

CHỦ ĐỀ NHỊ THỨC NIU-TƠN

I. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1) Công thức nhị thức Niu-ton

Ta có $(a+b)^n = C_n^0 \cdot a^n + C_n^1 \cdot a^{n-1} \cdot b + \dots + C_n^{n-1} \cdot a \cdot b^{n-1} + C_n^n \cdot b^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$.

2. Một số kết quả quan trọng

- Với $a = b = 1$, ta có công thức $2^n = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n$.
- Với $a = 1; b = x$, ta có công thức $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 \cdot x + C_n^2 \cdot x^2 + \dots + C_n^n \cdot x^n$
- Với $a = 1; b = -x$, ta có công thức $(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1 \cdot x + C_n^2 \cdot x^2 - C_n^3 \cdot x^3 + \dots + (-1)^n C_n^n \cdot x^n$
- Với $a = 1; b = 1$, ta có $0^n = C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^k C_n^k + \dots + (-1)^n C_n^n$.

3) Chú ý

Trong biểu thức ở vế phải của khai triển $(a+b)^n$

- Số các hạng tử là $n+1$

- Số hạng thứ $k+1$ của khai triển là $T_{k+1} = C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$

- Các hạng tử có số mũ của a giảm dần từ n đến 0 ; số mũ của b tăng dần từ 0 đến n , nhưng tổng các số mũ của a và b trong mỗi hạng tử luôn bằng n (quy ước $a^0 = b^0 = 1$);

- Các hệ số của mỗi cặp hạng tử cách đều hai hạng tử đầu và cuối đều bằng nhau.

- Các công thức lũy thừa thường dùng:
$$\begin{cases} a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \Rightarrow a^{-n} = \frac{1}{a^n} \\ (a^m)^n = a^{m \cdot n} \\ a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \Rightarrow \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \end{cases}$$

II. HỆ THỐNG VÍ DỤ MINH HỌA

Dạng 1. Tìm hệ số, số hạng trong khai triển không có điều kiện

Phương pháp:

- Bước 1: Viết khai triển dạng tổng quát: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k \longrightarrow T_{k+1} = C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$

- Bước 2: Dựa vào giả thiết yêu cầu tìm hệ số của x^m , giải phương trình $m = f(k) \longrightarrow k$

- Bước 3: Thay vào biểu thức của T và kết luận

Ví dụ 1. Tìm hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển $(x-3)^9$?

Lời giải:

Ta có $(x-3)^9 = \sum_{k=1}^9 C_9^k \cdot x^k \cdot (-3)^{9-k}$

- Hệ số của số hạng chứa x^k trong khai triển sẽ là: $T = (-3)^{9-k} C_9^k$

- Số hạng chứa x^3 tức $k = 3$ là $T = (-3)^6 C_9^3 = 61236$

Ví dụ 2. Tìm hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển $(2x-1)^{12}$?

Lời giải:

Ta có $(2x-1)^{12} = \sum_{k=1}^{12} C_{12}^k \cdot (2x)^k \cdot (-1)^{12-k} = \sum_{k=1}^{12} (-1)^{12-k} (2)^k C_{12}^k \cdot (x)^k$

- Hệ số của số hạng chứa x^k trong khai triển sẽ là: $T = (-1)^{12-k} (2)^k C_{12}^k$

- Số hạng chứa x^5 tức $k = 5$ là: $T = -(2)^5 C_{12}^5 = 25344$

Ví dụ 3. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{15} trong khai triển $(3x-x^2)^{12}$?

Lời giải:

Ta có $(3x-x^2)^{12} = x^{12} (3-x)^{12} = x^{12} \sum_{k=1}^{12} C_{12}^k \cdot 3^k \cdot (-1)^{12-k} x^{12-k} = \sum_{k=1}^{12} C_{12}^k \cdot 3^k \cdot (-1)^{12-k} x^{24-k}$

- Hệ số của số hạng chứa x^{24-k} trong khai triển sẽ là: $T = C_{12}^k \cdot 3^k \cdot (-1)^{12-k}$

- Số hạng chứa x^{15} tức $24-k=15 \Rightarrow k=9$ là $T = -3^9 \cdot C_{12}^9$

Ví dụ 4. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{11} trong khai triển $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^{10}$?

Lời giải:

Ta có $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^{10} = \sum_{k=1}^{10} C_{10}^k \cdot (x^2)^k \cdot \left(-\frac{2}{x}\right)^{10-k} = \sum_{k=1}^{10} (-2)^{10-k} \cdot C_{10}^k \cdot x^{3k-10}$

- Hệ số của số hạng chứa x^{3k-10} trong khai triển sẽ là: $T = (-2)^{10-k} \cdot C_{10}^k$

- Số hạng chứa x^{11} nên có $3k-10=11 \Rightarrow k=7$, hệ số đó là $T = (-2)^3 \cdot C_{10}^7$

Ví dụ 5. Tìm hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^{12}$?

Lời giải:

Ta có $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^{12} = \sum_{k=1}^{12} C_{12}^k \cdot (2x)^k \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^{12-k} = \sum_{k=1}^{12} (-1)^{12-k} \cdot 2^k \cdot C_{12}^k \cdot x^{2k-12}$

- Hệ số của số hạng chứa x^{2k-12} trong khai triển sẽ là: $T = (-1)^{12-k} \cdot 2^k \cdot C_{12}^k$

- Số hạng chứa x^4 nên có $2k - 12 = 4 \Rightarrow k = 8$, hệ số đó là $T = 2^8 \cdot C_{12}^8$

Ví dụ 6. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x + \frac{1}{x^4}\right)^{10}$?

Lời giải:

$$\text{Ta có } \left(x + \frac{1}{x^4}\right)^{10} = \sum_{k=1}^{10} C_{10}^k \cdot (x)^k \cdot \left(\frac{1}{x^4}\right)^{10-k} = \sum_{k=1}^{12} C_{10}^k \cdot x^{5k-10}$$

- Hệ số của số hạng chứa x^{5k-10} trong khai triển sẽ là: $T = C_{10}^k \cdot x^{5k-10}$

- Số hạng không chứa x tức là $5k - 10 = 0 \Leftrightarrow k = 2$, hệ số đó là $T = C_{10}^2 = 45$

Ví dụ 7. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^2 + \frac{1}{x^4}\right)^{12}$?

Lời giải:

$$\text{Ta có } \left(x^2 + \frac{1}{x^4}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k \cdot (x^2)^k \cdot (x^{-4})^{12-k} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k \cdot x^{6k-48}$$

- Số hạng không chứa x ứng với $\begin{cases} 6k - 48 = 0 \\ 0 \leq k \leq 12 \end{cases} \Rightarrow k = 8$

Vậy số hạng không chứa x bằng: $C_{12}^8 = 495$.

Ví dụ 8. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^3 + \frac{2}{x^2}\right)^{15}$?

Lời giải:

$$\text{Ta có } \left(x^3 + \frac{2}{x^2}\right)^{15} = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k \cdot (x^3)^k \cdot (2x^{-2})^{15-k} = \sum_{k=0}^{15} 2^{15-k} \cdot C_{15}^k \cdot x^{5k-30}$$

Số hạng không chứa x ứng với $\begin{cases} 5k - 30 = 0 \\ 0 \leq k \leq 15 \end{cases} \Rightarrow k = 6$

Vậy số hạng không chứa x bằng: $2^{15-6} \cdot C_{15}^6 = 2562560$.

Ví dụ 9. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^{10}$?

Lời giải:

Ta có: $\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot (x^2)^k \cdot (x^{-3})^{10-k} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot x^{5k-30}$

Số hạng không chứa x ứng với $\begin{cases} 5k-30=0 \\ 0 \leq k \leq 10 \end{cases} \Rightarrow k=6.$

Vậy số hạng không chứa x bằng: $C_{10}^6 = 210.$

Ví dụ 10. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}} + \sqrt[5]{x}\right)^{10}$?

Lời giải:

Ta có: $\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}} + \sqrt[5]{x}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot \left(x^{\frac{1}{5}}\right)^k \cdot \left(x^{-\frac{1}{5}}\right)^{10-k} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot x^{-2+\frac{2k}{5}}$

Số hạng không chứa x ứng với $\begin{cases} -2+\frac{2k}{5}=0 \\ 0 \leq k \leq 10 \end{cases} \Rightarrow k=5.$

Vậy số hạng không chứa x bằng: $C_{10}^5 = 252.$

Ví dụ 11. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(\frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)^{12}$?

Lời giải:

Ta có: $\left(\frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k \cdot (x^{-1})^k \cdot (x^{\frac{1}{2}})^{12-k} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k \cdot x^{6-\frac{3k}{2}}$

Số hạng không chứa x ứng với $\begin{cases} 6-\frac{3k}{2}=0 \\ 0 \leq k \leq 12 \end{cases} \Rightarrow k=4$

Vậy số hạng không chứa x bằng: $C_{12}^4 = 495$

Ví dụ 12. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}\right)^{16}$?

Lời giải:

Ta có: $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}\right)^{16} = \sum_{k=0}^{16} C_{16}^k \cdot \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^k \cdot (x^{-1})^{16-k} = \sum_{k=0}^{16} C_{16}^k \cdot x^{\frac{4k}{3}-16}$

Số hạng không chứa x ứng với $\begin{cases} \frac{4k}{3}-16=0 \\ 0 \leq k \leq 16 \end{cases} \Rightarrow k=12.$

Vậy số hạng không chứa x bằng: $C_{12}^6 = 1820$

Dạng 2. Tìm hệ số, số hạng trong khai triển có điều kiện

Phương pháp:

- Bước 1: Tìm n dựa vào điều kiện đề bài cho

- Bước 2: Quy về dạng 1 đã biết

Ví dụ 1. Tìm hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển $(x-3)^9$?

Lời giải:

$$\text{Ta có } (x-3)^9 = \sum_{k=1}^9 C_9^k \cdot x^k \cdot (-3)^{9-k}$$

Hệ số của số hạng chứa x^k trong khai triển sẽ là: $T = (-3)^{9-k} C_9^k$

Số hạng chứa x^3 tức $k=3$ là $T = (-3)^6 C_9^3 = 61236$

Ví dụ 1. Cho biết trong khai triển $\left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^n$ tổng các hệ số của các hạng tử thứ nhất, thứ hai, thứ ba bằng 11. Tìm hệ số của x^2 ?

Lời giải:

Vì tổng các hệ số của các hạng tử thứ nhất, thứ hai, thứ ba bằng 11 nên ta có:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 = 11 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-1)!} + \frac{n!}{2(n-2)!} = 10$$

$$\Leftrightarrow n + \frac{n(n-1)}{2} = 10 \Leftrightarrow n^2 + n - 20 = 0 \Leftrightarrow (n-4)(n+5) = 0 \Leftrightarrow n = 4$$

$$\text{Ta có: } \left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^4 = \sum_{k=0}^4 C_4^k \cdot (x^3)^k \cdot (x^{-2})^{4-k} = \sum_{k=0}^4 C_4^k \cdot x^{5k-8}$$

$$\text{Số hạng chứa } x^2 \text{ ứng với } \begin{cases} 5k-8=2 \\ 0 \leq k \leq 4 \end{cases} \Rightarrow k=2.$$

Vậy số hạng chứa x^2 bằng: $C_4^2 = 6$.

Ví dụ 2. Cho biết trong khai triển $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$, tổng các hệ số của các hạng tử thứ nhất, thứ hai, thứ ba bằng 46. Tìm hạng tử không chứa x .

Lời giải:

Vì tổng các hệ số của các hạng tử thứ nhất, thứ hai, thứ ba bằng 46 nên ta có:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 = 46 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-1)!} + \frac{n!}{2(n-2)!} = 45 \Leftrightarrow n + \frac{n(n-1)}{2} = 45$$

$$\Leftrightarrow n^2 + n - 90 = 0 \Leftrightarrow (n-9)(n+10) = 0 \Leftrightarrow n = 9$$

Ta có $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^9 = \sum_{k=0}^9 C_9^k \cdot (x^2)^k \cdot (x^{-1})^{9-k} = \sum_{k=0}^9 C_9^k \cdot x^{3k-9}$

Số hạng không chứa x ứng với $\begin{cases} 3k-9=0 \\ 0 \leq k \leq 9 \end{cases} \Rightarrow k=3.$

Vậy số hạng không chứa x bằng: $C_9^3 = 84$

Ví dụ 3. Tìm hệ số không chứa x trong khai triển biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[4]{x^3}\right)^n$ ($x > 0$). Trong đó n là số nguyên dương thỏa mãn: $A_n^3 + C_n^1 = 30C_n^2 + 17$

Lời giải

Ta có: $A_n^3 + C_n^1 = 30C_n^2 + 17 \Leftrightarrow n(n-1)(n-2) + n = 15n(n-1) + 17$

$$\Leftrightarrow n^3 - 18n^2 + 18n - 17 = 0 \Leftrightarrow n = 17$$

Với $n = 17$ ta có số hạng tổng quát: $T_{k+1} = C_{17}^k \left(x^{-\frac{2}{3}}\right)^{17-k} \left(x^{\frac{3}{4}}\right)^k = C_{17}^k x^{\frac{17k}{12} - \frac{34}{3}}$ ($0 \leq k \leq 17, k \in \mathbb{N}$)

Cho $\frac{17k}{12} = \frac{34}{3} \Rightarrow k = 8$. Vậy số hạng không chứa x là $C_{17}^8 = 24310$

Ví dụ 4: Cho khai triển $\left(\sqrt{x^3} + \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^n$. Biết tổng hệ số của ba số hạng đầu tiên của khai triển là 631. Tìm hệ số của số hạng chứa x^5 .

Lời giải

Ta có: $\left(\sqrt{x^3} + \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^k \left(\sqrt{x^3}\right)^{n-k} = \sum_{k=0}^n 3^k \cdot C_n^k \cdot x^{\frac{3n}{2} - \frac{13k}{6}}$

Từ đó tổng hệ số của 3 số hạng đầu tiên của khai triển là:

$$\sum_{k=0}^2 3^k \cdot C_n^k = 3^0 \cdot C_n^0 + 3 \cdot C_n^1 + 3^2 \cdot C_n^2 = 631 \Leftrightarrow 1 + 3n + \frac{9n(n-1)}{2} = 631 \Leftrightarrow n = 12$$

Khi đó ta có: $\left(\sqrt{x^3} + \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} 3^k \cdot C_{12}^k \cdot x^{18 - \frac{13k}{6}}$

Hệ số của số hạng chứa x^5 là: $T = 3^k \cdot C_{12}^k$

Với k thỏa mãn: $18 - \frac{13k}{6} = 5 \Rightarrow k = 6 \Rightarrow T = 3^6 \cdot C_{12}^6$

Ví dụ 5. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{15} trong khai triển $(2x^3 - 3)^n$ thành đa thức, biết n là số nguyên

đương thỏa mãn hệ thức $A_n^3 + C_n^1 = 8C_n^2 + 49$

Lời giải

+) Điều kiện: $n \geq 3$

$$+) \text{ Ta có } A_n^3 + C_n^1 = 8C_n^2 + 49 \Leftrightarrow n(n-1)(n-2) + n = 8 \cdot \frac{n(n-1)}{2} + 49 \Leftrightarrow n^3 - 7n^2 + 7n - 49 = 0$$

$$\Leftrightarrow (n-7)(n^2+7) = 0 \Leftrightarrow n = 7$$

$$+) \text{ Với } n = 7 \text{ ta có khai triển } (2x^3 - 3)^7 = \sum_{k=0}^7 C_7^k \cdot (2x^3)^k \cdot (-3)^{7-k} = \sum_{k=0}^7 C_7^k \cdot 2^k \cdot (-3)^{7-k} \cdot x^{3k}$$

Xét hạng tử x^{15} suy ra $3k = 15$ hay $k = 5$.

Từ đó hệ số của hạng tử x^{15} bằng $C_7^5 \cdot 2^5 \cdot (-3)^2 = 6048$

Ví dụ 6. Tìm hệ số của hạng tử chứa x^8 trong khai triển nhị thức Newton $\left(\frac{n+1}{x^3} + n\sqrt{x^5}\right)^n$ biết rằng n là số nguyên dương thỏa mãn $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 7(n+3)$.

Lời giải

$$C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 7(n+3) \Leftrightarrow C_{n+3}^{n+1} + C_{n+3}^n - C_{n+3}^n = 7(n+3)$$

$$C_{n+3}^{n+1} = 7(n+3) \Leftrightarrow \frac{(n+3)!}{(n+1)!2!} = 7(n+3) \Leftrightarrow n+2 = 14 \Leftrightarrow n = 12$$

$$\text{Ta có } \left(\frac{n+1}{x^3} + n\sqrt{x^5}\right)^n = \left(\frac{13}{x^3} + 12\sqrt{x^5}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k \left(\frac{13}{x^3}\right)^k \left(12x^{\frac{5}{2}}\right)^{12-k} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k 13^k 12^{12-k} x^{\frac{60-11k}{2}}$$

$$\text{Ta có } \frac{60-11k}{2} = 8 \Leftrightarrow k = 4, \text{ do đó hệ số là } C_{12}^4 13^4 12^8.$$

Ví dụ 7: Với mọi số nguyên dương n , khai triển nhị thức $\left(x - \frac{1}{3}\right)^n$ theo thứ tự số mũ giảm dần, tìm số hạng đứng giữa của khai triển biết hệ số của số hạng thứ ba là 5.

Lời giải

$$\text{Ta có } \left(x - \frac{1}{3}\right)^n = C_n^0 x^n - \frac{1}{3} C_n^1 x^{n-1} + \frac{1}{9} C_n^2 x^{n-2} + \dots + \left(-\frac{1}{3}\right)^n C_n^n.$$

Hệ số của số hạng thứ 3 trong khai triển bằng $\frac{1}{9} C_n^2$.

$$\text{Theo giả thiết } \frac{1}{9} C_n^2 = 5 \Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = 45 \Leftrightarrow n^2 - n - 90 = 0 \Leftrightarrow n = 10.$$

Với $n = 10$ ta có 11 số hạng nên số hạng đứng giữa là số hạng thứ 6, tức là bằng $\left(-\frac{1}{3}\right)^5 C_{10}^5 x^5 = -\frac{28}{27}x^5$.

Ví dụ 8. Cho biết hệ số của số hạng thứ tư của khai triển $\left(x^2 + \frac{1}{2x\sqrt[5]{x}}\right)^n, (x > 0)$ bằng 70. Hãy tìm số hạng không chứa x trong khai triển đó.

Lời giải

$$\text{Ta có } \left(x^2 + \frac{1}{2x\sqrt[5]{x}}\right)^n = \left(x^2 + \frac{1}{2}x^{-\frac{6}{5}}\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (x^2)^{n-k} \cdot \left(\frac{1}{2}x^{-\frac{6}{5}}\right)^k = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot x^{2n-\frac{16k}{5}}$$

Hệ số của số hạng thứ tư tương ứng với $k = 3$ tức là:

$$C_n^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 7 \Leftrightarrow \frac{n!}{3!(n-3)!} = 56 \Leftrightarrow n^3 - 3n^2 + 2n - 336 = 0 \Leftrightarrow n = 8$$

$$\text{Tìm số hạng không chứa } x \text{ ta có: } 2n - \frac{16k}{5} = 0 \Leftrightarrow k = 5 \text{ nên số hạng đó là } C_8^5 \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{7}{4}$$

Ví dụ 9. Tìm hệ số của x^5 trong khai triển của $(x\sqrt{x} + \sqrt[4]{x})^n$ biết $C_n^3 + C_n^2 = 1330$

Lời giải

$$\text{Ta có } C_n^3 + C_n^2 = \frac{n!}{3!(n-3)!} + \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n!}{2!(n-3)!} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{n-2}\right) = \frac{n!}{2!(n-3)!} \cdot \frac{n+1}{3(n-2)} = \frac{(n+1)!}{3!(n-2)!} = 1330$$

$$\Leftrightarrow (n-1)n(n+1) = 1330 \cdot 3! \Leftrightarrow n^3 - n - 1330 = 0 \Leftrightarrow n = 20$$

$$\text{Khi đó ta cần tìm hệ số của } x^5 \text{ trong khai triển của } (x\sqrt{x} + \sqrt[4]{x})^{20} = \left(x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{4}}\right)^{20}$$

$$\text{Gọi số hạng phải tìm là } T(k) \text{ ta có: } T(k) = C_{20}^k x^{\frac{3}{2}k} x^{\frac{1}{4}(20-k)} = C_{20}^k x^{\frac{5}{4}k-5} \Rightarrow \frac{5}{4}k - 5 = 5 \Rightarrow k = 8$$

$$\text{Vậy hệ số của } x^5 \text{ là } C_{20}^8 = 125970$$

Ví dụ 10. Cho khai triển $\left(\frac{3}{x} - \sqrt{x}\right)^n$. Tìm hệ số của x^2 trong khai triển trên biết tổng hệ số của khai triển là 1024.

Lời giải

$$\text{Ta có khai triển Niu ton: } \left(\frac{3}{x} - \sqrt{x}\right)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i \left(\frac{3}{x}\right)^{n-i} (-\sqrt{x})^i = \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i \cdot 3^{n-i} x^{\frac{3i}{2}-n}, x > 0.$$

$$\text{Tổng hệ số của khai triển là } \sum_{i=0}^n (-1)^i 3^{n-i} = (3-1)^n = 2^n. \text{ Theo giả thiết ta tìm được } n = 10$$

Khi đó, $\left(\frac{3}{x} - \sqrt{x}\right)^{10} = \sum_{i=0}^{10} (-1)^i C_{10}^i 3^{10-i} x^{\frac{3i}{2}-10}, x > 0$

Để có số hạng chứa x^2 thì $\frac{3i}{2} - 10 = 2 \Leftrightarrow i = 8$

Hệ số cần tìm là $3^2 C_{10}^8 = 405$

Ví dụ 11. Tìm hệ số của x^7 trong khai triển nhị thức $\left(2x^4 + \frac{1}{x^3}\right)^n, (x \neq 0)$. Biết rằng n là số tự nhiên thỏa mãn $C_n^2 + 2A_n^2 + n = 112$

Lời giải

Ta có $\left(2x^4 + \frac{1}{x^3}\right)^n = \sum_{k=0}^n \sum_{k=0}^n C_n^k (2x^4)^{n-k} \left(\frac{1}{x^3}\right)^k = \sum_{k=0}^n (2)^{n-k} C_n^k x^{4n-7k}$

Theo bài, n là số tự nhiên thỏa mãn

$$C_n^2 + 2A_n^2 + n = 112 \Leftrightarrow 5C_n^2 + n = 112 \Leftrightarrow \frac{5}{2}n(n-1) + n = 112 \Rightarrow n = 7$$

Hệ số của x^7 trong khai triển là $T = 2^{7-k} \cdot C_7^k$ ứng với $4 \cdot 7 - 7k = 7 \Leftrightarrow k = 3 \rightarrow T = 560$

Ví dụ 12. Tìm hệ số của x^4 trong khai triển biểu thức $\left(\frac{2}{x} - x^3\right)^n$, biết n là số tự nhiên thỏa mãn hệ thức $C_{n-4}^{n-6} + nA_n^2 = 454$.

Lời giải:

Ta có: $\left(\frac{2}{x} - x^3\right)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \left(\frac{2}{x}\right)^{n-k} (x^3)^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k (2)^{n-k} C_n^k x^{4k-n}$

Theo bài, $C_{n-4}^{n-6} + nA_n^2 = 454 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(n-4)(n-5) + n(n^2 - n) = 454 \Leftrightarrow n = 8$

Vậy hệ số của x^4 trong khai triển là: $T = (-1)^k (2)^{8-k} C_8^k$ ứng với $4k - 8 = 4 \Leftrightarrow k = 3 \rightarrow T = -1792$

Ví dụ 13. Tìm hệ số của x^9 trong khai triển: $(1 - \sqrt{3}x)^{2n}; n \in \mathbb{N}^*$, biết $\frac{2}{C_n^2} + \frac{14}{3C_n^3} = \frac{1}{n}$.

Lời giải

Ta có: $(1 - \sqrt{3}x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k C_{2n}^k (\sqrt{3}x)^k = \sum_{k=0}^{2n} (-\sqrt{3})^k C_{2n}^k (x)^k$

Theo bài: $\frac{2}{C_n^2} + \frac{14}{3C_n^3} = \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{4}{n-1} + \frac{28}{(n-1)(n-2)} = 1 \Leftrightarrow n = 9$

Vậy hệ số của x^9 trong khai triển là: $T = (-\sqrt{3})^k C_{18}^k$ ứng với $k = 9 \rightarrow T = -3938220\sqrt{3}$

Ví dụ 14. Tìm hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển $\left(x^2 + \frac{2n}{5}\right)^{3n}$ thành đa thức, biết n là số nguyên dương thỏa mãn hệ thức $A_n^3 + 6C_n^2 - 4C_n^1 = 100$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } A_n^3 + 6C_n^2 - 4C_n^1 = 100 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-3)!} + 6 \cdot \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} - 4n = 100 \quad (\text{với } n \in \mathbb{N}; n \geq 3)$$

$$\Leftrightarrow n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) - 4n = 100 \Leftrightarrow n^3 - 5n = 100 \Leftrightarrow n = 5$$

$$\text{Với } n = 5 \text{ xét khai triển } A = \left(x^2 + \frac{2n}{5}\right)^{3n} = (x^2 + 2)^{15} = \sum_0^{15} C_{15}^k x^{2k} \cdot 2^{15-k}$$

Số hạng chứa x^8 tương ứng $2k = 8 \Leftrightarrow k = 4$.

Vậy hệ số chứa x^8 trong khai triển là $C_{15}^4 \cdot 2^{11} = 2795520$

Ví dụ 15. Tìm hệ số của số hạng chứa $\frac{1}{x}$ trong khai triển $\left(2x^2 - \frac{3}{x^3}\right)^n$ thành đa thức, biết n là số nguyên dương thỏa mãn hệ thức $C_n^3 - C_{n-1}^{n-3} = C_{n-1}^{n-2} \cdot C_{n+3}^1$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } C_n^3 - C_{n-1}^{n-3} = C_{n-1}^{n-2} \cdot C_{n+3}^1 \Leftrightarrow \frac{n!}{3!(n-3)!} - \frac{(n-1)!}{2!(n-3)!} = \frac{(n-1)!}{(n-2)!} \cdot (n+3) \quad (\text{với } n \in \mathbb{N}; n \geq 3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} = (n-1)(n+3) \Leftrightarrow n(n-2) - 3(n-2) = 6(n+3)$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 11n - 12 = 0 \Leftrightarrow n = 12.$$

$$\text{Khi đó xét khai triển } A = \left(2x^2 - \frac{3}{x^3}\right)^{12} = \sum_0^{12} C_{12}^k (2x^2)^k \cdot (-3x^{-3})^{12-k} = \sum_0^{12} C_{12}^k 2^k \cdot (-3)^{12-k} x^{5k-36}$$

Số hạng chứa $\frac{1}{x}$ tương ứng $x^{5k-36} = x^{-1} \Leftrightarrow 5k - 36 = -1 \Leftrightarrow k = 7$

Khi đó hệ số của số hạng chứa $\frac{1}{x}$ là: $C_{12}^7 \cdot 2^7 \cdot (-3)^5 = -24634368$

Ví dụ 16. Tìm hệ số của số hạng không chứa x trong khai triển $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^n$ thành đa thức, biết n là số nguyên dương thỏa mãn hệ thức $C_n^6 + 3C_n^7 + 3C_n^8 + C_n^9 = 2C_{n+2}^8$.

Lời giải:

Áp dụng công thức: $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } C_n^6 + 3C_n^7 + 3C_n^8 + C_n^9 &= C_n^6 + C_n^7 + 2(C_n^7 + C_n^8) + C_n^8 + C_n^9 = C_{n+1}^7 + 2C_{n+1}^8 + C_{n+1}^9 \\ &= C_{n+2}^8 + C_{n+2}^9 = C_{n+3}^9. \end{aligned}$$

$$\text{Nhu vậy ta có: } C_{n+3}^9 = 2C_{n+2}^8 \Leftrightarrow \frac{(n+3)!}{9!(n-6)!} = \frac{2 \cdot (n+2)!}{8!(n-6)!} \Leftrightarrow \frac{n+3}{9} = 2 \Leftrightarrow n = 15$$

$$\text{Khi đó xét khai triển } A = \left(\sqrt[3]{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} \right)^{15} = \sum_0^{15} C_{15}^k \left(x^{\frac{1}{3}} \right)^{15-k} \cdot \left(2x^{\frac{1}{2}} \right)^k = \sum_0^{15} C_{15}^k \cdot 2^k \cdot x^{\frac{30-5k}{6}}$$

$$\text{Số hạng không chứa } x \text{ tương ứng } \frac{30-5k}{6} = 0 \Leftrightarrow k = 6$$

$$\text{Vậy số hạng không chứa } x \text{ là } C_{15}^6 \cdot 2^6 = 320320$$

Dạng 3. Tìm hệ số, số hạng trong khai triển nhiều hạng tử

Phương pháp:

- Bước 1: Viết khai triển thu gọn về 2 hạng tử

$$\text{Ta có } (a+b+c)^n = [(a+b)+c]^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot (a+b)^k \cdot c^{n-k} = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k C_n^k \cdot C_k^i \cdot a^{k-i} \cdot b^i \cdot c^{n-k}$$

$$\text{Ở đây } \begin{cases} 0 \leq k \leq n \\ 0 \leq i \leq k \end{cases}$$

- Bước 2: Dựa vào chỉ số mũ của x để biện luận tìm i và k.

- Bước 3: Kết luận về hệ số của số hạng cần tìm.

Ví dụ 1. Tìm hệ số của x^6 trong khai triển $[1+x^2(1+x)]^7$ thành đa thức.

Lời giải

Cách 1: Ta có $[1+x^2(1+x)]^7 = \sum_{k=0}^7 C_7^k [x^2(1+x)]^k = \sum_{k=0}^7 C_7^k x^{2k} \left[\sum_{i=0}^k C_k^i x^i \right]$

$$\text{Vậy ta có hệ số của } x^6 \text{ là } C_7^k C_k^i \text{ thỏa mãn: } \begin{cases} 0 \leq i \leq k \leq 7 \\ 2k+i=6 \\ i, k \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i=0 \\ k=3 \\ i=2 \\ k=2 \end{cases}$$

$$\text{Vậy hệ số của } x^6 \text{ trong khai triển là: } C_7^3 C_3^0 + C_7^2 C_2^2 = 56$$

Cách 2: Ta có: $[1+x^2(1+x)]^7 = C_7^0 + C_7^1 x^2(1+x) + C_7^2 x^4(1+x)^2 + \dots + C_7^7 x^{14}(1+x)^7$

$$\text{Nhận thấy } x^6 \text{ chỉ có trong: } C_7^2 x^4(1+x)^2 + C_7^3 x^6(1+x)^3$$

$$\text{Vậy hệ số của } x^6 \text{ trong khai triển là: } C_7^2 + C_7^3 = 56$$

Ví dụ 2. Tìm hệ số của x^8 trong khai triển $[1 + x^2(1 - 2x)]^8$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } [1 + x^2(1 - 2x)]^8 &= \sum_{k=0}^8 C_8^k [x^2(1 - 2x)]^k = \sum_{k=0}^8 C_8^k x^{2k} (1 - 2x)^k \\ &= \sum_{k=0}^8 C_8^k x^{2k} \sum_{i=0}^k C_k^i 1^i (-2)^{k-i} x^{k-i} = \sum_{k=0}^8 \sum_{i=0}^k C_8^k C_k^i (-2)^{k-i} x^{3k-i} \end{aligned}$$

$$\text{Tìm hệ số } x^8 \text{ thì } \begin{cases} 3k - i = 8 \\ 8 \geq k \geq i \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 3 \\ i = 1 \\ k = 4 \\ i = 4 \end{cases} \text{ nên hệ số của } x^8 \text{ là } C_8^3 \cdot C_3^1 \cdot (-2)^2 + C_8^4 \cdot C_4^4 \cdot (-2)^0 = 742$$

Ví dụ 3. Tìm hệ số của x^8 trong khai triển đa thức của: $[1 + x^2(1 + x)]^8$

Lời giải

Cách 1: Ta có $f(x) = \sum_{k=0}^8 C_8^k [x^2(1 + x)]^k = \sum_{k=0}^8 C_8^k x^{2k} \left[\sum_{i=0}^k C_k^i x^i \right]^k$.

$$\text{Vậy ta có hệ số của } x^8 \text{ là: } C_8^k C_k^i \text{ thỏa } \begin{cases} 0 \leq i \leq k \leq 8 \\ 2k + i = 8 \\ i, k \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i = 0 \\ k = 4 \\ i = 2 \\ k = 3 \end{cases}$$

$$\text{Hệ số trong khai triển của } x^8 \text{ là } (-1)^0 C_8^4 C_4^0 + (-1)^2 C_8^3 C_3^2 = 238$$

Cách 2: Ta có:

$$f(x) = C_8^0 + \dots + C_8^3 [x^2(1 + x)]^3 + C_8^4 [x^2(1 + x)]^4 + \dots + C_8^8 [x^2(1 + x)]^8$$

Nhận thấy: x^8 chỉ có trong các số hạng:

• Số hạng thứ 4: $C_8^3 [x^2(1 + x)]^3$

• Số hạng thứ 5: $C_8^4 [x^2(1 + x)]^4$

$$\text{Với hệ số tương đương với: } a_8 = C_8^3 C_3^2 + C_8^4 C_4^0 = 238$$

Ví dụ 4. Cho khai triển $(1 + x + x^2)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_{2n} x^{2n}$ (với $n \in \mathbb{N}^*$). Tìm hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển biết $C_n^1 + 6C_n^2 + 6C_n^3 = 9n^2 - 14n$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } C_n^1 + 6C_n^2 + 6C_n^3 = \frac{n!}{1!(n-1)!} + 6 \cdot \frac{n!}{2!(n-2)!} + 6 \cdot \frac{n!}{3!(n-3)!} = n + 3n(n-1) + n(n-1)(n-2) = n^3$$

$$\text{Theo bài } n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3 \mid n^3 = 9n^2 - 14n \Leftrightarrow n(n-2)(n-7) = 0 \Leftrightarrow n = 7$$

$$\text{Suy ra } (1+x+x^2)^7 = \sum_{k=0}^7 C_7^k (x+x^2)^k = \sum_{k=0}^7 C_7^k \left(\sum_{m=0}^k C_k^m x^{k-m} (x^2)^m \right) = \sum_{k=0}^7 \left(\sum_{m=0}^k C_k^m x^{k+m} \right)$$

$$\text{Hạng tử chứa } x^4 \Leftrightarrow \begin{cases} m+k=4 \\ 0 \leq k \leq 4 \\ 0 \leq m \leq k \leq 7 \\ m, k \in \mathbb{N}^* \end{cases} \Leftrightarrow (m; k) = \{(0; 4), (1; 3), (2; 2)\}$$

Vậy hệ số của hạng tử chứa x^4 là: $T = C_7^4.C_4^0 + C_7^3.C_3^1 + C_7^2.C_2^2 = 161$

Ví dụ 5. Tìm hệ số của x^6 trong khai triển thành đa thức của $P(x) = 2x^2(1-3x)^5 - 3x(1+2x)^7$

Lời giải

$$\text{Ta có: } P(x) = 2x^2(1-3x)^5 - 3x(1+2x)^7 = 2x^2 \sum_{k=0}^5 C_5^k (-3x)^k - 3x \sum_{k=0}^7 C_7^k (2x)^k$$

$$\text{Suy ra số hạng chứa } x^6 \text{ của } P(x) \text{ là: } 2x^2.C_5^4(-3x)^4 - 3x.C_7^5.(2x)^5$$

$$\text{Vậy hệ số của } x^6 \text{ là: } T = 2.C_5^4.(-3)^4 - 3.C_7^5.2^5 = -1206$$

Ví dụ 6. Tìm hệ số của x^5 trong khai triển biểu thức $P = x(1-2x)^n + x^2(1+3x)^{2n}$, biết rằng $A_n^2 - C_{n+1}^{n-1} = 5$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } P = x(1-2x)^n + x^2(1+3x)^{2n} = x \sum_{k=0}^n C_n^k (-2x)^k + x^2 \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k (3x)^k$$

$$\text{Theo bài, } A_n^2 - C_{n+1}^{n-1} = 5 \Leftrightarrow n(n-1) - \frac{n(n+1)}{2} = 5 \Leftrightarrow n = 5$$

$$\text{Suy ra số hạng chứa } x^5 \text{ là: } x.C_5^4(-2x)^4 + x^2.C_5^3.(3x)^3$$

$$\text{Vậy hệ số của } x^5 \text{ là: } T = C_5^4.(-2)^4 + C_5^3.3^3 = 350$$

Ví dụ 7. Tìm hệ số của x^4 trong khai triển $P = (1-x-3x^3)^n$, biết rằng $C_n^{n-2} + 6n + 5 = A_{n+1}^2$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } C_n^{n-2} + 6n + 5 = A_{n+1}^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}n(n-1) + 6n + 5 = (n+1)n \text{ (với } n \in \mathbb{N}; n \geq 2)$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 9n - 10 = 0 \Leftrightarrow n = 10$$

$$\text{Khi đó } P = (1-x-3x^3)^{10} = \sum_{k=0}^{10} (1-x)^k (-3x^3)^{10-k} = \sum_{k=0}^{10} \sum_{i=0}^k C_{10}^k.C_k^i (-x)^i.(-3x^3)^{10-k} \quad (0 \leq i \leq k \leq 10)$$

+) Cho $30 - 3k + i = 4 \Leftrightarrow 3k - i = 26$ ta có các cặp $(i; k)$ thỏa mãn là: $(1; 9), (4; 10)$

$$\text{+) Vậy hệ số của } x^4 \text{ trong khai triển là: } C_{10}^9 C_9^1.(-1)^1.(-3)^1 + C_{10}^{10} C_{10}^4.(-1)^4.(-3)^0 = 480$$

Ví dụ 8. Tìm hệ số của x^{13} trong khai triển $P = \left(\frac{1}{4} + x + x^2\right)^3 (2x+1)^{3n}$, biết rằng $A_n^3 + C_n^{n-2} = 14n$.

Lời giải

Ta có: $A_n^3 + C_n^{n-2} = 14n \Leftrightarrow n(n-1)(n-2) + \frac{1}{2}n(n-1) = 14n \ (n \in \mathbb{N}; n \geq 3)$

$$\Leftrightarrow 2(n-1)(n-2) + (n-1) = 28 \Leftrightarrow n = 5$$

Khi đó ta có: $P = \left(x + \frac{1}{2}\right)^6 \cdot (2x+1)^{15} = \frac{1}{2^6} (2x+1)^{21} = \frac{1}{2^6} \sum_{k=0}^{21} C_{21}^k (2x)^k$

+) Cho $k = 13$ ta có hệ số của x^{13} trong khai triển là: $\frac{1}{2^6} \cdot C_{21}^{13} \cdot 2^{13} = 26046720$

Ví dụ 9. Tìm hệ số của x^4 trong khai triển $P = (1+x+x^2)^{12}$

Lời giải

Xét khai triển: $P = (1+x+x^2)^{12} = \sum_{k=0}^{12} (1+x)^k (x^2)^{12-k} = \sum_{k=0}^{12} \sum_{i=0}^k C_{12}^k \cdot C_k^i (x)^i \cdot (x^2)^{12-k} \quad (0 \leq i \leq k \leq 12)$

+) Cho $24 - 2k + i = 4 \Leftrightarrow 2k - i = 20$ ta có các cặp $(i; k)$ thỏa mãn là: $(0; 10), (2; 11), (4; 12)$

+) Vậy hệ số của x^4 trong khai triển là: $C_{12}^{10} C_{10}^0 + C_{12}^{11} C_{11}^2 + C_{12}^{12} C_{12}^4 = 1221$

Ví dụ 10. Tìm hệ số của x^4 trong khai triển $\left[\sqrt{x} + 3\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right]^n$ biết rằng $3C_{n+1}^1 + 8C_{n+2}^{n-2} = 3C_{n+1}^3$.

Lời giải

ĐK: $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

Ta có: $3C_{n+1}^1 + 8C_{n+2}^{n-2} = 3C_{n+1}^3 \Leftrightarrow 3(n+1) + 8 \cdot \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{4!} = 3 \frac{(n+1)n(n-1)}{3!}$

$$\Leftrightarrow 3 + \frac{n(n+2)(n-1)}{3} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2n^3 - n^2 - n + 18 = 0 \Leftrightarrow (n+2)(2n^2 - 5n + 9) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = -2 \text{ (Loại)} \\ 2n^2 - 5n + 9 = 0 \text{ (VN)} \end{cases}$$

Vậy không có giá trị n thỏa mãn.

Ví dụ 11. Tìm hệ số của x^8 trong khai triển $(1+x-x^2)^8$ thành đa thức?

Lời giải

Khai triển $(1+x-x^2)^8 = \sum_{k=0}^8 C_8^k \cdot 1^{8-k} \cdot (x-x^2)^k = \sum_{k=0}^8 C_8^k \cdot \sum_{i=0}^k C_k^i \cdot x^{k-i} \cdot (-x^2)^i = \sum_{k=0}^8 \sum_{i=0}^k C_8^k C_k^i \cdot (-1)^i x^{k+i}$.

Với hệ số của x^8 thì $k+i=8$ với điều kiện $\begin{cases} 0 \leq i \leq k \leq 8 \\ i, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ thì các bộ số $(k; i)$ thỏa mãn là

$$(4; 4), (5; 3), (6; 2), (7; 1), (8; 0)$$

Từ đó hệ số của x^8 là $C_8^4 - C_8^5 \cdot C_5^3 + C_8^6 \cdot C_6^2 - C_8^7 \cdot C_7^1 + C_8^8 \cdot C_8^0 = -125$.

Dạng 4. Khai triển có điều kiện về tổng dãy số

Phương pháp:

Các tổng đặc biệt cần lưu ý:

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$$

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 \cdot x + C_n^2 \cdot x^2 + \dots + C_n^n \cdot x^n$$

$$(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 \cdot x + C_{2n}^2 \cdot x^2 + \dots + C_{2n}^{2n} \cdot x^{2n} \xrightarrow{x=-1} C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \dots + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1}$$

$$(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 \cdot x + C_{2n}^2 \cdot x^2 + \dots + C_{2n}^{2n} \cdot x^{2n} \xrightarrow{x=1} C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + \dots + C_{2n}^{2n} = 2^{2n}$$

$$\text{Suy ra } C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \dots + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1} = \frac{2^{2n}}{2} = 2^{2n-1}$$

Ví dụ 1. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{21} trong khai triển nhị thức Niu-ton $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^{3n}$; $x \neq 0$ biết

$$C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + C_{2n+1}^3 + \dots + C_{2n+1}^n = 1024$$

Lời giải:

$$+) \text{ Ta có khai triển: } (1+x)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 x + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} x^{2n+1}$$

$$\text{Cho } x=1 \text{ được: } 2^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} = 2(C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n)$$

$$\text{Vì } C_{2n+1}^k = C_{2n+1}^{2n+1-k} \text{ Do đó: } 1024 = 2^{2n} \Rightarrow n = 5.$$

$$+) \text{ Khi đó: } A = \left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^{15} = \sum_0^{15} C_{15}^k x^{2k} \left(\frac{-2}{x}\right)^{15-k} = (-2)^{15-k} \sum_{15}^0 C_{15}^k x^{3k-15}$$

$$\text{Cho } 3k - 15 = 21 \Rightarrow k = 12.$$

Hệ số của số hạng chứa x^{21} trong khai triển là: -3640

Ví dụ 2. Tìm hệ số của x^{20} trong khai triển nhị thức Newton biểu thức $P(x) = \left(\frac{1}{x^3} + x^2\right)^n$ với n nguyên

$$\text{dương thỏa mãn: } C_{2n+1}^{n+1} + C_{2n+1}^{n+2} + \dots + C_{2n+1}^{2n} = 2^{100} - 1.$$

Lời giải

$$\text{Ta có } C_{2n+1}^{2n+1} = 1 \text{ và } C_n^k = C_n^{n-k}; \sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n.$$

$$\text{Lại có } C_{2n+1}^{n+1} + C_{2n+1}^{n+2} + \dots + C_{2n+1}^{2n} = 2^{100} - 1.$$

$$\Leftrightarrow C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + \dots + C_{2n+1}^{n+1} + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} = 2^{101} \Leftrightarrow 2^{2n+1} = 2^{101} \Leftrightarrow n = 50$$

$$\text{Với } n = 50 \Rightarrow P(x) = \left(\frac{1}{x^3} + x^2\right)^{50} = \sum_{k=0}^{50} C_{50}^k x^{5k-150}$$

$$\text{Số hạng này chứa } x^{20} \Rightarrow 5k - 150 = 20 \Leftrightarrow k = 34$$

Vậy hệ số của số hạng chứa x^{20} là C_{50}^{34}

Ví dụ 3. Cho khai triển $(x^2 - 3x + 2)^n$ tìm hệ số chứa x^2 trong khai triển đó.

Biết $C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \dots + C_{2n}^{2n} = 2^{19} - 1$

Lời giải

$$\text{Xét: } (1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + \dots + C_{2n}^{2n}$$

$$(1-1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k (-1)^k = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + \dots + C_{2n}^{2n}$$

$$\text{Cộng hai vế của chúng lại ta có: } 2^{2n} = 2C_{2n}^0 + 2P = 2 + 2(2^{19} - 1) \Leftrightarrow n = 10$$

$$\text{Ta có: } (x^2 - 3x + 2)^{10} = (x-1)^{10} (x-2)^{10} = \sum_{k=0}^{10} (-1)^{10-k} C_{10}^k x^k \sum_{i=0}^{10} (-2)^{10-i} C_{10}^i x^i$$

$$\text{Khi đó hệ số chứa } x^2 \text{ trong khai triển là } \sum_{\forall i,k} (-1)^{10-k} C_{10}^k \cdot (-2)^{10-i} C_{10}^i \text{ thỏa mãn: } i+k=2 \Rightarrow \begin{cases} k=i=1 \\ i=0; k=2 \\ i=2; k=0 \end{cases}$$

$$\text{Khi } k=i=1 \text{ hệ số sẽ là: } (-1)^9 C_{10}^1 \cdot (-2)^9 C_{10}^1 = 2^{10} \cdot C_{10}^1$$

$$\text{Khi } i=0; k=2 \text{ hệ số là: } (-1)^8 C_{10}^2 \cdot (-2)^{10} C_{10}^0 = 2^{10} \cdot C_{10}^2$$

$$\text{Khi } i=2; k=0 \text{ hệ số là: } (-1)^{10} C_{10}^0 \cdot (-2)^8 C_{10}^2 = 2^8 C_{10}^2$$

$$\text{Vậy hệ số chứa } x^2 \text{ trong khai triển trên là } 2^{10} \cdot C_{10}^1 + 2^{10} \cdot C_{10}^2 + 2^8 \cdot C_{10}^2 = 67840$$

Ví dụ 4. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{26} trong khai triển nhị thức Niuton của $\left(\frac{1}{x^4} + x^7\right)^n$, biết rằng

$$C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1$$

Lời giải

$$\text{Sử dụng khai triển sau: } (1+x)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 x + C_{2n+1}^2 x^2 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} x^{2n+1}$$

$$\text{Cho } x=1 \text{ ta có: } 2^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1}$$

$$\text{Mặt khác ta có công thức: } C_n^k = C_n^{n-k}$$

$$\text{Do vậy: } 2^{2n+1} = 2(C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n) = 2(1 + 2^{20} - 1) \Rightarrow n = 10$$

$$\text{Xét khai triển } \left(\frac{1}{x^4} + x^7\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \left(\frac{1}{x^4}\right)^k (x^7)^{10-k} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k x^{70-11k}$$

$$\text{Ứng với hệ số của số hạng chứa } x^{26} \text{ ta có: } 70 - 11k = 26 \Leftrightarrow k = 4$$

$$\text{Vậy hệ số của số hạng chứa } x^{26} \text{ là } C_{10}^4$$

Ví dụ 5. Cho $x > 0$ và $C_{2n+1}^{n+1} + C_{2n+1}^{n+2} + C_{2n+1}^{n+3} + \dots + C_{2n+1}^{2n-1} + C_{2n+1}^{2n} + C_{2n+1}^{2n+1} = 2^{36}$. Tìm số hạng không phụ thuộc

x trong khai triển nhị thức Niu-ơn của $\left(\sqrt[5]{\frac{1}{x}} - x\right)^n$.

Lời giải

Ta có $C_{2n+1}^k = C_{2n+1}^{2n+1-k} \forall k : 0 \leq k \leq 2n+1$ nên

$$C_{2n+1}^{n+1} + C_{2n+1}^{n+2} + C_{2n+1}^{n+3} + \dots + C_{2n+1}^{2n-1} + C_{2n+1}^{2n} + C_{2n+1}^{2n+1} = \frac{1}{2} (C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^{2n-1} + C_{2n+1}^{2n} + C_{2n+1}^{2n+1})$$

Mà $(1+1)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^{2n-1} + C_{2n+1}^{2n} + C_{2n+1}^{2n+1}$ suy ra $2^{36} = 2^n \Leftrightarrow n = 18$

$$\left(\sqrt[5]{\frac{1}{x}} - x\right)^n = \left(\sqrt[5]{\frac{1}{x}} - x\right)^{18} = \sum_{k=0}^{18} C_{18}^k \left(\sqrt[5]{\frac{1}{x}}\right)^{18-k} \cdot (-x)^k = \sum_{k=0}^{18} C_{18}^k (-1)^k \cdot (x)^{\frac{6-18}{5}}$$

Số hạng không phụ thuộc x ứng với $\frac{6k-18}{5} = 0 \Leftrightarrow k = 3$.

Suy ra số hạng cần tìm là $C_{18}^3 (-1)^3 = -816$

Ví dụ 6. Cho đẳng thức $C_{2n+1}^{n+1} + C_{2n+1}^{n+2} + C_{2n+1}^{n+3} + \dots + C_{2n+1}^{2n-1} + C_{2n+1}^{2n} = 2^8 - 1$.

Tìm hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển $(1 - x + x^3 - x^4)^n$.

Lời giải

Đặt $S = C_{2n+1}^{n+1} + C_{2n+1}^{n+2} + C_{2n+1}^{n+3} + \dots + C_{2n+1}^{2n-1} + C_{2n+1}^{2n}$

Ta có $(1+1)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^{2n-1} + C_{2n+1}^{2n} + (C_{2n+1}^{n+1} + C_{2n+1}^{n+2} + \dots + C_{2n+1}^{2n}) + C_{2n+1}^{2n+1}$

$$\Rightarrow 2^{2n+1} = (C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^{2n+1}) + C_{2n+1}^{2n} + C_{2n+1}^{2n-1} + \dots + C_{2n+1}^{n+2} + C_{2n+1}^{n+1} + (C_{2n+1}^{n+1} + C_{2n+1}^{n+2} + \dots + C_{2n+1}^{2n-1} + C_{2n+1}^{2n})$$

$$\Rightarrow 2^{2n+1} = 2 + 2S \Rightarrow 2^{2n} = 1 + S \Rightarrow 2^{2n} = 2^8 \Rightarrow n = 4$$

$$\Rightarrow (1 - x + x^3 - x^4)^n = [(1-x) + x^3(1-x)]^4 = (1-x)^4 (1+x^3)^4$$

$$= (C_4^0 - C_4^1 x + C_4^2 x^2 - C_4^3 x^3 + C_4^4 x^4) (C_4^0 + C_4^1 x^3 + C_4^2 x^6 + C_4^3 x^9 + C_4^4 x^{12})$$

Ta có hệ số của x^{10} là: $-C_4^1 \cdot C_4^3 + C_4^4 \cdot C_4^2 = -10$

Ví dụ 7. Tìm hệ số của x^4 trong khai triển biểu thức $(1 + x + 2x^2)^n$ biết n là số nguyên dương thỏa mãn

$$C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \dots + C_{2n}^{2n} = 512.$$

Lời giải:

Xét các khai triển sau: $(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + \dots + C_{2n}^{2n} x^{2n}$

$$\text{Với } x=1 \Rightarrow 2^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + \dots + C_{2n}^{2n} \quad (1)$$

$$(1-x)^{2n} = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 - \dots + C_{2n}^{2n} x^{2n}$$

$$\text{Với } x=1 \Rightarrow 0 = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - \dots + C_{2n}^{2n} \quad (2)$$

Cộng về với về (1) và (2) ta được $2^{2n} = 2(C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \dots + C_{2n}^{2n}) = 512 \cdot 2 = 1024 \Rightarrow n = 5$

Xét khai triển $(1+x+2x^2)^{10} = C_5^0(1+x)^5 + C_5^1(1+x)^4(2x^2) + C_5^2(1+x)^3(2x^2)^2 + \dots$

Các số hạng chứa x^4 trong các số hạng trên là:

$$C_5^0(1+x)^5 \rightarrow C_5^0 \cdot C_5^1 x^4$$

$$C_5^1(1+x)^4(2x^2) \rightarrow C_5^1 C_4^2 \cdot x^2 \cdot 2x^2$$

$$C_5^2(1+x)^4 \cdot (2x^2)^2 = C_5^2 C_4^0 \cdot 1 \cdot 4x^4$$

Suy ra tổng hệ số của x^4 là $C_5^0 C_5^1 + C_5^1 C_4^2 \cdot 2 + C_5^2 C_4^0 \cdot 4 = 105$.

Ví dụ 8. Tìm hệ số của x^5 trong khai triển biểu thức $(1-2x+4x^2)^{3n}$ biết n là số nguyên dương thỏa mãn

$$C_{2014}^2 + C_{2014}^4 + C_{2014}^6 + \dots + C_{2014}^{1006} = 2^{503n} - 1.$$

Lời giải

Xét khai triển

$$(1+x)^{2014} = C_{2014}^0 + C_{2014}^1 x + C_{2014}^2 x^2 + \dots + C_{2014}^{2014} x^{2014}. \text{ Với}$$

$$x=1 \Rightarrow 2^{2014} = C_{2014}^0 + C_{2014}^1 + C_{2014}^2 + \dots + C_{2014}^{2014}$$

$$(1-x)^{2014} = C_{2014}^0 - C_{2014}^1 x + C_{2014}^2 x^2 - \dots + C_{2014}^{2014} x^{2014}. \text{ Với } x=1 \Rightarrow 0 = C_{2014}^0 - C_{2014}^1 + C_{2014}^2 - \dots + C_{2014}^{2014}$$

Cộng về hai đẳng thức trên ta được

$$2^{2014} = 2(C_{2014}^0 + C_{2014}^2 + \dots + C_{2014}^{2014}) \Rightarrow C_{2014}^2 + C_{2014}^4 + \dots + C_{2014}^{2012} = 2^{2013} - 2$$

$$\text{Ta có } C_{2014}^2 + C_{2014}^4 + C_{2014}^6 + \dots + C_{2014}^{1006} = C_{2014}^{2012} + C_{2014}^{2010} + \dots + C_{2014}^{1008}$$

$$\Rightarrow C_{2014}^2 + C_{2014}^4 + C_{2014}^6 + \dots + C_{2014}^{1006} = \frac{C_{2014}^2 + C_{2014}^4 + \dots + C_{2014}^{2012}}{2} = \frac{2^{2013} - 2}{2} = 2^{2012} - 1$$

$$\Rightarrow 2^{503n} - 1 = 2^{2012} - 1 \Rightarrow n = 4.$$

Xét khai triển

$$(1-2x+4x^2)^{12} = C_{12}^{12} \cdot (1-2x)^{12} + C_{12}^{11} \cdot (1-2x)^{11} (4x^2) + C_{12}^{10} \cdot (1-2x)^{10} \cdot (4x^2)^2 + C_{12}^9 \cdot (1-2x)^9 \cdot (4x^2)^3 + \dots$$

Các số hạng chứa x^5 là

$$C_{12}^{12} (1-2x)^{12} \rightarrow C_{12}^{12} \cdot C_{12}^5 (-2x)^5 = -32 \cdot C_{12}^5 \cdot x^5$$

$$C_{12}^{11} \cdot (1-2x)^{11} (4x^2) \rightarrow C_{12}^{11} \cdot C_{11}^3 \cdot (-2x)^3 \cdot 4x^2 = -32 \cdot 12 \cdot C_{11}^3 \cdot x^5$$

$$C_{12}^{10} \cdot (1-2x)^{10} \cdot (4x^2)^2 \rightarrow C_{12}^{10} \cdot C_{10}^1 \cdot (-2x)^1 \cdot 16x^4 = -32 \cdot 10 \cdot C_{12}^{10} \cdot x^5$$

$$\Rightarrow \text{hệ số của } x^5 \text{ là } -32 \cdot C_{12}^5 - 32 \cdot 12 \cdot C_{11}^3 - 32 \cdot 10 \cdot C_{12}^{10} = -109824$$

Ví dụ 9. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức Newton của $\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} - x^2\right)^n$, biết rằng

$$C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n = 2^{28} - 1$$

Lời giải

$$\text{Xét khai triển } (1+x)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 x + C_{2n+1}^2 x^2 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} x^{2n+1}$$

$$\text{Với } x=1 \Rightarrow 2^{2n+1} = 2 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^{2n} \Rightarrow C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^{2n} = 2^{2n+1} - 2$$

$$\text{Ta có } C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n = C_{2n+1}^{2n} + C_{2n+1}^{2n-1} + \dots + C_{2n+1}^{n+1}$$

$$\Rightarrow C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n = \frac{C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n + C_{2n+1}^{n+1} + \dots + C_{2n+1}^{2n}}{2} = \frac{2^{2n+1} - 2}{2} = 2^{2n} - 1$$

$$\Rightarrow 2^{28} - 1 = 2^{2n} - 1 \Rightarrow n = 14$$

$$\text{Xét khai triển } \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} - x^2 \right)^{14} \text{ có số hạng tổng quát là } a_k = C_{14}^k \cdot \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} \right)^k \cdot (x^2)^{14-k} = 2^k \cdot C_{14}^k \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^k \cdot (x^2)^{14-k}$$

$$\text{Xét phân tử có bậc của } x \text{ bằng } 0 \text{ thì sẽ có } \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^k \cdot (x^2)^{14-k} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^{28-2k}}{\sqrt[3]{x^k}} = 1 \quad \forall x \Leftrightarrow k = 12$$

$$\text{Suy ra hệ số của } x^0 \text{ là } 2^{12} C_{14}^{12} = 372736$$

Ví dụ 10. Tìm số hạng không chứa x^{14} trong khai triển $(1+x+3x^2)^n$, biết rằng n là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 256$

Lời giải

$$\text{Xét khai triển } (1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n$$

$$\text{Với } x=1 \Rightarrow 2^n = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 256 \Rightarrow n = 8$$

$$\text{Xét khai triển } (1+x+3x^2)^8 = C_8^8 (1+x)^8 + C_8^7 (1+x)^7 \cdot (3x^2) + \dots + C_8^0 (3x^2)^8$$

$$\text{Xét số hạng tổng quát là } C_8^k \cdot C_k^i x^i \cdot (3x^2)^{8-k} = C_8^k \cdot C_k^i \cdot 3^{8-k} \cdot x^{16-2k+i}$$

$$\text{Số hạng chứa } x^{14} \text{ thì thỏa mãn } 16-2k+i=14 \Leftrightarrow i=2k-2=2(k-1)$$

$$\text{Với } k \leq 8 \text{ và } i \leq k \text{ và } i, k \in \mathbb{N}$$

$$\text{Ta có } 2(k-1) \leq k \Rightarrow k-2 \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} k=0 \rightarrow i=-2 \\ k=1 \rightarrow i=0 \\ k=2 \rightarrow i=2 \end{cases}$$

$$\text{Thay 2 trường hợp thỏa mãn vào ta được hệ số của } x^{14} \text{ là } C_8^1 \cdot C_1^0 \cdot 3^{8-1} + C_8^2 \cdot C_2^2 \cdot 3^{8-2} = 37908$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Tìm số hạng chứa x^7 trong khai triển $\left(x - \frac{1}{x} \right)^{13}$.

A. $-C_{13}^4 x^{17}$.

B. $-C_{13}^3$.

C. $-C_{13}^3 x^7$.

D. $C_{13}^3 x^7$.

Câu 2. Tìm số hạng chứa x^3 trong khai triển $\left(x + \frac{1}{2x}\right)^9$.

- A. $-\frac{1}{8}C_9^3x^3$. B. $\frac{1}{8}C_9^3x^3$. C. $-C_9^3x^3$. D. $C_9^3x^3$.

Câu 3. Tìm số hạng chứa x^{31} trong khai triển $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{40}$.

- A. $-C_{40}^{37}x^{31}$. B. $C_{40}^{37}x^{31}$. C. $C_{40}^2x^{31}$. D. $C_{40}^4x^{31}$.

Câu 4. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^6$.

- A. $2^4C_6^2$. B. $2^2C_6^2$. C. $-2^4C_6^4$. D. $-2^2C_6^4$.

Câu 5. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(xy^2 - \frac{1}{xy}\right)^8$.

- A. $70y^4$. B. $60y^4$. C. $50y^4$. D. $40y^4$.

Câu 6. Tìm số hạng chứa x^3y trong khai triển $\left(xy + \frac{1}{y}\right)^5$.

- A. $3x^3y$. B. $5x^3y$. C. $10x^3y$. D. $4x^3y$.

Câu 7. Tìm số hạng đứng giữa trong khai triển $(x^3 + xy)^{21}$.

- A. $C_{21}^{10}x^{40}y^{10}$. B. $C_{21}^{10}x^{43}y^{10}$. C. $C_{21}^{11}x^{41}y^{11}$. D. $C_{21}^{10}x^{43}y^{10}; C_{21}^{11}y^{11}$.

Câu 8: Tính tổng S tất cả các hệ số trong khai triển $(3x - 4)^{17}$.

- A. $S = 1$. B. $S = -1$. C. $S = 0$. D. $S = 8192$.

Câu 9: Hệ số của x^5 trong khai triển $(1 + x)^{12}$ là

- A. 972. B. 495. C. 792. D. 924.

Câu 10: Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(2x - \frac{1}{x^2}\right)^6$ với $x \neq 0$.

- A. 240. B. 15. C. -240. D. -15.

Câu 11: Hệ số của x^2 trong khai triển của biểu thức $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^{10}$ bằng

- A. 3124. B. 2268. C. 13440. D. 210.

Câu 12: Tìm hệ số của số hạng chứa a^3b^2 trong khai triển $(a + 2b)^5$

- A. $40a^3b^2$. B. 40. C. 10. D. $10a^3b^2$.

Câu 13: Giả sử có khai triển $(1 - 2x)^7 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_7x^7$. Tìm a_5 .

- A. $672x^5$. B. -672. C. $-672x^5$. D. 672.

Câu 14: Tìm hệ số của số hạng không chứa x trong khai triển $\left(\frac{x}{2} + \frac{4}{x}\right)^{18}$ $x \neq 0$.

- A. $2^9 C_{18}^9$. B. $2^{11} C_{18}^7$. C. $2^8 C_{18}^8$. D. $2^8 C_{18}^{10}$.

Câu 15: Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^{12}$.

- A. -459. B. -495. C. 495. D. 459.

Câu 16: Tìm hệ số của số hạng chứa x^3 trong khai triển nhị thức Niu-ton của $(2x-1)^6$.

- A. 960. B. -160. C. -960. D. 160.

Câu 17: Tìm số hạng không chứa x trong biểu thức $f(x) = \left(x\sqrt{x} - \frac{1}{2x^4}\right)^{11}$ với $x > 0$.

- A. $-\frac{156}{8}$. B. $-\frac{165}{8}$. C. $\frac{156}{8}$. D. $\frac{165}{8}$.

Câu 18: Tìm hệ số của x^{12} trong khai triển $(2x-x^2)^{10}$.

- A. C_{10}^8 . B. $C_{10}^2 2^8$. C. C_{10}^2 . D. $-C_{10}^2 2^8$.

Câu 19: Khai triển đa thức $P(x) = (5x-1)^{2017}$ ta được

$P(x) = A_{2007}x^{2007} + A_{2006}x^{2006} + \dots + A_1x + A_0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $A_{2000} = -C_{2007}^7 \cdot 5^7$. B. $A_{2000} = C_{2007}^7 \cdot 5^7$. C. $A_{2000} = -C_{2007}^{2000} \cdot 5^{2000}$. D. $A_{2000} = C_{2007}^7 \cdot 5^7$.

Câu 20: Đa thức $P(x) = 32x^5 - 80x^4 + 80x^3 - 40x^2 + 10x - 1$ là khai triển của nhị thức nào dưới đây?

- A. $(1-2x)^5$. B. $(1+2x)^5$. C. $(2x-1)^5$. D. $(x-1)^5$.

Câu 21: Khai triển đa thức $P(x) = (2x-1)^{1000}$ ta được $P(x) = A_{1000}x^{1000} + A_{999}x^{999} + \dots + A_1x + A_0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $A_{1000} + A_{999} + A_1 = 2^n$.
B. $A_{1000} + A_{999} + A_1 = 2^n - 1$.
C. $A_{1000} + A_{999} + A_1 = 1$.
D. $A_{1000} + A_{999} + A_1 = 0$.

Câu 22: Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + \dots + C_{2n}^n = C_{2n}^{n+1} + C_{2n}^{n+2} + \dots + C_{2n}^{2n}$.
B. $C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + \dots + C_{2n}^{n-1} = C_{2n}^{n+1} + C_{2n}^{n+2} + \dots + C_{2n}^{2n}$.
C. $C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + \dots + C_{2n}^{n-2} = C_{2n}^{n+1} + C_{2n}^{n+2} + \dots + C_{2n}^{2n}$.
D. $C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + \dots + C_{2n}^{n+1} = C_{2n}^{n+1} + C_{2n}^{n+2} + \dots + C_{2n}^{2n}$.

Câu 23: Tính tổng $S = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n$.

- A. $S = 2^n - 1$. B. $S = 2^n$. C. $S = 2^{n-1}$. D. $S = 2^n + 1$.

Câu 24: Tính tổng $S = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + \dots + C_{2n}^{2n}$.

- A. $S = 2^{2n}$. B. $S = 2^{2n} - 1$. C. $S = 2^n$. D. $S = 2^{2n} + 1$.

Câu 25: Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + \dots + C_{2n+1}^{2n} = 2^{20} - 1$.

- A. $n = 8$. B. $n = 9$. C. $n = 10$. D. $n = 11$.

Câu 26: Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} = 1024$.

- A. $n = 5$. B. $n = 9$. C. $n = 10$. D. $n = 4$.

Câu 27: Tính tổng $S = C_n^0 + 3C_n^1 + 3^2C_n^2 + \dots + 3^nC_n^n$.

- A. $S = 3^n$. B. $S = 2^n$. C. $S = 3 \cdot 2^n$. D. $S = 4^n$.

Câu 28: Tìm hệ số của x^7 trong khai triển $\left(3x^2 - \frac{2}{x}\right)^n$ với $x \neq 0$, biết hệ số của số hạng thứ ba trong khai triển bằng 1080.

- A. 1080. B. -810. C. 810. D. 1080.

Câu 29: Tìm số tự nhiên n , biết hệ số của số hạng thứ 3 theo số mũ giảm dần của x trong khai triển $\left(x - \frac{1}{3}\right)^n$ bằng 4.

- A. 8. B. 17. C. 9. D. 4.

Câu 30: Tìm hệ số của x^6 trong khai triển $\left(\frac{1}{x} + x^3\right)^{3n+1}$ với $x \neq 0$, biết n là số nguyên dương thỏa mãn $3C_{n+1}^2 + nP_2 = 4A_n^2$.

- A. $210x^6$. B. $120x^6$. C. 120. D. 210.

Câu 31: Tìm hệ số của x^9 trong khai triển $(1 - \sqrt{3}x)^{2n}$, biết n là số nguyên dương thỏa mãn $\frac{2}{C_n^2} + \frac{14}{3C_n^3} = \frac{1}{n}$.

- A. $-C_{18}^9 (\sqrt{3})^9$. B. $-C_{18}^9 (\sqrt{3})^9 x^9$. C. $C_{18}^9 (\sqrt{3})^9 x^9$. D. $C_{18}^9 (\sqrt{3})^9$.

Câu 32: Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(2x - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^{2n}$ với $x \neq 0$, biết n là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^3 + 2n = A_{n+1}^2$.

- A. $-C_{16}^{12} \cdot 2^4 \cdot 3^{12}$. B. $C_{16}^0 \cdot 2^{16}$. C. $C_{16}^{12} \cdot 2^4 \cdot 3^{12}$. D. $C_{16}^{16} \cdot 2^0$.

Câu 33: Hệ số x^5 trong khai triển biểu thức $x(3x-1)^8$ bằng

A. -5670. B. 13608. C. -13608. D. 5670.

Câu 34: Tìm hệ số của số hạng chứa x^{15} trong khai triển $(2x^3 - 3)^n$ thành đa thức, biết n là số nguyên dương thỏa mãn hệ thức $A_n^3 + C_n^1 = 8C_n^2 + 49$.

A. 6048. B. 6480. C. 6408. D. 4608.

Câu 35: Số hạng không chứa x trong khai triển $P(x) = \left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^5$ ($x \neq 0$) (theo chiều mũ của x giảm dần) là số hạng thứ

A. 3. B. 6. C. 4. D. 5.

Câu 36: Trong khai triển $(1 - 2x)^{20} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{20}x^{20}$. Tính giá trị của $a_0 - a_1 + a_2$.

A. 801. B. 800. C. 1. D. 721.

Câu 37: Cho x là số thực dương. Khai triển nhị thức $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{12}$, ta có hệ số của số hạng chứa x^m bằng 495. Giá trị của m là

A. $m = 4$ hoặc $m = 8$. B. $m = 0$.
C. $m = 8$. D. $m = 0$ hoặc $m = 12$.

Câu 38: Tìm số hạng không chứa x trong khai triển của $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^4}\right)^n$ với $x > 0$, biết rằng $C_n^2 - C_n^1 = 44$.

A. 238. B. 165. C. 485. D. 525.

Câu 39: Với số nguyên dương n thỏa mãn $C_n^2 - n = 27$, trong khai triển $\left(x + \frac{3}{x^2}\right)^n$, số hạng không chứa x là

A. 84. B. 2268. C. 61236. D. 27.

Câu 40: Với n là số nguyên dương thỏa mãn $A_n^3 + 2A_n^2 = 100$ (A_n^k là chỉnh hợp chập k của tập hợp có n phần tử), số hạng chứa x^5 trong khai triển của biểu thức $(1 + 3x)^{2n}$ là

A. 61236. B. 252. C. $256x^5$. D. $61236x^5$.

Câu 41: Tìm hệ số của số hạng chứa x^6 trong khai triển $\left(\frac{1}{x} - 2x^2\right)^9$, ($x \neq 0$).

A. $-C_9^4 \cdot 2^4$. B. $-C_9^5 \cdot 2^5$. C. $C_9^5 \cdot 2^5$. D. $C_9^5 \cdot 2^4$.

Câu 42: Hệ số của số hạng chứa x^7 trong khai triển nhị thức $\left(x - \frac{2}{x\sqrt{x}}\right)^{12}$ với $x > 0$

A. 376. B. -264. C. 264. D. 260.

Câu 43: Biết tổng các hệ số trong khai triển nhị thức Newton của $(5x - 1)^n$ bằng 2^{100} . Tìm hệ số của x^3 .

A. -19600. B. -20212500. C. -2450000. D. -161700.

Câu 44: Xác định hệ số của x^{13} trong khai triển của $(x + 2x^2)^{10}$.

- A. 5120. B. 180. C. 960. D. 3360.

Câu 45: Hệ số của x^{12} trong khai triển của biểu thức $(2x - x^2)^{10}$ bằng

- A. C_{10}^8 . B. $C_{10}^2 2^8$. C. $-C_{10}^2 2^8$. D. C_{10}^2 .

Câu 46: Cho x là số thực dương, tìm số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức $\left(x + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{30}$.

- A. $2^{10} C_{30}^{20}$. B. 2^{20} . C. C_{30}^{20} . D. $2^{20} C_{30}^{10}$.

Câu 47: Số hạng độc lập với x trong khai triển $\left(\frac{1}{x} - 2x^2\right)^{12}$ là

- A. $2^8 C_{12}^4$. B. $2^6 C_{12}^6$. C. $2^4 C_{12}^4$. D. $-2^4 C_{12}^4$.

Câu 48: Tổng các hệ số nhị thức Niu-ton trong khai triển $(1+x)^{3n}$ bằng 64. Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(2nx + \frac{1}{2nx^2}\right)^{3n}$ là

- A. 360. B. 210. C. 250. D. 240.

Câu 49: Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7$ bằng

- A. 5. B. 35. C. 45. D. 7.

Câu 50: Tổng các hệ số trong khai triển $\left(\frac{1}{x} + x^4\right)^n$ là 1024. Hệ số chứa x^{10} là

- A. 10. B. 252. C. 120. D. 210.

Câu 51: Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $5C_n^1 - C_n^2 = 5$. Tìm hệ số a của x^4 trong khai triển $\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^n$.

- A. $a = 11520$. B. $a = 256$. C. $a = 45$. D. $a = 3360$.

Câu 52: Tìm hệ số của x^5 trong khai triển nhị thức Newton của $(1+3x)^{2n}$, biết rằng $A_n^3 + 2A_n^2 = 100$ (n là số nguyên dương và A_n^k là số chỉnh hợp chập k của n phần tử).

- A. 61236. B. 243. C. 63216. D. 252.

Câu 53: Hệ số của số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^3 - \frac{2}{x}\right)^n$, biết n là số nguyên dương thỏa mãn

$$C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 78$$

- A. 112640. B. 112643. C. -112640. D. -112643.

Câu 54: Gọi a là hệ số của $x^{\frac{5}{3}}$ trong khai triển $\left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{x}\right)^{3n}, x > 0$. Tìm a biết rằng

$$2^{n-4} (C_n^{n-2} - C_{n-2}^1 - n) = C_{n-1}^{n-2}.$$

- A. $a = 96096$. B. $a = 96906$. C. $a = 96960$. D. $a = 96069$.

Câu 55: Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \dots + 2^n C_n^n = 14348907$. Hệ số của số hạng

chứa x^{10} trong khai triển của biểu thức $\left(x^2 - \frac{1}{x^3}\right)^n, (x \neq 0)$ bằng

- A. -1365. B. 32760. C. 1365. D. -32760.

Câu 56: Cho khai triển biểu thức $\left(3 - \frac{x}{2}\right)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$, với n là số tự nhiên khác 0, biết rằng $a_0 + 2a_1 + 2^2 a_2 + \dots + 2^n a_n = 1024$. Tìm hệ số của x^6 trong khai triển trên.

- A. $-\frac{8505}{32} x^6$. B. $\frac{8505}{32} x^6$. C. $-\frac{8505}{32}$. D. $\frac{8505}{32}$.

Câu 57: Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^2 - C_n^1 = 44$. Số hạng không chứa x trong khai triển của

biểu thức $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^4}\right)^n$, với $x > 0$ bằng

- A. 165. B. 485. C. 238. D. 525.

Câu 58: Cho $n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 1023$. Tìm hệ số của x^2 trong khai triển $[(12-n)x+1]^n$ thành đa thức.

- A. 2. B. 90. C. 45. D. 180.

Câu 59: Tìm hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển biểu thức $\left(\frac{2}{x} - x^3\right)^n$ với mọi $x \neq 0$, biết n là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^2 + nA_n^2 = 476$.

- A. $1792x^4$. B. -1792. C. 1792. D. $-1792x^4$.

Câu 60: Hệ số của x^5 trong rút gọn của khai triển $(3-x)^8 + (2x+1)^{10}$ là

- A. 9576. B. 196. C. 6552. D. -5544.

Câu 61: Cho khai triển $(1+ax)(1-3x)^6$ với $a \in \mathbb{R}$. Biết rằng hệ số của x^3 trong khai triển trên là 405. Tính a .

- A. 9. B. 6. C. 14. D. 7.

Câu 62: Tổng các hệ số trong khai triển $(1+x)^{3n}$ bằng 64. Số hạng không chứa x trong khai triển

$\left(2nx + \frac{1}{2nx^2}\right)^{3n}$ là

A. 360.

B. 210.

C. 250.

D. 240.

Câu 63: Cho khai triển $(1+x)^n$ với n là số nguyên dương. Tìm hệ số của số hạng chứa x^3 trong khai triển biết $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + C_{2n+1}^3 + \dots + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1$.

A. 480.

B. 720.

C. 240.

D. 120.

Câu 64: Tìm hệ số của x^5 trong khai triển $P(x) = x(1-2x)^5 + x^2(1+3x)^{10}$.

A. 80.

B. 3240.

C. 3320.

D. 259200.

Câu 65: Tìm hệ số của x^5 trong khai triển đa thức $x(2x-1)^6 + (x-3)^8$.

A. -1752.

B. 1272.

C. 1752.

D. -1272.

Câu 66: Tìm hệ số của x^4 trong khai triển $P(x) = (1-x-3x^3)^n$ với n là số tự nhiên thỏa mãn hệ thức $C_n^{n-2} + 6n + 5 = A_{n+1}^2$.

A. 210.

B. 840.

C. 480.

D. 270.

Câu 67: Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển $(1+x+x^2+x^3)^5$.

A. 5.

B. 50.

C. 101.

D. 105.

Câu 68: Tìm hệ số của x^5 trong khai triển $P(x) = (1+x) + 2(1+x)^2 + \dots + 8(1+x)^8$.

A. 630.

B. 635.

C. 636.

D. 637.

Câu 69: Hệ số của số hạng x^{30} trong khai triển $f(x) = (2x+1)(x+2x^2)^{20}$ thành đa thức là

A. 631181184.

B. 3611181184.

C. 361811184.

D. 361181184.

Câu 70: Tìm hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển $(1+x+x^2+x^3)^{10}$.

A. 1902.

B. 7752.

C. 252.

D. 582.

Câu 71: Tìm hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển thành đa thức của $[1+x^2(1-x)]^8$.

A. 238.

B. 128.

C. 258.

D. 348.

Câu 72: Tìm số hạng không phụ thuộc vào x trong khai triển $\left[\frac{1}{x} - (x+x^2)\right]^8$.

A. 70.

B. -336.

C. -168.

D. -98.

Câu 73: Tìm hệ số của x^5 trong khai triển biểu thức $P = x(1-2x)^n + x^2(1+3x)^{2n}$ thành đa thức, biết $A_n^2 - C_{n+1}^{n-1} = 5$.

A. 432.

B. 3320.

C. -5432.

D. 4674.

Câu 74: Tìm hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển $\left(x^3 + \frac{1}{x} + 2\right)^6$.

A. 356.

B. 210.

C. 735.

D. 480.

Câu 75: Cho khai triển $(1+2x+3x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2n}x^{2n}$. Tìm hệ số của x^5 trong khai triển trên biết rằng $a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{2n} = 30233600$.

- A. 37102. B. 33264. C. 32951. D. 34704.

Câu 76: Tìm hệ số của x^3 sau khi khai triển và rút gọn các đơn thức đồng dạng của $\left(\frac{1}{x} - x + 2x^2\right)^9, x \neq 0$.

- A. 3210. B. -3210. C. -2940. D. 2940.

Câu 77: Xác định hệ số của x^4 trong khai triển của biểu thức $(3x^2 + 2x + 1)^{10}$.

- A. 8085. B. 11312. C. 1303. D. 8089.

Câu 78: Cho khai triển $(1+2x)^n = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, trong đó $n \in \mathbb{N}^*$ là các hệ số thỏa mãn

$a_0 + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_n}{2^n} = 4096$. Tìm hệ số lớn nhất.

- A. 112640. B. 101376. C. 126720. D. 67584.

Câu 79: Khai triển đa thức $P(x) = (1+2x)^{12} = a_0 + a_1x + \dots + a_{12}x^{12}$. Tìm hệ số $a_k (0 \leq k \leq 12)$ lớn nhất trong khai triển trên.

- A. $C_{12}^8 2^8$. B. $C_{12}^9 2^9$. C. $C_{12}^{10} 2^{10}$. D. $1 + C_{12}^8 2^8$.

Câu 80: Khai triển đa thức $P(x) = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x\right)^{10} = a_0 + a_1x + \dots + a_9x^9 + a_{10}x^{10}$. Tìm hệ số $a_k (0 \leq k \leq 10)$ lớn nhất trong khai triển trên.

- A. $1 + \frac{2^7}{3^{10}} C_{10}^7$. B. $\frac{2^7}{3^{10}} C_{10}^7$. C. $\frac{2^6}{3^{10}} C_{10}^6$. D. $\frac{2^8}{3^{10}} C_{10}^8$.

Câu 81: Cho khai triển $(\sqrt{3} + x)^{2019} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2019}x^{2019}$.

Hãy tính tổng $S = a_0 - a_2 + a_4 - a_6 + \dots + a_{2016} - a_{2018}$.

- A. $(\sqrt{3})^{1009}$. B. 2^{1009} . C. 2^{2019} . D. 0.

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1-C	2-B	3-B	4-A	5-A	6-C	7-D	8-B	9-C	10-A
11-C	12-B	13-B	14-A	15-C	16-D	17-B	18-B	19-C	20-C
21-D	22-B	23-B	24-A	25-C	26-A	27-D	28-B	29-C	30-D
31-A	32-C	33-D	34-A	35-C	36-A	37-D	38-B	39-B	40-D
41-B	42-C	43-C	44-C	45-B	46-D	47-C	48-D	49-B	50-D
51-A	52-A	53-C	54-A	55-C	56-D	57-A	58-D	59-B	60-A
61-D	62-D	63-D	64-C	65-D	66-C	67-C	68-A	69-D	70-A
71-A	72-D	73-B	74-D	75-D	76-C	77-A	78-C	79-A	80-B

81-D									
------	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Câu 1: Ta có $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{13} = \sum_{k=0}^{13} C_{13}^k \cdot x^{13-k} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{13} C_{13}^k \cdot (-1)^k \cdot x^{13-2k}.$

Hệ số của x^3 ứng với $13-2k=7 \Leftrightarrow k=3 \rightarrow$ số hạng cần tìm $-C_{13}^3 x^7$. **Chọn C.**

Câu 2: Ta có: $\left(x + \frac{1}{2x}\right)^9 = \sum_{k=0}^9 C_9^k \cdot x^{9-k} \cdot \left(\frac{1}{2x}\right)^k = \sum_{k=0}^9 C_9^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot x^{9-2k}.$

Hệ số của x^3 ứng với $9-2k=3 \Leftrightarrow k=3 \rightarrow$ số hạng cần tìm $\frac{1}{8} C_9^3 x^3$. **Chọn B.**

Câu 3: Ta có $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{40} = \sum_{k=0}^{40} C_{40}^k \cdot x^{40-k} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{40} C_{40}^k \cdot x^{40-3k}.$

Hệ số của x^{31} ứng với $40-3k=31 \Leftrightarrow k=3 \rightarrow$ số hạng cần tìm $C_{40}^{37} x^{31}$. **Chọn B**

Câu 4: Ta có $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^6 = \sum_{k=0}^6 C_6^k \cdot (x^2)^{6-k} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^6 C_6^k \cdot (2)^k \cdot x^{12-3k}.$

Số hạng không chứa x ứng với $12-3k=0 \Leftrightarrow k=4$

$\rightarrow$ số hạng cần tìm $C_6^4 \cdot 2^4 = 2^4 C_6^2$. **Chọn A.**

Câu 5: Ta có $\left(xy^2 - \frac{1}{xy}\right)^8 = \sum_{k=0}^8 C_8^k \cdot (xy^2)^{8-k} \cdot \left(-\frac{1}{xy}\right)^k = \sum_{k=0}^8 C_8^k \cdot (-1)^k \cdot x^{8-2k} \cdot y^{16-3k}.$

Số hạng không chứa x ứng với $8-2k=0 \Leftrightarrow k=4$

$\rightarrow$ số hạng cần tìm $C_8^4 y^4 = 70y^4$. **Chọn A.**

Câu 6: Ta có $\left(xy + \frac{1}{y}\right)^5 = \sum_{k=0}^5 C_5^k \cdot (xy)^{5-k} \cdot \left(\frac{1}{y}\right)^k = \sum_{k=0}^5 C_5^k \cdot x^{5-k} \cdot y^{5-2k}.$

Hệ số của $x^3 y$ ứng với $\begin{cases} 5-k=3 \\ 5-2k=1 \end{cases} \Leftrightarrow k=2 \rightarrow$ số hạng cần tìm $C_5^2 x^3 y = 10x^3 y$. **Chọn C.**

Câu 7: Ta có $(x^3 + xy)^{21} = \sum_{k=0}^{21} C_{21}^k \cdot (x^3)^{21-k} \cdot (xy)^k = \sum_{k=0}^{21} C_{21}^k \cdot x^{63-2k} \cdot y^k.$

Suy ra khai triển $(x^3 + xy)^{21}$ có 22 số hạng nên có hai số hạng đứng giữa là số hạng thứ 11 (ứng với $k=10$) và số hạng thứ 12 (ứng với $k=11$).

Vậy hai số hạng đứng giữa cần tìm là $C_{21}^{10} x^{43} y^{10}; C_{21}^{11} x^{41} y^{11}$. **Chọn D.**

Câu 8: Tính tổng các hệ số trong khai triển $\rightarrow$ cho $x=1$.

Khi đó $S = (3 \cdot 1 - 4)^{17} = -1$. **Chọn B.**

Câu 9: Ta có $(1+x)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k \cdot 1^{12-k} \cdot x^k = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k \cdot x^k$

Hệ số của x^5 ứng với $k = 5 \rightarrow$ hệ số cần tìm là $C_{12}^5 = 792$. **Chọn C.**

Câu 10: Ta có $\left(2x - \frac{1}{x^2}\right)^6 = \sum_{k=0}^6 C_6^k \cdot (2x)^{6-k} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)^k = \sum_{k=0}^6 C_6^k \cdot 2^{6-k} \cdot (-1)^k \cdot x^{6-3k}$

$\rightarrow$ Số hạng không chứa x ứng với $6-3k = 0 \Leftrightarrow k = 2$

$\rightarrow$ số hạng cần tìm là $C_6^2 \cdot 2^4 \cdot (-1)^2 = 240$. **Chọn A.**

Câu 11: Ta có $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot (x^2)^{10-k} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot 2^k \cdot x^{20-3k}$

Hệ số của x^2 ứng với $20-3k = 2 \Leftrightarrow k = 6 \rightarrow$ hệ số cần tìm là $C_{10}^6 \cdot 2^6 = 13440$. **Chọn C.**

Câu 12: Ta có $(a+2b)^5 = \sum_{k=0}^5 C_5^k \cdot a^{5-k} \cdot (2b)^k = \sum_{k=0}^5 C_5^k \cdot 2^k \cdot a^{5-k} \cdot b^k$

Hệ số của a^3b^2 ứng với $5-k = 3 \Leftrightarrow k = 2 \rightarrow$ hệ số cần tìm là $C_5^2 \cdot 2^2 = 40$. **Chọn B.**

Câu 13: Ta có $(1-2x)^7 = \sum_{k=0}^7 C_7^k \cdot 1^{7-k} \cdot (-2x)^k = \sum_{k=0}^7 C_7^k \cdot (-2)^k \cdot x^k$

Hệ số của a^5 ứng với $k = 5 \rightarrow$ hệ số cần tìm là $C_7^5 \cdot (-2)^5 = -672$. **Chọn B.**

Câu 14: Ta có $\left(\frac{x}{2} + \frac{4}{x}\right)^{18} = \sum_{k=0}^{18} C_{18}^k \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{18-k} \cdot \left(\frac{4}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{18} C_{18}^k \cdot 2^{3k-18} \cdot x^{18-2k}$

Số hạng không chứa x ứng với $18-2k = 0 \Leftrightarrow k = 9$

$\rightarrow$ số hạng cần tìm là $2^9 C_{18}^9$. **Chọn A.**

Câu 15: Ta có $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k \cdot (x^2)^{12-k} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k \cdot (-1)^k \cdot x^{24-3k}$

Số hạng không chứa x ứng với $24-3k = 0 \Leftrightarrow k = 8$

$\rightarrow$ số hạng cần tìm là $C_{12}^8 \cdot (-1)^8 = 495$. **Chọn C.**

Câu 16: $(2x-1)^6 = \sum_{k=0}^6 C_6^k \cdot (2x)^{6-k} \cdot (-1)^k = \sum_{k=0}^6 C_6^k \cdot 2^{6-k} \cdot (-1)^k \cdot x^{6-k}$

Hệ số của x^3 ứng với $6-k = 3 \Leftrightarrow k = 3 \rightarrow$ hệ số cần tìm là $C_6^3 \cdot 2^3 \cdot (-1)^3 = 160$. **Chọn D.**

Câu 17: Ta có $\left(x\sqrt{x} - \frac{1}{2x^4}\right)^{11} = \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k \cdot (x\sqrt{x})^{11-k} \cdot \left(-\frac{1}{2x^4}\right)^k = \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^k \cdot x^{\frac{33-3k}{2}-4k}$

Số hạng không chứa x ứng với $\frac{33-3k}{2} - 4k = 0 \Leftrightarrow k = 3$

$\rightarrow$ số hạng cần tìm là $C_{11}^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8} C_{11}^3 = -\frac{165}{8}$. **Chọn B.**

Câu 18: $(2x-x^2)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot (2x)^{10-k} \cdot (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot 2^{10-k} \cdot (-1)^k \cdot x^{10+k}$

Hệ số của x^{12} ứng với $10+k=12 \Leftrightarrow k=2 \rightarrow$ hệ số cần tìm là $C_{10}^2 \cdot 2^8$. **Chọn B.**

Câu 19: Ta có $(5x-1)^{2017} = \sum_{k=0}^{2017} C_{2017}^k \cdot (5x)^{2017-k} \cdot (-1)^k = \sum_{k=0}^{2017} C_{2017}^k \cdot 5^{2017-k} \cdot (-1)^k x^{2017-k}$

Yêu cầu bài toán trở thành: $2017-k=2000 \Leftrightarrow k=17 \rightarrow A_{2000} = -C_{2017}^{2000} \cdot 5^{2000}$. **Chọn C.**

Câu 20: Nhị thức cần tìm là $(2x-1)^5$. **Chọn C.**

Câu 21: $P(x) = a_{1000}x^{1000} + a_{999}x^{999} + \dots + a_1x + a_0$

Cho $x=1$, ta được $P(1) = a_{1000} + a_{999} + \dots + a_1 + a_0$.

Mặt khác $P(x) = (2x-1)^{1000} \rightarrow P(1) = (2 \cdot 1 - 1)^{1000} = 1$.

Từ đó suy ra $a_{1000} + a_{999} + \dots + a_1 + a_0 = 1 \rightarrow a_{1000} + a_{999} + \dots + a_1 = 1 - a_0$.

Mà là số hạng không chứa x trong khai triển $P(x) = (2x-1)^{1000}$ nên $a_0 = C_{1000}^{1000} = 1$.

Vậy $a_{1000} + a_{999} + \dots + a_1 = 0$. **Chọn D.**

Câu 22: Áp dụng công thức $C_n^k = C_n^{n-k}$, ta có
$$\begin{cases} C_{2n}^0 = C_{2n}^{2n} \\ C_{2n}^1 = C_{2n}^{2n-1} \\ \dots \\ C_{2n}^{n-1} = C_{2n}^{n+1} \end{cases}$$

Cộng về theo về, ta được $C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + \dots + C_{2n}^{n-1} = C_{2n}^{n+1} + C_{2n}^{n+2} + \dots + C_{2n}^{2n}$. **Chọn B.**

Câu 23: Ta có $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \dots + C_n^nx^n$

Cho $x=1$, ta được $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$. **Chọn B.**

Câu 24: Ta có $(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1x + C_{2n}^2x^2 + \dots + C_{2n}^{2n}x^{2n}$

Cho $x=1$, ta được $C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + \dots + C_{2n}^{2n} = (1+1)^{2n} = 2^{2n}$. **Chọn A.**

Câu 25: Ta có $(1+1)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1}$ (1)

Lại có $C_{2n+1}^0 = C_{2n+1}^{2n+1}; C_{2n+1}^1 = C_{2n+1}^{2n}; C_{2n+1}^2 = C_{2n+1}^{2n-1}; \dots; C_{2n+1}^n = C_{2n+1}^{n+1}$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + \dots + C_{2n+1}^n = \frac{2^{2n+1}}{2}$

$\Leftrightarrow C_{2n+1}^1 + \dots + C_{2n+1}^n = 2^{2n} - 1 \Leftrightarrow 2^{20} - 1 = 2^{2n} - 1 \Leftrightarrow n = 10$

Vậy $n=10$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn C.**

Câu 26: Ta có $(x+1)^{2n+1} = C_{2n+1}^0x^{2n+1} + C_{2n+1}^1x^{2n} + \dots + C_{2n+1}^{2n+1}$.

Cho $x=1$, ta được $2^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1}$. (1)

Cho $x=-1$, ta được $0 = -C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 - \dots + C_{2n+1}^{2n+1}$. (2)

Cộng (1) và (2) về theo về, ta được

$$2^{2n+1} = 2 \left(C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} \right) \Leftrightarrow 2^{2n+1} = 2.1024 \Leftrightarrow n = 5. \text{ Chọn A.}$$

Câu 27: Ta có $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n$

Cho $x=3$, ta được $C_n^0 + 3C_n^1 + 3^2 C_n^2 + \dots + 3^n C_n^n = (1+3)^n = 4^n$. **Chọn D.**

Câu 28: Số hạng tổng quát của khai triển là:

$$C_n^k (3x^2)^k \cdot \left(-\frac{2}{x}\right)^{n-k} = C_n^k \cdot 3^k \cdot x^{2k} \cdot (-2)^{n-k} \cdot x^{k-n} = C_n^k \cdot 3^k \cdot (-2)^{n-k} \cdot x^{3k-n}$$

Hệ số của số hạng thứ 3 ứng với $k=3$ là $C_n^3 \cdot 3^3 \cdot (-2)^{n-3} = 1080 \Leftrightarrow C_n^3 \cdot (-2)^{n-3} = 40 \Leftrightarrow n=5$

Khi đó số hạng tổng quát là $C_5^k \cdot 3^k \cdot (-2)^{5-k} \cdot x^{3k-5}$

Cho $3k-5=7 \Leftrightarrow k=4$ ta được hệ số của x^7 trong khai triển $C_5^4 \cdot 3^4 \cdot (-2) = -810$. **Chọn B.**

Câu 29: Số hạng tổng quát của khai triển là $C_n^k \cdot x^{n-k} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^k$

Hệ số của số hạng thứ 3 theo số mũ giảm dần của x trong khai triển ứng với $k=2$

Khi đó $C_n^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 36 \Leftrightarrow n=9$. **Chọn C.**

Câu 30: Theo giả thiết ta có: $3C_{n+1}^2 + nP_2 = 4A_n^2 \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{(n+1)!}{2! \cdot (n-1)!} + n \cdot 2! = 4 \cdot \frac{n!}{(n-2)!}$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot \frac{(n+1) \cdot n}{2} + 2n = 4n(n-1) \Leftrightarrow 3(n+1) + 4 = 8(n-1) \Leftrightarrow 15 = 5n \Leftrightarrow n=3$$

Xét khai triển $\left(\frac{1}{x} + x^3\right)^{10}$ có số hạng tổng quát là $C_{10}^k \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{10-k} \cdot (x^3)^k = C_{10}^k \cdot x^{k-10} \cdot x^{3k} = C_{10}^k \cdot x^{4k-10}$

Cho $4k-10=6$ ta được $k=4 \Rightarrow$ hệ số của x^6 trong khai triển là $C_{10}^6 = 210$. **Chọn D.**

Câu 31: Ta có $\frac{2}{C_n^2} + \frac{14}{3C_n^3} = \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{2}{\frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!}} + \frac{14}{3 \cdot \frac{n!}{(n-3)! \cdot 3!}} = \frac{1}{n}$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{n(n-1)} + \frac{28}{n(n-1)(n-2)} = \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{4}{n-1} + \frac{28}{(n-1)(n-2)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{4n-8+28}{(n-1)(n-2)} = 1 \Leftrightarrow n^2 - 7n - 18 = 0 \Leftrightarrow n=9$$

Xét khai triển $(1-\sqrt{3}x)^{18} = \sum_{k=0}^{18} C_{18}^k \cdot (-\sqrt{3}x)^k$ có hệ số của số hạng chứa x^9 là $C_{18}^9 \cdot (-\sqrt{3})^9 = -C_{18}^9 (\sqrt{3})^9$.

Chọn A.

Câu 32: Điều kiện $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$

Ta có: $C_n^3 + 2n = A_{n+1}^2 \Leftrightarrow \frac{n!}{3!(n-3)!} + 2n = \frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + 2n = (n+1).n$

$$\Leftrightarrow \frac{n^2 - 3n + 2}{6} + 2 = n + 1 \Leftrightarrow n^2 - 3n + 2 + 12 = 6n + 6 \Leftrightarrow n^2 - 9n + 8 = 0 \Leftrightarrow n = 8$$

Xét khai triển $\left(2x - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^{2n} = \left(2x - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^{16} = \sum_{k=0}^{16} C_{16}^k (2x)^{16-k} \cdot \left(\frac{-3}{\sqrt[3]{x}}\right)^k = \sum_{k=0}^{16} C_{16}^k 2^{16-k} \cdot x^{16-k} \cdot (-3)^k \cdot x^{-\frac{k}{3}}$

$$= \sum_{k=0}^{16} C_{16}^k \cdot 2^{16-k} \cdot x^{16-\frac{4k}{3}} \cdot (-3)^k$$

Số hạng không chứa x ứng với $16 - \frac{4k}{3} = 0 \Leftrightarrow k = 12 \Rightarrow$ số hạng không chứa x trong khai triển là

$$C_{16}^{12} 2^4 \cdot (-3)^{12}. \text{ Chọn C.}$$

Câu 33: Hệ số x^5 trong khai triển biểu thức $x(3x-1)^8$ bằng hệ số của x^4 trong khai triển $(3x-1)^8$ và bằng $C_8^4 \cdot 3^4 \cdot (-1)^4 = 5670$. **Chọn D.**

Câu 34: Ta có $A_n^3 + C_n^1 = 8C_n^2 + 49 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-3)!} + n = 8 \cdot \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} + 49$

$$\Leftrightarrow n(n-1)(n-2) + n = 4n(n-1) + 49 \Leftrightarrow n^3 - 3n^2 + 2n + n = 4n^2 - 4n + 49$$

$$\Leftrightarrow n^3 - 7n^2 + 7n - 49 = 0 \Leftrightarrow n = 7$$

Số hạng tổng quát của $(2x^3 - 3)^7$ là $C_7^k \cdot (2x^3)^k \cdot (-3)^{7-k}$

Cho $k = 5$ ta được hệ số của số hạng chứa x^{15} trong khai triển là $C_7^5 \cdot 2^5 \cdot (-3)^2 = 6048$. **Chọn A.**

Câu 35: Số hạng tổng quát của khai triển là

$$C_5^k \cdot (x^3)^k \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)^{5-k} = C_5^k \cdot x^{3k} \cdot (-1)^{5-k} \cdot x^{2k-10} = C_5^k \cdot (-1)^{5-k} \cdot x^{5k-10}$$

Cho $5k - 10 = 0 \Leftrightarrow k = 2$ ta được số hạng không chứa x trong khai triển.

Theo chiều mũ của x giảm dần thì đây là số hàng thứ 4. **Chọn C.**

Câu 36: Số hạng tổng quát khai triển là $C_{20}^k \cdot (-2x)^k = C_{20}^k \cdot (-2)^k \cdot x^k$

Ta có: $a_0 - a_1 + a_2 = C_{20}^0 \cdot (-2)^0 - C_{20}^1 \cdot (-2)^1 + C_{20}^2 \cdot (-2)^2 = 801$. **Chọn A.**

Câu 37: Số hạng tổng quát của khai triển là $C_{12}^k \cdot (x^2)^{12-k} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^k = C_{12}^k \cdot x^{24-2k} \cdot x^{-k} = C_{12}^k \cdot x^{24-3k}$

Giải phương trình $C_{12}^k = 495 \Leftrightarrow k = 8$ hoặc $k = 4$.

Khi đó $\begin{cases} 24 - 3k = 0 \\ 24 - 3k = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 12 \end{cases}$. **Chọn D.**

Câu 38: Ta có $C_n^2 - C_n^1 = 44 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} - n = 44 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} - n = 44$

$\Leftrightarrow n^2 - 3n - 88 = 0 \Leftrightarrow n = 11.$

Số hạng tổng quát của khai triển $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^4}\right)^{11}$ là $C_{11}^k (x\sqrt{x})^k \cdot (x^{-4})^{11-k} = C_{11}^k \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^k \cdot x^{4k-44} = C_{11}^k \cdot x^{\frac{11}{2}k-44}$

Cho $\frac{11k}{2} - 44 = 0 \Leftrightarrow k = 8$ suy ra số hạng không chứa x là $C_{11}^8 = 165$. **Chọn B.**

Câu 39: Ta có $C_n^2 - n = 27 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} - n = 27 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} - n = 27$

$\Leftrightarrow n^2 - 3n - 54 = 0 \Leftrightarrow n = 9$

Số hạng tổng quát của khai triển $\left(x + \frac{3}{x^2}\right)^9$ là $C_9^k \cdot x^{9-k} \cdot \left(\frac{3}{x^2}\right)^k = C_9^k \cdot x^{9-k} \cdot 3^k \cdot x^{-2k} = C_9^k \cdot x^{9-3k} \cdot 3^k$

Cho $9 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = 3$ suy ra số hạng không chứa x của khai triển là $C_9^3 \cdot x^3 = 2268$. **Chọn B.**

Câu 40: Ta có $A_n^3 + 2A_n^2 = 100 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-3)!} + 2 \cdot \frac{n!}{(n-2)!} = 100 \Leftrightarrow n(n-1)(n-2) + 2n(n-1) = 100$

$\Leftrightarrow n^3 - 3n^2 + 2n + 2n^2 - 2n = 100 \Leftrightarrow n^3 - n^2 - 100 = 0 \Leftrightarrow n = 5.$

Với $n = 5$ thì số hạng chứa x^5 trong khai triển của biểu thức $(1+3x)^{10}$ là $C_{10}^5 \cdot (3x)^5 = 61236x^5$. **Chọn D.**

Câu 41: Ta có $\left(\frac{1}{x} - 2x^2\right)^9 = \sum_{k=0}^9 C_9^k \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{9-k} \cdot (-2x^2)^k = \sum_{k=0}^9 C_9^k \cdot (-2)^k \cdot x^{3k-9}$

Hệ số của x^6 ứng với $3k - 9 = 6 \Leftrightarrow k = 5 \rightarrow$ Hệ số cần tìm là $C_9^5 \cdot (-2)^5 = -2^5 \cdot C_9^5$. **Chọn B.**

Câu 42: Ta có $\left(x - \frac{2}{x\sqrt{x}}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k \cdot x^{12-k} \cdot \left(-\frac{2}{x\sqrt{x}}\right)^k = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k \cdot (-2)^k \cdot x^{12-\frac{5}{2}k}$

Hệ số của x^7 ứng với $12 - \frac{5}{2}k = 7 \Leftrightarrow k = 2 \rightarrow$ Hệ số cần tìm là $C_{12}^2 \cdot (-2)^2 = 264$. **Chọn C.**

Câu 43: Thay $x = 1$ vào nhị thức, ta được $(5 \cdot 1 - 1)^n = 2^{100} \Leftrightarrow 4^n = 2^{100} \Rightarrow n = 50$

HD: Ta có $(5x - 1)^{50} = \sum_{k=0}^{50} C_{50}^k \cdot (5x)^{50-k} \cdot (-1)^k = \sum_{k=0}^{50} C_{50}^k \cdot 5^{50-k} \cdot (-1)^k \cdot x^{50-k}$

Hệ số của x^3 ứng với $50 - k = 3 \Leftrightarrow k = 47 \rightarrow$ Hệ số cần tìm là $C_{50}^{47} \cdot 5^3 \cdot (-1)^{47} = -2450000$.

Chọn C.

Câu 44: Ta có $(x + 2x^2)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot x^{10-k} \cdot (2x^2)^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot 2^k \cdot x^{10+k}$

Hệ số của x^{13} ứng với $10 + k = 13 \Leftrightarrow k = 3 \rightarrow$ Hệ số cần tìm là $C_{10}^3 \cdot 2^3 = 960$. **Chọn C.**

Câu 45: Ta có $(2x - x^2)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot (2x)^{10-k} \cdot (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot 2^{10-k} \cdot (-1)^k \cdot x^{10+k}$

Hệ số của x^{12} ứng với $10 + k = 12 \Leftrightarrow k = 2 \rightarrow$ Hệ số cần tìm là $C_{10}^2 \cdot 2^8 = 11520$. **Chọn B.**

Câu 46: Ta có $\left(x + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{30} = \sum_{k=0}^{30} C_{30}^k \cdot x^{30-k} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^k = \sum_{k=0}^{30} C_{30}^k \cdot 2^k \cdot x^{30-\frac{3}{2}k}$

Số hạng không chứa x ứng với $30 - \frac{3}{2}k = 0 \Leftrightarrow k = 20$

$\rightarrow$ Số hạng không chứa x là $C_{30}^{20} \cdot 2^{20}$. **Chọn D.**

Câu 47: Ta có $\left(\frac{1}{x} - 2x^2\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{12-k} \cdot (-2x^2)^k = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k \cdot (-2)^k \cdot x^{3k-12}$

Số hạng không chứa x ứng với $3k - 12 = 0 \Leftrightarrow k = 4$

$\rightarrow$ Số hạng cần tìm là $C_{12}^4 \cdot (-2)^4 = 2^4 C_{12}^4$. **Chọn C.**

Câu 48: Thay $x = 1$ vào nhị thức, ta được $2^{3n} = 64 \Leftrightarrow 2^{3n} = 2^6 \Leftrightarrow n = 2$

Ta có $\left(4x + \frac{1}{4x^2}\right)^6 = \sum_{k=0}^6 C_6^k \cdot (4x)^{6-k} \cdot \left(\frac{1}{4x^2}\right)^k = \sum_{k=0}^6 C_6^k \cdot 4^{6-2k} \cdot x^{6-3k}$

Số hạng không chứa x ứng với $6 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = 2$

$\rightarrow$ Số hạng cần tìm là $C_6^2 \cdot 4^2 = 240$. **Chọn D.**

Câu 49: Ta có $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7 = \sum_{k=0}^7 C_7^k \cdot (\sqrt[3]{x})^{7-k} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^k = \sum_{k=0}^7 C_7^k \cdot x^{\frac{7-k}{3} - \frac{k}{4}}$

Số hạng không chứa x ứng với $\frac{7-k}{3} - \frac{k}{4} = 0 \Leftrightarrow k = 4$

$\rightarrow$ Số hạng cần tìm là $C_7^4 = 35$. **Chọn B.**

Câu 50: Thay $x = 1$ vào khai triển, ta được $2^n = 1024 \Leftrightarrow 2^n = 2^{10} \Leftrightarrow n = 10$

Ta xét $\left(\frac{1}{x} + x^4\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{10-k} \cdot (x^4)^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot x^{5k-10}$

Hệ số của x^{10} ứng với $5k - 10 = 10 \Leftrightarrow k = 4 \rightarrow$ Hệ số cần tìm là $C_{10}^4 = 210$. **Chọn D.**

Câu 51: $5C_n^1 - C_n^2 = 5 \Leftrightarrow 5n - \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = 5 \Leftrightarrow 10n - n \cdot (n-1) = 10 \Leftrightarrow n = 10$

Ta xét $\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot (2x)^{10-k} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot 2^{10-k} \cdot x^{10-3k}$

Hệ số của x^4 ứng với $10 - 3k = 4 \Leftrightarrow k = 2 \rightarrow$ Hệ số cần tìm là $C_{10}^2 \cdot 2^8 = 11520$. **Chọn A.**

Câu 52: $A_n^3 + 2A_n^2 = 100 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-3)!} + 2 \cdot \frac{n!}{(n-2)!} = 100$

$$\Leftrightarrow n.(n-1).(n-2) + 2n.(n-1) = 100 \rightarrow n^3 - n^2 - 100 = 0 \Leftrightarrow n = 5$$

$$\text{Ta xét } (1+3x)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot 1^{10-k} \cdot (3x)^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot 3^k x^k$$

Hệ số của x^5 ứng với $k = 5 \rightarrow$ Hệ số cần tìm là $C_{10}^5 \cdot 3^5 = 61236$. **Chọn A.**

$$\text{Câu 53: } C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 78 \Leftrightarrow C_n^1 + C_n^2 = 78 \rightarrow n = 12$$

$$\text{Ta xét } \left(x^3 - \frac{2}{x}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k \cdot (x^3)^{12-k} \cdot \left(-\frac{2}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k \cdot (-2)^k x^{36-4k}$$

Số hạng không chứa x ứng với $36 - 4k = 0 \Leftrightarrow k = 9$

$\rightarrow$ Số hạng cần tìm là $C_{12}^9 \cdot (-2)^9 = -112640$. **Chọn C.**

$$\text{Câu 54: Ta có } 2^{n-4} \cdot \left[\frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} - \frac{(n-2)!}{(n-3)!} - n \right] = \frac{(n-1)!}{(n-2)!} \Leftrightarrow 2^{n-4} \cdot \left[\frac{n(n-1)}{2} - n + 2 - n \right] = n - 1$$

$$2^{n-4} \cdot [n(n-1) - 4n + 4] = 2(n-1) \Leftrightarrow 2^{n-4} \cdot (n-4) = 2 \Leftrightarrow n-4 = 1 \Leftrightarrow n = 5$$

$$\text{Ta xét } \left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{x}\right)^{15} = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k \cdot (\sqrt[3]{x^2})^{15-k} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k \cdot 2^k x^{\frac{30-2k}{3}-k}$$

$$\text{Hệ số của } x^{\frac{5}{3}} \text{ ứng với } \frac{30-2k}{3} - k = \frac{5}{3} \Leftrightarrow 30 - 5k = 5 \Leftrightarrow k = 5$$

Vậy hệ số cần tìm là $C_{15}^5 \cdot 2^5 = 96096$. **Chọn A.**

$$\text{Câu 55: } C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \dots + 2^n C_n^n = (1+2)^n = 3^n \longrightarrow n = 15$$

$$\text{Ta xét } \left(x^2 - \frac{1}{x^3}\right)^{15} = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k \cdot (x^2)^{15-k} \cdot \left(-\frac{1}{x^3}\right)^k = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k \cdot (-1)^k \cdot x^{30-5k}$$

Hệ số của x^{10} ứng với $30 - 5k = 10 \Leftrightarrow k = 4 \rightarrow$ Hệ số cần tìm là $C_{15}^4 \cdot (-1)^4 = 1365$. **Chọn C.**

$$\text{Câu 56: Thay } x = 2 \text{ vào khai triển, ta được } 2^n = 1024 \rightarrow n = 10$$

$$\text{Ta xét } \left(3 - \frac{x}{2}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot 3^{10-k} \cdot \left(-\frac{x}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot 3^{10-k} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^k x^k$$

$$\text{Hệ số của } x^6 \text{ ứng với } k = 6 \rightarrow \text{Hệ số cần tìm là } C_{10}^6 \cdot 3^4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{8505}{32}. \text{ **Chọn D.**}$$

$$\text{Câu 57: Ta có } C_n^2 - C_n^1 = 44 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} - n = 44 \Leftrightarrow n(n-1) - 2n = 88 \Leftrightarrow n = 11$$

$$\text{Ta xét } \left(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^4}\right)^{11} = \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k \cdot (x\sqrt{x})^{11-k} \cdot \left(\frac{1}{x^4}\right)^k = \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k \cdot x^{\frac{33-3k}{2}-4k}$$

Số hạng không chứa x ứng với $\frac{33-3k}{2} - 4k = 0 \Leftrightarrow k = 3 \rightarrow$ Hệ số cần tìm là 165. **Chọn A.**

Câu 58: Ta có $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 1024 \Leftrightarrow 2^n = 1024 \Leftrightarrow n = 10$

$$\text{Ta xét } (2x+1)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot (2x)^{10-k} \cdot 1^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot 2^{10-k} \cdot x^{10-k}$$

Hệ số của x^2 ứng với $10-k=2 \Leftrightarrow k=8 \rightarrow$ Hệ số cần tìm là $C_{10}^8 \cdot 2^2 = 180$. **Chọn D.**

$$\text{Câu 59: } C_n^2 + n \cdot A_n^2 = 476 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} + n \cdot \frac{n!}{(n-2)!} = 476 \Leftrightarrow \frac{n \cdot (n-1)}{2} + n^2 \cdot (n-1) = 476$$

$$\Leftrightarrow n^2 - n + 2n^3 - 2n^2 = 952 \Leftrightarrow 2n^3 - n^2 - n - 952 = 0 \rightarrow n = 8$$

$$\text{Ta xét } \left(\frac{2}{x} - x^3\right)^8 = \sum_{k=0}^8 C_8^k \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^{8-k} \cdot (-x^3)^k = \sum_{k=0}^8 C_8^k \cdot 2^{8-k} \cdot (-1)^k \cdot x^{4k-8}$$

Hệ số của x^4 ứng với $4k-8=4 \Leftrightarrow k=3 \rightarrow$ Hệ số cần tìm là $C_8^3 \cdot 2^5 \cdot (-1)^3 = -1792$.

Chọn B.

$$\text{Câu 60: Ta có } (3-x)^8 + (2x+1)^{10} = \sum_{k=0}^8 C_8^k \cdot 3^{8-k} \cdot (-1)^k \cdot x^k + \sum_{h=0}^{10} C_{10}^h \cdot 2^{10-h} \cdot x^h$$

Hệ số x^5 ứng với $k=h=5 \rightarrow$ Hệ số cần tìm là $C_8^5 \cdot 3^3 + C_{10}^5 \cdot 2^5 = 9576$. **Chọn A.**

$$\text{Câu 61: Ta có } (1+ax)(1-3x)^6 = (1-3x)^6 + ax(1-3x)^6$$

$$\bullet \text{ Xét khai triển } (1-3x)^6 = \sum_{k=0}^6 C_6^k \cdot (-3)^k \cdot x^k \rightarrow \text{Hệ số của } x^3 \text{ là } C_6^3 \cdot (-3)^3 = -540$$

$$\bullet \text{ Xét khai triển } x(1-3x)^6 = \sum_{k=0}^6 C_6^k \cdot (-3)^k \cdot x^{k+1} \rightarrow \text{Hệ số của } x^3 \text{ là } C_6^2 \cdot (-3)^2 = 135$$

Suy ra hệ số cần tìm là $135a - 540 = 405 \rightarrow a = 7$. **Chọn D.**

$$\text{Câu 62: Ta có } (1+x)^{3n} = C_{3n}^0 + C_{3n}^1 x + C_{3n}^2 x^2 + \dots + C_{3n}^{3n} x^{3n}$$

$$\text{Cho } x=1 \text{ ta có: } 2^{3n} = C_{3n}^0 + C_{3n}^1 + C_{3n}^2 + \dots + C_{3n}^{3n} = 64 \Leftrightarrow 3n = 6 \Leftrightarrow n = 2$$

$$\text{Xét khai triển } \left(2nx + \frac{1}{2nx^2}\right)^{3n} = \left(4x + \frac{1}{4x^2}\right)^6 \text{ có số hạng tổng quát là}$$

$$C_6^k \cdot (4x)^{6-k} \cdot \left(\frac{1}{4x^2}\right)^k = C_6^k \cdot 4^{6-k} \cdot x^{6-k} \cdot \frac{1}{4^k} \cdot x^{-2k} = C_6^k \cdot 4^{6-k} \cdot \frac{1}{4^k} \cdot x^{6-3k}$$

Số hạng không chứa x tương ứng với $6-3k=0 \Leftrightarrow k=2$.

$$\text{Số hạng không chứa } x \text{ trong khai triển là } C_6^2 \cdot 4^4 \cdot \frac{1}{4^2} = 240. \text{ **Chọn D.**}$$

$$\text{Câu 63: Xét khai triển } (1+x)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 x + C_{2n+1}^2 x^2 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} x^{2n+1}$$

$$\text{Thay } x=1 \text{ ta được } 2^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} \quad (*)$$

$$\text{Mặt khác } C_{2n+1}^0 = C_{2n+1}^{2n+1}, C_{2n+1}^1 = C_{2n+1}^{2n}, C_{2n+1}^2 = C_{2n+1}^{2n-1} \dots$$

Do đó (*) $\Leftrightarrow 2^{2n+1} = 2 \cdot (C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n) = 2(1 + 2^{20} - 1) = 2^{21} \Leftrightarrow n = 10$.

Xét khai triển $(1+x)^{10}$ có hệ số của số hạng chứa x^3 là $C_{10}^3 = 120$. **Chọn D.**

Câu 64: Số hạng chứa x^5 trong khai triển $x(1-2x)^5$ là $x \cdot C_5^4 \cdot (-2x)^4 = 80x^5$

Số hạng chứa x^5 trong khai triển $x^2(1+3x)^{10}$ là $x^2 \cdot C_{10}^3 (3x)^3 = 3240x^5$

Suy ra số hạng x^5 trong khai triển P là $80x^5 + 3240x^5 = 3320x^5$. **Chọn C.**

Câu 65: Số hạng chứa x^5 trong khai triển $x(2x-1)^6$ là $x \cdot C_6^4 \cdot (2x)^4 \cdot (-1)^2 = 240x^5$.

Số hạng chứa x^5 trong khai triển $(x-3)^8$ là $C_8^5 x^5 \cdot (-3)^3 = -1512x^5$

Hệ số của x^5 trong khai triển đa thức đã cho là $-1512 + 240 = -1272$. **Chọn D.**

Câu 66: Ta có $C_n^{n-2} + 6n + 5 = A_{n+1}^2 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} + 6n + 5 = \frac{(n+1)!}{(n-1)!}$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} + 6n + 5 = (n+1) \cdot n \Leftrightarrow n^2 - n + 12n + 10 = 2n^2 + 2n$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 9n - 10 = 0 \Leftrightarrow n = 10$$

Xét khai triển $P(x) = (1-x-3x^3)^{10} = (x+3x^3-1)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (x+3x^3)^k \cdot (-1)^{10-k}$

$$= \sum_{k=0}^{10} \sum_{i=0}^k C_{10}^k \cdot C_k^i x^i \cdot (3x^3)^{k-i} \cdot (-1)^{10-k} = \sum_{k=0}^{10} \sum_{i=0}^k C_{10}^k \cdot C_k^i x^{3k-2i} \cdot 3^{k-i} \cdot (-1)^{10-k}$$

Cho $3k-2i=4$ ta được $(k;i) = \{(2;1); (4;4)\}$

Suy ra hệ số của x^4 trong khai triển là $C_{10}^2 \cdot C_2^1 \cdot 3^1 \cdot (-1)^8 + C_{10}^4 \cdot C_4^4 \cdot 3^0 \cdot (-1)^6 = 480$. **Chọn C.**

Câu 67: Ta có: $(1+x+x^2+x^3)^5 = [(1+x)(1+x^2)]^5 = (1+x)^5 \cdot (1+x^2)^5 = \sum_{k=0}^5 C_5^k x^k \cdot \sum_{i=0}^5 C_5^i (x^2)^i$

$$= \sum_{k=0}^5 \sum_{i=0}^5 C_5^k \cdot C_5^i x^{k+2i}$$

Cho $2i+k=10$ với $k, i \in \mathbb{Z}, 0 \leq k, i \leq 5$ ta được $(k;i) = \{(0;5); (2;4); (4;3)\}$

Suy ra hệ số của x^{10} trong khai triển là: $C_5^0 \cdot C_5^5 + C_5^2 \cdot C_5^4 + C_5^4 \cdot C_5^3 = 101$. **Chọn C.**

Câu 68: Số hạng chứa x^5 trong khai triển P là số hạng chứa x^5 trong khai triển

$$Q(x) = 5(1+x)^5 + 6(1+x)^6 + 7(1+x)^7 + 8(1+x)^8 \text{ và bằng } 5C_5^5 x^5 + 6C_6^5 x^5 + 7C_7^5 x^5 + 8C_8^5 x^5 = 630x^5.$$

Chọn A.

Câu 69: $f(x) = (2x+1) \cdot \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k x^{20-k} \cdot (2x^2)^k = (2x+1) \cdot \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k x^{20-k} \cdot 2^k x^{2k}$

$$= (2x+1) \cdot \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k x^{20+k} \cdot 2^k$$

Ta chọn $k = 9$ và $k = 10$.

Hệ số của số hạng chứa x^{30} trong khai triển là $2.C_{20}^9.2^9 + 1.C_{20}^{10}.2^{10} = 361181184$. **Chọn D.**

Câu 70: $(1+x+x^2+x^3)^{10} = [(1+x)(1+x^2)]^{10} = (1+x)^{10} (1+x^2)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k x^k \cdot \sum_{i=0}^{10} C_{10}^i x^{2i}$.

$$= \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \sum_{i=0}^{10} C_{10}^i x^{2i+k}.$$

Chọn i, k sao cho $k+2i=5$ ($i, k \in \mathbb{N}$) ta được $(k; i) = \{(1; 2); (3; 1); (5; 0)\}$

Suy ra hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển là $C_{10}^1.C_{10}^2 + C_{10}^3.C_{10}^1 + C_{10}^5.C_{10}^0 = 1902$. **Chọn A.**

Câu 71: $[1+x^2(1-x)]^8 = \sum_{k=0}^8 C_8^k [x^2(1-x)]^k = \sum_{k=0}^8 C_8^k x^{2k} \cdot (1-x)^k = \sum_{k=0}^8 C_8^k x^{2k} \cdot \sum_{i=0}^k C_k^i (-x)^i$

$$= \sum_{k=0}^8 C_8^k \cdot \sum_{i=0}^k C_k^i (-1)^i x^{2k+i}$$

Chọn i, k sao cho $2k+i=8$ và $i \leq k$ ($i, k \in \mathbb{N}$) ta được $(k; i) = \{(4; 0); (3; 2)\}$

Suy ra hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển thành đa thức đã cho là:

$$C_8^4.C_4^0.(-1)^0 + C_8^3.C_3^2.(-1)^2 = 238. \text{ **Chọn A.**}$$

Câu 72: Ta có $\left[\frac{1}{x} - (x+x^2)\right]^8 = \sum_{k=0}^8 C_8^k \left(\frac{1}{x}\right)^{8-k} \cdot [-(x+x^2)]^k = \sum_{k=0}^8 C_8^k (-1)^k x^{k-8} \cdot (x+x^2)^k$

$$= \sum_{k=0}^8 C_8^k (-1)^k x^{k-8} \cdot \sum_{i=0}^k C_k^i x^i \cdot (x^2)^{k-i} = \sum_{k=0}^8 C_8^k (-1)^k \cdot \sum_{i=0}^k C_k^i x^{3k-i-8}$$

$$\text{Cho } 3k-i-8=0 \Leftrightarrow 3k-i=8$$

Chọn i, k sao cho $3k-i=8$ và $i \leq k \leq 8$ ($i, k \in \mathbb{N}$) ta được $(k; i) = \{(3; 1); (4; 4)\}$

Số hạng không chứa x trong khai triển là $C_8^3.(-1)^3.C_3^1 + C_8^4.(-1)^4.C_4^4 = -98$. **Chọn D.**

Câu 73: Ta có $A_n^2 - C_{n+1}^{n-1} = 5 = \frac{n!}{(n-2)!} - \frac{(n+1)!}{(n-1)! \cdot 2!} = 5 \Leftrightarrow n(n-1) - \frac{1}{2}(n+1).n = 5$

$$\Leftrightarrow n^2 - 3n - 10 = 0 \Leftrightarrow n = 5$$

Suy ra $P = x(1-2x)^5 + x^2(1+3x)^{10}$, hệ số số hạng chứa x^5 trong khai triển là $C_5^4.(-2)^4 + C_{10}^3.3^3 = 3320$.

Chọn B.

Câu 74: Ta có $\left(x^3 + \frac{1}{x} + 2\right)^6 = \sum_{k=0}^6 C_6^k \left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^k \cdot 2^{6-k} = \sum_{k=0}^6 C_6^k \cdot \sum_{i=0}^k C_k^i (x^3)^i (x^{-1})^{k-i} \cdot 2^{6-k}$

$$= \sum_{k=0}^6 C_6^k C_k^i \cdot 2^{6-k} \cdot x^{4i-k}$$

Chọn i, k sao cho $4i-k=5$ và $0 \leq i \leq k \leq 6$ ($i, k \in \mathbb{N}$) ta được $(k; i) = \{(3; 2)\}$

Suy ra hệ số của x^5 trong khai triển là $C_6^3.C_3^2.2^3 = 480$. **Chọn D.**

Câu 75: Xét $(1+2x+3x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2n}x^{2n}$.

Cho $x=1$ ta được $6^n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2n}$

Cho $x=-1$ ta được $2^n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + a_{2n}$

Cộng vế theo vế ta được $6^n + 2^n = 2(a_0 + a_2 + \dots + a_{2n}) = 2.30233600$

Suy ra $6^n + 2^n = 60467200 \Rightarrow n=10$

Xét khai triển $(1+2x+3x^2)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (2x+3x^2)^k = \sum_0^{10} C_{10}^k C_k^i (2x)^{k-i} \cdot (3x^2)^i = \sum_0^{10} C_{10}^k C_k^i 2^{k-i} \cdot 3^i x^{k+i}$

Chọn i, k sao cho $i+k=5$ và $0 \leq i \leq k \leq 10 (i, k \in \mathbb{N})$ ta được $(k; i) = \{(5; 0); (4; 1); (3; 2)\}$

Suy ra hệ số của x^5 trong khai triển là $C_{10}^5 \cdot C_5^0 \cdot 2^5 \cdot 3^0 + C_{10}^4 \cdot C_4^1 \cdot 2^3 \cdot 3^1 + C_{10}^3 \cdot C_3^2 \cdot 2^1 \cdot 3^2 = 34704$. **Chọn D.**

Câu 76: Ta có $\left(\frac{1}{x} - x + 2x^2\right)^9 = \sum_{k=0}^9 C_9^k \left(\frac{1}{x}\right)^{9-k} \cdot (2x^2 - x)^k = \sum_{k=0}^9 C_9^k x^{k-9} \cdot \sum_{i=0}^k C_k^i (2x^2)^i \cdot (-x)^{k-i}$
 $= \sum_{k=0}^9 C_9^k \cdot (-1)^{k-i} \cdot 2^i \cdot \sum_{i=0}^k C_k^i x^{2k+i-9}$

Chọn i, k sao cho $2k+i-9=3 \Leftrightarrow 2k+i=12$ và $0 \leq i \leq k \leq 9 (i, k \in \mathbb{N})$ ta được

$(k; i) = \{(6; 0); (5; 2); (4; 4)\}$

Suy ra hệ số của x^3 trong khai triển là $C_9^6 C_6^0 (-1)^6 \cdot 2^0 + C_9^5 C_5^2 (-1)^3 \cdot 2^2 + C_9^4 C_4^4 (-1)^0 \cdot 2^4 = -2940$. **Chọn C.**

Câu 77: Xét khai triển

$(1+2x+3x^2)^{10} = \sum_0^{10} C_{10}^k (2x+3x^2)^k = \sum_0^{10} C_{10}^k C_k^i (2x)^{k-i} \cdot (3x^2)^i = \sum_0^{10} C_{10}^k C_k^i 2^{k-i} \cdot 3^i x^{k+i}$

Chọn i, k sao cho $i+k=4$ và $0 \leq i \leq k \leq 10 (i, k \in \mathbb{N})$ ta được $(k; i) = \{(4; 0); (3; 1); (2; 2)\}$

Suy ra hệ số của x^5 trong khai triển là $C_{10}^4 \cdot C_4^0 \cdot 2^4 \cdot 3^0 + C_{10}^3 \cdot C_3^1 \cdot 2^2 \cdot 3^1 + C_{10}^2 \cdot C_2^2 \cdot 2^0 \cdot 3^2 = 8085$. **Chọn A.**

Câu 78: Thay $x = \frac{1}{2}$ vào khai triển, ta được $2^n = 4096 \rightarrow n=12$

Xét khai triển $(1+2x)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k \cdot 1^{12-k} \cdot (2x)^k \Rightarrow a_k = C_{12}^k \cdot 2^k$

Hệ số lớn nhất khi $\begin{cases} a_k > a_{k+1} \\ a_k > a_{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_{12}^k \cdot 2^k > C_{12}^{k+1} \cdot 2^{k+1} \\ C_{12}^k \cdot 2^k > C_{12}^{k-1} \cdot 2^{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{12!}{(12-k)! \cdot k!} > \frac{12!}{(11-k)! \cdot (k+1)!} \cdot 2 \\ \frac{12!}{(12-k)! \cdot k!} \cdot 2 > \frac{12!}{(13-k)! \cdot (k-1)!} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{12-k} > \frac{2}{k+1} \\ \frac{2}{k} > \frac{1}{13-k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k+1 > 24-2k \\ 26-2k > k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > \frac{23}{3} \\ k < \frac{26}{3} \end{cases} \rightarrow k=8 \Rightarrow a_{\max} = a_8 = 126720$. **Chọn C.**

Câu 79: Xét khai triển $(1+2x)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k \cdot 1^{12-k} \cdot (2x)^k \Rightarrow a_k = C_{12}^k \cdot 2^k$

$$\begin{aligned} \text{Hệ số lớn nhất khi } \begin{cases} a_k > a_{k+1} \\ a_k > a_{k-1} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} C_{12}^k \cdot 2^k > C_{12}^{k+1} \cdot 2^{k+1} \\ C_{12}^k \cdot 2^k > C_{12}^{k-1} \cdot 2^{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{12!}{(12-k)! \cdot k!} > \frac{12!}{(11-k)! \cdot (k+1)!} \cdot 2 \\ \frac{12!}{(12-k)! \cdot k!} \cdot 2 > \frac{12!}{(13-k)! \cdot (k-1)!} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{12-k} > \frac{2}{k+1} \\ \frac{2}{k} > \frac{1}{13-k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k+1 > 24-2k \\ 26-2k > k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > \frac{23}{3} \\ k < \frac{26}{3} \end{cases} \rightarrow k=8 \Rightarrow a_{\max} = a_8 = 126720. \text{ Chọn A.} \end{aligned}$$

Câu 80: Xét khai triển $\frac{1}{3^{10}} \cdot (1+2x)^{10} = \frac{1}{3^{10}} \cdot \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot 1^{10-k} \cdot (2x)^k \Rightarrow a_k = \frac{1}{3^{10}} \cdot C_{10}^k \cdot 2^k$

$$\begin{aligned} \text{Hệ số lớn nhất khi } \begin{cases} a_k > a_{k+1} \\ a_k > a_{k-1} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} C_{10}^k \cdot 2^k > C_{10}^{k+1} \cdot 2^{k+1} \\ C_{10}^k \cdot 2^k > C_{10}^{k-1} \cdot 2^{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{10!}{(10-k)! \cdot k!} > \frac{10!}{(9-k)! \cdot (k+1)!} \cdot 2 \\ \frac{10!}{(10-k)! \cdot k!} \cdot 2 > \frac{10!}{(11-k)! \cdot (k-1)!} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{10-k} > \frac{2}{k+1} \\ \frac{2}{k} > \frac{1}{11-k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k+1 > 20-2k \\ 22-2k > k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > \frac{19}{3} \\ k < \frac{22}{3} \end{cases} \rightarrow k=7 \Rightarrow a_{\max} = \frac{C_{10}^7 \cdot 2^7}{3^{10}}. \end{aligned}$$

Chọn B.

Câu 81: Xét khai triển $(\sqrt{3}+x)^{2019} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2019}x^{2019}$.

Cho $x=i$ ta được $(\sqrt{3}+i)^{2019} = a_0 + a_1i + a_2i^2 + a_3i^3 + a_4i^4 + \dots + a_{2019}i^{2019} \quad (*)$

Phần thực của vế phải (*) là $a_0 - a_2 + a_4 - a_6 \dots + a_{2016} - a_{2018}$

Mặt khác $\sqrt{3}+i = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow (\sqrt{3}+i)^{2019} = 2^{2019} \cdot \left(\cos \frac{2019\pi}{6} + i \sin \frac{2019\pi}{6}\right)$

Suy ra phần thực vế trái của (*) là 0 do đó $S=0$. **Chọn D.**