Lời giải.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

🔗 **Bài 9.** Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của chúng.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x^2-4} & \text{khi } x \neq 2 \\ 1 & \text{khi } x = 2 \end{cases}.$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3 & \text{khi } x = 1 \end{cases}.$$

 **Lời giải.**

🔗 **Bài 10.** Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của chúng.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \geq -2 \\ 2-x & \text{khi } x < -2. \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} 3x-2 & \text{khi } x > -1 \\ 1 & \text{khi } x = -1 \\ x^2-6 & \text{khi } x < -1. \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{khi } x \geq 3 \\ x^2 & \text{khi } 1 \leq x < 3 \\ 4x^2 - 3 & \text{khi } x < 1. \end{cases}$$

 Lời giải.

Dạng 3. Dạng tìm tham số để hàm số liên tục - gián đoạn

Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0).$

❖ Ví dụ 12. Tìm tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - m & \text{khi } x \neq 2 \\ x + m & \text{khi } x = 2 \end{cases}$, liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

 Lời giải.

❖ Ví dụ 13. Tìm tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1} & \text{khi } x \neq -1 \\ m^2 + 5m & \text{khi } x = -1 \end{cases}$, liên tục tại điểm $x_0 = -1$.

 Lời giải.

❖ Ví dụ 14. Tìm tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4x+5}-3}{x^2-1} & \text{khi } x > 1 \\ 2m+3 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$, gián đoạn tại điểm $x_0 = 1$.

 Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

✎ Bài 11. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 5x + 2}{2 - x} & \text{khi } x \neq 2 \\ m^2 - m - 5 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$. Tìm m để hàm số gián đoạn tại $x = 2$.

💬 Lời giải.

✎ Bài 12. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x-2}-1}{x-3} & \text{khi } x \neq 3 \\ a-3 & \text{khi } x = 3 \end{cases}$. Tìm a để hàm số liên tục tại $x = 3$.

💬 Lời giải.

✎ Bài 13. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} m^2 - m + 3 & \text{khi } x = 1 \\ \frac{x^2 + mx - 1 - m}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại $x = 1$.

💬 Lời giải.

✎ Bài 14. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + m & \text{khi } x = 1 \\ \frac{x^3 - 3x^2 + x + 1}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại $x = 1$.

💬 Lời giải.

✎ **Bài 15.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2(\sqrt{x+3}-2)}{x^2-1} & \text{khi } x > 1 \\ ax^2+bx+\frac{1}{4} & \text{khi } x < 1 \\ a-b-\frac{7}{4} & \text{khi } x = 1 \end{cases}$

Tìm a, b để hàm số liên tục tại $x = 1$.

Tìm a, b để hàm số liên tục tại $x = 1$.

 **Lời giải.**

❖ Bài 16. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 + (2m-3)x - m + 1}{2x-1} & \text{khi } x \neq \frac{1}{2} \\ 2m & \text{khi } x = \frac{1}{2} \end{cases}$.
 Tìm m để hàm số liên tục tại $x = \frac{1}{2}$.

Tìm m để hàm số liên tục tại $x = \frac{1}{2}$.

 Lời giải.

Dạng 4. Chứng minh phương trình có nghiệm

- ❖ Để chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên D , ta chứng minh hàm số $y = f(x)$ liên tục trên D và có hai số $a, b \in D$ sao cho $f(a) \cdot f(b) < 0$.
- ❖ Để chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có k nghiệm trên D , ta chứng minh hàm số $y = f(x)$ liên tục trên D và tồn tại k khoảng rời nhau $(a_i; a_{i+1})$ ($i = 1, 2, \dots, k$) nằm trong D sao cho $f(a_i) \cdot f(a_{i+1}) < 0$.

CÁC VÍ DỤ MẪU

❖ **Ví dụ 15.** Chứng minh rằng phương trình $2x^4 - 2x^3 - 3 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1; 0)$.

 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 16.** Chứng minh rằng phương trình $6x^3 + 3x^2 - 31x + 10 = 0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.

 **Lời giải.**

❖ Ví dụ 17. Chứng minh rằng phương trình $x - 1 + \sin x = 0$ có nghiệm.

 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 18.** Chứng minh rằng phương trình $(m^2 + m + 4)x^{2017} - 2x + 1 = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm âm với mọi giá trị của tham số m .

 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	

◀▶ **Ví dụ 19.** Chứng minh rằng phương trình $a \cos 2x + b \sin x + \cos x = 0$ luôn có nghiệm với mọi tham số a, b .

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

◀▶ **Bài 17.** Chứng minh phương trình $x^4 - x^3 - 2x^2 - 15x - 25 = 0$ có ít nhất 1 nghiệm dương và 1 nghiệm âm.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	

◀▶ **Bài 18.** Chứng minh phương trình $x^4 - 2x^2 + 3x - 1 = 0$ có ít nhất 2 nghiệm.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

◀▶ **Bài 19.** Chứng minh rằng phương trình $x^5 - 3x^4 + 5x - 2 = 0$ có ít nhất ba nghiệm phân biệt.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✎ **Bài 20.** Chứng minh rằng phương trình $x + 1 + \cos x = 0$ có nghiệm.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	

✎ **Bài 21.** Chứng minh rằng phương trình $\sqrt{x^5 + 2x^3 + 25x^2 + 14x + 2} = 3x^2 + x + 1$ có đúng 5 nghiệm phân biệt.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✎ **Bài 22.** Chứng minh rằng phương trình $(1 - m^2)x^5 - 3x - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm với mọi giá trị của m .

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	

✎ **Bài 23.** Chứng minh rằng phương trình $\frac{x^4 - x^2 + mx - 3m + 1}{x^2 - x - 2} = m$ có ít nhất 2 nghiệm với mọi $m > 1$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✎ **Bài 24.** Chứng minh rằng phương trình $\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x} = m$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m .

💬 **Lời giải.**

✧ **Bài 25.** Cho phương trình $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$, biết $a.f(c) < 0$. Chứng minh rằng phương trình $a(ax^2 + bx + c)^2 + b(ax^2 + bx + c) + c = x$ có nghiệm.

💬 **Lời giải.**

✧ **Bài 26.** Chứng minh rằng phương trình $x^5 + 3x + 1 = 0$ có đúng một nghiệm.

💬 **Lời giải.**

BÀI TẬP TỔNG HỢP

✧ **Bài 27.** Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{8+x} - \sqrt{4-x}}{x}, & \text{với } x \neq 0 \\ \frac{1}{3}, & \text{với } x = 0 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 0$.

💬 **Lời giải.**

❖ Bài 28. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{(1+2017x)^{2018} - (1+2018x)^{2017}}{x^2}, & \text{với } x \neq 0 \\ 2017 \cdot 2018, & \text{với } x = 0. \end{cases}$ trên tập số thực $\mathbb{R}$.

 **Lời giải.**

❖ **Bài 29.** Tìm giá trị của m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3 - \sqrt{9 - x^2}}{\sqrt{x^2 + 4} - 2}, & \text{với } x \neq 0 \\ m, & \text{với } x = 0 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 0$.

 **Lời giải.**

 **Lời giải.**

 **Lời giải.**

BÀI 4. ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG IV

A – ĐỀ SỐ 1A

🔗 **Bài 1.** (2 điểm) Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 + 3n - 1}{2n^4 + 4}$.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{27n^3 - 4n^2 + 5}}{n - 6}$.

💬 **Lời giải.**

🔗 **Bài 2.** (3 điểm) Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$.

c) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{5x - 3}{x - 2}$.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - 2x + 3} - 2x^3}{3 - x^3}$.

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{5x+6} - 6}{\sqrt[3]{3x+2} - 2}$.

💬 **Lời giải.**

❖ **Bài 3.** (2 điểm) Xác định a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1} & \text{nếu } x \neq -1 \\ ax^2 + 3x & \text{nếu } x = -1 \end{cases}$ liên tục tại $x = -1$.

 **Lời giải.**

❖ **Bài 4.** (2 điểm) Chứng minh rằng phương trình $x^5 - 3x - 1 = 0$ có ít nhất ba nghiệm.

 **Lời giải.**

❖ **Bài 5.** (1 điểm) Chứng minh rằng phương trình $x^3 - 3x^2 - 2010\cos^2 x + \sin^{2017} x + 1 = 0$ có nghiệm.

 **Lời giải.**

B – ĐỀ SỐ 1B

🔗 **Bài 1.** (2 điểm) Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{n^4 - 2n + 1}{3n^4 + n + 2}.$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n^2 + n + 1} - 2n}{3n + 4}.$$

 **Lời giải.**

🔗 **Bài 2.** (2 điểm) Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 1}$.

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt{1 - x}}{x^4 + x}.$

 Lời giải.

❖ **Bài 3.** (2 điểm) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{7x-10}-2}{x-2} & \text{nếu } x > 2 \\ mx+3 & \text{nếu } x \leq 2 \end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại $x = 2$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

❖ **Bài 4.** (2 điểm) Chứng minh rằng phương trình $4x^3 - 8x^2 + 1 = 0$ có ít nhất 3 nghiệm.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

❖ **Bài 5.** (2 điểm) Cho phương trình: $(m^4 + m + 1)x^{2010} + x^5 - 32 = 0$, m là tham số. Chứng minh rằng, phương trình trên luôn có ít nhất một nghiệm dương với mọi giá trị của tham số m .

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

C-ĐỀ SỐ 2A

❖ **Bài 1.** (3 điểm) Tính các giới hạn.

a) $\lim \frac{3^n + 5^{n+1}}{4 + 5^{n+2}}.$

b) $\lim \frac{1 + n \sin n}{n^2 + 2}.$

💬 **Lời giải.**

✎ **Bài 2.** (4,5 điểm) Tính các giới hạn.

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2 - x + 3} + x).$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{2 - \sqrt{x + 2}}.$

c) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$

💬 **Lời giải.**

✎ **Bài 3.** (1,5 điểm) Tìm tất cả giá trị của tham số m sao cho hàm số sau đây liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 2 & \text{nếu } x > 1 \\ x + m & \text{nếu } x \leq 1 \end{cases}$$

💬 **Lời giải.**

Kết nối tri thức với cuộc sống

[illegible]
$$(1 - m^2)(x + 2)^3 + x^2 + x - 3 = 0.$$

.....

.....

.....

.....

a) $\lim \frac{2^n - 3^{n+3}}{1 + 3^{n+1}}.$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + \cos 2n}{n^2 + 1}$.

[illegible]

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 2} + x).$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x^2-1}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2 & \text{nếu } x > 1 \\ mx - 1 & \text{nếu } x \leq 1 \end{cases}$$
$$x^6 - 2x^4 + 4x^3 - 9x - 3 = 0.$$

Th.S Nguyễn Hoàng Việt – 0905.193.688

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

E – ĐỀ SỐ 3A

✧ **Bài 1 (2,0 điểm).** Tìm các giới hạn sau

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 3n + 2}.$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 3n + 1}{n^4 + 2n^2 + 2}.$

💬 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

✧ **Bài 2 (2,0 điểm).** Tìm các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{(x+a_1)(x+a_2)} - x \right].$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1},$ với m, n là các số nguyên dương.

💬 **Lời giải.**



--	--

❖ **Bài 3 (2,0 điểm).** Tìm tất cả các giá trị của m để các hàm số sau liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2} & \text{nếu } x > 2 \\ mx + \frac{1}{4} & \text{nếu } x \leq 2 \end{cases}.$$

$$\text{b) } g(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{2}{3x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ m & \text{nếu } x = 0 \end{cases}.$$

Lời giải.

--	--

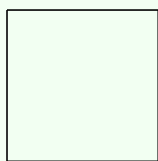
.....	
.....	
.....	

❖ **Bài 4 (2,0 điểm).** Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) với $a + 5b + 28c = 0$. Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm trên đoạn $\left[0; \frac{1}{5}\right]$.

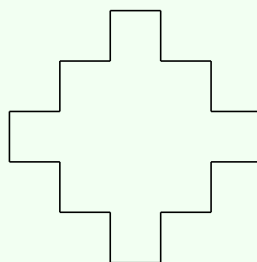
💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

❖ **Bài 5 (1,0 điểm).** Cho một hình vuông H_0 cạnh 1. Ta chia mỗi cạnh của hình vuông làm ba đoạn thẳng bằng nhau, rồi dựng trên đoạn thẳng ở giữa, ra phía ngoài hình vuông ban đầu một hình vuông có độ dài bằng đoạn thẳng đó, sau đó xoá đoạn thẳng đó đi, ta thu được một hình gọi là H_1 . Ta lại chia mỗi cạnh của hình H_1 thành ba đoạn bằng nhau, rồi dựng trên đoạn thẳng ở giữa, ra phía ngoài H_1 một hình vuông có độ dài bằng độ dài đoạn thẳng đó, sau đó xoá đoạn thẳng đó đi, ta được hình H_2 . Cứ lặp lại quá trình trên ta được một dãy các hình $(H_n)_{n \geq 0}$. Gọi S_n là diện tích của hình H_n . Tính $\lim S_n$.



H_0



H_1

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

F-ĐỀ SỐ 3B

⚡ Bài 1 (2,0 điểm). Tìm các giới hạn sau

a) $\lim \frac{n^3 + 4n + 1}{2n^3 + 3n^2}.$

b) $\lim \frac{n^2 + 2n + 1}{n^3 + n^2 + n + 2}.$

 **Lời giải.**



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

❖ **Bài 2 (2,0 điểm).** Tìm các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - nx + n - 1}{(x - 1)^2}$, với n nguyên dương.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$.

💬 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

❖ **Bài 3 (3,0 điểm).** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để các hàm số sau liên tục trên tập xác định

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{7x-10}-2}{x-2} & \text{nếu } x > 2 \\ mx - \frac{1}{4} & \text{nếu } x \leq 2 \end{cases}$.

b) $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{2}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ m & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$.

💬 **Lời giải.**

✧ **Bài 4 (2,0 điểm).** Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) với $7a + 5b + 4c = 0$. Chứng minh rằng, phương trình đã cho luôn có nghiệm trên đoạn $[1; 2]$.

 Lời giải.

🔗 **Bài 5 (1 điểm).** Cho hai số dương a, b và dãy (u_n) cho bởi

$$\begin{cases} u_1 = a, u_2 = b \\ u_{n+2} = \frac{u_n + u_{n+1}}{2}, n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Tìm giới hạn $\lim u_n$.

 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

G – ĐỀ SỐ 4A

✧ **Bài 1.** (2,0 điểm) Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{n \rightarrow 1} \frac{2n^2 + n - 1}{n^2 + 1}.$

b) $\lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{3^{n+2} - 2^n + 4}{2 \cdot 3^n + 2^n + 1}.$

💬 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

✧ **Bài 2.** (3,0 điểm) Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 9x + 8}{1 - x}.$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{16x^2 + 1} + 3}{x + 1}.$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x - 2} - 2}{x^2 - 4}.$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sqrt{4x^2 + x + 1}).$

💬 **Lời giải.**

❖ **Bài 3.** (2,0 điểm) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ m + 1 & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại điểm $x = 1$.

 Lời giải.

❖ **Bài 4.** (1,5 điểm) Chứng minh rằng phương trình $2x^5 - 7x - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0; 2)$.

 Lời giải.

4. Đề Kiểm tra Chương IV

Kết nối tri thức với cuộc sống

❖ **Bài 5.** (1,5 điểm) Cho phương trình $m(x+1)(x-2)^{11} + 3x - 4 = 0$. Chứng minh phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị của m .

 Lời giải.

H – ĐỀ SỐ 4B

🔗 **Bài 6.** (2,0 điểm) Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim(n^3 + 3n^2 + n - 10)$.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 + 6n + 1} - n}{3n + 1}.$

 **Lời giải.**

🔹 **Bài 7.** (2,0 điểm) Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{(x - 1)^2}.$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{7-2x} - 2}{x-3}.$$

 **Lời giải.**



.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

⇨ **Bài 8.** (2,5 điểm) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + mx - m - 1}{x - 1} & \text{nếu } x > 1 \\ 2x + m^2 & \text{nếu } x < 1 \\ 2m^2 + 3m - 2 & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại điểm $x = 1$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

⇨ **Bài 9.** (2,0 điểm) Chứng minh rằng phương trình $5x^4 + x^2 - 10 = 0$ có ít nhất 2 nghiệm.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

⇨ **Bài 10.** (1,5 điểm) Cho các số thực a, b, c với $a \neq 0$ thỏa mãn $5a + 3b + 2c = 0$. Chứng minh phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ luôn có nghiệm.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

I – ĐỀ SỐ 5A

✧ Bài 1 (2 điểm). Tìm giới hạn của các dãy số sau:

a) (u_n) có $u_n = \frac{3^n - 4^{n+1} - 3}{2^n - 4^n + 2}$.

b) (v_n) có $v_n = \sqrt{3n^2 + n + 5}$.

💬 Lời giải.

✧ Bài 2 (3 điểm). Tính giới hạn của các hàm số sau:

a) $M = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{2x-1}{x-2}$.

b) $N = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x+1}$.

c) $P = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+3} - x)$.

💬 Lời giải.

✎ **Bài 3 (2 điểm).** Tính các giới hạn một bên sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x+2}{x-4}.$

b) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2+2}{x+1}.$

💬 **Lời giải.**

✎ **Bài 4 (2 điểm).** Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 3x - a, & \text{Nếu } x \leq 2 \\ \frac{-x^3 + x + 6}{x - 2}, & \text{Nếu } x > 2 \end{cases}$

Tìm a để hàm số liên tục trên tập xác định của nó.

💬 **Lời giải.**

❖ **Bài 5 (1 điểm).** Chứng minh rằng phương trình: $3x^5 + 2x - 1 = 0$ có ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(0; 1)$.

💬 Lời giải.

.....	
.....	
.....	

J – ĐỀ SỐ 5B

💬 Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

!

❖ **Bài 3 (2 điểm).** Tính các giới hạn một bên sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+2}{x-1}.$

b) $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2+1}{x+2}.$

💬 Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

⇨ **Bài 4 (2 điểm).** Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x - a & \text{nếu } x = 2 \\ \frac{-x^3 + x + 6}{x - 2} & \text{nếu } x \neq 2 \end{cases}$.

Tìm a để hàm số liên tục trên tập xác định của nó.

💬 **Lời giải.**

⇨ **Bài 5 (1 điểm).** Chứng minh rằng phương trình: $x^3 + 2x - 1 = 0$ có ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(0; 1)$.

💬 **Lời giải.**

K – ĐỀ SỐ 6A

⇨ **Bài 1.** (4 điểm) Tính các giới hạn sau

a) $\lim (-n^2 + n\sqrt{n} + 1)$.

c) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x+1} - 1 \right)$.

b) $\lim (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 2})$.

d) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x + 2}$.

💬 **Lời giải.**

❖ **Bài 2.** (2 điểm) Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} & \text{nếu } x \neq 3 \\ 5 & \text{nếu } x = 3 \end{cases}$ trên tập xác định của nó.

 **Lời giải.**

❖ **Bài 3.** (2 điểm) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{7x-10}-2}{x-2}, & \text{nếu } x > 2 \\ mx+3, & \text{nếu } x \leq 2 \end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại $x=2$.

 **Lời giải.**

❖ **Bài 4.** (2 điểm) Chứng minh rằng phương trình:

- a) $x^5 + x^3 - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.
b) $\cos x + m \cos 2x = 0$ luôn có nghiệm với mọi m .

 **Lời giải.**

L-ĐỀ SỐ 6B

❖ **Bài 1.** (1.5 điểm) Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$ với $n \geq 1$. Biết (u_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$, hãy tính giới hạn đó.

 **Lời giải.**

❖ **Bài 2.** (1.5 điểm) Tính tổng $S = 2 - \sqrt{2} + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} - \dots$

 **Lời giải.**

🔗 **Bài 3.** (4 điểm) Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+1}{x-2}$.

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sqrt{9+x}-3}.$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 - x - 1}.$$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1-x} - \sqrt[3]{8-x}}{x}$.

 **Lời giải.**

❖ **Bài 4.** (1.5 điểm) Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} & \text{khi } x < 3 \\ 2mx + m + 1 & \text{khi } x \geq 3 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$

 **Lời giải.**

🔗 **Bài 5.** (1.5 điểm) Với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$, chứng minh phương trình

$$a(x - b)(x - c) + b(x - c)(x - a) + c(x - a)(x - b) = 0$$

có nghiệm.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	