

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1. (4 điểm)

1. Cho hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ có đồ thị (P). Lập bảng biến thiên của hàm số đã cho và tìm tọa độ giao điểm của đồ thị (P) với trục hoành Ox.

2. Tìm a, b, c sao cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị là một đường parabol với đỉnh là $I(2;9)$ và đường parabol đó đi qua điểm $A(-1;0)$.

Câu 2. (4 điểm)

1. Giải phương trình: $x^2 + 2\sqrt{2} - 2x = 2$.

2. Tìm m để $x^2 - 2mx + 4\sqrt{m^2 - 1} - 2 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 3. (2 điểm)

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x+1}(y-1) = 2y-3 \\ x(y-1)^2 = y^2 - 2y \end{cases}$$

Câu 4. (8 điểm)

1. Cho tam giác ABC vuông tại A và $\widehat{ACB} = 30^\circ$, $AB = a$. Gọi D là trung điểm của AC và lấy điểm I sao cho $ABID$ là hình chữ nhật.

a) Chứng minh rằng $\overline{IA} = 2\overline{IB} + \overline{IC}$.

b) Gọi K là giao điểm của AI và BC . Tính $\cos \widehat{AKC}$.

c) Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn $2MB^2 + MC^2 - MA^2 = 2a^2$.

2. Cho tứ giác $ABCD$ có $AC \perp BD$ và nội tiếp đường tròn tâm O bán kính $R = 1$. Đặt diện tích tứ giác $ABCD$ bằng S và $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$.

Chứng minh rằng $(ab + cd)(ad + bc) = 8S$.

Câu 5. (2 điểm)

Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh là a, b, c thỏa mãn $2c + b = abc$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{3}{b+c-a} + \frac{4}{a+c-b} + \frac{5}{a+b-c}$.

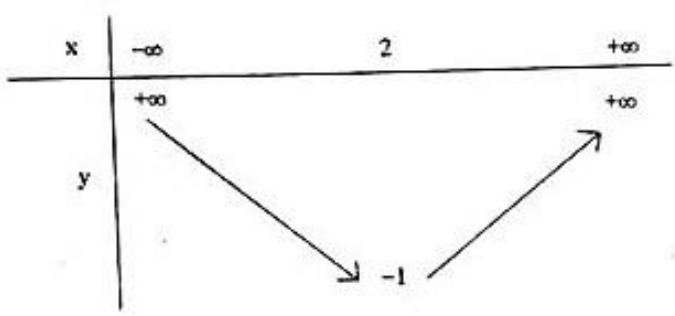
.....**Hết**.....

Họ và tên thí sinh:.....SBD:.....

ĐÁP ÁN MÔN TOÁN 10
KÌ THI OLYMPIC CỤM THANH XUÂN-CẦU GIẤY

Năm học: 2017-2018

.....o0o.....

Câu	Đáp án	Điểm
Câu 1 (4 đ)	1.1. Hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ +) TXĐ: R +) Có $a = 1 > 0, \frac{-b}{2a} = 2, \frac{-\Delta}{4a} = y(2) = -1$.	0,5
	+)BBT 	0,5
	+) PT hoành độ giao điểm $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$	0,5
	+) Đồ thị (P) cắt Ox tại (1;0), (3;0).	0,5
	1.2. Tìm a, b, c: +) ĐK: $a \neq 0$. +) Vì đồ thị có đỉnh là I(2;9) nên đồ thị có trục đối xứng $x=2$. Mà đồ thị đi qua A(-1;0) nên đồ thị cũng đi qua B(5;0)	0,5
	Suy ra hàm số có dạng $y = a(x+1)(x-5)$	0,5
	+) Vì $y(2) = 9 \Leftrightarrow a(2+1)(2-5) = 9 \Leftrightarrow a = -1$. Do đó $y = -(x+1)(x-5) \Leftrightarrow y = -x^2 + 4x + 5$. Vậy $a = -1; b = 4; c = 5$.	0,5
	Cách khác: +) ĐK: $a \neq 0$. -Theo giả thiết có hệ $\begin{cases} a - b + c = 0 \\ \frac{-b}{2a} = 2 \\ 4a + 2b + c = 9 \end{cases}$	1,0

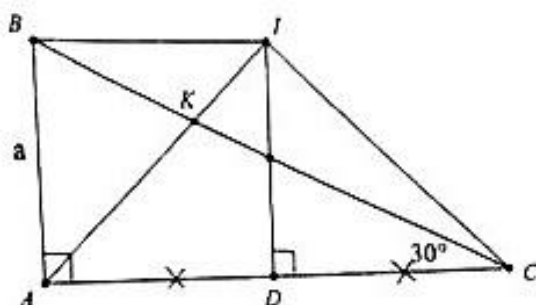
	$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \Rightarrow y = -x^2 + 4x + 5. \\ c = 5 \end{cases}$ Vậy $a = -1; b = 4; c = 5$.	1,0
Câu 2 (4đ)	2.1. Giải PT $x^2 + 2\sqrt{2-2x} = 2$. ĐK: $x \leq 1$. Đặt $\sqrt{2-2x} = y \geq 0$ và ta được hệ: $\begin{cases} x^2 + 2y = 2(1) \\ y^2 + 2x = 2(2) \end{cases}$ Trừ theo vế (1), (2) có: $(x-y)(x+y-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = 2 - y \end{cases}$ TH1: $x = y$ thay vào (1) được: $y^2 + 2y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = -1 + \sqrt{3}(TM) \vee y = -1 - \sqrt{3}(KTM) \Rightarrow x = -1 + \sqrt{3}.$ TH2: $x = 2 - y$ thay vào (2) được: $y^2 + 2(2 - y) = 2 \Leftrightarrow y^2 - 2y + 2 = 0$ PT này vô nghiệm. Vậy PT đã cho có 1 nghiệm duy nhất: $x = \sqrt{3} - 1$.	0,25
		0,25
		0,5
		0,5
		0,25
		0,25
		0,5
		0,25
		0,5
		0,25
Câu 3 (2đ)	2.2. Vì $a=1 > 0$ nên (ycbt) $\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 4\sqrt{m^2 - 1} + 2 < 0$ $\Leftrightarrow (m^2 - 1) - 4\sqrt{m^2 - 1} + 3 < 0 \text{ (Hoặc đặt } \sqrt{m^2 - 1} = t)$ $\Leftrightarrow 1 < \sqrt{m^2 - 1} < 3$ $\Leftrightarrow 1 < m^2 - 1 < 9 \Leftrightarrow 2 < m^2 < 10$ $\Leftrightarrow \sqrt{2} < m < \sqrt{10} \Leftrightarrow m \in (-\sqrt{10}; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; \sqrt{10}).$	0,5
	Giải hệ PT $\begin{cases} \sqrt{x+1}(y-1) = 2y-3 \text{ (1)} \\ x(y-1)^2 = y^2-2y \text{ (2)} \end{cases}$ +) ĐK: $x \geq -1$. +) $y=1$ (Loại)	0,5
	+) $y \neq 1$, hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} = \frac{2y-3}{y-1} \\ x = \frac{y^2-2y}{(y-1)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} = 2 - \frac{1}{y-1} \\ x+1 = 2 - \frac{1}{(y-1)^2} \end{cases}$	0,5
	-Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x+1} \\ b = \frac{1}{y-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ a^2+b^2=2 \end{cases}$	0,5
	$\Leftrightarrow a=b=1 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$. Vậy $(x;y)=(0;2)$.	0,5
	Cách khác: Từ PT(1) có $(x+1)(y-1)^2 = (2y-3)^2$ (3)	0,5

Thế $x(y-1)^2 = y^3 - 2y$ vào PT (3) ta được:

$$2y^2 - 8y + 8 = 0 \Leftrightarrow y = 2.$$

Khi đó $x=0$. Thử lại thỏa mãn. KL: $(x;y)=(0;2)$.

4.1a.



Có $\overline{IA} + \overline{IC} = 2\overline{ID}$

$$= 2\overline{BA} = 2(\overline{IA} - \overline{IB})$$

$$\Rightarrow \overline{IA} = 2\overline{IB} + \overline{IC}.$$

4.1b. Có $AC = a\sqrt{3} = 2AD \Rightarrow AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $AI = \sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.

Vì $BI \parallel AC$ và $AC = 2BI$ nên $AK = \frac{2}{3}AI = \frac{a\sqrt{7}}{3}$

Và $CK = \frac{2}{3}BC = \frac{4a}{3}$.

Áp dụng định lí cosin cho tam giác AKC ta được:

$$\cos \widehat{AKC} = \frac{AK^2 + CK^2 - AC^2}{2AK \cdot CK} = \frac{\frac{7a^2}{9} + \frac{16a^2}{9} - 3a^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{4a}{3}} = \frac{-\sqrt{7}}{14}.$$

4.1c.

$$\text{Có } 2MB^2 + MC^2 - MA^2 = 2a^2 \Leftrightarrow 2(\overline{MI} + \overline{IB})^2 + (\overline{MI} + \overline{IC})^2 - (\overline{MI} + \overline{IA})^2 = 2a^2$$

$$\Leftrightarrow 2MI^2 + 2IB^2 + IC^2 - IA^2 = 2a^2$$

$$\Leftrightarrow 2MI^2 + 2IB^2 = 2a^2 \Leftrightarrow MI^2 + IB^2 = a^2$$

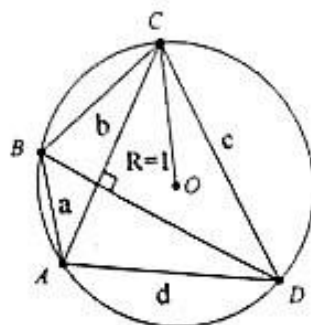
$$\text{Có } IB = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow MI^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow IM = \frac{a}{2} \Rightarrow \text{Tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I bán kính } \frac{a}{2}.$$

4.2. Có $S = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{1}{2}ab \sin B + \frac{1}{2}cd \sin D = \frac{1}{2}(ab + cd) \sin B$

Và $S = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{1}{2}ad \sin A + \frac{1}{2}bc \sin C = \frac{1}{2}(ad + bc) \sin A$

$$\Rightarrow S^2 = \frac{1}{4}(ab+cd)(ad+bc)\sin A\sin B$$



0,25

Theo đl sin có $\sin A = \frac{BD}{2R} = \frac{BD}{2}$ & $\sin B = \frac{AC}{2R} = \frac{AC}{2}$

0,25

$$\Rightarrow \sin A \sin B = \frac{AC \cdot BD}{4} \text{ mà } S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \Rightarrow \sin A \sin B = \frac{S}{2}$$

0,25

$$\Rightarrow S^2 = \frac{1}{4}(ab+cd)(ad+bc) \frac{S}{2} \Rightarrow (ab+cd)(ad+bc) = 8S.$$

0,25

Ta có: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$, $\forall x, y > 0$, dấu "=" khi $x=y$. Áp dụng ta được:

0,25

$$P = \left(\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{a+c-b} \right) + 2 \left(\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{a+b-c} \right) + 3 \left(\frac{1}{a+c-b} + \frac{1}{a+b-c} \right)$$

0,5

$$\geq \frac{4}{2c} + \frac{8}{2b} + \frac{12}{2a} = \frac{2}{c} + \frac{4}{b} + \frac{6}{a} = 2 \left(\frac{1}{c} + \frac{2}{b} + \frac{3}{a} \right).$$

0,25

Vì $2c+b=abc \Rightarrow \frac{2}{b} + \frac{1}{c} = a.$

0,5

$$\Rightarrow P \geq 2 \left(a + \frac{3}{a} \right). \text{ Theo bất Cô-si thì } a + \frac{3}{a} \geq 2\sqrt{3} \Rightarrow P \geq 4\sqrt{3}.$$

0,25

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\sqrt{3}.$

Vậy $\min P = 4\sqrt{3}$ khi $a=b=c=\sqrt{3}.$

0,25

Câu 5
(2đ)