CHƯƠNG 3: NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

BÀI 1: NGUYÊN HÀM VÀ PHƯƠNG PHÁP TÌM NGUYÊN HÀM

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. NGUYÊN HÀM VÀ TÍNH CHẤT

1. Nguyên hàm

Định nghĩa: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K (K là khoảng hoặc đoạn hoặc nửa đoạn của $\mathbb{R}$). Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x)=f(x)$ với mọi $x\in K$.

Định lý 1: Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì với mỗi hằng số C, hàm số $G(x)=F(x)+C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K.

Định lý 2: Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ đều có dạng $F(x)+C,$ với C là một hằng số.

Hai định lý trên cho thấy:

Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì $F(x)+C, C\in\mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên $K.$ Kí hiệu

$$\boxed{\int f(x)dx=F(x)+C.}$$

Chú ý: Biểu thức $f(x)dx$ chính là vi phân của nguyên hàm $F(x)$ của $f(x),$ vì $dF(x)=F'(x)dx=f(x)dx.$

2. Tính chất của nguyên hàm

Tính chất 1

$$\boxed{\int f'(x)dx=f(x)+C}$$

Tính chất 2

$$\boxed{\int kf(x)dx=k\int f(x)dx}$$, k là hằng số khác 0.

Tính chất 3

$$\boxed{\int\left[f(x)\pm g(x)\right]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx.}$$

3. Sự tồn tại của nguyên hàm

Định lý 3: Mọi hàm số *f(x)* liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K.

4. Bảng nguyên hàm

Nguyên hàm của hàm số sơ cấp	Nguyên hàm của hàm số hợp $\left(\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{x})\right)$	Nguyên hàm của hàm số hợp $\left(\mathbf{u}=\mathbf{ax}+\mathbf{b};\mathbf{a}\neq\mathbf{0}\right)$
$\int dx=x+C$	$\int du=u+C$	$\int d(ax+b)=ax+b+C$
$\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C(\alpha\neq-1)$	$u=\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C(\alpha\neq-1)$	$\int(ax+b)^{\alpha}dx=\frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C(\alpha\neq-$

$\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{1}{u}du = \ln\lvert u\rvert + C$	$\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + C$
$\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + C$	$\int \frac{1}{u^2}du = -\frac{1}{u} + C$	$\int \frac{1}{(ax+b)^2}dx = -\frac{1}{a}.\frac{1}{ax+b} + C$
$\int \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$	$\int \sqrt{u}du = \frac{2}{3}u\sqrt{u} + C$	$\int \sqrt{ax+b}dx = \frac{1}{a}.\frac{2}{3}(ax+b)\sqrt{ax+b} + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{u}}du = 2\sqrt{u} + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{ax+b}}dx = \frac{1}{a}.2\sqrt{ax+b} + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^u du = e^u + C$	$\int e^{ax+b}dx = \frac{2}{a}e^{ax+b} + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\,(a>0, a\neq 1)$	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C\,(a>0, a\neq 1)$	$\int a^{mx+n}dx = \frac{1}{m}.\frac{a^{mx+n}}{\ln a} + C\,(a>0, a\neq 1)$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin u du = -\cos u + C$	$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos u du = \sin u + C$	$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$
$\int \tan x dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$	$\int \tan u du = -\ln\lvert\cos u\rvert + C$	$\int \tan(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\ln\lvert\cos(ax+b)\rvert +$
$\int \cot x dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$	$\int \cot u du = \ln\lvert\sin u\rvert + C$	$\int \cot(ax+b)dx = \frac{1}{a}\ln\lvert\sin(ax+b)\rvert + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 u}du = -\cot u + C$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 u}du = \tan u + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)}dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left\lvert\tan\frac{x}{2}\right\rvert + C$	$\int \frac{1}{\sin u}du = \ln\left\lvert\tan\frac{u}{2}\right\rvert + C$	$\int \frac{dx}{\sin(ax+b)} = \frac{1}{a}\ln\left\lvert\tan\frac{ax+b}{2}\right\rvert + C$
$\int \frac{1}{\cos x}dx = \ln\left\lvert\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert +$	$\int \frac{1}{\cos u}du = \ln\left\lvert\tan\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert +$	$\int \frac{1}{\cos(ax+b)}dx$ $= \frac{1}{a}\ln\left\lvert\tan\left(\frac{ax+b}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$

II. PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGUYÊN HÀM

1. Phương pháp đổi biến số

Định lý 1: Nếu $\int f(u)du = F(u) + C$ và $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục thì:

$$\int f[u(x)].u'(x)dx = F[u(x)] + C$$

Hệ quả: Với $u = ax + b\,(a \neq 0)$ ta có

$$\boxed{\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.}$$

2. Phương pháp tính nguyên hàm từng phần:

Định lý 2: Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm liên tục trên K thì:

$$\boxed{\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.}$$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Tìm nguyên hàm bằng các phép biến đổi sơ cấp

1. Phương pháp giải

- Biến đổi các hàm số dưới dấu nguyên hàm về dạng tổng, hiệu của các biểu thức chứa *x*, trong đó mỗi biểu thức chứa *x* là những dạng cơ bản có trong bảng nguyên hàm.
- Áp dụng các công thức nguyên hàm trong bảng nguyên hàm cơ bản để tìm nguyên hàm.

2. Bài tập

Bài tập 1. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{2^x - 1}{e^x}$ là

A. $\dfrac{2^x}{e^x \ln 2} + e^{-x} + C$

B. $\dfrac{2^x}{e^x(\ln 2 - 1)} - e^{-x} + C$

C. $\dfrac{2^x}{e^x(\ln 2 - 1)} + e^{-x} + C$

D. $\dfrac{2^x}{e^x(\ln 2 - 1)} + e^{x} + C$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $\displaystyle\int \frac{2^x - 1}{e^x}dx = \int \left(\frac{2}{e}\right)^x dx - \int e^{-x}dx = \frac{2^x}{e^x(\ln 2 - 1)} + e^{-x} + C$.

Bài tập 2. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x(x+2)^{2019}$ là

A. $-\dfrac{(x+2)^{2021}}{2021} - \dfrac{(x+2)^{2020}}{1010} + C$

B. $\dfrac{(x+2)^{2020}}{2021} - \dfrac{(x+2)^{2018}}{1009} + C$

C. $\dfrac{(x+2)^{2021}}{2021} + \dfrac{(x+2)^{2020}}{1010} + C$

D. $\dfrac{(x+2)^{2021}}{2021} - \dfrac{(x+2)^{2020}}{1010} + C$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $\int x(x+2)^{2019}dx=\int\left[(x+2)-2\right](x+2)^{2019}dx$

$$=\int(x+2)^{2020}dx-2\int(x+2)^{2019}dx=\frac{(x+2)^{2021}}{2021}-\frac{(x+2)^{2020}}{1010}+C$$

Bài tập 3. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{e^{2x}+1}$ là

A. $x+\ln\sqrt{e^{2x}+1}+C$ **B.** $x-\dfrac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+1\right)+C$

C. $\ln\left(e^{2x}+1\right)+C$ **D.** $x-\ln\left(e^{2x}+1\right)+C$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $\dfrac{1}{e^{2x}+1}=\dfrac{\left(e^{2x}+1\right)-e^{2x}}{e^{2x}+1}=1-\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$.

Do đó $\int\dfrac{1}{e^{2x}+1}dx=\int\left(1-\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\right)dx=\int dx-\dfrac{1}{2}\int\dfrac{d\left(e^{2x}+1\right)}{e^{2x}+1}=x-\dfrac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+1\right)+C$

Bài tập 4. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}$ là:

A. $\dfrac{1}{6}\left[\left(\sqrt{x+2}\right)^3-\left(\sqrt{x-2}\right)^3\right]+C$ **B.** $\dfrac{1}{6}\left[\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}\right]+C$

C. $\dfrac{1}{6}\sqrt{x+2}+\dfrac{1}{6}(x-2)\sqrt{x-2}+C$ **D.** $\dfrac{1}{6}(x+2)\sqrt{x+2}-\dfrac{1}{6}\sqrt{x-2}+C$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $\int\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}dx=\int\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}{4}dx$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}(x+2)\sqrt{x+2}-\frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x-2}\right]+C=\frac{1}{6}(x+2)\sqrt{x+2}-\frac{1}{6}(x-2)\sqrt{x-2}+C$$

Chú ý: Sử dụng kĩ thuật nhân liên hợp: $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}=\dfrac{a-b}{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}$.

Lưu ý: $\int\sqrt{ax+b}dx=\dfrac{2}{3a}(ax+b)\sqrt{ax+b}+C$.

Bài tập 5. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{5x-13}{x^2-5x+6}$ là:

A. $2\ln|x-3|-3\ln|x+2|+C$ **B.** $3\ln|x-3|+2\ln|x-2|+C$

C. $2\ln|x+3|+3\ln|x+2|+C$ **D.** $2\ln|x-3|+3\ln|x-2|+C$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $\dfrac{5x-13}{x^2-5x+6}=\dfrac{5x-13}{(x-2)(x-3)}$

Ta sẽ phân tích: $5x-13=A(x-2)+B(x-3)\quad(1)$

Thế $x=2$ và $x=3$ lần lượt vào (1) ta có $B=3$ và $A=2$.

Khi đó $\displaystyle\int\frac{5x-13}{x^2-5x+6}dx=\int\frac{2(x-2)+3(x-3)}{(x-2)(x-3)}dx=\int\frac{2}{x-3}dx+\int\frac{3}{x-2}dx$

$$=2\ln|x-3|+3\ln|x-2|+C$$

Bài tập 6. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1-x^4}{x^5+x}$ là:

A. $\ln|x|+\dfrac{1}{2}\ln\left(x^4+1\right)+C$

B. $\ln|x|-\ln\left(x^4+1\right)+C$

C. $\ln|x|-\dfrac{1}{2}\ln\left(x^4+1\right)+C$

D. $\ln|x|-\dfrac{1}{2}\ln\left(x^4+1\right)+C$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $\displaystyle\int\frac{1-x^4}{x^5+x}dx=\int\frac{\left(1+x^4\right)-2x^4}{x\left(x^4+1\right)}dx=\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{2x^3}{x^4+1}dx=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left(x^4+1\right)+C$

Bài tập 7. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{3x^2+3x+3}{x^3-3x+2}$ là:

A. $\ln|x+2|+2\ln|x-1|-\dfrac{3}{x-1}+C$

B. $\ln|x+2|-2\ln|x-1|+\dfrac{3}{x-1}+C$

C. $2\ln|x+2|+\ln|x-1|-\dfrac{3}{x-1}+C$

D. $2\ln|x+2|+\ln|x-1|+\dfrac{3}{x-1}+C$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $\displaystyle\int\frac{3x^2+3x+3}{x^3-3x+2}dx=\int\frac{3x^2+3x+3}{(x-1)^2(x+2)}dx$.

Ta phân tích $3x^2+3x+3=A(x-1)^2+B(x-1)(x+2)+C(x+2)$.

Ta có thể dùng các giá trị riêng, tính ngay $A=1,C=3$ và $B=2$.

(thay $x=-2\Rightarrow A=1; x=1\Rightarrow C=3$ và $x=0\Rightarrow B=2$).

Khi đó $\displaystyle\int\frac{3x^2+3x+3}{(x-1)^2(x+2)}dx=\int\frac{1}{x+2}dx+2\int\frac{1}{x-1}dx+3\int\frac{1}{(x-1)^2}dx=\ln|x+2|+2\ln|x-1|-\frac{3}{x-1}+C$.

Lưu ý: Ta có kiến thức tổng quát dùng cho các nguyên hàm hữu tỉ $I=\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, với $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức, cụ thể như sau:

- Nếu $\deg(P(x)) \ge \deg(Q(x))$ thì ta thực hiện phép chia $P(x)$ cho $Q(x)$ (ở đây, kí hiệu $\deg(P(x))$ là bậc của đa thức $P(x)$).
- Khi $\deg(P(x)) < \deg(Q(x))$ thì ta quan sát mẫu số $Q(x)$ ta tiến hành phân tích thành các nhân tử, sau đó, tách $P(x)$ theo các tổ hợp của các nhân tử đó. Đến đây, ta sẽ sử dụng đồng nhất thức (hoặc giá trị riêng) để đưa về dạng tổng của các phân thức.

Một số trường hợp đồng nhất thức thường gặp

Trường hợp 1: $\frac{1}{(ax+b)(cx+d)}=\frac{1}{ad-bc}\left(\frac{a}{ax+b}-\frac{c}{cx+d}\right)$.

Trường hợp 2: $\frac{mx+n}{(ax+b)(cx+d)}=\frac{A}{ax+b}+\frac{B}{cx+d}=\frac{(Ax+Ba)x+Ad+Bb}{(ax+b)(cx+d)}$.

Ta đồng nhất thức $mx+n=(Ax+Ba)x+Ad+Bb \quad (1)$.

Cách 1. Phương pháp đồng nhất hệ số.

Đồng nhất đẳng thức, ta được $\begin{cases} Ac+Ba=m \\ Ad+Bb=n \end{cases}$. Suy ra *A, B*.

Cách 2. Phương pháp giá trị riêng.

Lần lượt thay $x=-\frac{b}{a}; x=-\frac{d}{c}$ vào hai vế của (1), tìm được *A, B*.

Trường hợp 3: $\frac{mx+n}{(ax+b)^2}=\frac{A}{ax+b}+\frac{B}{(ax+b)^2}$.

Trường hợp 4: $\frac{mx+n}{(ax+b)^2(cx+d)}=\frac{A}{(ax+b)^2}+\frac{B}{cx+d}+\frac{C}{ax+b}$

$$\Rightarrow mx+n=A(cx+d)+B(ax+b)^2+C(ax+b)(cx+d) \quad (*)$$

Lần lượt thay $x=-\frac{b}{a}; x=-\frac{d}{c}; x=0$ vào hai vế của (*) để tìm *A, B, C*.

Trường hợp 5: $\frac{1}{(x-m)(ax^2+bx+c)}=\frac{A}{x-m}+\frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}$ với $\Delta=b^2-4ac<0$.

Trường hợp 6: $\frac{1}{(x-a)^2+(x-b)^2}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{(x-a)^2}+\frac{C}{x-b}+\frac{D}{(x-b)^2}$.

Bài tập 8. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{2}{2x-1}; f(0)=1$ và $f(1)=2$. Giá trị của biểu thức $P=f(-1)+f(3)$ là:

A. $3\ln 5+\ln 2$ **B.** $3\ln 2+\ln 5$ **C.** $3+2\ln 5$ **D.** $3+\ln 15$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{2}{2x-1}dx=\ln|2x-1|+C=\begin{cases}\ln(2x-1)+C_1\ khi\ x>\frac{1}{2}\\ \ln(1-2x)+C_2\ khi\ x<\frac{1}{2}\end{cases}$$

Vì $\begin{cases}f(0)=1\\ f(1)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_2=1\\ C_1=2\end{cases}$.

Suy ra $f(x)=\begin{cases}\ln(2x-1)+2\ khi\ x>\frac{1}{2}\\ \ln(1-2x)+1\ khi\ x<\frac{1}{2}\end{cases}$.

Do đó $P=f(-1)+f(3)=3+\ln 3+\ln 5=3+\ln 15$

Bài tập 9. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$, thỏa mãn $f'(x)=\frac{2}{x^2-1}; f(-3)+f(3)=2\ln 2$ và $f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=0$. Giá trị của biểu thức $P=f(-2)+f(0)+f(4)$ là:

A. $2\ln 2-\ln 5$ **B.** $6\ln 2+2\ln 3-\ln 5$ **C.** $2\ln 2+2\ln 3-\ln 5$ **D.** $6\ln 2-2\ln 5$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{2}{x^2-1}dx=\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$$

Hay $f(x)=\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C=\begin{cases}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+C_1\ khi\ x>1\\ \ln\frac{1-x}{1+x}+C_2\ khi\ -1<x<1\\ \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+C_3\ khi\ x<-1\end{cases}$

Theo bài ra, ta có: $\begin{cases}f(-3)+f(3)=2\ln 2\\ f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1+C_3=2\ln 2\\ C_2=0\end{cases}$

Do đó $f\left(-2\right)+f\left(0\right)+f\left(4\right)=\ln 3+C_3+C_2+\ln\frac{3}{5}+C_1=2\ln 2+2\ln 3-\ln 5$.

Bài tập 10. Nguyên hàm $P=\int x.\sqrt[3]{x^2+1}dx$ là:

A. $P=\frac{3}{8}\left(x^2+1\right)\sqrt[3]{x^2+1}+C$

B. $P=\frac{3}{8}\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}+C$

C. $P=\frac{3}{8}\sqrt[3]{x^2+1}+C$

D. $P=\frac{3}{4}\left(x^2+1\right)\sqrt[3]{x^2+1}+C$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $\int x.\sqrt[3]{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{3}}d\left(x^2+1\right)=\frac{3}{8}\left(x^2+1\right)^{\frac{4}{3}}+C$.

Bài tập 11. Nguyên hàm của hàm số $\int\left(\sin x-\cos x\right)\sin xdx$ là:

A. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{4}\cos 2x+C$

B. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$

C. $x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x+C$

D. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $\int\left(\sin x-\cos x\right)\sin xdx=\int\left(\sin^2 x-\sin x\cos x\right)dx$

$$=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}-\frac{\sin 2x}{2}\right)dx=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)+C$$

Bài tập 12. Nguyên hàm của hàm số $\int\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$ là:

A. $-\tan x-\cot x+C$ **B.** $\tan x-\cot x+C$ **C.** $\tan x+\cot x+C$ **D.** $\cot x-\tan x+C$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $\int\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x.\cos^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx=\tan x-\cot x+C$.

Bài tập 13. Nguyên hàm của hàm số $\int\frac{1}{4\cos^4 x-4\cos^2 x+1}dx$ là:

A. $\frac{\cot 2x}{2}+C$ **B.** $\tan 2x+C$ **C.** $\cot 2x+C$ **D.** $\frac{\tan 2x}{2}+C$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $\int\frac{1}{4\cos^4 x-4\cos^2 x+1}dx=\int\frac{1}{(2\cos^2 x-1)^2}dx=\int\frac{1}{\cos^2 2x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\cos^2 2x}d(2x)=\frac{\tan 2x}{2}+C$

Bài tập 14. Nguyên hàm của hàm số $\int \tan^3 xdx$ là:

A. $\dfrac{\tan^2 x}{2}+\ln|\cos x|+C$ **B.** $\dfrac{\tan^2 x}{2}-\ln|\sin x|+C$

C. $\dfrac{\tan^2 x}{2}-\ln|\cos x|+C$ **D.** $\dfrac{\tan^4 x}{4\cos^2 x}+C$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Từ $\tan^3 x=\tan x\left(1+\tan^2 x\right)-\tan x$

Suy ra $\int \tan^3 xdx=\int \tan xd\left(\tan x\right)+\int \dfrac{d\left(\cos x\right)}{\cos x}=\dfrac{\tan^2 x}{2}+\ln|\cos x|+C$.

Bài tập 15. Gọi $F\left(x\right)$ là nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\sin 2x\tan x$ thỏa mãn $F\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. Giá trị của $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ là:

A. $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}+\dfrac{\pi}{12}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}-\dfrac{\pi}{12}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}+\dfrac{\pi}{12}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}-\dfrac{\pi}{12}$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $F\left(x\right)=\int \sin 2x.\tan xdx=\int 2\sin x.\cos x.\dfrac{\sin x}{\cos x}dx=2\int \sin^2 xdx$.

Suy ra $F\left(x\right)=\int \left(1-\cos 2x\right)dx=x-\dfrac{\sin 2x}{2}+C$.

Theo giả thiết, ta có: $F\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\Leftrightarrow \dfrac{\pi}{3}-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{2\pi}{3}+C=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\Rightarrow C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{3}$.

Vậy $F\left(x\right)=x-\dfrac{\sin 2x}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{3}$.

Do đó $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\sin 2\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}-\dfrac{\pi}{12}$.

Bài tập 16. Gọi $F\left(x\right)$ là nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\cos^4 2x$ thỏa mãn $F\left(0\right)=2019$. Giá trị của $F\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ là:

A. $\dfrac{3\pi+16153}{64}$ **B.** $\dfrac{3\pi+129224}{8}$ **C.** $\dfrac{3\pi+129224}{64}$ **D.** $\dfrac{3\pi-129224}{32}$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $\cos^4 2x = \left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1+2\cos 4x+\cos^2 4x\right)$

$$= \frac{1}{4}\left(1+2\cos 4x+\frac{1+\cos 8x}{2}\right) = \frac{1}{8}\left(3+4\cos 4x+\cos 8x\right)$$

Do đó $F\left(x\right) = \frac{1}{8}\int\left(3+4\cos 4x+\cos 8x\right)dx = \frac{1}{8}\left(3x+\sin 4x+\frac{1}{8}\sin 8x\right)+C$

Mà $F\left(0\right) = 2019$ nên ta có $C = 2019$.

Vậy $F\left(x\right) = \frac{1}{8}\left(3x+\sin 4x+\frac{1}{8}\sin 8x\right)+2019$.

Do đó $F\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{3\pi+129224}{64}$

Bài tập 17. Gọi $F\left(x\right)$ là nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right) = \frac{\cos^5 x}{1-\sin x}$, với $x \neq \frac{\pi}{2}+k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ và thỏa mãn $F\left(\pi\right) = \frac{3}{4}$. Giá trị của $F\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ là:

A. $\frac{2}{3}$ **B.** 0. **C.** $\frac{5}{3}$ **D.** $\frac{1}{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta thấy: $\frac{\cos^5 x}{1-\sin x} = \cos^3 x\left(1+\sin x\right) = \left(1-\sin^2 x\right)\cos x+\cos^3 x.\sin x$

$$\Rightarrow F\left(x\right) = \int\left(1-\sin^2 x\right)d\left(\sin x\right) - \int\cos^3 x d\left(\cos x\right) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\cos^4 x}{4} + C$$

Theo giả thiết, ta có $F\left(\pi\right) = \frac{3}{4}$ nên $C = 1$.

Vậy $F\left(x\right) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\cos^4 x}{4} + C$

Do đó $F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{3}$.

Chú ý:

Với $n \in \mathbb{N}^*$, ta có: $\int\cos^n x.\sin x dx = -\int\cos^n x d\left(\cos x\right) = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1}+C$ và $\int\sin^n x.\cos x dx = \int\sin^n x d\left(\sin x\right) = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1}+C$.

Bài tập 18. Biết $\int\frac{\cos x}{5\sin x-9}dx = \frac{a}{b}\ln\left|5\sin x-9\right|+C, \left(a,b \in \mathbb{Z}^+\right)$, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị $2a-b$ là

A. 10. **B.** –4.

C. 7. **D.** –3.

Hướng dẫn giải

CHỌN D

$\int \frac{\cos x}{5\sin x-9}dx=\frac{1}{5}\int \frac{d\left(5\sin x-9\right)}{5\sin x-9}=\frac{1}{5}\ln\left|5\sin x-9\right|+C$

Vậy $a=1,b=5.$ Nên $2a-b=-3.$

Bài tập 19. Tìm một nguyên hàm $F\left(x\right)$ của hàm số $f\left(x\right)=\left(1+\sin x\right)^2$ biết $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}.$

A. $F\left(x\right)=\frac{3}{2}x+2\cos x-\frac{1}{4}\sin 2x.$

B. $F\left(x\right)=\frac{3}{2}x-2\cos x-\frac{1}{4}\sin 2x.$

C. $F\left(x\right)=\frac{3}{2}x-2\cos x+\frac{1}{4}\sin 2x.$

D. $F\left(x\right)=\frac{3}{2}x+2\cos x+\frac{1}{4}\sin 2x.$

Hướng dẫn giải

CHỌN B

Ta có

$$\int\left(1+\sin x\right)^2dx=\int\left(1+2\sin x+\sin^2x\right)dx=\int\left(1+2\sin x+\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx$$

$$=\frac{3}{2}x-2\cos x-\frac{1}{4}\sin 2x+c$$

$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}\Leftrightarrow\frac{3}{2}\frac{\pi}{2}-2\cos\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\sin\pi+c=\frac{3\pi}{4}\Leftrightarrow c=0$.

Vậy $F\left(x\right)=\frac{3}{2}x-2\cos x-\frac{1}{4}\sin 2x$.

Bài tập 20. Cho $\int\frac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}dx=F\left(x\right)+C$ và $F\left(\pi\right)=a+b.$ Tính $A=\left(a+b\right)^6$.

A. –2. **B.** 2. **C.** 1. **D.** –1.

Hướng dẫn giải

CHỌN C

Ta có: $F\left(x\right)=\int\frac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}dx=\int\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\sin x+\cos x}dx$

$=\int\frac{\left(\cos x+\sin x\right)\left(\cos x-\sin x\right)}{\sin x+\cos x}dx=\int\left(\cos x-\sin x\right)dx=\sin x+\cos x.$

$\Rightarrow F\left(\pi\right)=-1=a+b\Rightarrow A=1.$

Bài tập 21. Cho tích phân $\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = a$. Tính $A = 12\cot^2 2x$ theo a.

A. $4a^2$. **B.** $2a^2$. **C.** $3a^2$. **D.** a^2.

Hướng dẫn giải

CHỌN C

Ta có: $F(x) = \int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$

$= \tan x - \cot x.$

Theo đề:

$\tan x - \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x\cos x} = \frac{-2\cos 2x}{\sin 2x} = a$

$\Rightarrow \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = -\frac{a}{2}$

$A = 12.\frac{\cos^2 2x}{\sin^2 2x} = 12.\left(-\frac{a}{2}\right)^2 = 3a^2.$

Bài tập 22. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x + 4\sin^2 x}}dx$ và $F(0) + 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Tính $2F(0) - F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $\frac{7}{9}$. **B.** $-\frac{7}{9}$. **C.** 0. **D.** 1

Lời giải

CHỌN B

Ta có

$d\left(\cos^2 x + 4\sin^2 x\right) = \left(-2\sin x\cos x + 8\sin x\cos x\right)dx = 6\sin x\cos xdx = 3\sin 2xdx$

$\Rightarrow \sin 2xdx = \frac{1}{3}d\left(\cos^2 x + 4\sin^2 x\right)$.

Do đó :

$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x + 4\sin^2 x}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{d\left(\cos^2 x + 4\sin^2 x\right)}{\sqrt{\cos^2 x + 4\sin^2 x}} = \frac{2}{3}\int \frac{d\left(\cos^2 x + 4\sin^2 x\right)}{2\sqrt{\cos^2 x + 4\sin^2 x}} = \frac{2}{3}\sqrt{\cos^2 x + 4\sin^2 x} + C$

$F(0) + 2F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3} + 2.\frac{4}{3} + 3C = 1 \Rightarrow C = -\frac{7}{9}$.

Vậy $2F(0) - F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.\frac{2}{3} + 2C - \frac{4}{3} - C = C = -\frac{7}{9}$

Bài tập 23. Gọi $F\left(x\right)$ là nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x}{\sqrt{8-x^2}}$ trên khoảng $\left(-2\sqrt{2};2\sqrt{2}\right)$ thỏa mãn $F\left(2\right)=0$. Khi đó phương trình $F\left(x\right)=x$ có nghiệm là:

A. $x=0$ **B.** $x=1$ **C.** $x=-1$ **D.** $x=1-\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $F\left(x\right)=\int\dfrac{x}{\sqrt{8-x^2}}dx=-\int\dfrac{1}{2\sqrt{8-x^2}}d\left(8-x^2\right)=-\sqrt{8-x^2}+C$

Mặt khác $F\left(2\right)=0\Rightarrow -\sqrt{8-x^2}+C=0\Leftrightarrow C=2$

Vậy $F\left(x\right)=-\sqrt{8-x^2}+2$.

Xét phương trình $F\left(x\right)=x\Leftrightarrow -\sqrt{8-x^2}+2=x\Leftrightarrow \sqrt{8-x^2}=2-x\Leftrightarrow \begin{cases}2-x\ge 0\\ 8-x^2=\left(2-x\right)^2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\le 2\\ 2x^2-4x-4=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\le 2\\ \left[\begin{array}{l}x=1-\sqrt{3}\\ x=1+\sqrt{3}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=1-\sqrt{3}$$

Bài tập 24. Cho $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2}$ trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$ và $F\left(1\right)=\dfrac{1}{2}$. Tổng $S=F\left(1\right)+F\left(2\right)+F\left(3\right)+...+F\left(2019\right)$ là

A. $\dfrac{2019}{2020}$ **B.** $\dfrac{2019.2021}{2020}$ **C.** $2018\dfrac{1}{2020}$ **D.** $-\dfrac{2019}{2020}$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Phân tích $f\left(x\right)=\dfrac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2}=\dfrac{2x+1}{x^2\left(x+1\right)^2}=\dfrac{2x+1}{\left(x^2+x\right)^2}$

Khi đó $F\left(x\right)=\int\dfrac{2x+1}{\left(x^2+x\right)^2}dx=\int\dfrac{1}{\left(x^2+x\right)^2}d\left(x^2+x\right)=-\dfrac{1}{x^2+x}+C$.

Mặt khác $F\left(1\right)=\dfrac{1}{2}\Rightarrow -\dfrac{1}{2}+C=\dfrac{1}{2}\Rightarrow C=1$.

Vậy $F\left(x\right)=-\dfrac{1}{x^2+x}+1=-\dfrac{1}{x\left(x+1\right)}+1=-\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)+1$.

Do đó $S=F(1)+F(2)+F(3)+...+F(2019)=-\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2019}-\frac{1}{2020}\right)+2019$

$$=-\left(1-\frac{1}{2020}\right)+2019=2018+\frac{1}{2020}=2018\frac{1}{2020}$$

Bài tập 25. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0)=2\sqrt{2}, f(x)>0$ và $f(x).f'(x)=(2x+1)\sqrt{1+f^2(x)}, \forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị $f(1)$ là:

A. $6\sqrt{2}$ **B.** $\sqrt{10}$ **C.** $5\sqrt{3}$ **D.** $2\sqrt{6}$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $f(x).f'(x)=(2x+1)\sqrt{1+f^2(x)} \Leftrightarrow \frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=2x+1$.

Suy ra $\int\frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}dx=\int(2x+1)dx \Leftrightarrow \int\frac{d\left(1+f^2(x)\right)}{2\sqrt{1+f^2(x)}}=\int(2x+1)dx \Leftrightarrow \sqrt{1+f^2(x)}=x^2+x+C$

Theo giả thiết $f(0)=2\sqrt{2}$, suy ra $\sqrt{1+\left(2\sqrt{2}\right)^2}=C \Leftrightarrow C=3$

Với $C=3$ thì $\sqrt{1+f^2(x)}=x^2+x+3 \Rightarrow f(x)=\sqrt{\left(x^2+x+3\right)^2-1}$

Vậy $f(1)=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

Bài tập 26. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-2;1]$ thỏa mãn $f(0)=3$ và $\left(f(x)\right)^2.f'(x)=3x^2+4x+2$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;1]$ là:

A. $2\sqrt[3]{42}$ **B.** $2\sqrt[3]{15}$ **C.** $\sqrt[3]{42}$ **D.** $\sqrt[3]{15}$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $\left(f(x)\right)^2.f'(x)=3x^2+4x+2 \quad (*)$

Lấy nguyên hàm hai vế của đẳng thức (*) ta được:

$\int\left(f(x)\right)^2.f'(x)dx=\int\left(3x^2+4x+2\right)dx \Leftrightarrow \frac{1}{3}f^3(x)=x^3+2x^2+2x+C \Leftrightarrow f^3(x)=3x^3+6x^2+6x+3C$

Theo giả thiết, ta có $f(0)=3$ nên

$\left(f(0)\right)^3=3\left(0^3+2.0^2+2.0+C\right) \Leftrightarrow 27=3C \Leftrightarrow C=9 \Rightarrow f^3(x)=3x^3+6x^2+6x+27$

Ta tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=3x^3+6x^2+6x+27$ trên đoạn $[-2;1]$.

Ta có $g'(x)=9x^2+12x+6>0, \forall x\in[-2;1]$ nên đồng biến trên đoạn $[-2;1]$.

Vậy $\max\limits_{[-2;1]} f(x) = \sqrt[3]{\max\limits_{[-2;1]} g(x)} = \sqrt[3]{42}$.

Dạng 2: Phương pháp đổi biến dạng 1, đặt $u = u(x)$

1. Phương pháp giải

Định lí: Cho $\int f(u)du = F(u) + C$ và $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục thì

$$\boxed{\int f[u(x)]u'(x)dx = F[u(x)] + C}$$

Các bước thực hiện đổi biến:

Xét $I = \int f(u(x))u'(x)dx$

Bước 1: Đặt $u = u(x)$, suy ra $du = u'(x)dx$

Bước 2: Chuyển nguyên hàm ban đầu về ẩn *u* ta được $I = \int f(u)du = F(u) + C$, trong đó $F(u)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(u)$.

Bước 3: Trả về biến *x* ban đầu, ta có nguyên hàm cần tìm là $I = F(u(x)) + C$

Hệ quả: nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K và $a, b \in \mathbb{R}; a \neq 0$ ta có: $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

2. Bài tập

Bài tập 1. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = x^2.e^{x^3+1}$, biết $F(-1) = \frac{1}{3}$ là:

A. $F(x) = \frac{1}{3}e^{x^3+1} + C$ **B.** $F(x) = \frac{1}{3}e^{x^3+1} + 2019$ **C.** $F(x) = \frac{1}{3}e^{x^3+1} + \frac{1}{3}$ **D.** $F(x) = \frac{1}{3}e^{x^3+1}$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đặt $u = x^3 + 1$ ta có $du = 3x^2dx \Rightarrow x^2dx = \frac{1}{3}du$

Suy ra $\int f(x)dx = \int e^u \frac{1}{3}du = \frac{1}{3}e^u + C$

Do đó $F(x) = \frac{1}{3}e^{x^3+1} + C$.

Mặt khác $F(-1) = \frac{1}{3}$ nên $C = 0$. Vậy $\int f(x)dx = \frac{1}{3}e^{x^3+1}$.

Lưu ý: Ta có thể viết như sau: $\int f(x)dx = \int x^2e^{x^3+1}dx = \frac{1}{3}\int e^{x^3+1}d(x^3+1) = \frac{1}{3}e^{x^3+1} + C$

Chú ý: Với các viết $x^2dx=\frac{1}{3}d\left(x^3+1\right)$, ta có thể tính nguyên hàm đã cho một cách đơn giản và nhanh gọn.

Bài tập 2. Nguyên hàm $M=\int\frac{2\sin x}{1+3\cos x}dx$ là:

A. $M=\frac{1}{3}\ln\left(1+3\cos x\right)+C$

B. $M=\frac{2}{3}\ln\left|1+3\cos x\right|+C$

C. $M=-\frac{2}{3}\ln\left|1+3\cos x\right|+C$

D. $M=-\frac{1}{3}\ln\left|1+3\cos x\right|+C$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đặt $u=1+3\cos x$, ta có $du=-3\sin xdx$ hay $2\sin xdx=-\frac{2}{3}du$.

Khi đó $M=-\frac{2}{3}\int\frac{1}{u}du=-\frac{2}{3}\ln\left|u\right|+C$

Vậy $M=\int\frac{2\sin x}{1+3\cos x}dx=-\frac{2}{3}\ln\left|1+3\cos x\right|+C$

Bài tập 3. $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2x+2\left(1+\sin x+\cos x\right)}dx=\frac{4-3\sqrt{a}}{b},\left(a,b\in\mathbb{Z}^+\right)$. Tìm tỉ lệ $\frac{a}{b}$.

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{2}{1}$.

D. $\frac{3}{1}$.

Hướng dẫn giải

CHỌN B

Đặt $t=\sin x+\cos x\Rightarrow\begin{cases}dt=\left(\cos x-\sin x\right)dx=-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)dx\\ \sin 2x=t^2-1\end{cases}$

và $x:0\to\frac{\pi}{4}$ thì $t:1\to\sqrt{2}$.

$$\Rightarrow I_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_1^{\sqrt{2}}\frac{dt}{t^2-1+2\left(1+t\right)}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\int\limits_1^{\sqrt{2}}\frac{dt}{\left(t+1\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{t+1}\Bigg|_1^{\sqrt{2}}=\frac{4-3\sqrt{2}}{4}.$$

Bài tập 4. Cho $\int\cos^3x\sin xdx=F\left(x\right)+C$ và $F\left(0\right)=a+b-\frac{1}{4}$.

Tính $A=a^2+b^2+2018$.

A. 2018.

B. 2016.

C. 2022.

D. 2020.

Hướng dẫn giải

CHỌN A

$\int \cos^3 x \sin x dx$

Đặt $u = \cos x \Rightarrow -du = \sin x dx$.

$\int \cos^3 x \sin x dx = -\int u^3 du = -\frac{u^4}{4} + C = -\frac{\cos^4 x}{4} + C$

$\Rightarrow F(0) = -\frac{1}{4} = a + b - \frac{1}{4} \Rightarrow a + b = 0.$

$A = a^3 + b^3 + 2018 = (a+b)^2 - 2ab(a+b) + 2018 = 2018.$

Chú ý: chú ý rằng với $a > 0$ và $m, n \in \mathbb{Z}; n > 0$ ta luôn có: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Bài tập 5. Nguyên hàm $R = \int \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx$ là:

A. $R = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\right| + C$

B. $R = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| + C$

C. $R = \ln\left|\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\right| + C$

D. $R = \ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| + C$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đặt $u = \sqrt{x+1} \Rightarrow u^2 = x + 1$. Suy ra $x = u^2 - 1$ và $dx = 2udu$.

Khi đó $R = \int \frac{2u}{(u^2-1)u} du = \int \frac{2}{u^2-1} du = \int \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right) du = \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C$.

Vậy $R = \ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| + C$

Bài tập 6. Nguyên hàm $S = \int x^3\sqrt{x^2+9} dx$ là:

A. $S = \frac{(x^2+9)^2\sqrt{x^2+9}}{5} - 3(x^2+9)\sqrt{x^2+9} + C$

B. $S = \frac{(x^2+9)^4\sqrt{x^2+9}}{5} - 3(x^2+9)\sqrt{x^2+9} + C$

C. $S = \frac{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}}{5} - 3(x^2+9)^2\sqrt{x^2+9} + C$

D. $S = \frac{(x^2+9)^2\sqrt{x^2+9}}{5} - 3\sqrt{x^2+9} + C$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Xét $S=\int x^3\sqrt{x^2+9}dx=\int x^2\sqrt{x^2+9}xdx$.

Đặt $u=\sqrt{x^2+9}\Rightarrow u^2=x^2+9$. Suy ra $x^2=u^2-9$ và $xdx=udu$.

Khi đó $S=\int\left(u^2-9\right)u.udu=\int\left(u^4-9u^2\right)du=\frac{u^5}{5}-3u^3+C$.

Vậy $S=\frac{\left(x^2+9\right)^2\sqrt{x^2+9}}{5}-3\left(x^2+9\right)\sqrt{x^2+9}+C$

Bài tập 7. Nguyên hàm $T=\int\frac{1}{x\sqrt{\ln x+1}}dx$ là:

A. $T=\frac{1}{2\sqrt{\ln x+1}}+C$ **B.** $T=2\sqrt{\ln x+1}+C$

C. $T=\frac{2}{3}\left(\ln x+1\right)\sqrt{\ln x+1}+C$ **D.** $T=\sqrt{\ln x+1}+C$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $T=\int\frac{1}{x\sqrt{\ln x+1}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{\ln x+1}}d\left(\ln x+1\right)=2\sqrt{\ln x+1}+C$.

Bài tập 8. Nguyên hàm $U=\int\frac{\left(x-2\right)^{2020}}{\left(x+1\right)^{2022}}dx$ là:

A. $U=\frac{1}{3}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2021}+C$ **B.** $U=\frac{1}{6060}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2020}+C$

C. $U=\frac{1}{6063}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2021}+C$ **D.** $U=\frac{1}{6069}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2023}+C$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Xét $U=\int\frac{\left(x-2\right)^{2020}}{\left(x+1\right)^{2022}}dx=\int\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2020}\frac{1}{\left(x+1\right)^2}dx$

Đặt $u=\frac{x-2}{x+1}\Rightarrow du=\frac{3}{\left(x+1\right)^2}dx\Rightarrow\frac{1}{3}du=\frac{1}{\left(x+1\right)^2}dx$.

Suy ra. $U=\frac{1}{3}\int u^{2020}du=\frac{1}{6063}u^{2021}+C$. Vậy $U=\frac{1}{6063}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2021}+C$

Lưu ý:

$$\boxed{\int\frac{\left(ax+b\right)^n}{\left(cx+d\right)^{n+2}}dx=\frac{1}{n+1}\frac{1}{ad-bd}\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{n+1}+C}$$

Bài tập 9. Xét nguyên hàm $V=\int \frac{\ln^2 x}{x\left(1+\sqrt{\ln x+1}\right)}dx$. Đặt $u=1+\sqrt{1+\ln x}$, khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\frac{dx}{x}=(2u-2)du$

B. $V=\int \frac{\left(u^2-2u\right)^2}{u}.(2u-2)du$

C. $V=\frac{2}{5}u^5-\frac{5}{2}u^4+\frac{16}{3}u^3-4u^2+C$

D. $V=\frac{u^5}{5}+\frac{u^4}{2}-\frac{16}{3}u^3+4u^2+C$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đặt $u=1+\sqrt{1+\ln x}\Rightarrow (u-1)^2=1+\ln x\Leftrightarrow \ln x=u^2-2u\Rightarrow \frac{dx}{x}=(2u-2)du$.

Khi đó $V=\int \frac{\ln^2 x}{x\left(1+\sqrt{\ln x+1}\right)}dx=\int \frac{\left(u^2-2u\right)^2}{u}.(2u-2)du$

$$=2\int\left(u^4-5u^3+8u^2-4u\right)du=\frac{2}{5}u^5-\frac{5}{2}u^4+\frac{16}{3}u^3-4u^2+C$$

Bài tập 10. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin^2 2x.\cos^3 2x$ thỏa $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$. Giá trị $F(2019\pi)$ là:

A. $F(2019\pi)=-\frac{1}{15}$ **B.** $F(2019\pi)=0$ **C.** $F(2019\pi)=-\frac{2}{15}$ **D.** $F(2019\pi)=\frac{1}{15}$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt $u=\sin 2x\Rightarrow du=2\cos 2xdx\Rightarrow \frac{1}{2}du=\cos 2xdx$

Ta có $F(x)=\int \sin^2 2x.\cos^3 2xdx=\frac{1}{2}\int u^2.\left(1-u^2\right)du=\frac{1}{2}\int\left(u^2-u^4\right)du$

$$=\frac{1}{6}u^3-\frac{1}{10}u^5+C=\frac{1}{6}\sin^3 2x-\frac{1}{10}\sin^5 2x+C$$

$F\left(\frac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow \frac{1}{6}\sin^3\frac{\pi}{2}-\frac{1}{10}\sin^5\frac{\pi}{2}+C=0\Leftrightarrow C=-\frac{1}{15}$

Vậy $F(x)=\frac{1}{6}\sin^3 2x-\frac{1}{10}\sin^5 2x-\frac{1}{15}$

Do đó $F(2019\pi)=-\frac{1}{15}$

Bài tập 11. Biết rằng $\int \frac{(2x+3)dx}{x(x+1)(x+2)(x+3)+1} = -\frac{1}{g(x)} + C$ (với C là hằng số). Gọi S là tập nghiệm của phương trình $g(x)=0$. Tổng các phần tử của S bằng:

A. 0. **B.** $-3+\sqrt{5}$ **C.** -3 **D.** $-3-\sqrt{5}$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Vì $x(x+1)(x+2)(x+3)+1 = (x^2+3x)(x^2+3x+2)+1 = \left[(x^2+3x)+1\right]^2$ nên ta đặt $u = x^2+3x$, khi đó $du = (2x+3)dx$

Nguyên hàm ban đầu trở thành $\int \frac{du}{(u+1)^2} = -\frac{1}{u+1} + C$.

Suy ra $\int \frac{(2x+3)dx}{x(x+1)(x+2)(x+3)+1} = -\frac{1}{x^2+3x+1} + C$

Vậy $g(x) = x^2+3x+1; g(x)=0 \Leftrightarrow x^2+3x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$.

Do đó $S = \left\{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}; \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Tổng giá trị các phần tử của S bằng -3.

Bài tập 12. $\mathrm{I} = \int \frac{3\cos 2x - \sin 4x}{2 - \sin x - \cos x} dx = F(x) + C$. Tính $F(1)$, biết rằng $F(x)$ không chứa hệ số tự do.

A. $\frac{17}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{15}{3}$. **D.** $\frac{9}{3}$.

Hướng dẫn giải

CHỌN A

$$\mathrm{I} = \int \frac{3\cos 2x - \sin 4x}{2 - \sin x - \cos x} dx = \int \frac{(3 - 2\sin 2x)\cos 2x}{2 - \sin x - \cos x} dx$$
$$= \int \frac{(3 - 2\sin 2x)(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)}{2 - (\sin x + \cos x)} dx$$

Đặt $t = \sin x + \cos x \Rightarrow \begin{cases} dt = (\cos x - \sin x)dx \\ \sin 2x = t^2 - 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow I=\int\frac{\left[3-2\left(t^2-1\right)\right].t}{2-t}dt=\int\frac{2t^3-5t}{t-2}dt=\int\left(2t^2+4t+3+\frac{6}{t-2}\right)dt$$
$$=\left(\frac{2}{3}t^3+2t^2+3t+6\ln\left|t-2\right|\right)+C.$$

Dạng 3: Tìm nguyên hàm bằng cách đổi biến dạng 2

1. Phương pháp giải

Kiến thức cần nhớ:

Ta đã biết các đẳng thức sau:

$\sin^2 t+\cos^2 t=1$, với mọi $t\in\mathbb{R}$.

$1+\tan^2 t=\dfrac{1}{\cos^2 t},\forall t\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

$1+\cot^2 t=\dfrac{1}{\sin^2 t},\forall t\neq k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Với các bài toán sau đây thì ta không thể giải quyết ngay bằng nguyên hàm cơ bản cũng như đổi biến số ở dạng 1, đòi hỏi người học phải trang bị tư duy đổi biến theo kiểu "**lượng giác hóa**" dựa vào các hằng đẳng thức lượng giác cơ bản và một số biến đổi thích hợp, cụ thể ta xem xét các nguyên hàm sau đây:

Bài toán 1: Tính $A_1=\int\dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

Bài toán 2: Tính $A_2=\int\dfrac{dx}{a^2+x^2}$

Bài toán 3: Tính $A_3=\int\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}dx$

Bài toán 4: Tính $A_4=\int\sqrt{\left(x-a\right)\left(x-b\right)}dx$

Các kĩ thuật đổi biến dạng 2 thường gặp và cách xử lí.

Bài toán 1: Tính $A_1=\int\dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

Đặt $x=\left|a\right|\sin t$, với $t\in\left(\dfrac{-\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ hoặc $x=\left|a\right|\cos t$ với $t\in\left(0;\pi\right)$

Bài toán 2: Tính $A_2=\int\dfrac{dx}{a^2+x^2}$

Đặt $x=\left|a\right|\tan t$, với $t\in\left(\dfrac{-\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Bài toán 3: Tính $A_3=\int\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}dx$

Đặt $x=a\cos 2t$ với $t\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

Bài toán 4: Tính $A_4=\int\sqrt{\left(x-a\right)\left(x-b\right)}dx$

Đặt $x=a+\left(b-a\right)\sin^2 t$ với $t\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

Bài toán 5: Tính $A_5 = \int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx$

Bài toán 5: Tính $A_5 = \int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx$

Đặt $x = \dfrac{|a|}{\sin t}$ với $t \in \left[\dfrac{-\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$

2. Bài tập

Bài tập 1. Nguyên hàm $I = \int \dfrac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}}\,dx$ là:

A. $\arcsin\dfrac{x}{2} - \dfrac{x\sqrt{4 - x^2}}{4} + C$

B. $2\arccos\dfrac{x}{2} - \dfrac{x\sqrt{4 - x^2}}{2} + C$

C. $\arccos\dfrac{x}{2} - \dfrac{x\sqrt{4 - x^2}}{4} + C$

D. $2\arcsin\dfrac{x}{2} - \dfrac{x\sqrt{4 - x^2}}{2} + C$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đặt $x = 2\sin t$ với $t \in \left(\dfrac{-\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Ta có $\cos t > 0$ và $dx = 2\cos t dt$.

Khi đó $I = \int \dfrac{4\sin^2 t}{\sqrt{4 - 4\sin^2 t}} 2\cos t dt = \int 4\sin^2 t dt$ (vì $\cos t > 0, \forall t \in \left(\dfrac{-\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$).

Suy ra $I = 2\int (1 - \cos 2t)\,dt = 2t - \sin 2t + C$

Từ $x = 2\sin t \Rightarrow t = \arcsin\dfrac{x}{2}$ và $\sin 2t = 2\sin t.\cos t = \dfrac{x\sqrt{4 - x^2}}{2}$

Vậy $I = \int \dfrac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}}\,dx = 2\arcsin\dfrac{x}{2} - \dfrac{x\sqrt{4 - x^2}}{2} + C$

Bài tập 2. Nguyên hàm $I = \int \dfrac{1}{\sqrt{\left(1 - x^2\right)^3}}\,dx$ là:

A. $\sqrt[3]{\left(1 - x^2\right)^2} + C$

B. $\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}} + C$

C. $\dfrac{x}{\sqrt{\left(1 - x^2\right)^3}} + C$

D. $\dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{x} + C$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đặt $x = \cos t, t < 0 < \pi \Rightarrow dx = -\sin t.dt$.

Khi đó $I = -\int \dfrac{\sin t.dt}{\sin^3 t} dt = -\int \dfrac{dt}{\sin^2 t} = \cot t + C$ hay $I = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}} + C$

Vậy $\int \dfrac{1}{\sqrt{\left(1 - x^2\right)^3}}\,dx = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}} + C$

Ví dụ 3. Nguyên hàm $I=\int \frac{1}{1+x^2}dx$ là:

A. $\arctan x+C$ **B.** $\text{arccot}\, x+C$ **C.** $\arcsin x+C$ **D.** $\arccos x+C$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt $x=\tan t$ với $t\in\left(\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, ta có $dx=\left(1+\tan^2 t\right)dt$.

Khi đó $I=\int \frac{1}{1+\tan^2 t}\left(1+\tan^2 t\right)dt=\int dt=t+C$

Vậy $I=\int \frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+C$

Dạng 4: Tìm nguyên hàm bằng phương pháp nguyên hàm từng phần

1. Phương pháp giải

Với $u=u(x)$ và $v=v(x)$ là các hàm số có đạo hàm trên khoảng K thì ta có: $(u.v)'=u'v.v'u$

Viết dưới dạng vi phân $d(uv)=vdu+udv$

Khi đó lấy nguyên hàm hai vế ta được: $\int d(uv)=\int vdu+\int udv$

Từ đó suy ra $\int udv=uv-\int vdu \ (1)$

Công thức (1) là công thức nguyên hàm từng phần.

Dấu hiệu nhận biết phải sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần.

Bài toán: Tìm $I=\int u(x).v(x)dx$, trong đó $u(x)$ và $v(x)$ là hai hàm có tính chất khác nhau, chẳng hạn:

$u(x)$ là hàm số đa thức, $v(x)$ là hàm số lượng giác.

$u(x)$ là hàm số đa thức, $v(x)$ là hàm số mũ.

$u(x)$ là hàm số logarit, $v(x)$ là hàm số đa thức.

$u(x)$ là hàm số mũ, $v(x)$ là hàm số lượng giác.

Phương pháp nguyên hàm từng phần

Bước 1: Đặt $\begin{cases} u=u(x) \\ dv=v(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=u'(x)dx \\ v=\int v(x)dx \end{cases}$

Bước 2: Áp dụng công thức (1), ta được: $\int udv=uv-\int vdu$

Lưu ý: Đặt $u=u(x)$ (ưu tiên) theo thứ tự: **"Nhất lốc, nhì đa, tam lượng, tứ mũ"**. Tức là, nếu có logarit thì ưu tiên đặt *u* là logarit, không có logarit thì ưu tiên *u* là đa thức,… thứ tự ưu tiên sắp xếp như thế.

Còn đối với nguyên hàm $v=\int v(x)dx$ ta chỉ cần **Chọn một hằng số thích hợp.** Điều này sẽ được làm rõ qua các Bài tập minh họa ở cột bên phải.

2. Bài tập

Bài tập 1. Kết quả nguyên hàm $I=\int x\ln\left(2+x^2\right)dx$ là:

A. $\frac{x^2+2}{2}\ln\left(x^2+2\right)+\frac{x^2}{2}+C$

B. $\left(x^2+2\right)\ln\left(x^2+2\right)-\frac{x^2}{2}+C$

C. $\left(x^2+2\right)\ln\left(x^2+2\right)+x^2+C$

D. $\frac{x^2+2}{2}\ln\left(x^2+2\right)-\frac{x^2}{2}+C$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đặt $\begin{cases} u=\ln\left(2+x^2\right) \\ dv=xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{2x}{x^2+2}dx \\ v=\frac{x^2+2}{2} \end{cases}$

Khi đó $I=\frac{x^2+2}{2}\ln\left(x^2+2\right)-\int xdx=\frac{x^2+2}{2}\ln\left(x^2+2\right)-\frac{x^2}{2}+C$

Chú ý: Thông thường thì với $dv=xdx\Rightarrow v=\frac{x^2}{2}$

Tuy nhiên trong trường hợp này, ta để ý $v=\frac{x^2+2}{2}$ mang lại sự hiệu quả.

Bài tập 2. Kết quả nguyên hàm $I=\int\frac{\ln\left(\sin x+2\cos x\right)}{\cos^2 x}dx$ là:

A. $\left(\tan x+2\right).\ln\left(\sin x+2\cos x\right)-x+2\ln\left|\cos x\right|+C$

B. $\left(\tan x+2\right).\ln\left(\sin x+2\cos x\right)-x-2\ln\left|\cos x\right|+C$

C. $\left(\tan x+2\right).\ln\left(\sin x+2\cos x\right)-x-2\ln\left(\cos x\right)+C$

D. $\left(\cot x+2\right).\ln\left(\sin x+2\cos x\right)-x-2\ln\left|\cos x\right|+C$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đặt $\begin{cases} u=\ln\left(\sin x+2\cos x\right) \\ dv=\frac{dx}{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{\cos x-2\sin x}{\sin x+2\cos x}dx \\ v=\tan x+2=\frac{\sin x+2\cos x}{\cos x} \end{cases}$

Khi đó $I=(\tan x+2)\ln(\sin x+2\cos x)-\int\frac{\cos x-2\sin x}{\cos x}dx$

$=(\tan x+2)\ln(\sin x+2\cos x)-x-2\ln|\cos x|+C$

Chú ý: Ở Bài tập này, Chọn $v=\tan x+2$ có thể rút gọn được ngay tử và mẫu trong nguyên hàm $\int vdu$.

Bài tập 3. Kết quả nguyên hàm $I=\int x^2\sin 5xdx$ là:

A. $-\frac{1}{5}x^2\cos 5x-\frac{2}{25}x\sin 5x+\frac{2}{125}\cos 5x+C$

B. $-\frac{1}{5}x^2\cos 5x+\frac{2}{25}x\sin 5x-\frac{2}{125}\cos 5x+C$

C. $\frac{1}{5}x^2\cos 5x-\frac{2}{25}x\sin 5x+\frac{2}{125}\cos 5x+C$

D. $-\frac{1}{5}x^2\cos 5x+\frac{2}{25}x\sin 5x+\frac{2}{125}\cos 5x+C$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Phân tích: Ở đây ta sẽ ưu tiên $u=x^2$ là đa thức, tuy nhiên vì bậc của *u* là 2 nên ta sẽ từng phần hai lần mới thu được kết quả. Nhằm tiết kiệm thời gian, tôi gợi ý với phương pháp "sơ đồ đường chéo" cụ thể như sau:

Bước 1: Chia thành 3 cột:

+ Cột 1: Cột *u* luôn lấy đạo hàm đến 0.

+ Cột 2: Dùng để ghi rõ dấu của các phép toán đường chéo.

+ Cột 3: Cột *dv* luôn lấy nguyên hàm đến khi tương ứng với cột 1.

Bước 2: Nhân chéo kết quả của 2 cột với nhau. Dấu của phép nhân đầu tiên sẽ có dấu (+), sau đó đan dấu (-), (+), (-),… rồi cộng các tích lại với nhau.

Đạo hàm cho đến khi về 0	Dấu	Lấy nguyên hàm tương ứng
$u=x^2$	+	$dv=\sin 5xdx$
$2x$	−	$-\frac{1}{5}\cos 5x$
2	+	$-\frac{1}{25}\sin 5x$
0		$\frac{1}{125}\cos 5x$

Khi đó $I=-\frac{1}{5}x^2\cos 5x+\frac{2}{25}x\sin 5x+\frac{2}{125}\cos 5x+C$

Chú ý:

Kĩ thuật này rất đơn giản và tiết kiệm nhiều thời gian.

Trong kĩ thuật tìm nguyên hàm theo sơ đồ đường chéo, yêu cầu độc giả cần tính toán chính xác đạo

hàm và nguyên hàm ở hai cột 1 và 3. Nếu nhầm lẫn thì rất đáng tiếc.

Bài tập 4. Nguyên hàm $I=\int x^4e^{3x}dx$ là:

A. $I=\left(\frac{x^4}{3}-\frac{4x^3}{3^2}+\frac{12x^2}{3^3}-\frac{24x}{3^4}+\frac{24}{3^5}\right)e^{3x}+C$ **B.** $I=\frac{x^5}{5}.\frac{e^{3x}}{3}+C$

C. $I=\left(\frac{x^4}{3}+\frac{4x^3}{3^2}-\frac{12x^2}{3^3}+\frac{24x}{3^4}-\frac{24}{3^5}\right)e^{3x}+C$ **D.** $I=\left(\frac{x^4}{3}-\frac{4x^3}{3^2}+\frac{12x^2}{3^3}\right)e^{3x}+C$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Nếu làm thông thường thì từng phần 4 lần ta mới thu được kết quả. Ở đây, chúng tôi trình bày theo sơ đồ đường chéo cho kết quả và nhanh chóng hơn.

Đạo hàm cho đến khi về 0	Dấu	Lấy nguyên hàm tương ứng
$u=x^4$	+	$dv=e^{3x}dx$
$4x^3$	−	$\frac{1}{3}e^{3x}$
$12x^2$	+	$\frac{1}{3^2}e^{3x}$
$24x$	−	$\frac{1}{3^3}e^{3x}$
24	+	$\frac{1}{3^4}e^{3x}$
0		$\frac{1}{3^5}e^{3x}$

Vậy $I=\left(\frac{x^4}{3}-\frac{4x^3}{3^2}+\frac{12x^2}{3^3}-\frac{24x}{3^4}+\frac{24}{3^5}\right)e^{3x}+C$.

Bài tập 5. Nguyên hàm $I=\int e^x\sin xdx$ là:

A. $2e^x\left(\sin x+\cos x\right)+C$ **B.** $2e^x\left(\sin x-\cos x\right)+C$

C. $\frac{1}{2}e^x\left(\sin x-\cos x\right)+C$ **D.** $\frac{1}{2}e^x\left(\sin x+\cos x\right)+C$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Phân tích: Sự tồn tại của hàm số mũ và lượng giác trong cùng một nguyên hàm sẽ rất dễ gây cho người học sự nhầm lẫn, nếu ta sẽ không biết điểm dừng thì có thể sẽ bị lạc vào vòng luẩn quẩn. Ở đây, để tìm được kết quả thì ta phải từng phần hai lần như trong Bài tập 3. Tuy nhiên, với sơ đồ đường chéo thì sao? Khi nào sẽ dừng lại?

Đạo hàm u cho đến khi lặp lại	Dấu	Lấy nguyên hàm tương ứng
$\boxed{u=\sin x}$	+	$dv=e^x dx$
$\cos x$	−	e^x
$\boxed{-\sin x}$	+	e^x (dừng lại)

Khi đó, ta sẽ có thể kết luận $I=e^x\sin x-e^x\cos x-\int e^x\sin xdx$.

Hay $2I=e^x\sin x-e^x.\cos x$. Vậy $I=\frac{1}{2}e^x\left(\sin x-\cos x\right)+C$

Chú ý: Chỉ dừng lại khi đạo hàm của nó có dạng giống dòng đầu tiên. Dòng cuối thu được $-\int \sin xe^x dx=-I$.

Bài tập 6. Tìm $I=\int \ln^n\left(ax+b\right)v\left(x\right)dx$, trong đó $v\left(x\right)$ là hàm đa thức, $n\in\mathbb{N}^*$ và $a,b\in\mathbb{R};a\neq 0$

Hướng dẫn giải

Phân tích: Vì ưu tiên $u\left(x\right)=\ln^n\left(ax+b\right)$ nên $du=\frac{na.\ln^{n-1}\left(ax+b\right)}{ax+b}dx$ và tiếp tục đạo hàm thì cột 1 sẽ không về 0 được, vì vậy phải chuyển lượng $t\left(x\right)=\frac{na}{ax+b}$ từ cột 1 sang nhân với $v\left(x\right)$ ở cột 3 để rút gọn bớt; tiếp tục quá trình như thế cho đến khi đạo hàm cột 1 về 0, và chú ý sử dụng quy tắc đan dấu bình thường.

Bài tập 6.1. Kết quả nguyên hàm $I=\int x.\ln xdx$ là:

A. $\frac{x^2}{2}.\ln 2-\frac{x^2}{4}+C$ **B.** $\frac{x^2}{2}.\ln 2+\frac{x^2}{4}+C$ **C.** $\frac{x^2}{4}.\ln 2-\frac{x^2}{2}+C$ **D.** $\frac{x^2}{4}.\ln 2+\frac{x^2}{2}+C$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đạo hàm cho đến khi về 0	Dấu	Lấy nguyên hàm tương ứng	Lượng t(x) phải chuyển từ cột 1 để nhân thêm với
$u=\ln x$	+	$dv=xdx$	
$\frac{1}{x}$		$\frac{x^2}{2}$	$\boxed{\frac{1}{x}}$
1	−	$\frac{x}{2}$	
0		$\frac{x^2}{4}$	

Vậy $I=\int x.\ln x dx=\frac{x^2}{2}.\ln 2-\frac{x^2}{4}+C$

Chú ý: chuyển lượng $t(x)=\frac{1}{x}$ bên cột 1 sang nhân với $v(x)=\frac{x^2}{2}$ ta thu được kết quả $\frac{x}{2}$. Khi đó bên cột 1 còn lại 1, đạo hàm của nó bằng 0; bên cột 3 có nguyên hàm của $\frac{x}{2}$ là $\frac{x^2}{4}$.

Bài tập 6.2. Kết quả nguyên hàm $I=\int(4x-1).\ln^3(2x)dx$ là:

A. $\left(2x^2-x\right)\ln^3(2x)-\left(3x^2-3x\right)\ln^2(2x)-\left(3x^2-6x\right)\ln(2x)+\frac{3x^2}{2}+6x+C$

B. $\left(2x^2-x\right)\ln^3(2x)-\left(3x^2-3x\right)\ln^2(2x)+\left(3x^2-6x\right)\ln(2x)-\frac{3x^2}{2}+6x+C$

C. $\left(2x^2-x\right)\ln^3(2x)+\left(3x^2-3x\right)\ln^2(2x)+\left(3x^2-6x\right)\ln(2x)-\frac{3x^2}{2}+6x+C$

D. $\left(2x^2-x\right)\ln^3(2x)+\left(3x^2-3x\right)\ln^2(2x)+\left(3x^2-6x\right)\ln(2x)-\frac{3x^2}{2}-6x+C$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đạo hàm cho đến khi về 0	Dấu	Lấy nguyên hàm tương ứng	Lượng $t(x)$ phải chuyển từ cột 1 để nhân thêm với cột 3
$u=\ln^3(2x)$	+	$dv=(4x-1)dx$	
$\frac{3}{x}.\ln^2(2x)$		$2x^2-x$	$\boxed{\frac{3}{x}}$
$\ln^2(2x)$	−	$6x-3$	
$\frac{2}{x}.\ln(2x)$		$3x^2-3x$	$\boxed{\frac{2}{x}}$
$\ln(2x)$	+	$6x-6$	
$\frac{1}{x}$		$3x^2-6x$	$\boxed{\frac{1}{x}}$
1	−	$3x-6$	
0		$\frac{3x^2}{2}-6x$	

Vậy $I=\left(2x^2-x\right)\ln^3(2x)-\left(3x^2-3x\right)\ln^2(2x)+\left(3x^2-6x\right)\ln(2x)-\frac{3x^2}{2}+6x+C$

Chú ý:
Chuyển $\frac{3}{x}$, nhân với $\left(2x^2-x\right)$ thu được $(6x-3)$

Chuyển $\frac{2}{x}$, nhân với $\left(3x^2-3x\right)$ thu được $\left(6x-6\right)$. Chuyển $\frac{1}{x}$, nhân với $\left(3x^2-6x\right)$ thu được $\left(3x-6\right)$.

Bài tập 7. Cho $F\left(x\right)=\left(x-1\right)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)e^{2x}$. Biết rằng hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Nguyên hàm của hàm số $f'\left(x\right)e^{2x}$ là:

A. $\left(2-x\right)e^x+C$ **B.** $\left(2+x\right)e^x+C$ **C.** $\left(1-x\right)e^x+C$ **D.** $\left(1+x\right)e^x+C$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $F'\left(x\right)=f\left(x\right)e^{2x}\Leftrightarrow e^x+\left(x-1\right)e^x=f\left(x\right).e^{2x}\Leftrightarrow f\left(x\right).e^{2x}=x.e^x$.

Xét $\int f'\left(x\right)e^{2x}dx$

Đặt $\begin{cases} u=e^{2x} \\ dv=f'\left(x\right)dx \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} du=2e^{2x}dx \\ v=f\left(x\right) \end{cases}$

Do đó $I=f\left(x\right).e^{2x}-2\int f\left(x\right)e^x dx=xe^x-2\left(x-1\right)e^x+C$

Vậy $I=\int f'\left(x\right)e^{2x}dx=\left(2-x\right)e^x+C$

Dạng 5: Các bài toán thực tế ứng dụng nguyên hàm

1. Phương pháp giải

Ý nghĩa vật lí của đạo hàm:

Một chất điểm chuyển động theo phương trình $S=S\left(t\right)$, với $S\left(t\right)$ là quãng đường mà chất điểm đó đi được trong thời gian *t*, kể từ thời điểm ban đầu.

Gọi $v\left(t\right)$ và $a\left(t\right)$ lần lượt là vận tốc tức thời và gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm *t*, ta có: $v\left(t\right)=S'\left(t\right)$ và $a\left(t\right)=v'\left(t\right)$.

Từ đó ta có: $S\left(t\right)=\int v\left(t\right)dt$ và $v\left(t\right)=\int a\left(t\right)dt$.

2. Bài tập

Bài tập 1. Một vật chuyển động với gia tốc $a\left(t\right)=\frac{3}{t+1}\left(m/s^2\right)$, trong đó *t* là khoảng thời gian tính từ thời điểm ban đầu. Vận tốc ban đầu của vật là. Hỏi vận tốc cảu vật tại giây thứ 10 bằng bao nhiêu?

A. 10 m/s. **B.** 15,2 m/s. **C.** 13,2 m/s. **D.** 12 m/s.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Vận tốc của vật tại thời điểm *t* được tính theo công thức: $v\left(t\right)=\int a\left(t\right)dt=\int \frac{3}{t+1}dt=3\ln\left|t+1\right|+C$

Vì vận tốc ban đầu (lúc $t=0$) của vật là $v_0=6m/s$ nên:

$v\left(0\right)=3\ln\left|0+1\right|+C=6\Leftrightarrow C=6\Rightarrow v\left(t\right)=3\ln\left|t+1\right|+6$.

Vận tốc của vật chuyển động tại giây thứ 10 là: $v\left(10\right)=3\ln\left|10+1\right|+6\approx 13,2\left(m/s\right)$.

Bài tập 2. Một vận động viên điền kinh chạy với gia tốc $a\left(t\right)=-\frac{1}{24}t^3+\frac{5}{16}t^2\left(m/s^2\right)$, trong đó *t* là khoảng thời gian tính từ lúc xuất phát. Hỏi vào thời điểm 5 (s) sau khi xuất phát thì vận tốc của vận động viên là bao nhiêu?

A. 5,6 m/s. **B.** 6,51 m/s. **C.** 7,26 m/s. **D.** 6,8 m/s.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Vận tốc $v\left(t\right)$ chính là nguyên hàm của gia tốc $a\left(t\right)$ nên ta có:

$v\left(t\right)=\int a\left(t\right)dt=\int\left(-\frac{1}{24}t^3+\frac{5}{16}t^2\right)dt=-\frac{1}{96}t^4+\frac{5}{48}t^3+C$

Tại thời điểm ban đầu $\left(t=0\right)$ thì vận động viên ở tại vị trí xuất phát nên vận tốc lúc đó là: $v_0=0\Rightarrow v\left(0\right)=0\Leftrightarrow -\frac{1}{96}.0^4+\frac{5}{48}.0^3+C=0\Leftrightarrow C=0$.

Vậy công thức vận tốc là $v\left(t\right)=-\frac{1}{96}t^4+\frac{5}{48}t^3$

Vận tốc của vận động viên tại giây thứ 5 là $v\left(5\right)=6,51\,m/s$.

Chú ý: Gia tốc của vật chuyển động là $a\left(t\right)=\frac{3}{t+1}\left(m/s^2\right)$. Ta tính $v\left(t\right)=\int a\left(t\right)dt$, kết hợp với điều kiện vận tốc ban đầu $v_0=6m/s$. Suy ra công thức tính vận tốc $v\left(t\right)$ tại thời điểm *t* và tính được $v\left(10\right)$.

Bài tập 3. Một nhà khoa học tự chế tên lửa và phóng tên lửa từ mặt đất với vận tốc ban đầu là 20 m/s. Giả sử bỏ qua sức cản của gió, tên lửa chỉ chịu tác động của trọng lực. Hỏi sau 2s thì tên lửa đạt đến tốc độ là bao nhiêu?

A. 0,45 m/s. **B.** 0,4 m/s. **C.** 0,6 m/s. **D.** 0,8 m/s.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Xem như tại thời điểm $t_0=0$ thì nhà khoa học phóng tên lửa với vận tốc đầu 20 m/s. Ta có $s\left(0\right)=0$ và $v\left(0\right)=20$.

Vì tên lửa chuyển động thẳng đứng nên gia tốc trọng trường tại mọi thời điểm t là $s''(t) = -9,8\ m/s^2$.

Nguyên hàm của gia tốc là vận tốc nên ta có vận tốc của tên lửa tại thời điểm t là $v(t) = \int -9,8dt = -9,8t + C_1$.

Do $v(0) = 20$ nên $-9,8t + C_1 = 20 \Leftrightarrow C_1 = 20 \Rightarrow v(t) = -9,8t + 20$.

Vậy vận tốc của tên lửa sau 2s là $v(2) = -9,8.2 + 20 = 0,4(m/s)$.

BÀI 2: TÍCH PHÂN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN

1. Định nghĩa tích phân

Định nghĩa

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, với $a<b$.

Nếu $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ thì giá trị $F(b)-F(a)$ được gọi là tích phân của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

Kí hiệu $\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)}$ (1)

Công thức (1) còn được gọi là công thức Newton – Leibnitz; *a* và *b* được gọi là cận dưới và cận trên của tích phân.

Chẳng hạn: $F(x)=x^3+C$ *là một nguyên hàm của hàm số* $f(x)=3x^2$ *nên tích phân*

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = F(x)\Big|_0^1 = F(1)-F(0)$$

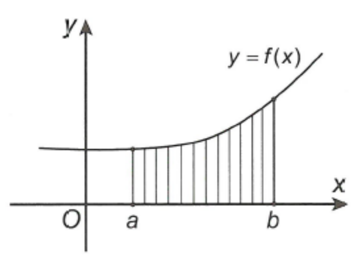
$$=(1^3+C)-(0^3+C)=1.$$

Lưu ý: *Giá trị của tích phân không phụ thuộc vào hằng số C.*

Trong tính toán, ta thường chọn $C=0$.

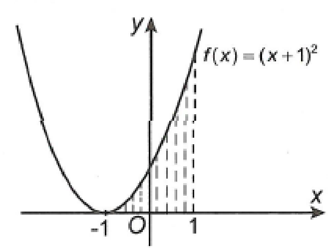
Ý nghĩa hình học của tích phân

Giả sử hàm số $y=f(x)$ là hàm số liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$. Khi đó, tích phân $\int\limits_a^b f(x)dx$ chính là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=f(x)$, trục hoành *Ox* và hai đường thẳng $x=a, x=b$, với $a<b$.



$$\boxed{S=\int\limits_a^b f(x)dx}$$

Chẳng hạn: *Hàm số* $f(x)=x^2+2x+1$ *có đồ thị* (C) *và* $f(x)=(x+1)^2 \geq 0$, *với* $\forall x \in \mathbb{R}$.



Diện tích "tam giác cong" giới hạn bởi (C), *trục Ox và hai đường thẳng* $x=-1$ *và* $x=1$ *là* $S=\int\limits_{-1}^1 f(x)dx = \int\limits_{-1}^1 (x^2+2x+1)dx$

$$=\left(\frac{x^3}{3}+x^2+x\right)\Bigg|_{-1}^1 = \frac{8}{3}.$$

Lưu ý: *Ta còn gọi hình phẳng trên là "hình thang cong".*

2. Tính chất cơ bản của tích phân

Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên khoảng K, trong đó K có thể là khoảng, nửa khoảng hoặc đoạn và $a, b, c \in K$, khi đó:

a. Nếu $b = a$ thì $\boxed{\int_a^a f(x)dx = 0}$

b. Nếu $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì ta có:

$$\boxed{\int_a^b f'(x)dx = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a)}$$

Chẳng hạn: *Cho hàm số* $f(x)$ *liên tục, có đạo hàm trên đoạn* $[-1;2]$ *thỏa mãn* $f(-1) = 8$ *và* $f(2) = -1$.

Khi đó

$$\int_{-1}^{2} f'(x)dx = f(x)\Big|_{-1}^{2} = f(2) - f(-1) = -9$$

Lưu ý: *Từ đó ta cũng có*

$$\boxed{f(b) = f(a) + \int_a^b f'(x)dx}$$

và $\boxed{f(a) = f(b) - \int_a^b f'(x)dx}$

c. Tính chất tuyến tính

$$\boxed{\int_a^b [k.f(x) + h.g(x)]dx = k\int_a^b f(x)dx + h.\int_a^b g(x)dx}$$

Với mọi $k, h \in \mathbb{R}$.

d. Tính chất trung cận

$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx}$, với $c \in (a;b)$

e. Đảo cận tích phân

$$\boxed{\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx}$$

f. Nếu $f(x) \geq 0,\ \forall x \in [a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ và $\int_a^b f(x)dx = 0$ khi $f(x) = 0$.

g. Nếu $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a;b]$ thì

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx}$$

h. Nếu $m = \min\limits_{[a;b]} f(x)$ và $M = \max\limits_{[a;b]} f(x)$ thì

$$\boxed{m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)}$$

i. Tích phân không phụ thuộc vào biến, tức là ta luôn có

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du = \int_a^b f(y)\,dy = \ldots}$$

II. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

1. Phương pháp đổi biến số

Đổi biến dạng 1

Bài toán: Giả sử ta cần tính tích phân $I = \int_a^b f(x)\,dx$, trong đó ta có thể phân tích $f(x) = g(u(x))u'(x)$ thì ta thực hiện phép đổi biến số.

Phương pháp:

+ Đặt $u = u(x)$, suy ra $du = u'(x)\,dx$.

+ Đổi cận:

x	a	b
u	$u(a)$	$u(b)$

+ Khi đó $\boxed{I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u)\,du = G(u)\Big|_{u(a)}^{u(b)}}$, với $G(u)$ là nguyên hàm của $g(u)$.

*__Lưu ý:__ Phương pháp đổi biến số trong tích phân cơ bản giống như đổi biến số trong nguyên hàm, ở đây chỉ thêm bước **đổi cận.***

Đổi biến dạng 2

Dấu hiệu	***Cách đặt***
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x = \lvert a\rvert \sin t; t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x = \frac{\lvert a\rvert}{\sin t};\ t \in \left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x = \lvert a\rvert \tan t; t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

$\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}$	$x=a.\cos 2t; t\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right]$
$\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$	$x=a.\cos 2t; t\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right)$
$\sqrt{(x-a)(b-x)}$	$x=a+(b-a)\sin^2 t; t\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

2. Phương pháp tích phân từng phần

Bài toán: Tính tích phân $\boxed{I=\int_a^b u(x).v'(x)dx}$

Chú ý: *Cần phải lựa chọn u và dv hợp lí sao cho ta dễ dàng tìm được v và tích phân* $\int_a^b vdu$ *dễ tính hơn* $\int_a^b udv$.

Hướng dẫn giải

Đặt $\begin{cases} u=u(x) \\ dv=v'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=u'(x)dx \\ v=v(x) \end{cases}$

Khi đó $\boxed{I=(u.v)\Big|_a^b-\int_a^b v.du}$ (công thức tích phân từng phần)

III. TÍCH PHÂN CÁC HÀM SỐ ĐẶC BIỆT

1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-a;a]$. Khi đó

Đặc biệt $\boxed{\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_0^a [f(x)+f(-x)]dx}$ (1)

+ Nếu $f(x)$ là hàm số lẻ thì ta có $\boxed{\int_{-a}^{a} f(x)dx=0}$ (1.1)

+ Nếu $f(x)$ là hàm số chẵn thì ta có $\boxed{\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx}$ (1.2)

và $\boxed{\int_{-a}^{a} \dfrac{f(x)}{1+b^x}dx=\dfrac{1}{2}\int_0^a f(x)dx}$ $(0<b\neq 1)$ (1.3)

2. Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì $\boxed{\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx}$

Hệ quả: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$, khi đó: $\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx}$

3. Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a+b-x)=f(x)$ thì $\boxed{\int_a^b xf(x)dx=\dfrac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx}$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Tính tích phân bằng cách sử dụng định nghĩa, tính chất

1. Phương pháp giải

Sử dụng các tính chất của tích phân.

Sử dụng bảng nguyên hàm và định nghĩa tích phân để tính tích phân.

2. Bài tập

Bài tập 1: Biết tích phân $I=\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}=a\sqrt{2}+b\sqrt{3}+c$, với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Giá trị biểu thức $P=a+b+c$ là

A. $P=8.$ **B.** $P=0.$ **C.** $P=2.$ **D.** $P=6.$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\neq 0, \forall x\in[1;2]$ nên

$$I=\int_1^2 \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}.\sqrt{x+1}}dx=\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}}dx-\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx=\left(2\sqrt{x}-2\sqrt{x+1}\right)\Big|_1^2$$

$=4\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2.$ Suy ra $a=4, b=c=-2$ nên $P=a+b+c=0.$

Nhân liên hợp $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}.$

Bài tập 2: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{1}{3}$ và $f'(x)=x\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị $f(1)$ bằng

A. $f(1)=\frac{2}{3}.$ **B.** $f(1)=\frac{3}{2}.$ **C.** $f(1)=-\frac{2}{3}.$ **D.** $f(1)=\frac{1}{3}.$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Từ $f'(x)=x\left[f(x)\right]^2$ (1), suy ra $f'(x)\geq 0$ với mọi $x\in[1;2]$.

Suy ra $f(x)$ là hàm không giảm trên đoạn $[1;2]$ nên $f(x)\leq f(2)<0$, $\forall x\in[1;2]$.

Chia 2 vế hệ thức (1) cho $\left[f(x)\right]^2$ ta được $\frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}=x, \forall x\in[1;2]$. (2)

Lấy tích phân 2 vế trên đoạn $[1;2]$ hệ thức (2), ta được

$$\int_1^2 \frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}dx=\int_1^2 xdx \Leftrightarrow \left[\frac{-1}{f(x)}\right]\Bigg|_1^2=\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 \Leftrightarrow \frac{1}{f(1)}-\frac{1}{f(2)}=\frac{3}{2}.$$

Do $f(2)=-\frac{1}{3}$ nên suy ra $f(1)=-\frac{2}{3}$.

Chú ý rằng đề bài cho $f(2)$, yêu cầu tính $f(1)$, ta có thể sử dụng nguyên hàm để tìm hằng số C. Tuy nhiên ta cũng có thể dựa vào định nghĩa của tích phân để xử lí.

Bài tập 3: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{2}{2x-1}$ và $f(0)=1, f(1)=-2$. Khi đó $f(-1)+f(3)$ bằng

A. $-1+\ln 15$. **B.** $3+\ln 5$. **C.** $-2+\ln 3$. **D.** $-1-\ln 15$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $\int\limits_{-1}^{0} f'(x)dx = f(0)-f(-1)$ nên suy ra $f(-1)=f(0)-\int\limits_{-1}^{0} f'(x)dx$.

$=1-\int\limits_{-1}^{0} f'(x)dx$.

Tương tự ta cũng có

$f(3)=f(1)+\int\limits_{1}^{3} f'(x)dx$

$=-2+\int\limits_{1}^{3} f'(x)dx$.

Vậy $f(-1)+f(3)=-1-\int\limits_{-1}^{0} f'(x)dx+\int\limits_{1}^{3} f'(x)dx=-1-\ln|2x-1|\Big|_{-1}^{0}+\ln|2x-1|\Big|_{1}^{3}$.

Vậy $f(-1)+f(3)=-1+\ln 15$.

Bài tập 4: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int\limits_{0}^{1}\left[f'(x)\right]^2 dx=7$ và $\int\limits_{0}^{1} x^3.f'(x)dx=-1$. Giá trị $I=\int\limits_{0}^{1} f(x)dx$ là

A. 1. **B.** $\frac{7}{4}$. **C.** $\frac{7}{5}$. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $\int\limits_{0}^{1}\left[f'(x)\right]^2 dx=7$ (1).

$\int\limits_{0}^{1} x^6 dx=\frac{1}{7}\Rightarrow\int\limits_{0}^{1} 49x^6 dx=7$ (2).

và $\int\limits_0^1 14x^3.f'(x)dx=-14$ (3).

Cộng hai vế (1), (2) và (3) suy ra

$\int\limits_0^1\left[f'(x)+7x^3\right]^2dx=0$ mà $\left[f'(x)+7x^3\right]^2\geq 0$

$\Rightarrow f'(x)=-7x^3.$

Hay $f(x)=-\dfrac{7x^4}{4}+C.$

$f(1)=0\Rightarrow -\dfrac{7}{4}+C=0\Rightarrow C=\dfrac{7}{4}.$

Do đó $f(x)=-\dfrac{7x^4}{4}+\dfrac{7}{4}.$

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)dx=\int\limits_0^1\left(-\dfrac{7x^4}{4}+\dfrac{7}{4}\right)dx=\dfrac{7}{5}.$

Bài tập 5: Cho $f(x),g(x)$ là hai hàm số liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ. Biết $\int\limits_0^1 f(x)dx=5;\int\limits_0^1 g(x)dx=7$. Giá trị của $A=\int\limits_{-1}^1 f(x)dx+\int\limits_{-1}^1 g(x)dx$ là

A. 12. **B.** 24. **C.** 0. **D.** 10.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Vì $f(x)$ là hàm số chẵn nên $\int\limits_{-1}^1 f(x)dx=2\int\limits_0^1 f(x)dx=2.5=10$

Vì $g(x)$ là hàm số lẻ nên $\int\limits_{-1}^1 g(x)dx=0$.

Vậy $A=10.$

Bài tập 6: Cho $\int\limits_0^1\dfrac{xdx}{(2x+1)^2}=a+b\ln 3$ với *a, b* là các số hữu tỉ. Giá trị của $a+b$ bằng

A. $\dfrac{5}{12}$. **B.** $-\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{1}{12}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $\int\limits_0^1\dfrac{xdx}{(2x+1)^2}=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1\dfrac{2x+1-1}{(2x+1)^2}dx=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1\left(\dfrac{1}{2x+1}-\dfrac{1}{(2x+1)^2}\right)dx$

$$=\left(\frac{1}{4(2x+1)}+\frac{1}{4}\ln(2x+1)\right)\Bigg|_0^1=-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\ln 3.$$

Vậy $a=-\frac{1}{6}, b=\frac{1}{4}\Rightarrow a+b=\frac{1}{12}.$

Bài tập 7: Cho $\int\limits_2^3 \frac{2x+3}{x^2+x}dx=a\ln 2+b\ln 3,$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Giá trị biểu thức a^2-ab-b là

A. 11. **B.** 21. **C.** 31. **D.** 41.

Hướng dẫn giải

Ta có $\int\limits_2^3 \frac{2x+3}{x^2+x}dx=\int\limits_2^3 \frac{2x+1+2}{x^2+x}dx=\int\limits_2^3\left(\frac{2x+1}{x^2+x}+\frac{2}{x^2+x}\right)dx$

$$=\int\limits_2^3\left(\frac{2x+1}{x^2+x}+\frac{2}{x}-\frac{2}{x+1}\right)dx=\left(\ln\left|x^2+x\right|+2\ln|x|-2\ln|x+1|\right)\Big|_2^3=-5\ln 2+4\ln 3$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=-5\\ b=4\end{cases}\to a^2-ab-b=41.$$

Chọn D.

Bài tập 8. Biết rằng tích phân $\int\limits_1^2 \frac{5x+6}{x^2+5x+6}dx=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5,$ với a,b,c là các số nguyên. Giá trị biểu thức $S=a+bc$ là bao nhiêu?

A. $S=-62.$ **B.** $S=10.$ **C.** $S=20.$ **D.** $S=-10.$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $\int\limits_1^2 \frac{5x+6}{x^2+5x+6}dx=\int\limits_1^2 \frac{5x+6}{(x+2)(x+3)}dx=\int\limits_1^2\left(\frac{9}{x+3}-\frac{4}{x+2}\right)dx$

$$=\left(9\ln|x+3|-4\ln|x+2|\right)\Big|_1^2=9\ln 5+4\ln 3-26\ln 2.$$

Suy ra $a=-26, b=4, c=9.$ Vậy $S=a+bc=-26+4.9=10.$

Bài tập 9: Cho $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x+\sin x.\cos x+1}{\cos^4 x+\sin x.\cos^3 x}dx=a+b\ln 2+c\ln\left(1+\sqrt{3}\right)$, với a,b,c là các số hữu tỉ. Giá trị abc bằng

A. 0. **B.** -2. **C.** -4. **D.** -6.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x + \sin x.\cos x + 1}{\cos^4 x + \sin x.\cos^3 x} dx = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\cos^2 x + \sin x.\cos x + \sin^2 x}{\cos^2 x\left(\cos^2 x + \sin x.\cos x\right)} dx$

$= \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2 + \tan x + \tan^2 x}{\cos^2 x\left(1 + \tan x\right)} dx = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2 + \tan x + \tan^2 x}{\left(1 + \tan x\right)} d\left(\tan x\right)$

$= \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\tan x + \frac{2}{\left(1 + \tan x\right)}\right) d\left(\tan x\right) = \left.\frac{\tan^2 x}{2}\right|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + 2\ln\left|\tan x + 1\right|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$

$= 1 - 2\ln 2 + 2\ln\left(\sqrt{3} + 1\right)$. Suy ra $a = 1, b = -2, c = 2$ nên $abc = -4$.

Bài tập 10: Cho hàm số $f\left(x\right) = \begin{cases} e^x + m, & khi\ \ x \ge 0 \\ 2x\sqrt{3 + x^2}, & khi\ \ x < 0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Biết $\int_{-1}^{1} f\left(x\right) dx = ae + b\sqrt{3} + c\left(a, b, c \in \mathbb{Q}\right)$. Tổng $T = a + b + 3c$ bằng

A. 15. **B.** -10. **C.** -19. **D.** -17.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Do hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số liên tục tại $x = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} f\left(x\right) = \lim\limits_{x \to 0^-} f\left(x\right) = f\left(0\right) \Leftrightarrow 1 + m = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

Ta có $\int_{-1}^{1} f\left(x\right) dx = \int_{-1}^{0} f\left(x\right) dx + \int_{0}^{1} f\left(x\right) dx = I_1 + I_2$

$I_1 = \int_{-1}^{0} 2x\sqrt{3 + x^2} dx = \int_{-1}^{0} \left(3 + x^2\right)^{\frac{1}{2}} d\left(3 + x^2\right) = \left.\frac{2}{3}\left(3 + x^2\right)\sqrt{3 + x^2}\right|_{-1}^{0} = 2\sqrt{3} - \frac{16}{3}$.

$I_2 = \int_{0}^{1} \left(e^x - 1\right) dx = \left.\left(e^x - x\right)\right|_{0}^{1} = e - 2$.

Suy ra $\int_{-1}^{1} f\left(x\right) dx = I_1 + I_2 = e + 2\sqrt{3} - \frac{22}{3}$. Suy ra $a = 1; b = 2; c = -\frac{22}{3}$.

Vậy $T = a + b + 3c = 1 + 2 - 22 = -19$.

Bài tập 11: Biết $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1 + 3^{-x}} dx = m$. Giá trị của $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1 + 3^x} dx$ bằng

A. $\pi - m$. **B.** $\frac{\pi}{4} + m$. **C.** $\pi + m$. **D.** $\frac{\pi}{4} - m$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos^2 x}{1+3^{-x}}dx+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos^2 x}{1+3^{x}}dx=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 xdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2x)dx=\pi.$

Suy ra $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos^2 x}{1+3^{x}}dx=\pi-m.$

Dạng 2: Tính tích phân bằng phương pháp đổi biến

1. Phương pháp giải

Nắm vững phương pháp đổi biến số dạng 1 và dạng 2, cụ thể:

Đổi biến dạng 1

Bài toán: Giả sử ta cần tính $I=\int_a^b f(x)dx,$ trong đó ta có thể phân tích $f(x)=g(u(x))u'(x).$

Bước 1: Đặt $u=u(x),$ suy ra $du=u'(x)dx.$

Bước 2: Đổi cận

x	a	B
u	$u(a)$	$u(b)$

Bước 3: Tính

$$\boxed{I=\int_a^b f(x)dx=\int_{u(a)}^{u(b)} g(u)du=G(u)\Big|_{u(a)}^{u(b)}}$$

Với $G(u)$ là một nguyên hàm của $g(u)$.

Đổi biến dạng 2

Bài toán: Giả sử ta cần tính $I=\int_a^b f(x)dx$, ta có thể đổi biến như sau:

Bước 1: Đặt $x=\varphi(t),$ ta có $dx=\varphi'(t)dt.$

Bước 2: Đổi cận

x	a	b
t	α	β

Bước 3:

Tính $\boxed{I=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)).\varphi'(t)dt=\int_\alpha^\beta g(t)dt=G(t)\Big|_\alpha^\beta}$

Với $G(t)$ là một nguyên hàm của $g(t).$

Dấu hiệu	***Cách đặt***

$\sqrt{a^2-x^2}$	$x=\lvert a\rvert\sin t, t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x=\frac{\lvert a\rvert}{\sin t}, t\in\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\setminus\{0\}$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x=\lvert a\rvert\tan t, t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$
$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$	$x=a.\cos 2t, t\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right]$
$\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$	$x=a.\cos 2t, t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$
$\sqrt{(x-a)(b-x)}$	$x=a+(b-a)\sin^2 t, t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

2. Bài tập mẫu

Bài tập 1: Biết $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin^2 x+3\sin x+2}dx=a\ln 2+b\ln 3,$ với a,b là các số nguyên.

Giá trị của $P=2a+b$ là

A. 3. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin^2 x+3\sin x+2}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(\sin x+1)(\sin x+2)}d(\sin x)$

$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin x+1}-\frac{1}{\sin x+2}\right)d(\sin x)=\left(\ln\lvert\sin x+1\rvert-\ln\lvert\sin x+2\rvert\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\ln 2-\ln 1-(\ln 3-\ln 2)=2\ln 2-\ln 3$

Suy ra $a=2,b=-1\Rightarrow 2a+b=3.$

Bài tập 2: Biết $I=\int_0^{\ln 2}\frac{dx}{e^x+3e^{-x}+4}=\frac{1}{c}(\ln a-\ln b+\ln c)$, với a,b,c là các số nguyên tố.

Giá trị của $P=2a-b+c$ là

A. $P=-3.$ **B.** $P=-1.$ **C.** $P=4.$ **D.** $P=3.$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $I=\int_0^{\ln 2}\frac{dx}{e^x+3e^{-x}+4}=\int_0^{\ln 2}\frac{e^x dx}{e^{2x}+4e^x+3}.$

Đặt $t=e^x\Rightarrow dt=e^x dx.$

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=1, x=\ln 2\Rightarrow t=2.$

Khi đó

$$I=\int_1^2\frac{1}{t^2+4t+3}dt=\frac{1}{2}\int_1^2\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t+3}\right)dt=\frac{1}{2}\ln\frac{t+1}{t+3}\Big|_1^2=\frac{1}{2}\left(\ln 3-\ln 5+\ln 2\right).$$

Suy ra $a=3,b=5,c=2$. Vậy $P=2a-b+c=3.$

Bài tập 3: Biết $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{1+\sin x}=\frac{a\sqrt{3}+b}{c}$, với $a,b\in\mathbb{Z},c\in\mathbb{Z}^+$ và *a, b, c* là các số nguyên tố cùng nhau. Giá trị của tổng $a+b+c$ bằng

A. 5. **B.** 12. **C.** 7. **D.** -1.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{1+\sin x}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)^2}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)}{\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)^2}dx.$$

Đặt $t=1+\tan\frac{x}{2}\Rightarrow 2dt=\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)dx.$

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=1; x=\frac{\pi}{6}\Rightarrow t=3-\sqrt{3}.$

$$I=\int\limits_1^{3-\sqrt{3}}\frac{2dt}{t^2}=-\frac{2}{t}\Big|_1^{3-\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{3}+3}{3}.$$

Suy ra $a=-1,b=3,c=3$ nên $a+b+c=5.$

Lưu ý: $1+\sin x=\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2$. *Chia tử và mẫu cho* $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$.

Bài tập 4: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_0^1 f(2x)dx=8.$ Giá trị của $I=\int\limits_0^{\sqrt{2}}xf\left(x^2\right)dx$ là

A. 4. **B.** 8. **C.** 16. **D.** 64.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đặt $x^2=2u\Rightarrow 2xdx=2du\Rightarrow xdx=du.$

Đổi cận $x=0\Rightarrow u=0, x=\sqrt{2}\Rightarrow u=1$.

Khi đó $I=\int\limits_0^1 f(2u)\,du=\int\limits_0^1 f(2x)\,dx=8$.

Bài tập 5: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $(0;+\infty)$ sao cho $x^2+xf(e^x)+f(e^x)=1$; với mọi $x\in(0;+\infty)$. Giá trị của $I=\int\limits_{\sqrt{e}}^{e}\frac{f(x).\ln x}{x}dx$ là

A. $I=-\frac{1}{8}$. **B.** $I=-\frac{2}{3}$. **C.** $I=\frac{1}{12}$. **D.** $I=\frac{3}{8}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Với $x\in(0;+\infty)$ ta có $x^2+xf(e^x)+f(e^x)=1\Rightarrow f(e^x)=\frac{1-x^2}{1+x}=1-x$.

Đặt $\ln x=t\Leftrightarrow x=e^t\Rightarrow dt=\frac{dx}{x}$.

Đổi cận $x=\sqrt{e}\Rightarrow t=\frac{1}{2}; x=e\Rightarrow t=1$.

Khi đó $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}t.f(e^t)\,dt=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}t(1-t)\,dt=\frac{1}{12}$.

Bài tập 6: Biết $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\sin x-\cos x}{2\sin x+3\cos x}dx=\frac{-11}{13}\ln 2+b\ln 3+c\pi,(b,c\in\mathbb{Q})$. Giá trị của $\frac{b}{c}$ là

A. $\frac{22}{3}$. **B.** $\frac{22\pi}{3}$. **C.** $\frac{22}{3\pi}$. **D.** $\frac{22\pi}{13}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Phân tích $\frac{3\sin x-\cos x}{2\sin x+3\cos x}=\frac{m(2\sin x+3\cos x)+n(2\cos x-3\sin x)}{2\sin x+3\cos x}$

$$=\frac{(2m-3n)\sin x+(3m+2n)\cos x}{2\sin x+3\cos x}$$

Đồng nhất hệ số ta có $\begin{cases}2m-3n=3\\3m+2n=-1\end{cases}\Leftrightarrow m=\frac{3}{13}; n=-\frac{11}{13}$.

Suy ra $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\sin x-\cos x}{2\sin x+3\cos x}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{3}{13}(2\sin x+3\cos x)-\frac{11}{13}(2\cos x-3\sin x)}{2\sin x+3\cos x}dx.$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{3}{13} - \frac{11}{13} . \frac{2\cos x - 3\sin x}{2\sin x + 3\cos x} \right] dx = \frac{3}{13}(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{11}{13} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos x - 3\sin x}{2\sin x + 3\cos x} dx.$

$= \frac{3\pi}{26} - \frac{11}{13} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(2\sin x + 3\cos x)}{2\sin x + 3\cos x} dx = \frac{3\pi}{26} - \frac{11}{13} \ln|2\sin x + 3\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{3\pi}{26} - \frac{11}{13}\ln 2 + \frac{11}{13}\ln 3.$ Do đó $\begin{cases} b = \frac{11}{13} \\ c = \frac{3}{26} \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{11}{13} . \frac{26}{3} = \frac{22}{3}$

Bài tập 7: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x . f(\cos^2 x) dx = 2$ và $\int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x \ln x} dx = 2$. Giá trị của $I = \int_{\frac{1}{4}}^{2} \frac{f(2x)}{x} dx$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 8.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đặt $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x . f(\cos^2 x) dx = 2 \Leftrightarrow \int_{0.}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x . \cos x}{\cos^2 x} . f(\cos^2 x) dx = 2.$

Đặt $t = \cos^2 x \Rightarrow dt = -2\sin x \cos x dx \Rightarrow -\frac{1}{2} dt = \sin x \cos x dx.$

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 1$ và $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{1}{2}.$ Khi đó $A = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{f(t)}{t} dt = 4.$

Đặt $B = \int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x \ln x} dx = 2 \Leftrightarrow \int_e^{e^2} \frac{\ln x . f(\ln^2 x)}{x \ln^2 x} dx = 2.$

Tương tự ta có $B = \int_1^4 \frac{f(t)}{t} dt = 4.$

Giá trị của $I = \int_{\frac{1}{4}}^{2} \frac{f(2x)}{x} dx.$ Đặt $t = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt.$

Đổi cận $x = \frac{1}{4} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$ và $x = 2 \Rightarrow t = 4.$

Khi đó $I = \int_{\frac{1}{2}}^{4} \frac{f(t)}{t} dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{f(t)}{t} dt + \int_1^4 \frac{f(t)}{t} dt = 4 + 4 = 8$

Bài tập 8: Cho $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{(x+3)(x+1)^3}}dx = \sqrt{a}-\sqrt{b}$; với a,b là các số nguyên. Giá trị của biểu thức a^b+b^a bằng

A. 17. **B.** 57. **C.** 145. **D.** 32.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Giá trị của $I=\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{(x+3)(x+1)^3}}dx = \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{\frac{x+3}{x+1}}}\frac{dx}{(x+1)^2}$.

Đặt $t=\sqrt{\frac{x+3}{x+1}} \Rightarrow 2tdt = \frac{-2}{(x+1)^2}dx \Rightarrow \frac{dx}{(x+1)^2} = -tdt.$

Đổi cận $x=0 \Rightarrow t=\sqrt{3}, x=1 \Rightarrow t=\sqrt{2}.$

Ta có $I=\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{\frac{x+3}{x+1}}}\frac{dx}{(x+1)^2} = \int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{t}(-t)dt = \int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dt = t\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}.$

Mà $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{(x+3)(x+1)^3}}dx = \sqrt{a}-\sqrt{b}$ nên suy ra $a=3, b=2.$

Từ đó ta có giá trị $a^b+b^a = 3^2+2^3 = 17.$

Bài tập 9: Cho $\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{\frac{x}{x^3+1}}dx = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{a}{b}+\sqrt{b}\right)$, với a,b là các số nguyên tố. Giá trị của biểu thức $P=2(a+b)$ bằng

A. 12. **B.** 10. **C.** 18. **D.** 15.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Biến đổi $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{\frac{x}{x^3+1}}dx = \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{\frac{x}{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}}dx = \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x.\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}}dx = \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}}.\frac{1}{x^4}dx$.

Đặt $u=\sqrt{1+\frac{1}{x^3}} \Rightarrow u^2 = 1+\frac{1}{x^3} \Rightarrow 2udu = -\frac{3}{x^4}dx$ và $x^3 = \frac{1}{u^2-1}$.

Đổi cận $x=\frac{1}{2} \Rightarrow u=3; x=1 \Rightarrow u=\sqrt{2}.$

Ta có $I=\int\limits_{\sqrt{2}}^3 \frac{\frac{2udu}{3}}{(u^2-1).u} = \frac{2}{3}\int\limits_{\sqrt{2}}^3 \frac{du}{u^2-1} = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\Bigg|_{\sqrt{2}}^3 = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right).$

Suy ra $a=3, b=2$. Vậy $P=2(a+b)=10$.

Dạng 3: Tính tích phân bằng phương pháp tích phân từng phần

Bài tập 1. Cho tích phân $I=\int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x}dx=\frac{b}{c}+a\ln 2$ với a là số thực b và c là các số dương, đồng thời $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Giá trị của biểu thức $P=2a+3b+c$ là

A. $P=6$. **B.** $P=5$. **C.** $P=-6$. **D.** $P=4$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=\frac{dx}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{dx}{x} \\ v=\frac{-1}{x} \end{cases}$.

Khi đó $I=\left.\frac{-\ln x}{x}\right|_1^2+\int\limits_1^2 \frac{1}{x^2}dx=\left.\left(\frac{-\ln x}{x}+\frac{-1}{x}\right)\right|_1^2=\frac{1}{2}-\frac{\ln 2}{2}$.

Suy ra $b=1, c=2, a=\frac{-1}{2}$. Do đó $P=2a+3b+c=4$.

+ *Ưu tiên logarit.*

+ *Đặt* $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=\frac{dx}{x^2} \end{cases}$.

Bài tập 2: Biết $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\cos 2x}dx=a\pi+b\ln 2$, với a,b là các số hữu tỉ. Giá trị của $T=16a-8b$ là

A. $T=4$. **B.** $T=5$. **C.** $T=2$. **D.** $T=-2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt $A=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\cos 2x}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{2\cos^2 x}dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}dx$.

Đặt $\begin{cases} u=x \Rightarrow du=dx \\ dv=\frac{1}{\cos^2 x}dx \Rightarrow v=\tan x \end{cases}$

Khi đó

$A=\frac{1}{2}\left[x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\tan xdx\right]=\frac{1}{2}\left[\left(x\tan x+\ln|\cos x|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right]$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2\right)=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2.$

Vậy $a=\frac{1}{8},b=\frac{-1}{4}$ do đó $16a-8b=2+2=4.$

> + *Biến đổi* $1+\cos 2x=2\cos^2 x.$
>
> + *Ưu tiên đa thức.*
>
> + *Đặt* $\begin{cases}u=x\\ dv=\frac{1}{\cos^2 x}dx\end{cases}.$

Bài tập 3: Cho $I=\int\limits_0^1 xe^{2x}dx=a.e^2+b$ với $a,b\in\mathbb{Q}$. Giá trị của tổng $a+b$ là

A. $\frac{1}{2}.$ **B.** $\frac{1}{4}.$ **C.** 0. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Sử dụng phương pháp từng phần.

Đặt $\begin{cases}u=x\\ dv=e^{2x}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=\frac{1}{2}e^{2x}\end{cases}.$

Khi đó $I=u.v\Big|_0^1-\int\limits_0^1 v.du=\frac{1}{2}x.e^{2x}\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^{2x}dx=\frac{1}{2}x.e^{2x}\Big|_0^1-\frac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^1=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}.$

Suy ra $a.e^2+b=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}.$

Đồng nhất hệ số hai vế ta có $a=\frac{1}{4},b=\frac{1}{4}$. Vậy $a+b=\frac{1}{2}.$

Chọn A.

> + *Ưu tiên đa thức.*
>
> + *Đặt* $\begin{cases}u=x\\ dv=e^{2x}dx\end{cases}.$

Bài tập 4: Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $f(2)=16$ và $\int\limits_0^2 f(x)dx=4.$ Tích phân $\int\limits_0^4 xf'\left(\frac{x}{2}\right)dx$ bằng

A. 112. **B.** 12. **C.** 56. **D.** 144.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt $t=\dfrac{x}{2}\Rightarrow x=2t\Rightarrow dx=2dt$.

Đổi cận $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=0\\x=4\Rightarrow t=2\end{cases}$. Do đó $\int\limits_0^4 xf'\left(\dfrac{x}{2}\right)dx=\int\limits_0^2 4tf'(t)\,dt=\int\limits_0^2 4xf'(x)\,dx$.

Đặt $\begin{cases}u=4x\\dv=f'(x)\,dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=4dx\\v=f(x)\end{cases}$.

Suy ra

$$\int\limits_0^2 4xf'(x)\,dx=\left[4xf(x)\right]\Big|_0^2-\int\limits_0^2 4f(x)\,dx=8f(2)-4\int\limits_0^2 f(x)\,dx=8.16-4.4=112.$$

Bài tập 5. Cho $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln(\sin x+2\cos x)}{\cos^2 x}dx=a\ln 3+b\ln 2+c\pi$ với a,b,c là các số hữu tỉ.

Giá trị của abc bằng

A. $\dfrac{15}{8}$. **B.** $\dfrac{5}{8}$. **C.** $\dfrac{5}{4}$. **D.** $\dfrac{17}{8}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt $\begin{cases}u=\ln(\sin x+2\cos x)\\dv=\dfrac{dx}{\cos^2 x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{\cos x-2\sin x}{\sin x+2\cos x}dx\\v=\tan x+2\end{cases}$.

Khi đó

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(\sin x+2\cos x)}{\cos^2 x}dx=(\tan x+2)\ln(\sin x+2\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-2\sin x}{\cos x}dx$$

$$=3\ln\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)-2\ln 2-\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}(1-2\tan x)dx$$

$$=3\ln 3-\frac{7}{2}\ln 2-\left(x+2\ln|\cos x|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=3\ln 3-\frac{7}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}-2\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=3\ln 3-\frac{5}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}.$$

Suy ra $a=3,b=-\dfrac{5}{2},c=-\dfrac{1}{4}$. Vậy $abc=18$.

Bài tập 6. Biết $\int\limits_1^2 (x+1)^2 e^{x-\frac{1}{x}} dx = me^{\frac{p}{q}} - n,$ trong đó m, n, p, q là các số nguyên dương và $\frac{p}{q}$ là phân số tối giản. Giá trị của $T = m + n + p + q$ là

A. $T = 11.$ **B.** $T = 10.$ **C.** $T = 7.$ **D.** $T = 8.$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có

$$I = \int\limits_1^2 (x+1)^2 e^{x-\frac{1}{x}} dx = \int\limits_1^2 \left(x^2 + 2x + 1\right) e^{x-\frac{1}{x}} dx = \int\limits_1^2 \left(x^2 + 1\right) e^{x-\frac{1}{x}} dx + \int\limits_1^2 2xe^{x-\frac{1}{x}} dx.$$

Xét $I_1 = \int\limits_1^2 \left(x^2 + 1\right) e^{x-\frac{1}{x}} dx = \int\limits_1^2 x^2.e^{x-\frac{1}{x}}.\frac{x^2+1}{x^2} dx = \int\limits_1^2 x^2.e^{x-\frac{1}{x}} d\left(x - \frac{1}{x}\right) = \int\limits_1^2 x^2 d\left(e^{x-\frac{1}{x}}\right)$

$$= x^2 e^{x-\frac{1}{x}}\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 e^{x-\frac{1}{x}} d\left(x^2\right) = x^2 e^{x-\frac{1}{x}}\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 2xe^{x-\frac{1}{x}} dx$$

$$\Rightarrow I_1 + \int\limits_1^2 2xe^{x-\frac{1}{x}} dx = x^2 e^{x-\frac{1}{x}}\Big|_1^2 \Rightarrow I = x^2 e^{x-\frac{1}{x}}\Big|_1^2 = 4e^{\frac{3}{2}} - 1$$

$\Rightarrow m = 4, n = 1, p = 3, q = 2.$

Khi đó $T = m + n + p + q = 4 + 1 + 3 + 2 = 10.$

Bài tập 7. Tìm số thực $\mathrm{m} > 1$ thỏa mãn $\int\limits_1^{\mathrm{m}} (\ln x + 1) dx = \mathrm{m}.$

A. $\mathrm{m} = 2\mathrm{e}.$ **B.** $\mathrm{m} = \mathrm{e}.$ **C.** $\mathrm{m} = \mathrm{e}^2.$ **D.** $\mathrm{m} = \mathrm{e} + 1.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$A = \int\limits_1^m (\ln x + 1) dx = \int\limits_1^m \ln x dx + \int\limits_1^m dx$$

$$I = \int\limits_1^m \ln x dx$$

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x \end{cases}$

$$\Rightarrow I = x \ln x\Big|_1^m - \int\limits_1^m dx$$

$$A = x \ln x\Big|_1^m = m \ln m = m \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = e \\ m = 0 \end{array}\right..$$

Bài tập 8. Đặt $I_k = \int_1^e \ln\frac{k}{x}\mathrm{d}x,\ k$ nguyên dương. Ta có $I_k < e-2$ khi:

A. $k \in \{1;2\}$. **B.** $k \in \{2;3\}$. **C.** $k \in \{4;1\}$. **D.** $k \in \{3;4\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases} u = \ln\frac{k}{x} \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\frac{1}{x}dx \\ v = x \end{cases} \Rightarrow I_k = \left(x.\ln\frac{k}{x}\right)\Big|_1^e + \int_1^e \mathrm{d}x = (e-1)\ln k - 1 \Rightarrow I_k < e-2$

$\Leftrightarrow (e-1)\ln k - 1 < e-2 \Leftrightarrow \ln k < \frac{e-3}{e-1} \Leftrightarrow \ln k < 1 - \frac{2}{e-1}$

Do k nguyên dương nên $k \in \{1;2\}$.

Bài tập 9. Tìm m để $\int_0^1 e^x(x+m)dx = e$.

A. $\mathrm{m} = 0$. **B.** $\mathrm{m} = \mathrm{e}$. **C.** $\mathrm{m} = 1$. **D.** $\mathrm{m} = \sqrt{\mathrm{e}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt

$\begin{cases} \mathrm{u} = \mathrm{x} + \mathrm{m} \\ \mathrm{dv} = \mathrm{e}^{\mathrm{x}}\mathrm{dx} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{du} = \mathrm{dx} \\ \mathrm{v} = \mathrm{e}^{\mathrm{x}} \end{cases}$

$\Rightarrow \mathrm{I} = \int_0^1 \mathrm{e}^{\mathrm{x}}(\mathrm{x}+\mathrm{m})\mathrm{dx} = \mathrm{e}^{\mathrm{x}}(\mathrm{x}+\mathrm{m})\Big|_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^{\mathrm{x}}\mathrm{dx} = \mathrm{e}^{\mathrm{x}}(\mathrm{x}+\mathrm{m}-1)\Big|_0^1 = \mathrm{me} - \mathrm{m} + 1$

Mặt khác: $\mathrm{I} = \mathrm{e} \Rightarrow \mathrm{me} - \mathrm{m} + 1 = \mathrm{e} \Leftrightarrow \mathrm{m}(\mathrm{e}-1) = \mathrm{e} - 1 \Leftrightarrow \mathrm{m} = 1$.

Dạng 4: Tích phân chứa dấu giá trị tuyệt đối

1. Phương pháp

Bài toán: Tính tích phân $I = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

(với $g(x)$ là biểu thức chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối)

PP chung:

Xét dấu của biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối trên $[a;b]$

Dựa vào dấu để tách tích phân trên mỗi đoạn tương ứng (sử dụng tính chất 3 để tách)

Tính mỗi tích phân thành phần.

Đặc biệt: Tính tích phân $I = \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$

Cách giải

Cách 1:

+) Cho $f(x)=0$ *tìm nghiệm trên* $[a;b]$

+) Xét dấu của $f(x)$ *trên* $[a;b]$*, dựa vào dấu của* $f(x)$ *để tách tích phân trên mỗi đoạn tương ứng (sử dụng tính chất 3 để tách)*

+) Tính mỗi tích phân thành phần.

Cách 2:

+) Cho $f(x)=0$ *tìm nghiệm trên* $[a;b]$ giả sử các nghiệm đó là $x_1;x_2;...x_n$

(với $x_1<x_2<...<x_n$).

Khi đó $I=\int\limits_a^{x_1}|f(x)|\mathrm{d}x+\int\limits_{x_1}^{x_2}|f(x)|\mathrm{d}x+\int\limits_{x_2}^{x_3}|f(x)|\mathrm{d}x+...+\int\limits_{x_n}^{b}|f(x)|\mathrm{d}x$

$$\Rightarrow I=\left|\int\limits_a^{x_1}f(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int\limits_{x_1}^{x_2}f(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int\limits_{x_2}^{x_3}f(x)\mathrm{d}x\right|+...+\left|\int\limits_{x_n}^{b}f(x)\mathrm{d}x\right|$$

+) Tính mỗi tích phân thành phần

2. Bài tập

Bài tập 1: $S=\int\limits_{-1}^{2}\left|x^2-x-2\right|dx=\frac{a}{b},\left(a,b\in\mathbb{Z}^+\right),\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị $a+b$ bằng

A. 11. **B.** 25. **C.** 100. **D.** 50.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$S=\int\limits_{-1}^{2}\left|x^2-x-2\right|dx=-\int\limits_{-1}^{2}\left(x^2-x-2\right)dx=-\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right)\Bigg|_{-1}^{2}$$
$$=-\left[\left(\frac{8}{3}-\frac{4}{2}-4\right)-\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2\right)\right]=\frac{9}{2}$$

Bài tập 2: $I=\int\limits_0^{\pi}\sqrt{1-\sin 2x}dx=a\sqrt{a},\left(a\in\mathbb{N}^*\right)$. Hỏi a^3 là bao nhiêu?

A. 27. **B.** 64. **C.** 125. **D.** 8.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có: $\sqrt{1-\sin 2x}=\sqrt{\left(\sin x-\cos x\right)^2}=\left|\sin x-\cos x\right|=\sqrt{2}\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|$.

Với $x\in[0;\pi]\Rightarrow x-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$.

+ Với $x-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{4};0\right]$ thì $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)<0$

+ Với $x-\frac{\pi}{4}\in\left[0;\frac{3\pi}{4}\right]$ thì $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>0$

$$\Rightarrow I=-\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)dx+\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)dx=2\sqrt{2}.$$

Chọn 3: Biết $I=\int_1^5\frac{2|x-2|+1}{x}dx=4+a\ln 2+b\ln 5$, với a, b là các số nguyên. Giá trị $S=a-b$ bằng

A. 9. **B.** 11. **C.** 5. **D.** -3.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có: $I=\int_1^5\frac{2|x-2|+1}{x}dx=\int_1^2\frac{2|x-2|+1}{x}dx+\int_2^5\frac{2|x-2|+1}{x}dx$

$$=\int_1^2\frac{2(2-x)+1}{x}dx+\int_2^5\frac{2(x-2)+1}{x}dx=\int_1^2\frac{5-2x}{x}dx+\int_2^5\frac{2x-3}{x}dx$$

$$=\int_1^2\left(\frac{5}{x}-x\right)dx+\int_2^5\left(2-\frac{3}{x}\right)dx=\left(5\ln|x|-x\right)\Big|_1^2+\left(2x-3\ln|x|\right)\Big|_2^5$$

$$=8\ln 2-3\ln 5+4\Rightarrow\begin{cases}a=8\\b=-3\end{cases}\Rightarrow a-b=11.$$

Bài tập 4: Cho tích phân $\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx=ab$ và $a+b=2+2\sqrt{2}$. Giá trị của a và b lần lượt là

A. $\begin{cases}a=2\\b=2\sqrt{2}\end{cases}$.

B. $\begin{cases}a=2\sqrt{2}\\b=2\end{cases}$.

C. $\begin{cases}a=2\sqrt{2}\\b=-2\end{cases}\vee\begin{cases}a=2\\b=2\sqrt{2}\end{cases}$.

D. $\begin{cases}a=2\sqrt{2}\\b=2\end{cases}\vee\begin{cases}a=2\\b=2\sqrt{2}\end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}|\sin x|dx=\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sin x dx-\sqrt{2}\int_{\pi}^{2\pi}\sin x dx$$

$$=-\sqrt{2}\cos x\Big|_0^{\pi}+\sqrt{2}\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}=4\sqrt{2}.$$

$$\Rightarrow\begin{cases}ab=4\sqrt{2}\\a+b=2+2\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow X^2-\left(2+2\sqrt{2}\right)X+4\sqrt{2}=0\Rightarrow\begin{cases}a=2\sqrt{2}\\b=2\end{cases}\vee\begin{cases}a=2\\b=2\sqrt{2}\end{cases}.$$

Bài tập 5: Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 x\left|x-a\right|\mathrm{d}x, a>0$ ta được kết quả $I=f(a)$. Khi đó tổng $f(8)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ có giá trị bằng:

A. $\dfrac{24}{91}$.   **B.** $\dfrac{91}{24}$.   **C.** $\dfrac{17}{2}$.   **D.** $\dfrac{2}{17}$

Hướng dẫn giải

Chọn B

TH1: Nếu $a\ge 1$ khi đó $I=-\int\limits_0^1 x\left(x-a\right)\mathrm{d}x=\left(\dfrac{-x^3}{3}+\dfrac{ax^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{3}\Rightarrow f(8)=\dfrac{8}{2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{11}{3}$

TH 2: Nếu $0<a<1$ khi đó $I=-\int\limits_0^a x\left(x-a\right)\mathrm{d}x+\int\limits_a^1 x\left(x-a\right)\mathrm{d}x$

$=\left(\dfrac{-x^3}{3}+\dfrac{ax^2}{2}\right)\Bigg|_0^a+\left(\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{ax^2}{2}\right)\Bigg|_a^1=\dfrac{a^3}{3}-\dfrac{a}{2}+\dfrac{1}{3}\Rightarrow f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{24}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{8}$

Khi đó $f(8)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{11}{3}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{91}{24}$.

Bài tập 6: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int\limits_0^1 f\left(2x\right)\mathrm{d}x=2$ và $\int\limits_0^2 f\left(6x\right)\mathrm{d}x=14$. Giá trị $\int\limits_{-2}^2 f\left(5\left|x\right|+2\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 30.   **B.** 32.   **C.** 34.   **D.** 36.

Lời giải

Chọn B

+ Xét $\int\limits_0^1 f\left(2x\right)\mathrm{d}x=2$.

Đặt $u=2x\Rightarrow \mathrm{d}u=2\mathrm{d}x$; $x=0\Rightarrow u=0$; $x=1\Rightarrow u=2$.

Nên $2=\int\limits_0^1 f\left(2x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^2 f\left(u\right)\mathrm{d}u\Rightarrow\int\limits_0^2 f\left(u\right)\mathrm{d}u=4$.

+ Xét $\int\limits_0^2 f\left(6x\right)\mathrm{d}x=14$.

Đặt $v=6x\Rightarrow \mathrm{d}v=6\mathrm{d}x$; $x=0\Rightarrow v=0$; $x=2\Rightarrow v=12$.

Nên $14=\int\limits_0^2 f\left(6x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{6}\int\limits_0^{12} f\left(v\right)\mathrm{d}v\Rightarrow\int\limits_0^{12} f\left(v\right)\mathrm{d}v=84$.

+ Xét $\int\limits_{-2}^2 f\left(5\left|x\right|+2\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^0 f\left(5\left|x\right|+2\right)\mathrm{d}x+\int\limits_0^2 f\left(5\left|x\right|+2\right)\mathrm{d}x$.

□ Tính $I_1=\int\limits_{-2}^{0} f\left(5|x|+2\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=5|x|+2$.

Khi $-2<x<0$, $t=-5x+2\Rightarrow \mathrm{d}t=-5\mathrm{d}x$; $x=-2\Rightarrow t=12$; $x=0\Rightarrow t=2$.

$I_1=\frac{-1}{5}\int\limits_{12}^{2} f\left(t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{5}\left[\int\limits_{0}^{12} f\left(t\right)\mathrm{d}t-\int\limits_{0}^{2} f\left(t\right)\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{5}\left(84-4\right)=16$.

□ Tính $I_1=\int\limits_{0}^{2} f\left(5|x|+2\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=5|x|+2$.

Khi $0<x<2$, $t=5x+2\Rightarrow \mathrm{d}t=5\mathrm{d}x$; $x=2\Rightarrow t=12$; $x=0\Rightarrow t=2$.

$I_2=\frac{1}{5}\int\limits_{2}^{12} f\left(t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{5}\left[\int\limits_{0}^{12} f\left(t\right)\mathrm{d}t-\int\limits_{0}^{2} f\left(t\right)\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{5}\left(84-4\right)=16$.

Vậy $\int\limits_{-2}^{2} f\left(5|x|+2\right)\mathrm{d}x=32$.

Bài tập 7: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[0;4\right]$ và $\int\limits_{0}^{2} f\left(x\right)\mathrm{d}x=1$; $\int\limits_{0}^{4} f\left(x\right)\mathrm{d}x=3$. Giá trị $\int\limits_{-1}^{1} f\left(|3x-1|\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$\int\limits_{-1}^{1} f\left(|3x-1|\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1/3} f\left(1-3x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{1/3}^{1} f\left(3x-1\right)\mathrm{d}x$.

$=-\frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{1/3} f\left(1-3x\right)\mathrm{d}\left(1-3x\right)+\frac{1}{3}\int\limits_{1/3}^{1} f\left(3x-1\right)\mathrm{d}\left(3x-1\right)$.

$=-\frac{1}{3}\int\limits_{4}^{0} f\left(t\right)\mathrm{d}t+\frac{1}{3}\int\limits_{0}^{2} f\left(t\right)\mathrm{d}\left(t\right)=-\frac{1}{3}\left(-3\right)+\frac{1}{3}.1=\frac{4}{3}$.

Bài tập 8. $S=\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left|y^4-4y^2+3\right|dy=\frac{a-24\sqrt{3}}{b}$. Giá tị $A+2B$ bằng

A. 80. **B.** 83. **C.** 142. **D.** 79.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$\left|y^4-4y^2+3\right|=\left|\left(y^2-1\right)\left(y^2-3\right)\right|$

Xét dấu $\left(y^2-1\right)\left(y^2-3\right)$, ta có:

y	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y^2-1		+		+	0	-		+		+	
y^2-3		+	0	-		-	0	-	0	+	
$(y^2-1)(y^2-3)$		+	0	-	0	-	0	-	0	+	

$$S=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left|\left(4-4y^2\right)-\left(1-y^4\right)\right|dy=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left|y^4-4y^2+3\right|dy$$

$$=\int_{-\sqrt{3}}^{-1}-\left(y^4-4y^2+3\right)dy+\int_{-1}^{1}\left(y^4-4y^2+3\right)dy+\int_{1}^{\sqrt{3}}-\left(y^4-4y^2+3\right)dy$$

$$=-\left(\frac{y^5}{5}-\frac{4y^3}{3}+3y\right)\Bigg|_{-\sqrt{3}}^{-1}+\left(\frac{y^5}{5}-\frac{4y^3}{3}+3y\right)\Bigg|_{-1}^{1}-\left(\frac{y^5}{5}-\frac{4y^3}{3}+3y\right)\Bigg|_{1}^{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{112-24\sqrt{3}}{15}.$$

Bài tập 9. $S=\int_0^1\sqrt{4x^2-4x+1}dx=\frac{a}{b},\left(a,b\in\mathbb{Z}^+\right),\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị $\sqrt{a+4b}$ bằng

A. 1. **B.** -3. **C.** 35. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có: $I_7=\int_0^1\sqrt{\left(2x-1\right)^2}dx=\int_0^1\left|2x-1\right|dx$

$$\Rightarrow I_7=\int_0^1\left|2x-1\right|dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left|2x-1\right|dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|2x-1\right|dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(1-2x\right)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(2x-1\right)dx=\frac{1}{2}.$$

Suy ra: $a=1,b=2.$

Bài tập 10. $I=\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\sin x}dx=A\sqrt{B}$, biết $A=2B$ Giá trị A^3+B^3 bằng

A. 72. **B.** 8. **C.** 65. **D.** 35.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có: $\sqrt{1+\sin x}=\sqrt{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}=\left|\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right|=\sqrt{2}\left|\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$

Với $x\in[0;2\pi]\Rightarrow \dfrac{x}{2}\in[0;\pi]\Rightarrow \dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\in\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{5\pi}{4}\right]$.

+ Với $\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\in\left[\dfrac{\pi}{4};\pi\right]$ thì $\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)>0$

+ Với $\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\in\left[\pi;\dfrac{5\pi}{4}\right]$ thì $\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)<0$

$$\Rightarrow I=\sqrt{2}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)dx-\sqrt{2}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)dx=4\sqrt{2}.$$

Bài tập 11. Cho tích phân $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sqrt{3}\sin 2x+2\cos^2 x}\,dx=a\sqrt{3}+b$. Giá trị $A=a-b-4$ bằng

A. 2. **B.** -5. **C.** 5. **D.** -8.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$I=\int_0^{2}\sqrt{1-\sqrt{3}\sin 2x+2\cos^2 x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\left(\sin x-\sqrt{3}\cos x\right)^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin x-\sqrt{3}\cos x\right|dx.$$

$\sin x-\sqrt{3}\cos x=0\Leftrightarrow \tan x=\sqrt{3}\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi$.

Do $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ nên $x=\dfrac{\pi}{3}$.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left|\sin x-\sqrt{3}\cos x\right|dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin x-\sqrt{3}\cos x\right|dx=\left|\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\sin x-\sqrt{3}\cos x\right)dx\right|+\left|\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin x-\sqrt{3}\cos x\right)dx\right|$$

$$=\left|\left(-\cos x-\sqrt{3}\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}\right|+\left|\left(-\cos x-\sqrt{3}\sin x\right)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\right|=\left|-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}+1\right|+\left|-\sqrt{3}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right|=3-\sqrt{3}.$$

$\Rightarrow a=-1;\ b=3\Rightarrow A=-8$

Dạng 5: Tính tích phân các hàm đặc biệt, hàm ẩn

1. Phương pháp giải

a. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-a;a]$. Khi đó

Bài tập 1: Tích phân $I=\displaystyle\int_{-1}^{1}\cos x.\ln\frac{2+x}{2-x}dx$ bằng

$$\boxed{\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a}\left[f(x)+f(-x)\right]dx} \quad (1)$$

Chứng minh

Ta có $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx.$

Xét $I = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx.$ Đổi biến $x=-t \Rightarrow dx=-dt.$

Đổi cận $x=-a \Rightarrow t=a; x=0 \Rightarrow t=0$

Khi đó

$$I=\int_{a}^{0} f(-t)(-dt)=\int_{0}^{a} f(-t)\,dt=\int_{0}^{a} f(-x)\,dx$$

Do đó (1) được chứng minh.

Đặc biệt

+ Nếu $f(x)$ là hàm số lẻ thì ta có

$$\boxed{\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0} \quad (1.1).$$

+ Nếu $f(x)$ là hàm số chẵn thì ta có

$$\boxed{\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=2\int_{0}^{a} f(x)\,dx} \quad (1.2)$$

+ Nếu $f(x)$ là hàm số chẵn thì ta cũng có

$$\boxed{\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+b^{x}}dx=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx} \left(0<b\neq 1\right)$$

(1.3).

Chứng minh (1.3):

Đặt $A=\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+b^{x}}dx$ (*).

Đổi biến $x=-t \Rightarrow dx=-dt.$

Đổi cận $x=-a \Rightarrow t=a; x=a \Rightarrow t=-a$

Khi đó $A=\int_{a}^{-a}\frac{f(-1)}{1+b^{-t}}(-dt)=\int_{-a}^{a}\frac{b^{t}.f(t)}{1+b^{t}}dt.$

A. -1. **B.** 2.

C. 0. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Hàm số $f(x)=\cos x.\ln\frac{2+x}{2-x}$ xác định và liên tục trên đoạn $[-1;1]$.

Mặt khác, với $\forall x\in[-1;1] \Rightarrow -x\in[-1;1]$ và

$$f(-x)=\cos(-x).\ln\frac{2-x}{2+x}=-\cos x.\ln\frac{2+x}{2-x}=-f(x).$$

Do đó hàm số $f(x)=\cos x.\ln\frac{2+x}{2-x}$ là hàm số lẻ.

Vậy $I=\int_{-1}^{1}\cos x.\ln\frac{2+x}{2-x}dx=0$.

Chọn C.

Bài tập 2: Cho $y=f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên đoạn $[-6;6]$.

Biết rằng $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx=8$ và $\int_{1}^{3} f(-2x)\,dx=3.$

Tính $\int_{-1}^{6} f(x)\,dx.$

A. $I=11.$ **B.** $I=5.$

C. $I=2.$ **D.** $I=14.$

Hướng dẫn giải

Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-6;6]$ ta có

$$\int_{1}^{3} f(-2x)\,dx=3 \Leftrightarrow \int_{1}^{3} f(2x)\,dx=3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}F(2x)\Big|_{1}^{3}=3.$$

Do đó $F(6)-F(2)=6$ hay $\int_{2}^{6} f(x)\,dx=6.$

Vậy $I=\int_{-1}^{6} f(x)\,dx=\int_{-1}^{2} f(x)\,dx+\int_{2}^{6} f(x)\,dx=14.$

Hay $A=\int\limits_{-a}^{a}\frac{b^x.f\left(x\right)}{1+b^x}dx$ (**).

Suy ra

$$2A=\int\limits_{-a}^{a}f\left(x\right)dx \Leftrightarrow A=\frac{1}{2}\int\limits_{-a}^{a}f\left(x\right)dx.$$

Chọn D.

Bài tập 3: Tích phân $I=\int\limits_{-1}^{1}\frac{x^{2020}}{e^x+1}dx$ có giá trị là

A. $I=0.$ **B.** $I=\frac{2^{2020}}{2019}.$

C. $I=\frac{2^{2021}}{2021}.$ **D.** $I=\frac{2^{2019}}{2019}.$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bài toán (1.3) ở cột bên trái cho hàm số $f\left(x\right)=x^{2020}$ và $b=e$ ta có

Ta có

$$I=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}x^{2020}dx=\left.\frac{x^{2021}}{2021}\right|_{-1}^{1}=\frac{2.2^{2021}}{2021}\Rightarrow I=\frac{2^{2021}}{2021}.$$

Chọn C.

b. Nếu $f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$ thì

$$\boxed{\int\limits_{a}^{b}f\left(x\right)dx=\int\limits_{a}^{b}f\left(a+b-x\right)dx}$$

Hệ quả: hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[0;1\right]$, khi đó:

$$\boxed{\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}f\left(\sin x\right)dx-\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}f\left(\cos x\right)dx}$$

Bài tập 4: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa điều kiện $f\left(x\right)+f\left(-x\right)=2\cos x,$ với $\forall x\in\mathbb{R}$.

Giá trị của $N=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f\left(x\right)dx$ là

A. $N=-1.$ **B.** $N=0.$

C. $N=1.$ **D.** $N=2.$

Hướng dẫn giải

Ta có $N=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f\left(x\right)dx=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f\left(-x\right)dx$

Suy ra $2N=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[f\left(x\right)+f\left(-x\right)\right]dx=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2\cos xdx.$

Vậy $N=2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=2\sin x\left.\right|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=2.$

Chọn D.

c. Nếu $f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$ và $f\left(a+b-x\right)=f\left(x\right)$ thì

$$\boxed{\int_a^b xf\left(x\right)dx=\frac{a+b}{2}\int_a^b f\left(x\right)dx}$$

d. Nếu $f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$ và $f\left(x\right)\geq 0$ với $\forall x\in\left[a;b\right]$ thì $\int_a^b f\left(x\right)dx\geq 0$ và $\int_a^b f\left(x\right)dx=0$ khi $f\left(x\right)=0.$

Bài tập 5: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f\left(x\right)+f\left(2-x\right)=x\left(2-x\right),\forall x\in\mathbb{R}.$

Giá trị tích phân $G=\int_0^2 f\left(x\right)dx$ là

A. $G=2.$ **B.** $G=\frac{1}{2}.$

C. $G=\frac{2}{3}.$ **D.** $G=\frac{1}{3}.$

Hướng dẫn giải

Ta có $G=\int_0^2 f\left(x\right)dx=\int_0^2 f\left(2-x\right)dx$

Suy ra $2G=\int_0^2\left[f\left(x\right)+f\left(-x\right)\right]dx=\int_0^2 x\left(2-x\right)dx$

Vậy $G=\frac{1}{2}\int_0^2 x\left(2-x\right)dx=\frac{2}{3}.$

Chọn C.

Bài tập 6: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$ thỏa mãn $f\left(1\right)=0,$ $\int_0^1\left[f'\left(x\right)\right]^2dx=7$ và $\int_0^1 x^2f\left(x\right)dx=\frac{1}{3}.$ Tích phân $\int_0^1 f\left(x\right)dx$ bằng

A. $\frac{7}{5}.$ **B.** $1.$

C. $\frac{7}{4}.$ **D.** $4.$

Hướng dẫn giải

Đặt $\begin{cases}u=f\left(x\right)\\dv=x^2dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=f'\left(x\right)dx\\v=\frac{x^3}{3}\end{cases}$

Ta có $\int_0^1 x^2f\left(x\right)dx=\left.\frac{x^3f\left(x\right)}{3}\right|_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1 x^3f'\left(x\right)dx$

$\Rightarrow-\frac{1}{3}\int_0^1 x^3.f'\left(x\right)dx=\frac{1}{3}\Rightarrow\int_0^1 x^3.f'\left(x\right)dx=-1.$

Cách 1: Ta có $\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx = 7$ (1).

$\int_0^1 x^6 dx = \left.\frac{x^7}{7}\right|_0^1 = \frac{1}{7} \Rightarrow \int_0^1 49x^6 dx = \frac{1}{7}.49 = 7$ (2).

$\int_0^1 x^3.f'(x)dx = -1 \Rightarrow \int_0^1 14x^3.f'(x)dx = -14$ (3).

Cộng hai vế (1), (2) và (3) suy ra

$$\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx + \int_0^1 49x^6 dx + \int_0^1 14x^3.f'(x)dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left[f(x) + 7x^3\right]^2 dx = 0.$$

Do $\left[f'(x) + 7x^3\right]^2 \geq 0 \Rightarrow \int_0^1 \left[f'(x) + 7x^3\right]^2 dx \geq 0$. Mà

$\int_0^1 \left[f'(x) + 7x^3\right]^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) = -7x^3$.

$f(x) = -\frac{7x^4}{4} + C$.

Mà $f(1) = 0 \Rightarrow -\frac{7}{4} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{7}{4}$.

Do đó $f(x) = -\frac{7x^4}{4} + \frac{7}{4}$.

Vậy $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(-\frac{7x^4}{4} + \frac{7}{4}\right)dx = \frac{7}{5}$.

Một số kĩ thuật giải tích phân hàm ẩn

Loại 1: Biểu thức tích phân đưa về dạng: $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x)$

Cách giải:

+ Ta có $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = \left[u(x)f(x)\right]'$

+ Do đó $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x) \Leftrightarrow \left[u(x)f(x)\right]' = h(x)$

Suy ra $u(x)f(x) = \int h(x)dx$

Suy ra được $f(x)$

Loại 2: Biểu thức tích phân đưa về dạng: $f'(x) + f(x) = h(x)$

Cách giải:

+ Nhân hai vế với $e^{x} \Rightarrow e^{x}.f'(x)+e^{x}.f(x)=e^{x}.h(x) \Leftrightarrow \left[e^{x}.f(x)\right]'=e^{x}.h(x)$

Suy ra $e^{x}.f(x)=\int e^{x}h(x)dx$

Suy ra được $f(x)$

Loại 3: Biểu thức tích phân đưa về dạng: $f'(x)-f(x)=h(x)$

Cách giải:

+ Nhân hai vế với $e^{-x} \Rightarrow e^{-x}.f'(x)+e^{-x}.f(x)=e^{-x}.h(x) \Leftrightarrow \left[e^{-x}.f(x)\right]'=e^{-x}.h(x)$

Suy ra $e^{-x}.f(x)=\int e^{-x}h(x)dx$

Suy ra được $f(x)$

Loại 4: Biểu thức tích phân đưa về dạng: $f'(x)+p(x)f(x)=h(x)$

Cách giải:

+ Nhân hai vế với $e^{\int p(x)dx} \Rightarrow f'(x).e^{\int p(x)dx}+p(x).e^{\int p(x)dx}.f(x)=h(x).e^{\int p(x)dx}$

$\Leftrightarrow \left[f(x).e^{\int p(x)dx}\right]'=h(x).e^{\int p(x)dx}$

Suy ra $f(x).e^{\int p(x)dx}=\int e^{\int p(x)dx}.h(x)dx$

Suy ra được $f(x)$

Công thức $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^b f(a+b-x)dx$

2. Bài tập

Bài tập 1: Cho số thực $a>0$. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục và luôn dương trên đoạn $[0;a]$ thỏa mãn $f(x).f(a-x)=1$. Giá trị tích phân $I=\int\limits_0^a \frac{1}{1+f(x)}dx$ là

A. $I=\frac{2a}{3}.$ **B.** $I=\frac{a}{2}.$ **C.** $I=\frac{a}{3}.$ **D.** $I=a.$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đặt $t=a-x \Rightarrow dt=-dx.$ Đổi cận $x=0 \Rightarrow t=a; x=a \Rightarrow t=0.$

Khi đó $I=\int\limits_0^a \frac{1}{1+f(a-t)}dt=\int\limits_0^a \frac{1}{1+f(a-x)}dx=\int\limits_0^a \frac{1}{1+\frac{1}{f(x)}}dx=\int\limits_0^a \frac{f(x)}{1+f(x)}dx.$

$\Rightarrow 2I=\int_0^a \frac{1}{1+f(x)}dx+\int_0^a \frac{f(x)}{1+f(x)}dx=\int_0^a 1.dx=a$. Vậy $I=\frac{a}{2}$.

Ta có thể chọn hàm số $f(x)=1$, với mọi $x\in[0;a]$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Khi đó $I=\int_0^a \frac{1}{1+f(x)}dx=\int_0^a \frac{1}{2}dx=\frac{a}{2}$.

Bài tập 2: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;1]$ và $f(-x)+2019f(x)=e^x, \forall x\in[-1;1]$. Tích phân $M=\int_{-1}^{1} f(x)dx$ bằng

A. $\frac{e^2-1}{2019e}$. **B.** $\frac{e^2-1}{e}$. **C.** $\frac{e^2-1}{2020e}$. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $M=\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{1} f(-x)dx$.

Do đó $2020M=2019\int_{-1}^{1} f(x)dx+\int_{-1}^{1} f(-x)dx=\int_{-1}^{1}\left[f(-x)+2019f(x)\right]dx$.

Suy ra $M=\frac{1}{2020}\int_{-1}^{1} e^x dx=\frac{e^2-1}{2020e}$.

Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx= =\int_a^b f(a+b-x)dx$

Bài tập 3. Cho $f(x)$ là một hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f(-x)=\sqrt{2-2\cos 2x}$.

Giá trị tích phân $P=\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx$ là

A. $P=3$. **B.** $P=4$. **C.** $P=6$. **D.** $P=8$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $P=\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx=\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(-x)dx$

$\Rightarrow 2P=\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left[f(x)+f(-x)\right]dx=\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{2-2\cos 2x}dx=4\int_0^{\frac{3\pi}{2}}|\sin x|dx$.

Hay $P = 2\int_0^{\pi} \sin xdx - 2\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sin xdx = -2\cos x\Big|_0^{\pi} + 2\cos x\Big|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} = 6.$

Bài tập 4: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) = \sin x$ với mọi x và $f(0) = 1.$ Tích phân $e^{\pi}.f(\pi)$ bằng

A. $\dfrac{e^{\pi} - 1}{2}.$ **B.** $\dfrac{e^{\pi} - 1}{2}.$ **C.** $\dfrac{e^{\pi} + 3}{2}.$ **D.** $\dfrac{\pi + 1}{2}.$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $f(x) + f'(x) = \sin x$ nên $e^x f(x) + e^x f'(x) = e^x.\sin x, \forall x \in \mathbb{R}.$

$\Leftrightarrow \left[e^x f(x)\right]' = e^x.\sin x$ hay $\int_0^{\pi} \left[e^x f(x)\right]' dx = \int_0^{\pi} e^x.\sin xdx$

$\Leftrightarrow \left[e^x f(x)\right]\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2}\left[e^x(\sin x - \cos x)\right]\Big|_0^{\pi} \Leftrightarrow e^{\pi} f(\pi) - f(0) = \frac{1}{2}\left(e^{\pi} + 1\right)$

$\Leftrightarrow e^{\pi} f(\pi) = \dfrac{e^{\pi} + 3}{2}.$

Để ý rằng $\left(e^x\right)' = e^x$ nên nếu nhân thêm hai vế của $f(x) + f'(x) = \sin x$ với e^x thì ta sẽ có ngay $\left(e^x.f(x)\right)' = e^x.\sin x.$

Bài tập 5: Cho hàm số $f(x)$ tuần hoàn với chu kì $\dfrac{\pi}{2}$ và có đạo hàm liên tục thỏa mãn $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left[f'(x)\right]^2 dx = \dfrac{\pi}{4}$ và $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x).\cos xdx = \dfrac{\pi}{4}.$ Giá trị của $f(2019\pi)$.

A. $-1.$ **B.** $0.$ **C.** $\dfrac{1}{2}.$ **D.** $1.$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Bằng phương pháp tích phân từng phần ta có

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x).\cos xdx = \left[f(x).\sin x\right]\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f'(x).\sin xdx.$ Suy ra $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f'(x).\sin xdx = -\dfrac{\pi}{4}.$

Mặt khác $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 xdx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \dfrac{1 - \cos 2x}{2} dx = \left[\dfrac{2x - \sin 2x}{4}\right]\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \dfrac{\pi}{4}.$

Suy ra

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f'(x)\right]^2 dx + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x f'(x)\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f'(x) + \sin x\right]^2 dx = 0.$$

$\Rightarrow f'(x) = -\sin x.$ Do đó $f(x) = \cos x + C.$ Vì $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ nên $C = 0.$

Ta được $f(x) = \cos x \Rightarrow f(2019\pi) = \cos(2019\pi) = -1.$

Bài tập 6: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thoả mãn $3f(x) + xf'(x) = x^{2018}$ với mọi $x \in [0;1]$. Tính $I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I = \dfrac{1}{2018 \times 2021}$.

B. $I = \dfrac{1}{2019 \times 2020}$.

C. $I = \dfrac{1}{2019 \times 2021}$.

D. $I = \dfrac{1}{2018 \times 2019}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Từ giả thiết $3f(x) + xf'(x) = x^{2018}$, nhân hai vế cho x^2 ta được

$$3x^2 f(x) + x^3 f'(x) = x^{2020} \Leftrightarrow \left[x^3 f(x)\right]' = x^{2020}.$$

Suy ra $x^3 f(x) = \int x^{2020}\mathrm{d}x = \dfrac{x^{2021}}{2021} + C.$

Thay $x = 0$ vào hai vế ta được $C = 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{x^{2018}}{2021}.$

Vậy $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \dfrac{1}{2021} x^{2018}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2021}.\dfrac{1}{2019} x^{2019}\Big|_0^1 = \dfrac{1}{2021 \times 2019}.$

Bài tập 7: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;4]$, thỏa mãn $f(x) + f'(x) = e^{-x}\sqrt{2x+1}$ với mọi $x \in [0;4]$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $e^4 f(4) - f(0) = \dfrac{26}{3}.$

B. $e^4 f(4) - f(0) = 3e.$

C. $e^4 f(4) - f(0) = e^4 - 1.$

D. $e^4 f(4) - f(0) = 3.$

Lời giải

Chọn A

Nhân hai vế cho e^x để thu được đạo hàm đúng, ta được

$$e^x f(x) + e^x f'(x) = \sqrt{2x+1} \Leftrightarrow \left[e^x f(x)\right]' = \sqrt{2x+1}.$$

Suy ra $e^x f(x) = \int \sqrt{2x+1}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C.$

Vậy $e^4 f(4) - f(0) = \dfrac{26}{3}.$

Bài tập 8: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'(x) - 2018f(x) = 2018x^{2017}e^{2018x}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2018.$ Giá trị $f(1)$ bằng

A. $2018e^{-2018}.$ **B.** $2017e^{2018}.$ **C.** $2018e^{2018}.$ **D.** $2019e^{2018}.$

Lời giải

Chọn D

Nhân hai vế cho e^{-2018x} để thu được đạo hàm đúng, ta được

$$f'(x)e^{-2018x} - 2018f(x)e^{-2018x} = 2018x^{2017} \Leftrightarrow \left[f(x)e^{-2018x}\right]' = 2018x^{2017}.$$

Suy ra $f(x)e^{-2018x} = \int 2018x^{2017}\mathrm{d}x = x^{2018} + C.$

Thay $x = 0$ vào hai vế ta được $C = 2018 \Rightarrow f(x) = \left(x^{2018} + 2018\right)e^{2018x}.$

Vậy $f(1) = 2019e^{2018}.$

Bài tập 9: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'(x) + xf(x) = 2xe^{-x^2}$ và $f(0) = -2.$ Giá trị $f(1)$ bằng

A. $e.$ **B.** $\dfrac{1}{e}.$ **C.** $\dfrac{2}{e}.$ **D.** $-\dfrac{2}{e}.$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Nhân hai vế cho $e^{\frac{x^2}{2}}$ để thu được đạo hàm đúng, ta được

$$f'(x)e^{\frac{x^2}{2}} + f(x)xe^{\frac{x^2}{2}} = 2xe^{-\frac{x^2}{2}} \Leftrightarrow \left[e^{\frac{x^2}{2}}f(x)\right]' = 2xe^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Suy ra $e^{\frac{x^2}{2}}f(x) = \int 2xe^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x = -2e^{-\frac{x^2}{2}} + C.$

Thay $x = 0$ vào hai vế ta được $C = 0 \Rightarrow f(x) = -2e^{-x^2}.$

Vậy $f(1) = -2e^{-1} = -\dfrac{2}{e}.$

Bài tập 10: Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $2f(x) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x}$. Tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{6}$. **C.** $\dfrac{2}{15}$. **D.** $\dfrac{3}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x}$ (1).

Đặt $t=1-x$, thay vào (1), ta được: $2f(1-t)+3f(t)=\sqrt{t}$ hay $2f(1-x)+3f(x)=\sqrt{x}$ (2).

Từ (1) & (2), ta được: $f(x)=\dfrac{3}{5}\sqrt{x}-\dfrac{2}{5}\sqrt{1-x}$.

Do đó, ta có: $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{3}{5}\int\limits_0^1\sqrt{x}\,\mathrm{d}x-\dfrac{2}{5}\int\limits_0^1\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x=\dfrac{2}{5}-\dfrac{4}{15}=\dfrac{2}{15}$.

Cách 2. Công thức $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^b f(a+b-x)dx$

Lấy tích phân 2 vế ta được $2\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x+3\int\limits_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$

$5\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}\Rightarrow\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{2}{15}$.

Chú ý: Ta có thể dùng công thức $\int_{x_1}^{x_2} f\left(ax+b\right)\mathrm{d}x=\int_{ax_1+b}^{ax_2+b} f\left(x\right)\mathrm{d}x$. Khi đó:

Từ $2f\left(x\right)+3f\left(1-x\right)=\sqrt{1-x}$ suy ra: $2\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x+3\int_0^1 f\left(1-x\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1-x}\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow 2\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x-3\int_1^0 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1-x}\mathrm{d}x\Leftrightarrow 5\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{2}{15}$.

$\mathrm{I}=\dfrac{1}{2}\int\limits_1^2 \mathrm{f}\left(\mathrm{t}\right)\mathrm{dt}=\dfrac{1}{2}\int\limits_1^2 \mathrm{f}\left(\mathrm{x}\right)\mathrm{dx}=\dfrac{\mathrm{a}}{2}.$

Bài tập 11: Cho $\mathrm{y}=\mathrm{f}\left(\mathrm{x}\right)$ là hàm số chẵn, có đạo hàm trên đoạn $\left[-6;6\right]$. Biết rằng $\int\limits_{-1}^2 \mathrm{f}\left(\mathrm{x}\right)\mathrm{dx}=8$ và $\int\limits_1^3 \mathrm{f}\left(-2\mathrm{x}\right)\mathrm{dx}=3.$ Giá trị $\int\limits_{-1}^6 f\left(x\right)dx$ bằng

A. 1. **B.** e. **C.** -1. **D.** 14.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $\mathrm{y}=\mathrm{f}\left(\mathrm{x}\right)$ là hàm số chẵn nên $\mathrm{f}\left(2\mathrm{x}\right)=\mathrm{f}\left(-2\mathrm{x}\right)$ suy ra $\int\limits_1^3 \mathrm{f}\left(-2\mathrm{x}\right)\mathrm{dx}=\int\limits_1^3 \mathrm{f}\left(2\mathrm{x}\right)\mathrm{dx}=3.$

Mặt khác: $\int\limits_1^3 \mathrm{f}\left(2\mathrm{x}\right)\mathrm{dx}=\dfrac{1}{2}\int\limits_1^3 \mathrm{f}\left(2\mathrm{x}\right)\mathrm{d}\left(2\mathrm{x}\right)=\dfrac{1}{2}\int\limits_2^6 \mathrm{f}\left(\mathrm{x}\right)\mathrm{dx}=3\Rightarrow\int\limits_2^6 \mathrm{f}\left(\mathrm{x}\right)\mathrm{dx}=6.$

Vậy $I=\int_{-1}^{6} f(x)dx=\int_{-1}^{2} f(x)dx+\int_{2}^{6} f(x)dx=8+6=14.$

Bài tập 12: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số k để $\int_{1}^{k}(2x-1)dx=4\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}.$

A. $\left[\begin{array}{l}k=1\\k=2\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}k=1\\k=-2\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}k=-1\\k=-2\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}k=-1\\k=2\end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $\int_{1}^{k}(2x-1)dx=\frac{1}{2}\int_{1}^{k}(2x-1)d(2x-1)=\left.\frac{(2x-1)^2}{4}\right|_1^k=\frac{(2k-1)^2}{4}-\frac{1}{4}$

Mà $4\lim_{x\to 0}=\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=4\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=4\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=2$

Khi đó $\int_{1}^{k}(2x-1)dx=4\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\Leftrightarrow\frac{(2k-1)^2-1}{4}=2\Leftrightarrow(2k-1)^2=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=2\\k=-1\end{array}\right.$.

Bài tập 13: Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[0;a]$ thỏa mãn $\begin{cases}f(x).f(a-x)=1\\f(x)>0,\ \forall x\in[0;a]\end{cases}$ và $\int_{0}^{a}\frac{dx}{1+f(x)}=\frac{ba}{c}$, trong đó b, c là hai số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Khi đó $b+c$ có giá trị thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(11;22)$. **B.** $(0;9)$. **C.** $(7;21)$. **D.** $(2017;2020)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Đặt $t=a-x\Rightarrow dt=-dx$

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=a;\ x=a\Rightarrow t=0$

Lúc đó $I=\int_{0}^{a}\frac{dx}{1+f(x)}=\int_{a}^{0}\frac{-dt}{1+f(a-t)}=\int_{0}^{a}\frac{dx}{1+f(a-x)}=\int_{0}^{a}\frac{dx}{1+\frac{1}{f(x)}}=\int_{0}^{a}\frac{f(x)dx}{1+f(x)}$

Suy ra $2I=I+I=\int_{0}^{a}\frac{dx}{1+f(x)}+\int_{0}^{a}\frac{f(x)dx}{1+f(x)}=\int_{0}^{a}1dx=a$

Do đó $I=\frac{1}{2}a\Rightarrow b=1;\ c=2\Rightarrow b+c=3.$

Cách 2: Chọn $f(x)=1$ là một hàm thỏa các giả thiết. Dễ dàng tính được $I=\frac{1}{2}a \Rightarrow b=1;\ c=2 \Rightarrow b+c=3.$

Bài tập 14: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx=4,\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x dx=2.$ Giá trị của tích phân $\int_0^3 f(x)dx$ bằng

A. 2. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 10.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

● Xét $\int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx=4.$ Đặt $t=\sqrt{x} \Rightarrow t^2=x,$ suy ra $2tdt=dx.$

Đổi cận $\begin{cases} x=1 \rightarrow t=1 \\ x=9 \rightarrow t=3 \end{cases}.$

Suy ra $4=\int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx=2\int_1^3 f(t)2dt \Rightarrow \int_1^3 f(t)dt=2.$

● Xét $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x dx=2.$ Đặt $u=\sin x,$ suy ra $du=\cos x dx.$

Đổi cận $\begin{cases} x=0 \rightarrow u=0 \\ x=\frac{\pi}{2} \rightarrow u=1 \end{cases}.$ Suy ra $2=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x dx=\int_0^1 f(t)dt.$

Vậy $I=\int_0^3 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^3 f(x)dx=4..$

Bài tập 15: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)dx=4,\ \int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}dx=2.$ Giá trị của tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $I=6$. **B.** $I=2$. **C.** $I=3$. **D.** $I=1$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Xét $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)dx=4.$

Đặt $t=\tan x$, suy ra $\mathrm{d}t=\dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\left(\tan^2 x+1\right)\mathrm{d}x\Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

Đổi cận: $\begin{cases} x=0\Rightarrow t=0 \\ x=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow t=1 \end{cases}$. Khi đó $4=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f\left(\tan x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 \dfrac{f\left(t\right)}{t^2+1}\mathrm{d}t=\int\limits_0^1 \dfrac{f\left(x\right)}{x^2+1}\mathrm{d}x.$

Từ đó suy ra $I=\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 \dfrac{f\left(x\right)}{x^2+1}\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 \dfrac{x^2 f\left(x\right)}{x^2+1}\mathrm{d}x=4+2=6.$

Bài tập 16: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x.f\left(\cos^2 x\right)\mathrm{d}x=1,$ $\int\limits_e^{e^2} \dfrac{f\left(\ln^2 x\right)}{x\ln x}\mathrm{d}x=1$. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_{\frac{1}{4}}^{2} \dfrac{f\left(2x\right)}{x}\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

● Xét $A=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x.f\left(\cos^2 x\right)\mathrm{d}x=1$. Đặt $t=\cos^2 x$.

Suy ra

$\mathrm{d}t=-2\sin x\cos x\mathrm{d}x=-2\cos^2 x\tan x\mathrm{d}x=-2t.\tan x\mathrm{d}x\longrightarrow \tan x\mathrm{d}x=-\dfrac{\mathrm{d}t}{2t}.$

Đổi cận: $\begin{cases} x=0\Rightarrow t=1 \\ x=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow t=\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Khi đó $1=A=-\dfrac{1}{2}\int\limits_1^{\frac{1}{2}} \dfrac{f\left(t\right)}{t}\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \dfrac{f\left(t\right)}{t}\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \dfrac{f\left(x\right)}{x}\mathrm{d}x\Rightarrow \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \dfrac{f\left(x\right)}{x}\mathrm{d}x=2.$

● Xét $B=\int\limits_e^{e^2} \dfrac{f\left(\ln^2 x\right)}{x\ln x}\mathrm{d}x=1$. Đặt $u=\ln^2 x$.

Suy ra $\mathrm{d}u=\dfrac{2\ln x}{x}\mathrm{d}x=\dfrac{2\ln^2 x}{x\ln x}\mathrm{d}x=\dfrac{2u}{x\ln x}\mathrm{d}x\Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}x}{x\ln x}=\dfrac{\mathrm{d}u}{2u}.$

Đổi cận: $\begin{cases} x=e\Rightarrow u=1 \\ x=e^2\Rightarrow u=4 \end{cases}$.

Khi đó $1=B=\dfrac{1}{2}\int\limits_1^4 \dfrac{f\left(u\right)}{u}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{2}\int\limits_1^4 \dfrac{f\left(x\right)}{x}\mathrm{d}x\Rightarrow \int\limits_1^4 \dfrac{f\left(x\right)}{x}\mathrm{d}x=2.$

● Xét tích phân cần tính $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(2x)}{x}\mathrm{d}x.$

Đặt $v=2x,$ suy ra $\begin{cases}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}v\\ x=\frac{v}{2}\end{cases}$. Đổi cận: $\begin{cases}x=\frac{1}{4}\Rightarrow v=\frac{1}{2}\\ x=2\Rightarrow v=4\end{cases}.$

Khi đó $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{4}\frac{f(v)}{v}\mathrm{d}v=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{4}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{4}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=2+2=4.$

Bài tập 17: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$. Biết $f(0)=1$ và $f(x)f(2-x)=e^{2x^2-4x}$ với mọi $x\in[0;2]$. Giá trị tích phân $I=\int\limits_{0}^{2}\frac{(x^3-3x^2)f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{14}{3}$. **B.** $-\frac{32}{5}$. **C.** $-\frac{16}{3}$. **D.** $-\frac{16}{5}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Từ giả thiết $f(x)f(2-x)=e^{2x^2-4x}\xrightarrow{x=2}f(2)=1.$

Ta có $I=\int\limits_{0}^{2}\frac{(x^3-3x^2)f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x.$ Đặt $\begin{cases}u=x^3-3x^2\\ \mathrm{d}v=\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=(3x^2-6x)\mathrm{d}x\\ v=\ln|f(x)|\end{cases}.$

Khi đó

$$I=(x^3-3x^2)\ln|f(x)|\Big|_0^2-\int\limits_{0}^{2}(3x^2-6x)\ln|f(x)|\mathrm{d}x$$

$$\overset{f(2)=1}{=}-3\int\limits_{0}^{2}(x^2-2x)\ln|f(x)|\mathrm{d}x=-3J.$$

Ta có $J=\int\limits_{0}^{2}(x^2-2x)\ln|f(x)|\mathrm{d}x\overset{x=2-t}{=}\int\limits_{2}^{0}\left[(2-t)^2-2(2-t)\right]\ln|f(2-t)|\mathrm{d}(2-t)$

$$=\int\limits_{2}^{0}\left[(2-x)^2-2(2-x)\right]\ln|f(2-x)|\mathrm{d}(2-x)=\int\limits_{0}^{2}(x^2-2x)\ln|f(2-x)|\mathrm{d}x.$$

Suy ra

$$2J=\int\limits_{0}^{2}(x^2-2x)\ln|f(x)|\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{2}(x^2-2x)\ln|f(2-x)|\mathrm{d}x$$

$$=\int\limits_{0}^{2}(x^2-2x)\ln|f(x)f(2-x)|\mathrm{d}x$$

$$=\int\limits_{0}^{2}(x^2-2x)\ln e^{2x^2-4x}\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{2}(x^2-2x)(2x^2-4x)\mathrm{d}x=\frac{32}{15}\Rightarrow J=\frac{16}{15}.$$

Vậy $I=-3J=-\frac{16}{5}.$

Bài tập 18: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ và thỏa mãn $2f\left(x\right)+f\left(-x\right)=\cos x.$ Giá trị của tích phân $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=-2$.   **B.** $I=\frac{2}{3}$.   **C.** $I=\frac{3}{2}$.   **D.** $I=2$.

Hướng dẫn giải

ĐÁN ÁN B

Từ giả thiết, thay x bằng $-x$ ta được $2f\left(-x\right)+f\left(x\right)=\cos x.$

Do đó ta có hệ

$$\begin{cases}2f\left(x\right)+f\left(-x\right)=\cos x\\2f\left(-x\right)+f\left(x\right)=\cos x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4f\left(x\right)+2f\left(-x\right)=2\cos x\\f\left(x\right)+2f\left(-x\right)=\cos x\end{cases}\Rightarrow f\left(x\right)=\frac{1}{3}\cos x.$$

Khi đó $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}.$

Bài tập 19: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[\frac{1}{2};2\right]$ và thỏa mãn $f\left(x\right)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x.$ Giá trị của tích phân $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f\left(x\right)}{x}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.   **B.** $\frac{3}{2}$.   **C.** $\frac{5}{2}$.   **D.** $\frac{7}{2}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Từ giả thiết, thay x bằng $\frac{1}{x}$ ta được $f\left(\frac{1}{x}\right)+2f\left(x\right)=\frac{3}{x}.$

Do đó ta có hệ

$$\begin{cases}f\left(x\right)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x\\f\left(\frac{1}{x}\right)+2f\left(x\right)=\frac{3}{x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f\left(x\right)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x\\4f\left(x\right)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{6}{x}\end{cases}\longrightarrow f\left(x\right)=\frac{2}{x}-x.$$

Khi đó $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f\left(x\right)}{x}dx=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{2}{x^2}-1\right)dx=\left(-\frac{2}{x}-x\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}=\frac{3}{2}.$

Cách khác. Từ $f\left(x\right)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x\Rightarrow f\left(x\right)=3x-2f\left(\frac{1}{x}\right).$

Khi đó $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f\left(x\right)}{x}\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\left(3-2\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\right)\mathrm{d}x=3\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}x-2\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\mathrm{d}x.$

Xét $J=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\mathrm{d}x.$ Đặt $t=\frac{1}{x}$, suy ra $\mathrm{d}t=-\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-t^2\mathrm{d}x\Rightarrow \mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t.$

Đổi cận: $\begin{cases} x=\frac{1}{2}\to t=2 \\ x=2\to t=\frac{1}{2} \end{cases}.$

Khi đó $J=\int\limits_{2}^{\frac{1}{2}}tf\left(t\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f\left(t\right)}{t}\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f\left(x\right)}{x}\mathrm{d}x=I.$

Vậy $I=3\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}x-2I\Rightarrow I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}x=\frac{3}{2}..$

Bài tập 20: Cho hàm số $f\left(x\right)$ thỏa mãn $\left[f'\left(x\right)\right]^2+f\left(x\right).f''\left(x\right)=15x^4+12x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f\left(0\right)=f'\left(0\right)=1$. Giá trị của $f^2\left(1\right)$ bằng

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** 8. **D.** 10.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Nhận thấy được $\left[f'\left(x\right)\right]^2+f\left(x\right).f''\left(x\right)=\left[f\left(x\right).f'\left(x\right)\right]'.$

Do đó giả thiết tương đương với $\left[f\left(x\right).f'\left(x\right)\right]'=15x^4+12x.$

Suy ra $f\left(x\right).f'\left(x\right)=\int\left(15x^4+12x\right)\mathrm{d}x=3x^5+6x^2+C\xrightarrow{f(0)=f'(0)=1.}C=1$

$\Rightarrow f\left(x\right).f'\left(x\right)=3x^5+6x^2+1$

$\Rightarrow \int f\left(x\right).f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\left(3x^5+6x^2+1\right)\mathrm{d}x\Leftrightarrow \frac{f^2\left(x\right)}{2}=\frac{x^6}{2}+2x^3+x+C'.$

Thay $x=0$ vào hai vế ta được $\frac{f^2\left(0\right)}{2}=C'\Rightarrow C'=\frac{1}{2}.$

Vậy $f^2(x)=x^6+4x^3+2x+1 \Rightarrow f^2(1)=8.$

Bài tập 22: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(\tan x)=\cos^4 x, \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị $I=\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{2+\pi}{8}$. **B.** 1. **C.** $\frac{2+\pi}{4}$. **D.** $\frac{\pi}{4}$.

Hướng dẫn giải

ĐAP ÁN A

$f(\tan x)=\cos^4 x \Leftrightarrow f(\tan x)=\left(\frac{1}{\tan^2 x+1}\right)^2$

$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{(x^2+1)^2} \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx=\frac{2+\pi}{8}$

Dạng 8: Bất đẳng thức tích phân

1. Phương pháp

Áp dụng các bất đẳng thức:

+ Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ thì $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)dx|$

+ Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và $m \le f(x) \le M$ thì $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

+ Nếu $f(x), g(x)$ liên tục trên $[a;b]$ thì $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx.\int_a^b g^2(x)dx$ dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $f(x) = k.g(x)$.

+ Bất đẳng thức AM-GM

2. Bài tập

Bài tập 1: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1) = 0$, $\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x = 7$ và $\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$. Giá trị phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** $\frac{7}{5}$. **C.** $\frac{7}{4}$. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Dùng tích phân từng phần ta có $\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x = \left.\frac{x^3}{3}f(x)\right|_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 x^3 f'(x)\mathrm{d}x$. Kết hợp với giả thiết $f(1) = 0$, ta suy ra $\int_0^1 x^3 f'(x)\mathrm{d}x = -1$.

Theo Holder $(-1)^2 = \left(\int_0^1 x^3 f'(x)\mathrm{d}x\right)^2 \le \int_0^1 x^6\mathrm{d}x.\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x = \left.\frac{x^7}{7}\right|_0^1.7 = 1.$

Vậy đẳng thức xảy ra nên ta có $f'(x) = kx^3$, thay vào $\int_0^1 x^3 f'(x)\mathrm{d}x = -1$ ta được $k = -7$.

Suy ra $f'(x) = -7x^3 \Rightarrow f'(x) = -7x^3, \forall x \in [0;1] \Rightarrow f(x) = -\frac{7}{4}x^4 + C$

$\xrightarrow{f(1)=0} C = \frac{7}{4} \Rightarrow f(x) = -\frac{7}{4}x^4 + \frac{7}{4} \Rightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{7}{5}.$

Bài tập 2: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1)=1$, $\int_0^1 x^5 f(x)\mathrm{d}x=\frac{11}{78}$ và $\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}\left(f(x)\right)=\frac{4}{13}$. Giá trị $f(2)$ bằng

A. 2. **B.** $\frac{251}{7}$. **C.** $\frac{256}{7}$. **D.** $\frac{261}{7}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Theo Holder $\left(\frac{2}{13}\right)^2=\left(\int_0^1 x^6 f'(x)\mathrm{d}x\right)^2\le\int_0^1 x^{12}dx.\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{1}{13}.\frac{4}{13}=\frac{4}{169}$.

$\Rightarrow f'(x)=2x^6\Rightarrow f(x)=\frac{2}{7}x^7+C\xrightarrow{f(1)=1}C=\frac{5}{7}$.

Vậy $f(x)=\frac{2}{7}x^7+\frac{5}{7}\Rightarrow f(2)=\frac{261}{7}$.

Bài tập 3: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1)=2, f(0)=0$ và $\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=4$. Tích phân $\int_0^1\left[f^3(x)+2018x\right]\mathrm{d}x$. bằng

A. 0. **B.** 1011. **C.** 2018. **D.** 2022.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Theo Holder $2^2=\left(\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x\right)^2\le\int_0^1\mathrm{d}x.\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=1.4=4$.

$\Rightarrow f'(x)=2\Rightarrow f(x)=2x+C\xrightarrow{f(0)=0}C=0$.

Vậy $f(x)=2x\Rightarrow\int_0^1\left[f^3(x)+2018x\right]\mathrm{d}x=1011$.

Bài tập 4: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1)=ef(0)$ và $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{f^2(x)}+\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x\le 2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $f(1)=\sqrt{\frac{2e}{e-1}}$. **B.** $f(1)=\frac{2(e-2)}{e-1}$.

C. $f(1)=\sqrt{\frac{2e^2}{e^2-1}}$. **D.** $f(1)=\sqrt{\frac{2(e-2)}{e-1}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $\int_0^1 \frac{dx}{f^2(x)} + \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{f^2(x)} + [f'(x)]^2\right] dx \overset{AM-GM}{\geq} 2\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx$

$= 2\ln|f(x)|\Big|_0^1 = 2\ln|f(1)| - 2\ln|f(0)| = 2\ln\left|\frac{f(1)}{f(0)}\right| = 2\ln e = 2.$

Mà $\int_0^1 \frac{dx}{f^2(x)} + \int_0^1 [f'(x)]^2 dx \leq 2$ nên dấu "=" xảy ra, tức là $f'(x) = \frac{1}{f(x)} \Leftrightarrow f(x)f'(x) = 1$

$\Rightarrow \int f(x)f'(x)dx = \int xdx \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2} = x + C \Rightarrow f(x) = \sqrt{2x+2C}.$

Theo giả thiết $f(1) = ef(0)$ nên ta có $\sqrt{2+2C} = e\sqrt{2C} \Leftrightarrow 2+2C = e^2 2C \Leftrightarrow C = \frac{1}{e^2-1}$

$\Rightarrow f(x) = \sqrt{2x + \frac{2}{e^2-1}} \Rightarrow f(1) = \sqrt{2 + \frac{2}{e^2-1}} = \sqrt{\frac{2e^2}{e^2-1}}.$

Bài tập 5: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương trên $[0;1]$, có đạo hàm dương và liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(0) = 1$ và $\int_0^1 \left[f^3(x) + 4[f'(x)]^3\right] dx \leq 3\int_0^1 f'(x)f^2(x)dx$. Giá trị $I = \int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $2(\sqrt{e}-1)$. **B.** $2(e^2-1)$. **C.** $\frac{\sqrt{e}-1}{2}$. **D.** $\frac{e^2-1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho ba số dương ta có

$f^3(x) + 4[f'(x)]^3 = 4[f'(x)]^3 + \frac{f^3(x)}{2} + \frac{f^3(x)}{2}$

$\geq 3\sqrt[3]{4[f'(x)]^3 . \frac{f^3(x)}{2} . \frac{f^3(x)}{2}} = 3f'(x)f^2(x).$

Suy ra $\int_0^1 \left[f^3(x) + 4[f'(x)]^3\right] dx \geq 3\int_0^1 f'(x)f^2(x)dx.$

Mà $\int_0^1 \left[f^3(x) + 4[f'(x)]^3\right] dx \leq 3\int_0^1 f'(x)f^2(x)dx$ nên dấu "=" xảy ra, tức là

$4[f'(x)]^3 = \frac{f^3(x)}{2} = \frac{f^3(x)}{2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{2}f(x)$

$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \frac{1}{2}\int dx \Rightarrow \ln|f(x)| = \frac{1}{2}x + C \Rightarrow f(x) = e^{\frac{1}{2}x+C}.$

Theo giả thiết $f(0)=1 \Rightarrow C=0 \Rightarrow f(x)=e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2\left(\sqrt{e}-1\right).$

Bài tập 6: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;\pi]$, thỏa mãn $\int_0^{\pi} f'(x)\sin x\mathrm{d}x = -1$ và $\int_0^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}$. Giá trị tích phân $\int_0^{\pi} xf(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{6}{\pi}$. **B.** $-\frac{4}{\pi}$. **C.** $\frac{2}{\pi}$. **D.** $\frac{4}{\pi}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Theo Holder $(1)^2 = \left[\int_0^{\pi} f(x)\cos x\mathrm{d}x\right]^2 \le \int_0^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x\int_0^{\pi}\cos^2 x\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}.\frac{\pi}{2} = 1.$

$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{\pi}\cos x \Rightarrow \int_0^{\pi} xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}\frac{2x\cos x}{\pi}\mathrm{d}x = -\frac{4}{\pi}.$

Bài tập 7: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa t $f(1)=0$, $\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{8}$ và $\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$. Giá trị của ích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{\pi}$. **B.** $\frac{2}{\pi}$. **C.** $\frac{\pi}{2}$. **D.** π.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Theo Holder

$$\left(-\frac{\pi}{4}\right)^2 = \left(\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)f'(x)\mathrm{d}x\right)^2 \le \int_0^1 \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\mathrm{d}x.\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.\frac{\pi^2}{8}.$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \Rightarrow f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + C \xrightarrow{f(1)=0} C=0.$$

Vậy $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \Rightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}.$

Bài tập 8: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương trên $[0;1]$, có đạo hàm dương liên và tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $\int_0^1 \sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}}\mathrm{d}x \ge 1$ và $f(0)=1$, $f(1)=e^2$. Giá trị của $f\left(\frac{1}{2}\right)$ bằng

A. 1. **B.** 4. **C.** $\sqrt{e}$. **D.** e.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Hàm dưới dấu tích phân là $\sqrt{\dfrac{xf'(x)}{f(x)}}=\sqrt{x}.\sqrt{\dfrac{f'(x)}{f(x)}},\ \forall x\in[0;1].$ Điều này làm ta liên tưởng đến đạo hàm đúng $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$, muốn vậy ta phải đánh giá theo $\mathrm{AM}-\mathrm{GM}$ như sau:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}+mx\geq 2\sqrt{m}.\sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}}\ \text{ với } m\geq 0 \text{ và } x\in[0;1].$$

Do đó ta cần tìm tham số $m\geq 0$ sao cho

$$\int_0^1\left[\frac{f'(x)}{f(x)}+mx\right]\mathrm{d}x\geq 2\sqrt{m}.\int_0^1\sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}}\mathrm{d}x$$

hay

$$\ln\left|f(x)\right|\Big|_0^1+m\frac{x^2}{2}\Big|_0^1\geq 2\sqrt{m}.1\Leftrightarrow \ln\left|f(1)\right|-\ln\left|f(0)\right|+\frac{m}{2}$$
$$\geq 2\sqrt{m}\Leftrightarrow 2-0+\frac{m}{2}\geq 2\sqrt{m}.$$

Để dấu "=" xảy ra thì ta cần có $2-0+\dfrac{m}{2}=2\sqrt{m}\Leftrightarrow m=4.$

Với $m=4$ thì đẳng thức xảy ra nên $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=4x$

$$\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int 4x\mathrm{d}x\Leftrightarrow \ln\left|f(x)\right|=2x^2+C\Rightarrow f(x)=e^{2x^2+C}.$$

Theo giả thiết $\begin{cases}f(0)=1\\ f(1)=e^2\end{cases}\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x)=e^{2x^2}\Rightarrow f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{e}.$

Cách 2. Theo Holder

$$1^2\leq\left(\int_0^1\sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}}\mathrm{d}x\right)^2=\left(\int_0^1\sqrt{x}.\sqrt{\frac{f'(x)}{f(x)}}\mathrm{d}x\right)^2\leq\int_0^1 x\mathrm{d}x.\int_0^1\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.\ln\frac{f(1)}{f(0)}=1.$$

Vậy đẳng thức xảy ra nên ta có $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=kx,$ thay vào $\displaystyle\int_0^1\sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}}\mathrm{d}x=1$ ta được $k=4.$

Suy ra $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=4x.$ (làm tiếp như trên)

Bài tập 9: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $\int_0^1 \left[f(x)f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x \le 1$ và $f(0)=1,\ f(1)=\sqrt{3}.$ Giá trị của $f\left(\frac{1}{2}\right)$ bằng

A. $\sqrt{2}.$ **B.** $3.$ **C.** $\sqrt{e}.$ **D.** $e.$

Lời giải

ĐÁP ÁN A

Hàm dưới dấu tích phân là $\left[f(x)f'(x)\right]^2$. Điều này làm ta liên tưởng đến đạo hàm đúng $f(x)f'(x)$, muốn vậy ta phải đánh giá theo $\text{AM}-\text{GM}$ như sau:

$$\left[f(x)f'(x)\right]^2+m\ge 2\sqrt{m}.f(x)f'(x) \text{ với } m\ge 0.$$

Do đó ta cần tìm tham số $m\ge 0$ sao cho

$$\int_0^1\left(\left[f(x)f'(x)\right]^2+m\right)\mathrm{d}x\ge 2\sqrt{m}\int_0^1 f(x)f'(x)\mathrm{d}x.$$

hay

$$1+m\ge 2\sqrt{m}.\left.\frac{f^2(x)}{2}\right|_0^1 \Leftrightarrow 1+m\ge 2\sqrt{m}.$$

Để dấu "=" xảy ra thì ta cần có $1+m=2\sqrt{m}\Leftrightarrow m=1.$

Với $m=1$ thì đẳng thức xảy ra nên $\left[f(x)f'(x)\right]^2=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)f'(x)=1 \\ f(x)f'(x)=-1 \end{array}\right.$.

- $f(x)f'(x)=-1\Rightarrow \int_0^1 f(x)f'(x)\mathrm{d}x=-\int_0^1 \mathrm{d}x\Leftrightarrow \left.\frac{f^2(x)}{2}\right|_0^1=-x\Big|_0^1\Leftrightarrow 1=-1.$ (vô lý)
- $f(x)f'(x)=1\Rightarrow \int f(x)f'(x)\mathrm{d}x=\int \mathrm{d}x\Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2}=x+C\Rightarrow f(x)=\sqrt{2x+2C}.$

Theo giả thiết $\begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=\sqrt{3} \end{cases}\Rightarrow C=\frac{1}{2}\Rightarrow f(x)=\sqrt{2x+1}\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}.$

Cách 2. Ta có $\int_0^1 f(x)f'(x)\mathrm{d}x=\left.\frac{f^2(x)}{2}\right|_0^1=\frac{1}{2}\left[f^2(1)-f^2(0)\right]=1.$

Theo Holder $1^2=\left(\int_0^1 1.f(x)f'(x)\mathrm{d}x\right)^2\le\int_0^1 1^2\mathrm{d}x.\int_0^1\left[f(x)f'(x)\right]^2\mathrm{d}x\le 1.1=1.$

Vậy đẳng thức xảy ra nên ta có $f'(x)f(x)=k,$ thay vào $\int_0^1 f(x)f'(x)\mathrm{d}x=1$ ta được $k=1.$ Suy ra $f'(x)f(x)=1.$(làm tiếp như trên)

Bài tập 10: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[1;2]$, thỏa mãn $\int\limits_1^2 \frac{[f'(x)]^2}{xf(x)}\mathrm{d}x \le 24$ và $f(1)=1,\ f(2)=16.$ Giá trị của $f(\sqrt{2})$ bằng

A. 1. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 2. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Hàm dưới dấu tích phân là $\frac{[f'(x)]^2}{xf(x)} = \frac{1}{x}.\frac{[f'(x)]^2}{f(x)}$. Điều này làm ta liên tưởng đến đạo hàm đúng $\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$, muốn vậy ta phải đánh giá theo $\mathrm{AM-GM}$ như sau:

$$\frac{[f'(x)]^2}{xf(x)} + mx \ge 2\sqrt{m}\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} \text{ với } m \ge 0 \text{ và } x \in [1;2].$$

Do đó ta cần tìm tham số $m \ge 0$ sao cho

$$\int\limits_1^2 \left(\frac{[f'(x)]^2}{xf(x)} + mx\right)\mathrm{d}x \ge 2\sqrt{m}\int\limits_1^2 \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}x$$

hay

$$24 + \frac{2m}{3} \ge 4\sqrt{m}\sqrt{f(x)}\Big|_1^2 \Leftrightarrow 24 + \frac{2m}{3} \ge 4\sqrt{m}\left[\sqrt{f(2)} - \sqrt{f(1)}\right] \Leftrightarrow 24 + \frac{2m}{3} \ge 12\sqrt{m} \Leftrightarrow m = 16.$$

Để dấu "=" xảy ra thì ta cần có $24 + \frac{2m}{3} = 12\sqrt{m} \Leftrightarrow m = 16.$

Với $m = 16$ thì đẳng thức xảy ra nên $\frac{[f'(x)]^2}{xf(x)} = 16x \Rightarrow \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = 2x$

$$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}x = \int 2x\mathrm{d}x \Leftrightarrow \sqrt{f(x)} = x^2 + C \Rightarrow f(x) = (x^2 + C)^2.$$

Theo giả thiết $\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(2) = 16 \end{cases} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = x^4 \Rightarrow f(\sqrt{2}) = 4.$

Cách 2. Ta có $\int\limits_1^2 \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}x = 2.\int\limits_1^2 \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}x = 2\sqrt{f(x)}\Big|_1^2 = 2\left[\sqrt{f(2)} - \sqrt{f(1)}\right] = 6.$

Theo Holder $6^2 = \left(\int\limits_1^2 \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}x\right)^2 = \left(\int\limits_1^1 \sqrt{x}.\frac{f'(x)}{\sqrt{xf(x)}}\mathrm{d}x\right)^2 \le \int\limits_1^2 x\mathrm{d}x.\int\limits_1^2 \frac{[f'(x)]^2}{xf(x)}\mathrm{d}x \le \frac{x^2}{2}\Big|_1^2.24 = 36.$

Vậy đẳng thức xảy ra nên ta có $\dfrac{f'(x)}{\sqrt{xf(x)}} = k\sqrt{x} \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = kx,$ thay vào $\int\limits_1^2 \dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}x = 6$ ta được $k = 4.$ Suy ra $\dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = 4x.$ (làm tiếp như trên)

Bài tập 11: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$, và $f(1) - f(0) = \dfrac{\sqrt{14}}{2}.$ Biết rằng $0 \le f'(x) \le 2\sqrt{2x}, \forall x \in [0;1]$. Khi đó, giá trị của tích phân $\int\limits_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(2;4)$. **B.** $\left(\dfrac{13}{3};\dfrac{14}{3}\right)$. **C.** $\left(\dfrac{10}{3};\dfrac{13}{3}\right)$. **D.** $(1;3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Do $0 \le f'(x) \le 2\sqrt{2x}, \forall x \in [0;1]$ nên $0 \le \left(f'(x)\right)^2 \le 8x, \forall x \in [0;1]$.

Suy ra $\int\limits_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx \le \int\limits_0^1 8x dx$ hay $\int\limits_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx \le 4$ (1).

Mặt khác, áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz, ta có:

$$\left(\int\limits_0^1 f'(x)dx\right)^2 \le \int\limits_0^1 1^2 dx.\int\limits_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx \Leftrightarrow \left[f(1) - f(0)\right]^2 \le \int\limits_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{2} \le \int\limits_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx$$

Vậy $\dfrac{7}{2} \le \int\limits_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx \le 4.$

BÀI 3. ỨNG DỤNG HÌNH HỌC TÍCH PHÂN

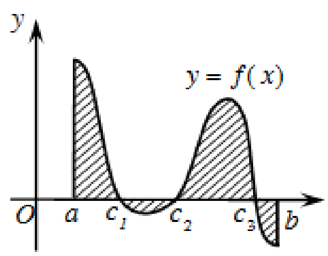
A. KIẾN THỨC SÁCH GIÁO KHOA CẦN NẮM

I. DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

1. Định lý 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm trên $[a;b]$. Khi đó diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và 2 đường thẳng $x = a, x = b$ là: $S = \int_a^b f(x)dx$

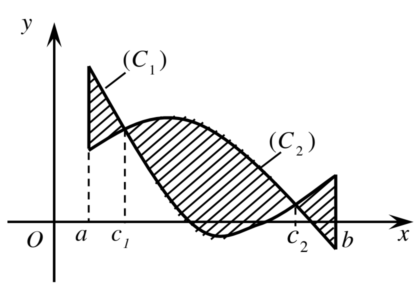
2. Bài toán liên quan

Bài toán 1: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được xác định: $S = \int_a^b |f(x)|dx$



$$(H)\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases} \qquad \boxed{S = \int_a^b |f(x)|dx}$$

Bài toán 2: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được xác định: $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$



$$(H)\begin{cases} (C_1): y = f_1(x) \\ (C_2): y = f_2(x) \\ x = a \\ x = b \end{cases}$$

$$\boxed{S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|dx}$$

Chú ý: Nếu trên đoạn $[a;b]$, hàm số $f(x)$ không đổi dấu thì: $\int_a^b |f(x)|dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$

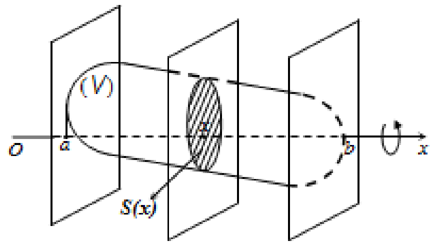
Bài toán 3: Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, $x = h(y)$ và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ được xác định: $S = \int_c^d |g(y) - h(y)|dy$

Bài toán 4: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị $(C_1): f_1(x), (C_2): f_2(x)$ là: $S = \int_{x_1}^{x_2} |f(x) - g(x)|dx$. Trong đó: x_1, x_2 tương ứng là nghiệm của phương trình $f(x) = g(x), (x_1 < x_2)$

II. THỂ TÍCH CỦA KHỐI TRÒN XOAY

1. Thể tích vật thể

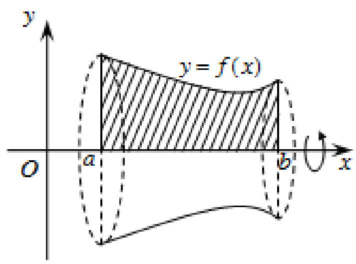
Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b; $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x, $(a \le x \le b)$. Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$.



$$V = \int_a^b S(x)dx$$

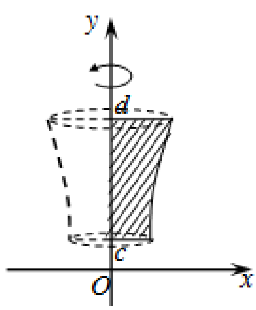
2. Thể tích khối tròn xoay

Bài toán 1: Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox:



$$\begin{cases} (C): y = f(x) \\ (Ox): y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases} \qquad \boxed{V_x = \pi\int_a^b [f(x)]^2 dx}$$

Bài toán 2: Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, trục hoành và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ quanh trục Oy:



$$\begin{cases} (C): x = g(y) \\ (Oy): x = 0 \\ y = c \\ y = d \end{cases} \qquad \boxed{V_y = \pi\int_c^d [g(y)]^2 dy}$$

Bài toán 3: Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox: $V = \pi\int_a^b \left|f^2(x) - g^2(x)\right|dx$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Tính diện tích giới hạn bởi 1 đồ thị

1. Phương pháp:

a/ *Phương pháp 1:*

$$S = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

* Xét dấu biểu thức $f(x)$; $x\in[a;b]$, phá dấu trị tuyệt đối và tính tích phân.

b/ Phương pháp 2:

* Giải phương trình $f(x)=0$; chọn nghiệm trong $[a;b]$. Giả sử các nghiệm là $\alpha;\beta$ với $\alpha<\beta$.

* Áp dụng tính chất liên tục của hàm số $f(x)$ trên $[a;b]$; ta có:

$$S=\left|\int_a^\alpha f(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_\beta^b f(x)\mathrm{d}x\right|$$

2. Các Bài tập mẫu:

Bài tập 1: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=x^2$, trục hoành và đường thẳng $x=2$.

A. $S=\frac{8}{9}$. **B.** $S=\frac{16}{3}$. **C.** $S=16$. **D.** $S=\frac{8}{3}$.

Hướng dẫn giải

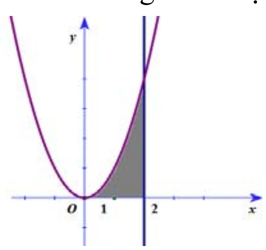
CHỌN D

Nhận thấy rằng, để tính diện tích ta cần phải tìm được 2 cận. Để tìm thêm cận còn lại ta giải phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $(P): y=x^2$ với trục hoành.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $(P): y=x^2$ với trục hoành: $x^2=0\Leftrightarrow x=0$

Áp dụng công thức ta có $S=\int_0^2\left|x^2\right|dx=\frac{8}{3}$.

Nhận xét: Nếu ta vẽ đồ thị hàm số $y=x^2$ và đường thẳng $x=2$ ta dễ dàng xác định được hình phẳng giới hạn bởi các đường này. Từ đó ta dễ dàng tính được diện tích S.



Bài tập 2: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=x^2.e^x$, trục hoành và đường thẳng $x=1$

A. $e-2$. **B.** $2+e$. **C.** $2-e$. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

CHỌN A

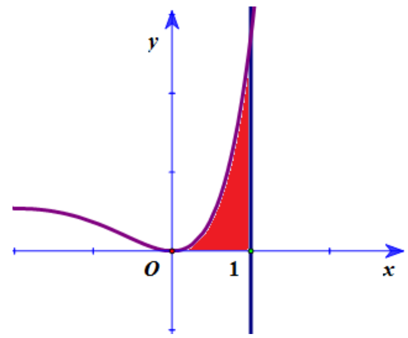
Phương trình hoành độ giao điểm $x^2e^x=0\Leftrightarrow x=0$

Ta có:

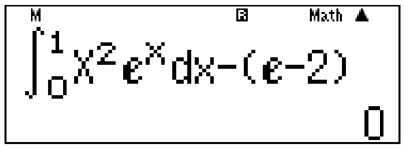
$$S=\int_0^1 x^2e^xdx=\int_0^1 x^2d\left(e^x\right)=x^2e^x\Big|_0^1-\int_0^1 e^xd\left(x^2\right)$$

$$=e-2\int_0^1 xe^xdx=e-2\int_0^1 xd\left(e^x\right)=e-2xe^x\Big|_0^1+2\int_0^1 e^xdx$$

$= e - 2e + 2e^x\Big|_0^1 = -e + 2e - 2 = e - 2.$



Lời bình: Bài toán trên đã có 1 cận, ta chỉ cần tìm thêm 1 cận nữa bằng cách giải phương trình hoành độ giao điểm. Sau đó áp dụng công thức. Nếu vẽ đồ thị bài này để tìm hình phẳng giới hạn bởi các đường là không nên vì đồ thị hàm số hơi phức tạp. Việc tìm được công thức $S = \int_0^1 x^2 e^x dx$ và tính tích phân này ta có thể dùng MTCT để tính và chọn Chọn.



Bài tập 3: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = \sqrt{1 - x^2}$ và trục hoành:

A. $\pi - 2.$ **B.** $\frac{\pi}{4}.$ **C.** $1.$ **D.** $\frac{\pi}{2}.$

Hướng dẫn giải

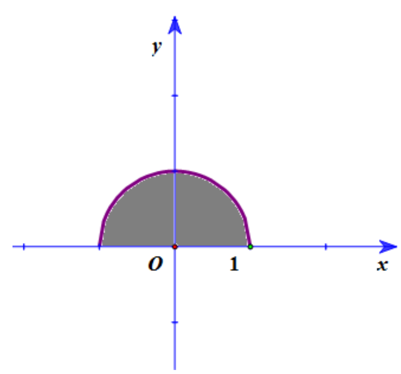
CHỌN D

Phương trình hoành độ giao điểm của, Ox là $\sqrt{1 - x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Khi đó, diện tích hình phẳng cần tìm là $S = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} dx.$

Đặt $x = \sin t \Leftrightarrow dx = \cos t dt$ và $\begin{cases} x = 1 \to t = \frac{\pi}{2} \\ x = -1 \to t = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

Suy ra $S = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t}.\cos t dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{\pi}{2}$



Lời bình: Bài toán trên chưa có cận, ta phải giải phương trình hoành độ giao điểm để tìm cận. Sau đó áp dụng công thức. Việc tìm được công thức $S = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} dx$ và tính tích phân này tương đối phức tạp, do đó ta có thể dùng MTCT để tính và chọn Chọn.

Nếu vẽ được đồ thị thì ta xác định được hình phẳng và diện tích của nó dễ dàng, đó chính là diện tích của nữa đường tròn bán kính bằng 1. Do đó: $S = \frac{1}{2}\pi R^2 = \frac{\pi}{2}.$

Bài tập 4: Tính diện tích S hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \ln x, x = e, x = \frac{1}{e}$ và trục hoành

A. $S = 2 - \frac{2}{e}.$ **B.** $S = 1 - \frac{1}{e}.$ **C.** $S = 2 + \frac{2}{e}.$ **D.** $S = 1 + \frac{1}{e}.$

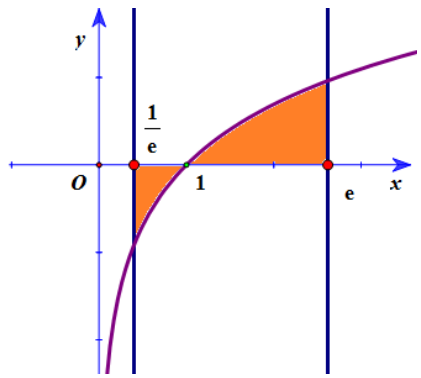
Hướng dẫn giải

CHỌN A

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y = \ln x$ và trụ hoành là

$\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

$$S = \int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x| dx = -\int_{\frac{1}{e}}^{1} \ln x dx + \int_{1}^{e} \ln x.dx = (x - x\ln x)\Big|_{\frac{1}{e}}^{1} + (x\ln x - x)\Big|_{1}^{e} = 2 - \frac{2}{e}.$$



Bài tập 5: Diện tích tam giác được cắt ra bởi các trục tọa độ và tiếp tuyến của đồ thị $y = \ln x$ tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục Ox là:

A. $S = \frac{2}{3}$ **B.** $S = \frac{1}{4}$ **C.** $S = \frac{2}{5}$ **D.** $S = \frac{1}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm: $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Ta có: $y' = (\ln x)' = \frac{1}{x'}.y'(1) = 1$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y = \ln x$ tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục Ox là:

$y = 1(x-1) + 0$ hay $y = x - 1$

Đường thẳng $y = x - 1$ cắt Ox tại điểm $A(1;0)$ và cắt Oy tại điểm $B(0;-1)$.

Tam giác vuông OAB có $OA = 1, OB = 1 \Rightarrow S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{2}$

$$S_D = \int_a^b |f(x)|dx = \int_a^0 |f(x)|dx + \int_0^b |f(x)|dx = -\int_a^0 f(x)dx + \int_0^b f(x)dx$$

Bài tập 6: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = 2\sqrt{ax}\ (a > 0)$, trục hoành và đường thẳng $x = a$ bằng ka^2. Tính giá trị của tham số k.

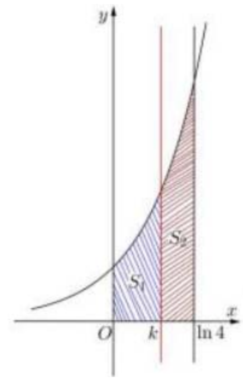
A. $k = \frac{7}{3}$ **B.** $k = \frac{4}{3}$ **C.** $k = \frac{12}{5}$ **D.** $k = \frac{6}{5}$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Có $S=\int_0^a \left|2\sqrt{ax}\right|dx = 2\sqrt{a}.\frac{2}{3}.x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a = \frac{4}{3}a^2 = ka^2 \Rightarrow k=\frac{4}{3}$

Bài tập 7: Cho hình cong giới hạn bởi các đường $y=e^x, y=0, x=0$ và $x=\ln 4$. Đường thẳng $x=k$ với $0<k<\ln 4$ chia thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1 = 2S_2$.



A. $k=\frac{2}{3}\ln 4$

B. $k=\ln 2$

C. $k=\ln\frac{8}{3}$

D. $k=\ln 3$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Do $S_1=2S_2 \Rightarrow S_1=\frac{2}{3}S=\frac{2}{3}\int_0^{\ln 4}\left|e^x\right|dx=\frac{2}{3}\int_0^{\ln 4}e^x dx=\frac{2}{3}e^x\Big|_0^{\ln 4}=2$

Do đó: $S_1=\int_0^k\left|e^x\right|dx=e^k-1=2 \Leftrightarrow e^k=3 \Leftrightarrow k=\ln 3$

Dạng 2: Tính diện tích giới hạn bởi 2 hai đồ thị

1. Phương pháp:

Công thức tính $S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$. Tính như dạng 1.

2. Một số bài tập mẫu

Bài tập 1: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị

$$y=\frac{1}{\cos^2 x}; y=\frac{1}{\sin^2 x}; x=\frac{\pi}{6}; \quad x=\frac{\pi}{3}$$

Lời giải

Ta có: $S=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\left|\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}\right|dx$

Trong trường hợp này nếu chọn cách xét dấu biểu thức $y=\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x};\ x\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$

hoặc vẽ đồ thị hàm số $y=\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x};\ x\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$ là khá khó khăn.

Vì vậy ta chọn cách sau:

+ Xét phương trình: $\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}=0;\ x\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right] \Leftrightarrow \cos^2 x-\sin^2 x=0\ x\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$

$\Leftrightarrow \cos 2x = 0$; $x \in \left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right] \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4}$

Từ đó suy ra: $S = \left|\int_{6}^{\pi/4}\left(\dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)dx\right| + \left|\int_{4/4}^{\pi/3}\left(\dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)dx\right.$

$\Rightarrow S = \left|(\tan x + \cot x)\right| \dfrac{\pi/4}{\pi/6}\left| + \right|(\tan x + \cot x)\left|\dfrac{\pi}{\pi}\right|_4 \left| = 2\left(\dfrac{4\sqrt{3}}{3} - 2\right)\right.$.

Bài tập 2 : Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{x^2+1}$; $\quad y = \dfrac{x^2}{2}$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị trên:

$\dfrac{1}{x^2+1} = \dfrac{x^2}{2} \Leftrightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Vì vậy hình phẳng đã cho có diện tích là: $S = \int_{-1}^{1}\left|\dfrac{1}{x^2+1} - \dfrac{x^2}{2}\right|dx$

Do trên $(-1;1)$ phương trình $\dfrac{1}{x^2+1} = \dfrac{x^2}{2}$ vô nghiệm nên ta có:

$S = \int_{-1}^{1}\left|\dfrac{1}{x^2+1} - \dfrac{x^2}{2}\right|dx = \left|\int_{-1}^{1}\left(\dfrac{1}{x^2+1} - \dfrac{x^2}{2}\right)dx\right| = \left|\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{x^2+1}dx - \int_{-1}^{1}\dfrac{x^2}{2}dx\right|$

Tính $I_1 = \int_{-1}^{1}\dfrac{1}{x^2+1}dx$.

+/ Đặt $x = \tan t$; $t \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow dx = \dfrac{1}{\cos^2 t}dt$

+/ Đổi cận: $\left[\begin{array}{l} x = -1 \Rightarrow t = -\dfrac{\pi}{4} \\ x = 1 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{4} \end{array}\right. \Rightarrow I_1 = \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\dfrac{\frac{1}{\cos^2 t}}{1+\tan^2 t}dt = \int_{-\pi/4}^{\pi/4}dt = \dfrac{\pi}{2}$

$I_2 = \int_{-1}^{1}\dfrac{x^2}{2}dx = \dfrac{1}{3}$

Thay thế vào ta được: $S = \left|\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{3}\right| = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{3}$.

Bài tập 3: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = \left|x^2 - 4x + 3\right|$ và $y = 3$.

Hướng dẫn giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị trên:

$\left|x^2-4x+3\right|=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4x+3=3 \\ x^2-4x+3=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4 \end{array}\right.$

Khi đó: $S=\int_0^4 \|x^2-4x+3|-3|\,dx = |_0^4\left(x^2-4x+3|-3\right)dx\,|$

$\Rightarrow S= |_0^1\left(\left|x^2-4x+3\right|-3\right)dx+\int_1^3\left(\left|x^2-4x+3\right|-3\right)dx+\int_3^4\left(\left|x^2-4x+3\right|-3\right)dx$

$\Rightarrow S= |_0^1\left(x^2-4x\right)dx+\int_1^3\left(-x^2+4x-6\right)dx+\int_3^4\left(x^2-4x\right)dx\,|$

$\Rightarrow S=S=\left(\dfrac{x^3}{3}-2x^2\right)\Bigg|_0^1+\left(-\dfrac{x^3}{3}+2x^2-6x\right)\Bigg|_1^3+\left(\dfrac{x^3}{3}-2x^2\right)\Bigg|_3^4=8.$

Bài tập 4: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị: $y=\sin|x|$; $y=|x|-\pi$.

Hướng dẫn giải

Xét phương trình hoành độ: $\sin|x|=|x|-\pi$

Đặt $|x|\ =t$

Khi đó trở thành: $\sin t=t-\pi \Leftrightarrow \sin t-t+\pi=0$

Xét hàm số $f(t)=\ \sin t-t+\pi$; $t\in[0,+\infty)$.

$\Rightarrow f'(t)=\cos t-1\le 0 \quad \forall t\in[0,+\infty)$.

BBT của hàm số $f(t)$ như sau:

t	0		π		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$-$	
$f(t)$	π	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

$\Rightarrow$ phương trình có nghiệm duy nhất $t=\pi$.

$\Rightarrow$ phương trình có 2 nghiệm phân biệt: $x=-\pi$ và $x=\pi$.

$\Rightarrow\ S=\int_{-\pi}^{\pi}|\sin|x|-|x|+\pi|\,dx=\left|\int_{-\pi}^{\pi}(\sin|x|-|x|+\pi)dx\right|.$

3. Bài tập

Bài tập 1: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $(\mathrm{P}): y=-x^2+3x+3$ và đường thẳng $(\mathrm{d}): y=2x+1$ là:

A. $\dfrac{7}{3}$ **B.** $\dfrac{13}{3}$ **C.** $\dfrac{19}{6}$ **D.** 11

Hướng dẫn giải

Chọn B

Xét phương trình $-x^2+3x+3=2x+1 \Leftrightarrow -x^2+x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y=-x^2+3x+3$ và đường thẳng $(d): y=2x=1$ là

$$S=\int_1^2 \left|\left(-x^2+3x+3\right)-(2x-1)\right| dx=\int_{-1}^2 \left(2+x-x^2\right) dx=\left.\left(2x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\right|_{-1}^2=\frac{13}{3}$$

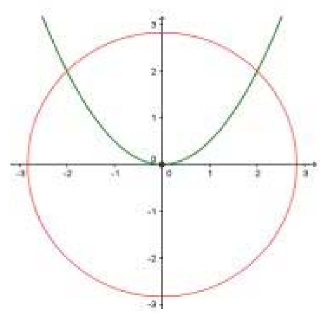
Vậy $S=\frac{13}{3}$.

Bài tập 2: Parabol $y=\frac{x^2}{2}$ chia hình tròn có tâm tại gốc tọa độ, bán kính $2\sqrt{2}$ thành 2 phần. Tỉ số diện tích của chúng thuộc khoảng nào:

A. $(0,4;0,5)$ **B.** $(0,5;0,6)$ **C.** $(0,6;0,7)$ **D.** $(0,7;0,8)$

Hướng dẫn giải

Chọn A



Phương trình đường tròn: $x^2+y^2=8 \Rightarrow x^2=8-y^2$

Thế vào phương trình parabol, ta được $y=\frac{8-y^2}{2} \Leftrightarrow y^2+2y-8=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=-4(1) \end{array}\right. \Rightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$

Diện tích phần được tạo bởi phần đường tròn phía trên với Parabol là:

$$S_1=\int_{-2}^2\left(\sqrt{8-x^2}-\frac{x^2}{2}\right)dx=\int_{-2}^2 \sqrt{8-x^2}dx-\int_{-2}^2 \frac{x^2}{2}dx=I_1-I_2\ ;\ I_2=\int_{-2}^2 \frac{x^2}{2}dx=\left.\frac{x^3}{6}\right|_{-2}^{2}=\frac{8}{3}$$

Tính $I_1=\int_{-2}^2 \sqrt{8-x^2}dx=2\int_0^2 \sqrt{8-x^2}dx$

Đặt $x=2\sqrt{2}\sin t \Rightarrow dx=2\sqrt{2}\cos tdt; x=0 \to t=0$; $x=2 \to t=\frac{\pi}{4}$

$$I_1=2\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sqrt{2}\cos t 2\sqrt{2}\cos tdt=16\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 tdt=16\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2t+1}{2}dt=4+2\pi$$

$S_1 = I_1 - I_2 = 4 + 2\pi - \frac{8}{3} = \frac{4}{3} + 2\pi$

Diện tích hình tròn: $S = \pi R^2 = 8\pi \Rightarrow S_2 = S - S_1 = 8\pi - \left(\frac{4}{3} + 2\pi\right) = 6\pi - \frac{4}{3}$

$\Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{4}{3} + 2\pi}{6\pi - \frac{4}{3}} \simeq 0,435 \in (0,4;0,5)$.

Bài tập 3: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}$ và đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{4\sqrt{2}}$

A. $2\pi + 4$ **B.** $2\pi + \frac{4}{3}$ **C.** $2\pi - \frac{4}{3}$ **D.** $\frac{8}{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm:

$\sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} = \frac{x^2}{4\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = -16 (1) \\ x^2 = 8 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$. Khi đó $S = \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \left|\sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} - \frac{x^2}{4\sqrt{2}}\right| = 2\pi + \frac{4}{3}$

Bài tập 4: Gọi *S* là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $my = x^2$, $mx = y^2$ (với $m > 0$). Tìm giá trị của *m* để $S = 3$.

A. $m = 1$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = 3$. **D.** $m = 4$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Vì $m > 0$ nên từ $my = x^2$ ta suy $y = \frac{x^2}{m} \geq 0$;

Từ $mx = y^2$ nên $x \geq 0$ và $y = \sqrt{mx}$.

Xét phương trình $\frac{x^2}{m} = \sqrt{mx} \Leftrightarrow x^4 = m^3 x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = m \end{array}\right.$

Khi đó diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S = \int_0^m \left|\sqrt{mx} - \frac{x^2}{m}\right| dx = \left|\int_0^m \left(\sqrt{mx} - \frac{x^2}{m}\right) dx\right|$$

$$= \left|\left.\left(\frac{2\sqrt{m}}{3}.x\sqrt{x} - \frac{x^3}{3m}\right)\right|_0^m\right| = \left|\frac{1}{3}m^2\right| = \frac{1}{3}m^2$$

Yêu cầu bài toán $S=3\Leftrightarrow \frac{1}{3}m^2=3\Leftrightarrow m^2=9\Leftrightarrow m=3$ (vì $m>0$).

Bài tập 5: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm $y=x^2$ và $y=\frac{2x}{x-1}$ là $S=a+b\ln 2$ với *a*, *b* là những số hữu tỷ. Giá trị của $a+b$ là

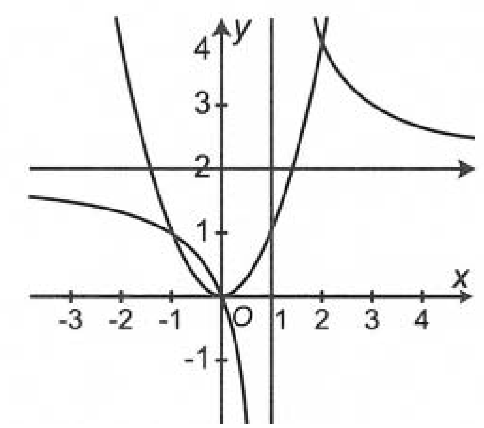
A. $-\frac{1}{3}$. **B.** 2. **C.** $-\frac{2}{3}$. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_1): $y=x^2$ và (C_2): $y=\frac{2x}{x-1}$ là

$$x^2=\frac{2x}{x-1}(x\neq 1)\Rightarrow x^3-x^2-2x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$$



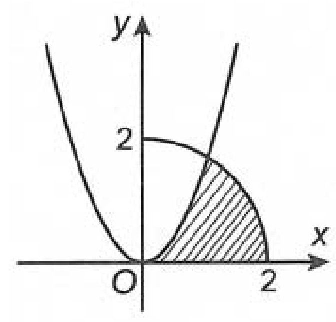
Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S=\int_{-1}^{0}\left(\frac{2x}{x-1}-x^2\right)dx=\int_{-1}^{0}\left(2+\frac{2}{x-1}-x^2\right)dx=\left(2x+2\ln|x-1|-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{0}=\frac{5}{3}-2\ln 2$$

Suy ra $a=\frac{5}{3}$ và $b=-2$

Vậy $a+b=-\frac{1}{3}$

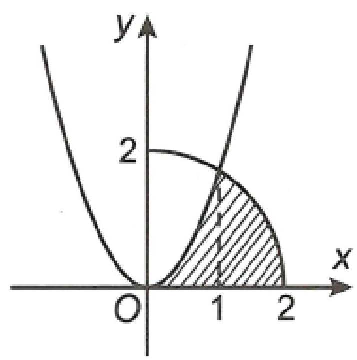
Bài tập 6: Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=\sqrt{3}x^2$, cung tròn có phương trình $y=\sqrt{4-x^2}$ (với $0\le x\le 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) là



A. $\dfrac{4\pi+\sqrt{3}}{12}$.　　**B.** $\dfrac{4\pi-\sqrt{3}}{6}$.

C. $\dfrac{4\pi+2\sqrt{3}-3}{6}$.　　**D.** $\dfrac{5\sqrt{3}-2\pi}{3}$.

Hướng dẫn giải



Phương trình hoành độ giao điểm của parabol $y=\sqrt{3}x^2$ và cung tròn $y=\sqrt{4-x^2}$ (với $0\le x\le 2$) lả $\sqrt{4-x^2}=\sqrt{3}x^2 \Leftrightarrow 4-x^2=3x^4 \Leftrightarrow x=1$.

Diện tích của (H) là

$$S=\int_0^1 \sqrt{3}x^2dx+\int_1^2\sqrt{4-x^2}dx=\frac{\sqrt{3}}{3}x^3\Big|_0^1+I=\frac{\sqrt{3}}{3}+I \text{ với } I=\int_1^2\sqrt{4-x^2}dx.$$

Đặt $x=2\sin t$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow dx=2\cos t.dt$

Đổi cận $x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}$, $x=2\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$.

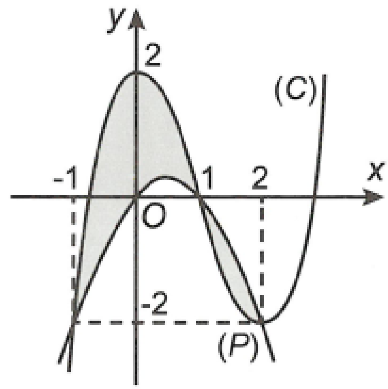
$$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\sin^2 t}.2\cos t.dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}4\cos^2 t.dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}2\left(1+\cos 2t\right).dt=\left(2x+\sin 2t\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vậy $S=\frac{\sqrt{3}}{3}+I=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4\pi-\sqrt{3}}{6}$

Chọn B.

Bài tập 7: Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm đa thức bậc ba và parabol (P) có trục đối xứng vuông góc với trục hoành. Phần **tô đậm** của hình vẽ có diện tích bằng



A. $\frac{37}{12}$. **B.** $\frac{7}{12}$. **C.** $\frac{11}{12}$. **D.** $\frac{5}{12}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Vì đồ thị hàm bậc ba và đồ thị hàm bậc hai cắt trục tung tại các điểm có tung độ lần lượt là $y=2$ và $y=0$ nên ta xét hai hàm số là $y=ax^3+bx^2+cx+2$, $y=mx^2+nx$ (với $a,\ m\neq 0$).

Suy ra (C): $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+2$ và (P): $y=g(x)=mx^2+nx$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (P) là:

$ax^3+bx^2+cx+2=mx^2+nx \Leftrightarrow (ax^3+bx^2+cx+2)-(mx^2+nx)=0$.

Đặt $P(x)=(ax^3+bx^2+cx+2)-(mx^2+nx)$.

Theo giả thiết, (C) và (P) cắt nhau tại các điểm có hoành độ lần lượt là $x=-1$, $x=1$, $x=2$ nên $P(x)=a(x+1)(x-1)(x-2)$.

Ta có $P(0)=2a$.

Mặt khác, ta có $P(0)=f(0)-g(0)=2 \Rightarrow a=1$.

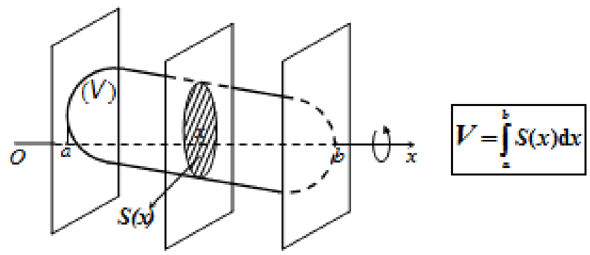
Vậy diện tích phần tô đậm là $S=\int_{-1}^{2}\left|(x+1)(x-1)(x-2)\right|dx=\frac{37}{12}$

Dạng 3: Tính thể tích vật thể tròn xoay dựa vào định nghĩa

1. Phương pháp:

Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b; $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x, $(a\le x\le b)$.

Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $\left[a,b\right]$.



2. Các Bài tập mẫu:

Bài tập 1: Cho phần vật thể B giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x = 0$ và $x = 2$. Cắt phần vật thể B bởi mặt phẳng vuông góc trục Ox tại điểm có hoành độ $x\ (0 \le x \le 2)$, ta được diện tích là một tam giác đều có độ dài cạnh bằng $x\sqrt{2-x}$. Tính thể tích V của phần vật thể B.

Lời giải

Một tam giác đều cạnh a có diện tích $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Do tam giác đều cạnh $x\sqrt{2-x}$ có diện tích là $S(x) = \dfrac{x^2(2-x)\sqrt{3}}{4}$.

Suy ra thể tích $S = \int\limits_0^2 S(x)dx = \int\limits_0^2 \dfrac{x^2(2-x)\sqrt{3}}{4}dx = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\int\limits_0^2 x^2(2-x)dx \xrightarrow{Casio} \dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{4}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Bài tập 2: Trong không gian $Oxyz$, cho vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = \pi$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ bằng $x, (0 \le x \le \pi)$ là một tam giác đều cạnh là $2\sqrt{\sin x}$ .Tính thể tích của vật thể đó.

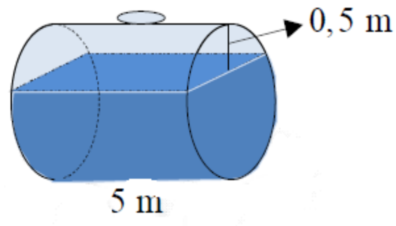
Lời giải

Một tam giác đều cạnh a có diện tích $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Do đó tam giác đều cạnh $2\sqrt{\sin x}$ có diện tích là $S(x) = \dfrac{4\sin x.\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}\sin x$

Suy ra thể tích $V = \int\limits_0^2 S(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 \sqrt{3}\sin x\mathrm{d}x = 2\sqrt{3}$

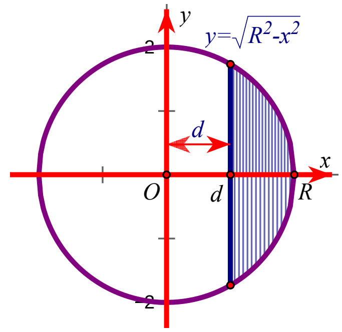
Bài tập 3: Một bồn trụ đang chứa dầu được đặt nằm ngang có chiều dài bồn là $5\,m$, bán kính đáy $1\,m$. Người ta rút dầu ra trong bồn tương ứng với $0,5\,m$ của đường kính đáy. Tính thể tích gần đúng của dầu còn lại trong bồn



Lời giải

* Thể tích cả khối trụ $V_1 = \pi R^2 h = \pi.1^2.5 = 5\pi\left(m^3\right)$

* Tính thể tích phần khối trụ bị mất đi

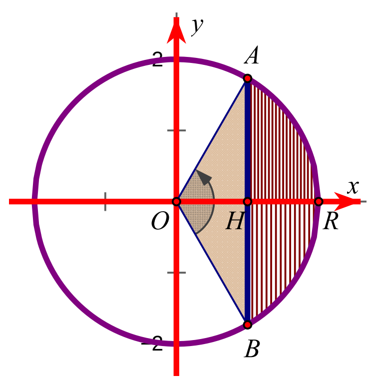


+ Cách 1: $S_{viên\ phân} = 2\int\limits_d^R \sqrt{R^2 - x^2}dx \ = 2\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1-x^2}dx \approx 0,61$

$V_2 = S_{viên\ phân}.h = 2\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1-x^2}dx \times 5 \approx 3,07$

Suy ra thể tích khối trụ còn lại $V = V_1 - V_2 = 5\pi - 2\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1-x^2}dx \times 5 \approx 12,637\ \left(m^3\right)$

+ Cách 2: Tính góc ở tâm $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{OH}{R} = \frac{1}{2} \ \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{3} \ \Rightarrow \alpha = \frac{2\alpha}{3}$

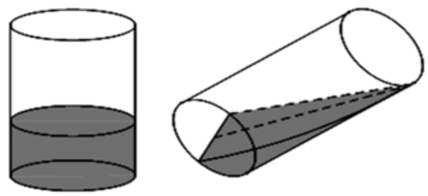


$S_{viên\ phân} = \frac{1}{2}R^2\left(\alpha - \sin\alpha\right) = \frac{1}{2}.\left(\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\right) \approx 0,614$

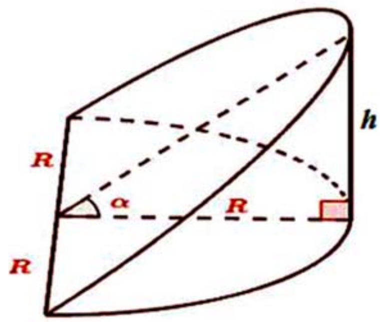
$V_2 = S_{viên\ phân}.h = \frac{1}{2}.\left(\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\right) \times 5$

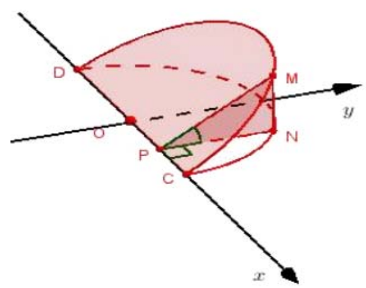
$$V = V_1 - V_2 = 5\pi - \frac{1}{2}.\left(\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\right)\times 5 \approx 12,637\ \left(m^3\right)$$

Bài tập 4: Bạn A có một cốc thủy tinh hình trụ, đường kính trong lòng đáy cốc là $6\,cm,$ chiều cao trong lòng cốc là $10\,cm$ đang đựng một lượng nước. Bạn A nghiêng cốc nước, vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì ở đáy mực nước trùng với đường kính đáy. Tính thể tích lượng nước trong cốc



Lời giải





Phân tích: Thể tích nước có hình dạng "cái nêm"; có 2 phương pháp tính thể tích này

+ Cách 1 – Chứng minh công thức bằng PP tích phân: Xét thiết diện cắt cốc thuỷ tinh tại vị trí x $(-R \le x \le R)$ bất kỳ; ta có diện tích thiết diện là

$S(x) = \frac{1}{2}.\sqrt{R^2 - x^2}.\left(\sqrt{R^2 - x^2}.\tan\alpha\right) = \frac{1}{2}\left(R^2 - x^2\right)\tan\alpha$; thể tích.

$$V = \int_{-R}^{R} S(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\tan\alpha \int_{-R}^{R}\left(R^2 - x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{3}R^3\tan\alpha .$$

Cách 2:

Gọi S là diện tích thiết diện do mặt phẳng có phương vuông góc với trục Ox với khối nước, mặt phẳng này cắt trục Ox tại điểm có hoành độ $h \ge x \ge 0$. Ta có:

$\frac{r}{R} = \frac{h - x}{h} \Leftrightarrow r = \frac{(h - x)R}{h}$, vì thiết diện này là nửa hình tròn bán kính r

$$\Rightarrow S(x) = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{\pi(h - x)^2 R^2}{2h^2}$$

Thể tích lượng nước chứa trong bình là.

Bài giải

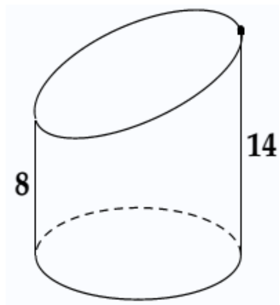
+ Cách 1: Áp dụng công thức tính thể tích cái nêm biết góc giữa mặt cắt và mặt đáy bằng α là

$\boxed{V = \frac{2}{3}R^2 h = \frac{2}{3}R^3.\tan\alpha}$ với $\tan\alpha = \frac{h}{R}$ ta được $V = \frac{2}{3}R^3.\frac{h}{R} = \frac{2}{3}.3^2.10 = 60\left(cm^3\right)$

+ Cách 2: Tính trực tiếp bài toán bằng PP tích phân. $\Rightarrow S(x)=\frac{1}{2}\pi r^2=\frac{\pi(h-x)^2R^2}{2h^2}$; thể tích

$V=\int_0^h S(x)dx=\frac{9\pi}{200}\int_0^{10}(10-x)^2dx=60\pi(cm^3)$. $V=\int_0^h S(x)dx$

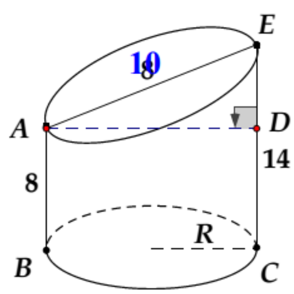
Bài tập 5: Cắt một khối trụ bởi một mặt phẳng ta được một khối như hình vẽ bên. Biết rằng thiết diện là một hình elip có độ dài trục lớn bằng 10, khoảng cách từ điểm thuộc thiết diện gần mặt đáy nhất và điểm thuộc thiết diện xa mặt đáy nhất lần lượt là 8 và 14. Tính thể tích của.



Lời giải

Tính các số đo: $\begin{cases} AB=8 \\ AE=10 \\ DE=14-8=6 \end{cases} \Rightarrow AD=\sqrt{AE^2-DE^2}=8$; suy ra bán kính khối trụ là

$R=\frac{AD}{2}=4$.



♦ Cách 1: Thể tích khối bằng thể tích "khối trụ trung bình":

$V_{(H)}=\pi R^2.\left(\frac{AB+CE}{2}\right)=\pi.4^2.11=176\pi(đvtt)$

♦ Cách 2: Áp dụng công thức tính thể tích "cái nêm": Lấy mặt phẳng (P) vuông góc với đường sinh của hình trụ và đi qua điểm A, khi đó chia khối (H) thành hai khối:

+ Khối 1: là khối trụ chiều cao $h=8$, bán kính $r=4$ nên thể tích $V_1=\pi r^2h=128\pi$

+ Khối 2: là phân nửa một khối trụ có chiều cao $DE=6$ và bán kính $r=4$ nên thể tích

$V_2=\frac{1}{2}.\pi r^2.AD=\frac{1}{2}.\pi.4^2.6=48\pi$

+ Vậy $V_{(H)}=V_1+V_2=128\pi+48\pi=176\pi(đvtt)$

3. Bài tập

Câu 1: Cho (T) là vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x=0$, $x=1$. Tính thể tích V của (T) biết rằng khi cắt (T) bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ bằng x, $0\le x\le 1$, ta được thiết diện là tam giác đều có cạnh bằng $\sqrt{1+x}$.

A. $V=\frac{3}{2}\cdot$. **B.** $V=\frac{3\sqrt{3}}{8}\pi$. **C.** $V=\frac{3\sqrt{3}}{8}$. **D.** $V=\frac{3}{2}\pi$.

Lời giải

Chọn C

Ta có diện tích tam giác đều cạnh bằng $\sqrt{1+x}$ là $S(x)=\frac{\left(\sqrt{1+x}\right)^2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}(1+x)}{4}$.

Thể tích của vật thể (T) là $V=\int\limits_0^1 S(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\frac{\sqrt{3}(1+x)}{4}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{8}(1+x)^2\Big|_0^1=\frac{3\sqrt{3}}{8}\cdot$.

Câu 2: Cho vật thể (T) giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0;x=2$. Cắt vật thể (T) bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x\left(0\le x\le 2\right)$ ta thu được thiết diện là một hình vuông có cạnh bằng $(x+1)e^x$. Thể tích vật thể (T) bằng

A. $\frac{\pi\left(13e^4-1\right)}{4}$. **B.** $\frac{13e^4-1}{4}$. **C.** $2e^2$. **D.** $2\pi e^2$.

Lời giải

Chọn B

Diện tích thiết diện là $S(x)=(x+1)^2e^{2x}$.

Thể tích của vật thể (T) là $V=\int\limits_0^2 S(x)dx=\int\limits_0^2(x+1)^2e^{2x}dx$.

$$V=\frac{1}{2}(x+1)^2e^{2x}\Big|_0^2-\int\limits_0^2(x+1)e^{2x}dx=\frac{9e^4-1}{2}-\left(\frac{x+1}{2}e^{2x}\Big|_0^2-\frac{1}{2}\int\limits_0^2 e^{2x}dx\right)$$

$$=\frac{9e^4-1}{2}-\frac{3e^4-1}{2}+\frac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^2=3e^4+\frac{1}{4}e^4-\frac{1}{4}=\frac{13e^4-1}{4}.$$

Dạng 4: Tính thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi 1 đồ thị

1. Phương pháp:

Vật thể tròn xoay sinh bởi miền hình phẳng được giới hạn: Đồ thị $y=f(x)$ *; trục* $Ox(y=0)$ *;* $x=a,\ x=b$ *; quay xung quanh* Ox.

- Nếu thiếu cận thì giải phương trình $f(x)=0$ để bổ sung cận.

- Tính thể tích theo công thức: $V_{Ox}=\pi\int_a^b f^2(x)dx$

2. Các Bài tập mẫu:

Bài tập 1: Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=2x-x^2$ và trục hoành. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay được sinh ra bởi hình phẳng đó khi nó quay quanh trục Ox.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $2x-x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Thể tích của vật thể tròn xoay cần tìm $V=\pi\int\limits_0^2\left(2x-x^2\right)^2\mathrm{d}x=\dfrac{16\pi}{15}$.

Bài tập 2: Cho miền hình phẳng giới hạn bởi: $y=xe^x$, Ox $x=1$ quay xung quanh Ox. Tính thể tích của vật thể tạo thành.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số: $y=xe^x$ và trục Ox $xe^x=0 \Leftrightarrow x=0$

Vậy vật thể tròn xoay có thể tích là: $V=\pi\int_0^1\left(xe^x\right)^2dx=\pi\int_0^1\left(x^2e^{2x}\right)dx$

$$\Rightarrow V=\pi\left(\frac{1}{2}x^2e^{2x}\right)\Bigg|_0^1-\int_0^1 xe^{2x}dx=\pi\frac{e^2}{2}-\pi\int_0^1 xe^{2x}dx$$

$$\Rightarrow V=\frac{\pi e^2}{2}-\pi\left(\frac{1}{2}x\,e^{2x}\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx\right)=\frac{\pi}{4}e^{2x}\Big|_0^1=\frac{\pi\left(e^2-1\right)}{4}.$$

Bài tập 3: Cho miền hình phẳng giới hạn bởi: $y=x^2-4x, y=0$; quay xung quanh Ox. tính thể tích của vật thể tạo thành.

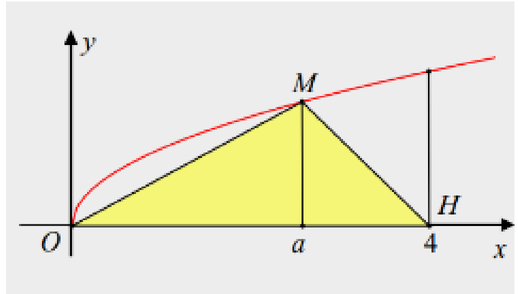
Lời giải

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số: $y=x^2-4x$ và đường thẳng $y=0$ là nghiệm của phương trình: $x^2-4x=0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4 \end{array}\right.$

Vật thể tạo thành có thể tích là:

$$V=\pi\int_0^4\left(x^2-4x\right)^2dx=\pi\int_0^4\left(x^4-8x^3+16x^2\right)dx=\pi\left(\frac{x^5}{5}-2x^4+\frac{16x^3}{3}\right)\Bigg|_0^4=\frac{512\pi}{15}$$

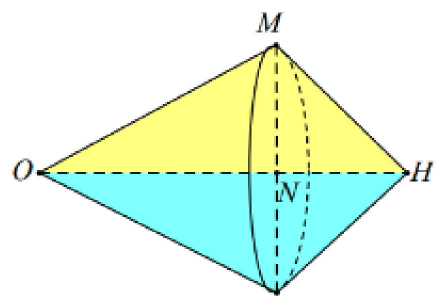
Bài tập 4: Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quanh hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}; y=0; x=4$ và trục Ox. Đường thẳng $x=a\left(0<a<4\right)$ cắt đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$ tại M.



Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác MOH quanh trục Ox. Biết rằng $V = 2V_1$. Tính a

Lời giải

Ta có $V = \pi\int\limits_0^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi\int\limits_0^4 x\mathrm{d}x = 8\pi \Rightarrow V_1 = \frac{V}{2} = 4\pi$.



Tam giác MOH quanh trục Ox tạo nên hai khối nón chung đáy. Gọi N là hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox. Suy ra $r = MN = y_M = y(a) = \sqrt{a}$.

$\Rightarrow V_1 = \frac{1}{3}OH.\pi.r^2 = \frac{1}{3}.4\pi.\left(\sqrt{a}\right)^2 = \frac{4\pi a}{3}$.

Suy ra $4\pi = \frac{4\pi a}{3} \Rightarrow a = 3$.

Bài tập 5: Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{\frac{x}{4-x^2}}$; trục Ox và đường thẳng $x = 1$. Tính thể tích khối tròn xoay thu được khi quay quanh hình (H) xung quanh trục Ox.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $\sqrt{\frac{x}{4-x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

Theo bài toán thì thể tích của vật thể tròn xoay cần tìm

$V = \pi\int\limits_0^1 \frac{x}{4-x^2}dx = -\frac{\pi}{2}\ln\left|4-x^2\right|\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}\ln\frac{4}{3} = \frac{\pi}{2}\ln\frac{a}{b}.$

Do đó $a=4,b=3\Rightarrow a+b=7.$

3. Bài tập

Câu 1: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2+3,\ y=0,\ x=0,\ x=2$. Gọi V là thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào sau đây đúng?

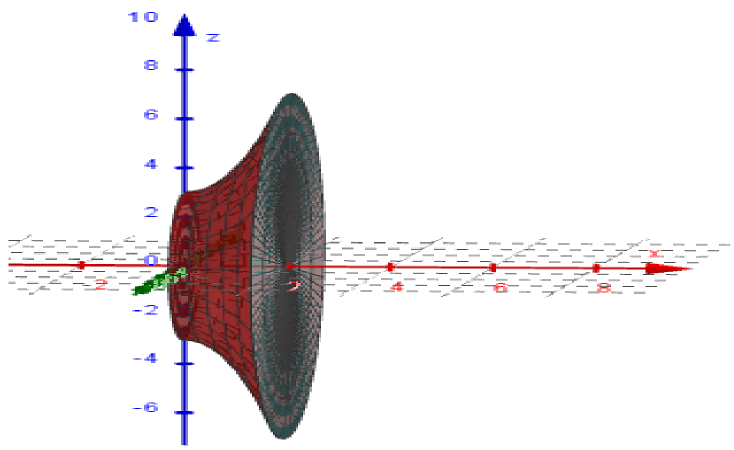
A. $V=\pi\int\limits_0^2\left(x^2+3\right)^2\mathrm{d}x$.

B. $V=\int\limits_0^2\left(x^2+3\right)\mathrm{d}x$.

C. $V=\int\limits_0^2\left(x^2+3\right)^2\mathrm{d}x$.

D. $V=\pi\int\limits_0^2\left(x^2+3\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải



Thể tích của vật thể được tạo nên là $V=\pi\int\limits_0^2\left(x^2+3\right)^2\mathrm{d}x.$

Câu 2: Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành do quay xung quanh trục hoành một elip có phương trình $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. V có giá trị gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. 550 **B.** 400 **C.** 670 **D.** 335

Lời giải

Chọn D

Quay elip đã cho xung quanh trục hoành chính là quay hình phẳng:

$$H=\left\{y=4\sqrt{1-\frac{x^2}{25}},y=0,x=-5,x=5\right\}.$$

Vậy thể tích khối tròn xoay sinh ra bởi H khi quay xung quanh trục hoành là:

$$V=\pi\int_{-5}^{5}\left(16-\frac{16x^2}{25}\right)dx=\pi\left(16x-\frac{16x^3}{75}\right)\Bigg|_{-5}^{5}=\frac{320\pi}{3}\simeq 335{,}1$$

Câu 3: Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{m^2-x^2}$ (m là tham số khác 0) và trục hoành. Khi (H) quay xung quanh trục hoành được khối tròn xoay có thể tích V. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $V<1000\pi$.

A. 18. **B.** 20. **C.** 19. **D.** 21.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của đường cong và trục hoành là: $\sqrt{m^2-x^2}=0 \Leftrightarrow x=\pm m$

Thể tích vật thể tròn xoay cần tính là: $V=\pi\int\limits_{-|m|}^{|m|}(m^2-x^2)dx=\pi(m^2x-\frac{1}{3}x^3)\Big|_{-|m|}^{|m|}=\dfrac{4\pi m^2|m|}{3}$

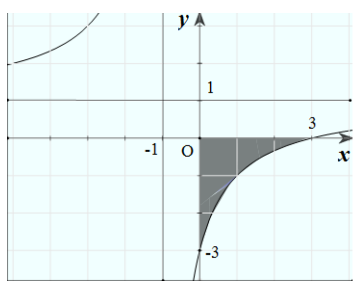
Ta có: $V<1000\pi \Leftrightarrow \dfrac{4\pi m^2|m|}{3}<1000\pi \Leftrightarrow |m|^3<750 \Leftrightarrow -\sqrt[3]{750}<m<\sqrt[3]{750}$.

Ta có $\sqrt[3]{750}\simeq 9,08$ và $m\neq 0$. Vậy có 18 giá trị nguyên của m.

Câu 8 : Cho hình phẳng D giới hạn bởi các đường cong $y=\dfrac{x-3}{x+1}$, trục hoành và trục tung. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích $V=\pi(a+b\ln 2)$ với a,b là các số nguyên. Tính $T=a+b$.

A. $T=3$. **B.** $T=6$. **C.** $T=10$. **D.** $T=-1$.

Lời giải



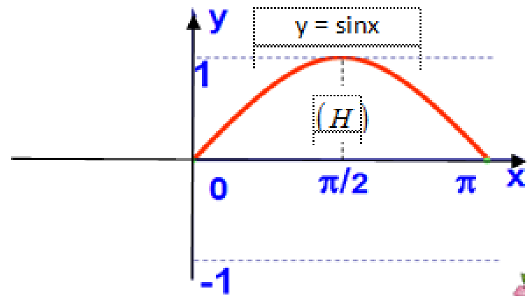
Dựa vào đồ thị hàm số trên ta có:

$$V=\pi\int_0^3\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^2dx=\pi\int_0^3\left(1-\frac{4}{x+1}\right)^2dx=\pi\int_0^3\left(1-\frac{8}{x+1}+\frac{16}{(x+1)^2}\right)dx$$

$$=\pi\left(x-8\ln(x+1)-\frac{16}{x+1}\right)\Bigg|_0^3=\pi(15-16\ln 2)\Rightarrow a=15;\mathrm{b}=-16.$$

Vậy $T=a+b=-1$.

Câu 4: Cho hình (H) trong hình vẽ dưới đây quay quanh trục Ox tạo thành một khối tròn xoay có thể tích bằng bao nhiêu?



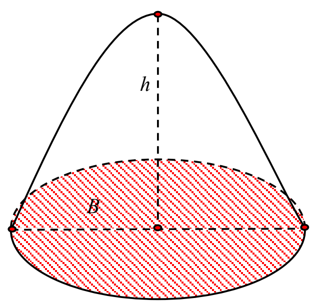
A. $\frac{\pi^2}{2}$. **B.** $\frac{\pi}{2}$. **C.** 2π. **D.** $2\pi^2$.

Lời giải

Thể tích khối tròn xoay nhận được khi quay hình (H) quanh trục Ox là

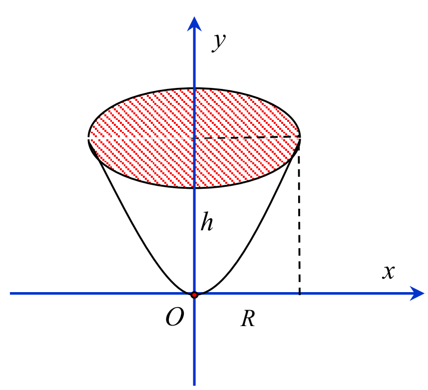
$$V=\pi\int_0^{\pi}(\sin x)^2\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{2}.$$

Câu 5: Vật thể parabolide tròn xoay như hình vẽ bên dưới có đáy có diện tích $B=3$ chiều cao $h=4$. Thể tích của vật thể trên là



A. $V=\frac{1}{3}\pi$. **B.** $V=6$. **C.** $V=\frac{1}{4}\pi$. **D.** $V=8$.

Lời giải



Đường cong parabol có dạng: $y=ax^2$ và đi qua điểm có tọa độ $(R;h)$ nên ta có:

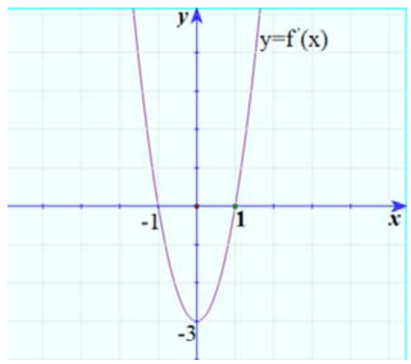
$$y=\frac{h}{R^2}x^2$$

$$\Rightarrow x=\pm\frac{R\sqrt{y}}{\sqrt{h}}$$

Thể tích của khối tròn xoay trên là: $V=\pi\int\limits_0^h \frac{R^2}{h}y\mathrm{d}y=\pi\frac{R^2}{h}.\frac{1}{2}y^2\Big|_0^h=\frac{1}{2}\pi R^2 h$.

Áp dụng công thức ta có: $V=\frac{1}{2}\pi R^2 h=\frac{1}{2}Bh=\frac{1}{2}.3.4=6$.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,(a,b,c,d\in\mathbb{R},a\neq 0)$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y=4$ tại điểm có hoành độ âm và đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ cho bởi hình vẽ dưới đây. Tính thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng H giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành khi quay xung quanh trục Ox.



A. $\frac{725}{35}\pi$. **B.** $\frac{1}{35}\pi$. **C.** 6π. **D.** Chọn khác.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)\Rightarrow f'(x)=3(x^2-1)$.

Khi đó $f(x)=\int f'(x)dx=x^3-3x+C$.

Điều kiện đồ thị hàm số $f(x)$ tiếp xúc với đường thẳng $y=4$ là:

$\begin{cases}f(x)=4\\ f'(x)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-3x+C=4\\ 3(x^2-1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\ C=2\end{cases}$ suy ra $f(x)=x^3-3x^2+2(C)$.

$+(C)\cap Ox\Rightarrow$ hoành độ giao điểm là $x=-2;x=1$.

+Khi đó $V=\pi\int\limits_{-2}^{1}(x^3-3x^2+2)^2dx=\frac{729}{35}\pi$.

Dạng 5: Tính thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị

1. Phương pháp:

Nếu hình phẳng D được giới hạn bởi các đường $y=f\left(x\right),y=g\left(x\right),x=a,x=b$ thì thể tích khối tròn xoay sinh bởi khi quay D quanh trục Ox được tính bởi công thức: $V=\pi\int_a^b\left|f^2\left(x\right)-g^2\left(x\right)\right|dx$

2. Các Bài tập mẫu:

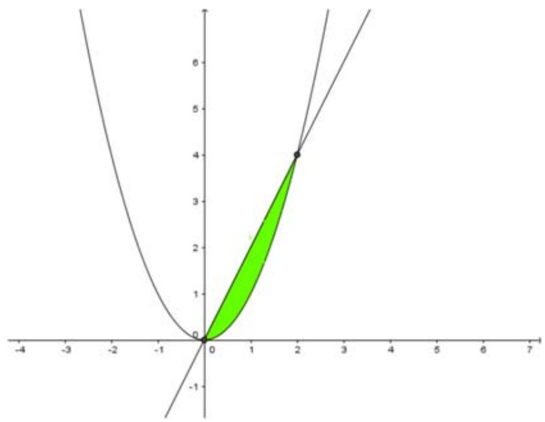
Bài tập 1: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=a.x^2,y=bx,\left(a,b\neq0\right)$ quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A. $V=\pi.\dfrac{b^3}{a^3}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)$.

B. $V=\pi.\dfrac{b^5}{5a^3}$.

C. $V=\pi.\dfrac{b^5}{3a^3}$.

D. $V=\pi.\dfrac{b^5}{a^3}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)$

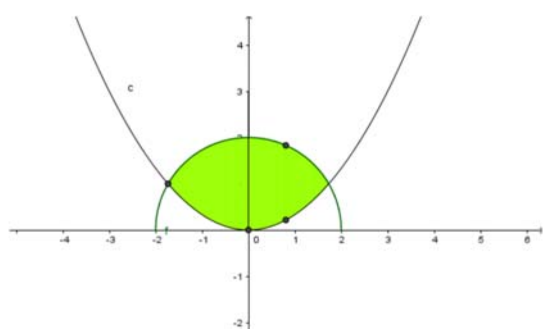


Hướng dẫn giải

Chọn D

Tọa độ giao điểm của hai đường $y=a.x^2$ và $y=b.x$ là các điểm $O(0;0)$ và $A\left(\dfrac{b}{a};\dfrac{b^2}{a}\right)$. Vậy thể tích của khối tròn xoay cần tính là: $V=\int_0^{\frac{b}{a}}\pi b^2x^2dx-\int_0^{\frac{b}{a}}\pi a^2x^4dx=\pi\dfrac{b^5}{a^3}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)$.

Bài tập 2: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{4-x^2}$, $y=\dfrac{1}{3}x^2$ quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:



A. $V = \frac{24\pi\sqrt{3}}{5}$.

B. $V = \frac{28\pi\sqrt{3}}{5}$.

C. $V = \frac{28\pi\sqrt{2}}{5}$.

D. $V = \frac{24\pi\sqrt{2}}{5}$

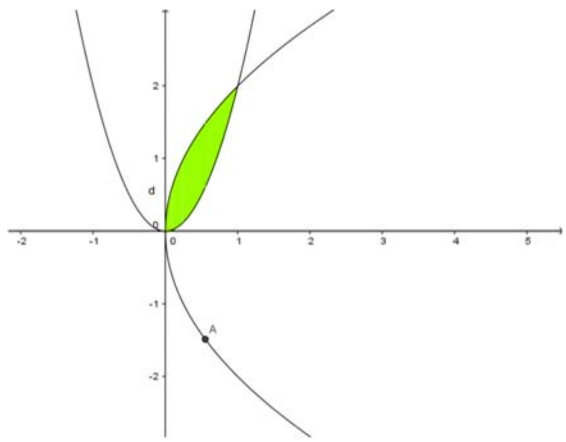
Hướng dẫn giải

Chọn B

Tọa độ giao điểm của hai đường $y = \sqrt{4 - x^2}$ và $y = \frac{1}{3}x^2$ là các điểm $A\left(-\sqrt{3};1\right)$ và $B\left(\sqrt{3};1\right)$. Vậy thể tích của khối tròn xoay cần tính là:

$$V = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \pi\left(4 - x^2\right)dx - \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \pi.\frac{1}{9}x^4 dx = \pi\frac{28\sqrt{3}}{5}.$$

Bài tập 3: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x^2$, $y^2 = 4x$ quay xung quanh trục *Ox*. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:



A. $V = \frac{88\pi}{5}$.

B. $V = \frac{9\pi}{70}$.

C. $V = \frac{4\pi}{3}$.

D. $V = \frac{6\pi}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Với $x \in \left[0;2\right]$ thì $y^2 = 4x \Leftrightarrow y = \sqrt{4x}$

Tọa độ giao điểm của đường $y = 2x^2$ với $y^2 = 4x$ là các điểm $O(0;0)$ và $A(1;2)$. Vậy thể tích của khối tròn xoay cần tính là: $V = \int_0^1 \pi.4x dx - \int_0^1 \pi.4x^4 dx = \pi.\frac{6}{5}$.

Bài tập 4: Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng D giới hạn bởi các đường elip $x^2 + 9y^2 = 9$ quay quanh Ox bằng:

A. π.

B. 2π.

C. 3π.

D. 4π

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có: $x^2+9y^2=9 \Leftrightarrow y^2=\dfrac{9-x^2}{9} \Rightarrow V=\pi\int_{-3}^{3} y^2dx=\pi\int_{-3}^{3}\dfrac{9-x^2}{9}dx=4\pi$.

Bài tập 5: Thể tích của khối tròn xoay khi quay hình phẳng D giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}, y=x$ quanh trục Ox bằng:

A. $\pi\int_0^1\left(\sqrt{x}-x\right)dx$.

B. $\pi\int_0^1\left(x-\sqrt{x}\right)dx$.

C. $\pi\int_0^1\left(x-x^2\right)dx$.

D. $\pi\int_0^1\left(x^2-x\right)dx$

Hướng dẫn giải

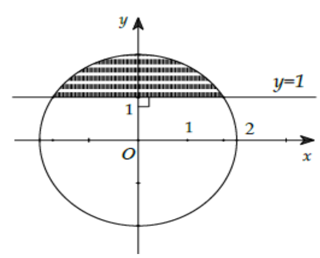
Chọn D

Xét phương trình $\sqrt{x}-x \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x-x^2 \end{cases} \Rightarrow x=0; x=1$.

Và $\sqrt{x}\ge x \forall x\in[0;1] \Rightarrow V=\pi\int_0^1\left((\sqrt{x})^2-x^2\right)dx=\pi\int_0^1\left(x-x^2\right)dx$.

3. Bài tập

Câu 1: Quay hình phẳng như hình được tô đậm trong hình vẽ bên quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là:



A. $V=4\sqrt{3}\pi$.

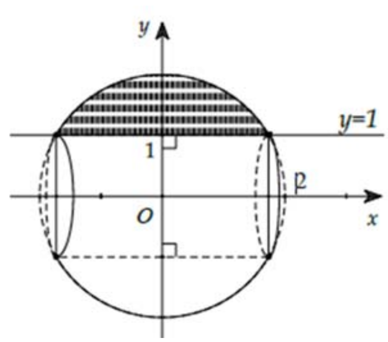
B. $V=6\sqrt{3}\pi$.

C. $V=5\sqrt{3}\pi$.

D. $V=2\sqrt{3}\pi$

Hướng dẫn giải

Chọn A

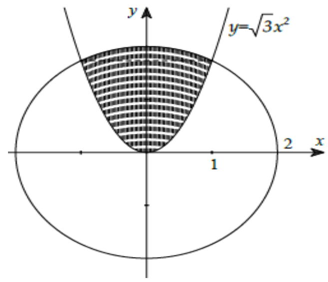


Xét hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=3 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$.

Do đối xứng nhau qua Oy nên:

$$V = 2\pi\int_0^{\sqrt{3}}\left[\left(4-x^2\right)-1^2\right]dx = 2\pi\int_0^{\sqrt{3}}\left(3-x^2\right)dx = 2\pi\left(3x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}\,\pi.$$

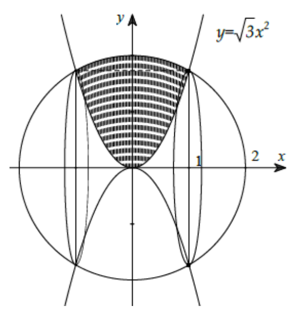
Câu 2: Quay hình phẳng như hình được tô đậm trong hình vẽ bên quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích:



A. $V = \dfrac{46\pi}{9}$. **B.** $V = \dfrac{46\pi}{15}$. **C.** $V = \dfrac{23\pi}{9}$. **D.** $V = 13\pi$.

Hướng dẫn giải

Chọn B



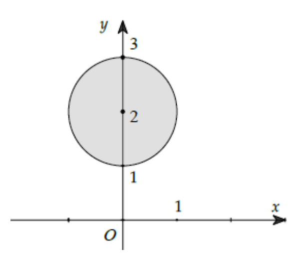
Xét hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ y=\sqrt{3}x \end{cases} \Rightarrow x = \pm 1$.

Do đối xứng nhau qua Oy nên

$$V = 2\pi\int_0^{\sqrt{3}}\left[\left(4-x^2\right)-\left(\sqrt{3}x\right)^2\right]dx - 2\pi\int_0^{\sqrt{3}}\left(4-x^2-3x^4\right)dx$$

$$= 2\pi\left(4x-\frac{x^5}{3}-\frac{3x^5}{5}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}} = \frac{46\pi}{15}.$$

Câu 3: Quay hình phẳng như hình được tô đậm trong hình vẽ bên quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là:



A. $V = 3\pi^2$. **B.** $V = \pi^2$. **C.** $V = \dfrac{2\pi^2}{3}$. **D.** $V = 2\pi^2$

Hướng dẫn giải

Chọn D

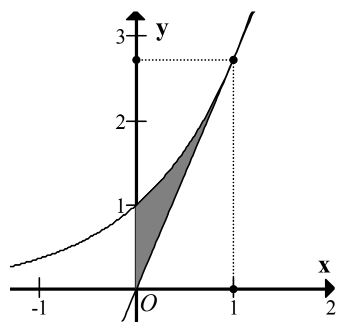
Ta có: $x^2+(y-1)^2=1 \Leftrightarrow (y-1)^2=1-x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1+\sqrt{1-x^2} \\ y=1-\sqrt{1-x^2} \end{array}\right.$

Ta có: $V=2\pi\int_0^1\left[\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^2-\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)^2\right]dx=8\pi\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$

Đặt $x=\sin t$; $\left(t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\right)$

$\Rightarrow V=8\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tsdt-4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=4\pi\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=2\pi^2.$

Câu 4: Cho hình (H) giới hạn bởi các đường cong $(C): y=e^x$, tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(1;e)$ và trục Oy. Thể tích của khối tròn xoay khi quay (H) quanh trục Ox bằng:



A. $\frac{e-2}{2}$. **B.** $\frac{e^2-1}{3}$. **C.** $\frac{e^2+1}{2}$. **D.** $\frac{e^2-3}{6}$

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=e^x$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(1;e)$ là $y=e(x-1)+e \Leftrightarrow y=ex.$

Diện tích của (H) bằng: $V=\pi\int_0^1\left(e^{2x}-e^2x^2\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{e^2}{3}x^3\right)\Bigg|_0^1=\frac{e^2-3}{6}.$

Câu 5: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2-4, y=2x-4, x=0, x=2$. Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox bằng:

A. $-\frac{32\pi}{5}$. **B.** 6π. **C.** -6π. **D.** $\frac{32\pi}{5}$.

Lời giải

Chọn D

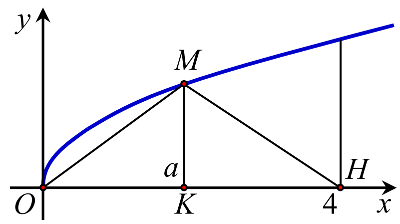
Suy ra thể tích cần tìm là $V=\pi\int_0^2\left(x^2-4\right)^2\mathrm{d}x-\pi\int_0^2(2x-4)^2\mathrm{d}x=\frac{32\pi}{5}$.

Dạng 6: Tính thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi nhiều đồ thị

1. Phương pháp:

2. Các Bài tập mẫu:

Bài tập 1: Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$, $y=0$ và $x=4$ quanh trục Ox. Đường thẳng $x=a\ (0<a<4)$ cắt đồ thị hàm $y=\sqrt{x}$ tại M.



Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác OMH quanh trục Ox. Biết rằng $V=2V_1$. Khi đó

A. $a=2$. **B.** $a=2\sqrt{2}$. **C.** $a=\frac{5}{2}$. **D.** $a=3$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $\sqrt{x}=0\Leftrightarrow x=0$. Khi đó $V=\pi\int_0^4 x\mathrm{d}x=8\pi$

Ta có $M\left(a;\sqrt{a}\right)$

Khi quay tam giác OMH quanh trục Ox tạo thành hai hình nón có chung đáy:

- Hình nón (N_1) có đỉnh là O, chiều cao $h_1=OK=a$, bán kính đáy $R=MK=\sqrt{a}$;
- Hình nón (N_2) thứ 2 có đỉnh là H, chiều cao $h_2=HK=4-a$, bán kính đáy $R=MK=\sqrt{a}$

Khi đó $V_1=\frac{1}{3}\pi R^2h_1+\frac{1}{3}\pi R^2h_2=\frac{4}{3}\pi a$

Theo đề bài $V=2V_1\Leftrightarrow 8\pi=2.\frac{4}{3}\pi a\Rightarrow a=3$.

Bài tập 2: Cho hình thang cong giới hạn bởi các đường $y=e^x, y=0, x=0, x=\ln 4$. Đường thẳng x = k $(0<k<\ln 4)$ chia thành hai hình phẳng là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Quay S_1, S_2 quanh trục Ox được khối tròn xoay có thể tích lần lượt là V_1, V_2. Với giá trị nào của k thì $V_1=2V_2$

A. $k=\frac{1}{2}\ln\frac{32}{3}$. **B.** $k=\frac{1}{2}\ln 11$. **C.** $k=\frac{1}{2}\ln\frac{11}{3}$. **D.** $k=\ln\frac{32}{3}$

Hướng dẫn giải

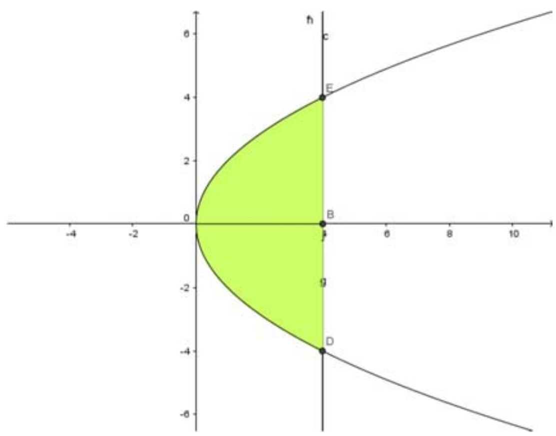
Chọn B

Ta có:

$$V_1=\pi\int_0^k\left(e^x\right)^2dx=\pi\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)\Bigg|_0^k=\frac{\pi e^{2k}}{2}-\frac{\pi}{2};\ V_2=\pi\int_k^{\ln 4}\left(e^x\right)^2dx=\pi\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)\Bigg|_k^{\ln 4}=8\pi-\frac{\pi e^{2k}}{2}$$

Theo giả thiết: $V_1=2V_2\Leftrightarrow\frac{\pi e^{2k}}{2}-\frac{\pi}{2}=2\left(8\pi-\frac{\pi e^{2k}}{2}\right)\Leftrightarrow e^{2k}=11\Leftrightarrow k=\frac{1}{2}\ln 11$

Bài tập 3: Cho hình phẳng D giới hạn bởi các đường $y^2=4x$ và đường thẳng $x=4$. Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi D xoay quanh trục Ox là:



A. 32π. **B.** 64π.
C. 16π. **D.** 4π.

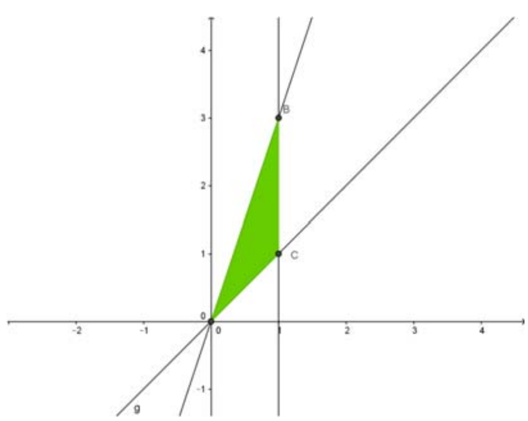
Hướng dẫn giải :

Chọn A

Giao điểm của hai đường $y^2=4x$ và $x=4$ là $D(4;-4)$ và $E(4;4)$. Phần phía trên Ox của đường $y^2=4x$ có phương trình $y=2\sqrt{x}$. Từ hình vẽ suy ra thể tích của khối tròn xoay cần tính là:

$V=\int_0^4\pi\left(2\sqrt{x}\right)^2dx=32\pi$.

Bài tập 4: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=3x,\ y=x,\ x=0,\ x=1$ quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:



A. $V = \frac{8\pi}{3}$. **B.** $V = \frac{4\pi}{3}$. **C.** $V = \frac{2\pi}{3}$. **D.** $V = \pi$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Tọa độ giao điểm của đường $x = 1$ với $y = x$ và $y = 3x$ là các điểm $C(1;1)$ và $B(3;1)$. Tọa độ giao điểm của đường $y = 3x$ với $y = x$ là $O(0;0)$. Vậy thể tích của khối tròn xoay cần tính là:

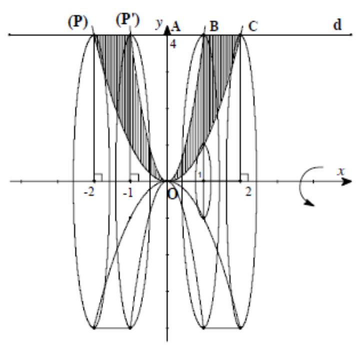
$$V = \int_0^1 \pi.9x^2 dx - \int_0^1 \pi.x^2 dx = \pi\frac{8}{3}.$$

Bài tập 5: Trên mặt phẳng Oxy, cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $(P): y = x^2; (P'): \text{y} = 4x^2; (d): y = 4$. Thể tích của khối tròn xoay khi quay quanh trục Ox bằng:

A. $\frac{9\pi}{5}$. **B.** $\frac{4\pi}{5}$. **C.** $\frac{7\pi}{5}$. **D.** 2π.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Đặt V là thể tích cần tìm

Xét phương trình hoành độ giao điểm của và: $x^2 - 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right.$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của và: $4x^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$

V_{OAC} là thể tích khối tròn xoay sinh bởi khi quay: $\left[\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = 4 \\ Oy \end{array}\right.$ quanh Ox

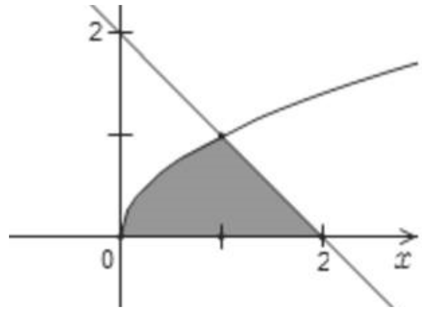
V_{OAB} là thể tích khối tròn xoay sinh bởi khi quay: $\left[\begin{array}{l} y = 4x^2 \\ y = 4 \\ Oy \end{array}\right.$ quanh Ox

Lúc đó: $V = V_{OAC} - V_{OAB} = \pi\int_0^2 \left[4 - \left(x^2\right)^2\right] dx - \pi\int_0^2 \left[4 - \left(4x^2\right)^2\right] dx = \pi\int_0^2 \left(4 - x^2\right) dx - \pi\int_0^1 \left(4 - 16x^4\right) dx$

$$= \pi\left(4x - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 - \pi\left(4x - 16\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \pi\left(8 - \frac{32}{5} - 4 + \frac{16}{5}\right) = \frac{4\pi}{5}$$

3. Bài tập trắc nghiệm:

Câu 1: Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $(P): y=\sqrt{x}, y=0, y=2-x$. Thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox là:



A. $\frac{4\sqrt{2}-1}{3}\pi$. **B.** $\frac{7}{6}$. **C.** $\frac{8\sqrt{2}+3}{6}\pi$. **D.** $\frac{5}{6}\pi$.

Lời giải

Chọn D

$$\sqrt{x}=2-x \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x\le 2 \\ x=(2-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x\le 2 \\ x^2-5x+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$$

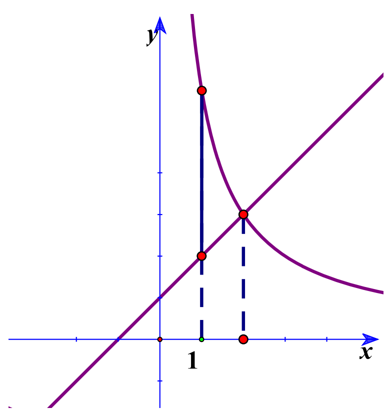
$$V=\pi\int_0^1\left(\sqrt{x}\right)^2dx+\pi\int_1^2(2-x)^2dx=\frac{5}{6}\pi.$$

Câu 2: Cho hình (H) giới hạn bởi các đường $y=x+1$; $y=\frac{6}{x}$; $x=1$. Quay hình (H) quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là:

A. $\frac{13\pi}{6}$. **B.** $\frac{125\pi}{6}$. **C.** $\frac{35\pi}{3}$. **D.** 18π.

Lời giải

Chọn C



Phương trình hoành độ giao điểm: $x+1=\frac{6}{x} \Leftrightarrow x^2+x-6=0\,(x\ne 0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-3\,(l) \end{array}\right.$

Vì $\frac{6}{x} > x+1 > 0$ với $x \in (1;2)$ nên thể tích cần tính là

$V = \pi\int_1^2 \left(\frac{6}{x}\right)^2 \mathrm{d}x - \pi\int_1^2 (x+1)^2 \mathrm{d}x = \frac{35\pi}{3}$.

Câu 3: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = 3x; y = x; x = 1$. Quay (H) xung quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là:

A. $\frac{8\pi}{3}$. **B.** $\frac{8\pi^2}{3}$. **C.** $8\pi^2$. **D.** 8π.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm: $3x = x \Leftrightarrow x = 0$ và $3x > x > 0$ với $x \in (0;1)$.

Thể tích cần tính là $V = \pi\int_0^1 (3x)^2 \mathrm{d}x - \pi\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x = \frac{8\pi}{3}$.

Câu 4: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2, y = 2x$. Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox bằng:

A. $\frac{16\pi}{15}$. **B.** $\frac{21\pi}{15}$. **C.** $\frac{32\pi}{15}$. **D.** $\frac{64\pi}{15}$.

Lời giải

Chọn D

Hoành độ giao điểm của đồ thị 2 hàm số $y = x^2$ và $y = 2x$ là nghiệm của phương trình

$$x^2 = 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành là

$$V = \pi\int_0^2 (2x)^2 \mathrm{d}x - \pi\int_0^2 \left(x^2\right)^2 \mathrm{d}x = \pi\left(\frac{4}{3}x^3\right)\Bigg|_0^2 - \pi\left(\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{64\pi}{15}.$$

Câu 5: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{4-x^2}$, $y = \frac{1}{3}x^2$ quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A. $V = \frac{28\pi\sqrt{2}}{5}$. **B.** $V = \frac{28\pi\sqrt{3}}{5}$. **C.** $V = \frac{24\pi\sqrt{2}}{5}$. **D.** $V = \frac{24\pi\sqrt{3}}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Giải phương trình $\sqrt{4-x^2} = \frac{1}{3}x^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$

Thể tích cần tìm là $V=\pi\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2\mathrm{d}x-\pi\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left(\frac{x^2}{3}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{28\pi\sqrt{3}}{5}$.

Dạng 7: Một số bài toán thực tế ứng dụng tích phân

1. Phương pháp giải

* Một vật chuyển động có phương trình vận tốc $v(t)$ trong khoảng thời gian từ $t=a$ đến $t=b\,(a<b)$ sẽ di chuyển được quãng đường là:

$$\boxed{S=\int_a^b v(t)\,dt}$$

Ví dụ 1: Một vật chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=160-10t\,(m/s)$. Quãng đường mà vật chuyển động từ thời điểm $t=0(s)$ đến thời điểm mà vật dừng lại là

A. $1028m$. **B.** $1280m$.

C. $1308m$. **D.** $1380m$.

Hướng dẫn giải

Khi vật dừng lại thì
$v(t)=160-10t=0\Leftrightarrow t=16$

Do đó $S=\int_0^{16}v(t)\,dt=\int_0^{16}(160-10t)\,dt$

$=\left(160t-5t^2\right)\Big|_0^{16}=1280(m)$.

Chọn B.

* Một vật chuyển động có phương trình gia tốc $a(t)$ thì vận tốc của vật đó sau khoảng thời gian $[t_1;t_2]$ là:

$$\boxed{v=\int_{t_1}^{t_2}a(t)\,dt}$$

Ví dụ 2: Một chiếc ô tô chuyển động với vận tốc $v(t)\ (m/s)$, có gia tốc $a(t)=v'(t)=\frac{3}{2t+1}\left(m/s^2\right)$.

Vận tốc của ô tô sau 10 giây (làm tròn đến hàng đơn vị) là

A. 4,6 *m/s*. **B.** 7,2 *m/s*.

C. 1,5 *m/s*. **D.** 2,2 *m/s*.

Hướng dẫn giải

Vận tốc của ô tô sau 10 giây là

$$v=\int_0^{10}\frac{3}{2t+1}dt=\frac{3}{2}\ln|2t+1|\Big|_0^{10}=\frac{3}{2}\ln 21\approx 4,6(m/s).$$

Chọn A.

* Điện lượng chuyển qua tiết diện của dây dẫn của đoạn mạch trong thời gian từ t_1 đến t_2 là:

$$\boxed{Q=\int_{t_1}^{t_2} I(t)\,dt}$$

2. Bài tập

Bài tập 1: Một vật chuyển động với vận tốc 10 *m/s* thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=3t+t^2$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc.

A. $\frac{4300}{3}m.$ **B.** $4300\,m.$ **C.** $430\,m.$ **D.** $\frac{430}{3}m.$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Hàm vận tốc $v(t)=\int a(t)\,dt=\int(3t+t^2)\,dt=\frac{3t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+C.$

Lấy mốc thời gian lúc tăng tốc $\Rightarrow v(0)=10\Rightarrow C=10.$

Ta được $v(t)=\frac{3t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+10.$

Sau 10 giây, quãng đường vật đi được là

$$S=\int_0^{10}\left(\frac{3t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+10\right)dt=\left.\left(\frac{t^3}{2}+\frac{t^4}{12}+10t\right)\right|_0^{10}=\frac{4300}{3}(m)$$

$$\boxed{v(t)=\int a(t)\,dt}$$

Bài tập 2: Dòng điện xoay chiều hình sin chạy qua một đoạn mạch LC có biểu thức cường độ là $i(t)=I_0\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$. Biết $i=q'$ với q là điện tích tức thời ở tụ điện. Tính từ lúc $t=0$, điện lượng chuyển qua tiết diện thẳng của dây dẫn của đoạn mạch đó trong thời gian từ 0 đến $\frac{\pi}{\omega}$ là

A. $\frac{\pi\sqrt{2}I_0}{\omega}.$ **B.** 0. **C.** $\frac{2I_0}{\omega}.$ **D.** $\frac{\pi I_0}{\omega\sqrt{2}}.$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Điện lượng chuyển qua tiết diện của dây dẫn của đoạn mạch trong thời gian từ 0 đến $\frac{\pi}{\omega}$ là

$$Q=\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} I(t)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} I_0\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)dt=\frac{I_0}{\omega}\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{\omega}}=\frac{2I_0}{\omega}.$$

$Q(t)=\int I(t)\,dt$

Bài tập 3: Gọi $h(t)(cm)$ là mức nước trong bồn chứa sau khi bơm được *t* giây. Biết rằng $h'(t)=\frac{1}{5}\sqrt[3]{t+8}$ và lúc đầu bồn không có nước. Tìm mức nước ở bồn sau khi bơm nước được 6 giây (chính xác đến 0,01*cm*)

A. 2,67 *cm*. **B.** 2,66 *cm*. **C.** 2,65 *cm*. **D.** 2,68 *cm*.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Mức nước ở bồn sau khi bơm nước được 6 giây là

$$\int_0^6 h'(t)\,dt=\int_0^6\frac{1}{5}\sqrt[3]{t+8}\,dt=\left[\frac{3}{20}(t+8)\sqrt[3]{t+8}\right]\Bigg|_0^6\approx 2,66(cm)$$

Bài tập 3: Một viên đá được bắn thẳng đứng lên trên với vận tốc ban đầu là 40 m/s từ một điểm cao 5 m cách mặt đất. Vận tốc của viên đá sau t giây được cho bởi công thức $v(t)=40-10t$ m/s. Tính độ cao lớn nhất viên đá có thể lên tới so với mặt đất.

A. 85 m. **B.** 80 m. **C.** 90 m. **D.** 75 m.

Lời giải

Chọn A

Gọi h là quãng đường lên cao của viên đá.

$v(t)=h'(t)\Rightarrow h(t)=\int v(t)\,\mathrm{d}t=\int(40-10t)\,\mathrm{d}t=40t-5t^2+c$

Tại thời điểm $t=0$ thì $h=5$. Suy ra $c=5$.

Vậy $h(t)=40t-5t^2+5$

$h(t)$ lớn nhất khi $v(t)=0\Leftrightarrow 40-10t=0\Leftrightarrow t=4$. Khi đó $h(4)=85\,\mathrm{m}$.

Bài tập 4: Một ô tô chạy với vận tốc 20 m/s thì người lái đạp phanh còn được gọi là “thắng”. Sau khi đạp phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-40t+20$ trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Quãng đường ô tô di chuyển từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn là bao nhiêu?

A. 2 m. **B.** 3 m. **C.** 4 m. **D.** 5 m.

Lời giải

Chọn D

Lấy mốc thời gian là lúc ô tô bắt đầu đạp phanh $(t=0)$

Gọi T là thời điểm ô tô dừng lại. Khi đó vận tốc lúc dừng là $v(T)=0$

Vậy thời gian từ lúc đạp phanh đến lúc dừng là $v(T)=0 \Leftrightarrow -40T+20=0 \Leftrightarrow T=\frac{1}{2}$

Gọi $s(t)$ là quãng đường ô tô đi được trong khoảng thời gian T.

Ta có $v(t)=s'(t)$ suy ra $s(t)$ là nguyên hàm của $v(t)$

Vậy trong $\frac{1}{2}(\mathrm{s})$ ô tô đi được quãng đường là: $\int\limits_{t}^{T} v(t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}(-40t+20)\,\mathrm{d}t=\left(-20t^2+20t\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}}=5$

Bài tập 5: Một ô tô xuất phát từ A chuyển dộng với vận tốc nhanh dần đều, 10 giây sau, ô tô đạt vận tốc 5 và từ thời điểm đó ô tô chuyển động đều. Ô tô thứ hai cũng xuất phát từ A nhưng sau ô tô thứ nhất là 10 giây, chuyển động nhanh dần đều và đuổi kịp ô tô thứ nhất sau 25 giây. Vận tốc ô tô thứ hai tại thời điểm đó là

A. 12. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

Ta có gia tốc trong $10\,\mathrm{s}$ đầu của ô tô thứ nhất là $a=\frac{v-v_0}{t-t_0}=\frac{5}{10}=0,5\left(\mathrm{m/s}^2\right)$

Trong $10\,\mathrm{s}$ đầu, ô tô thứ nhất chuyển động nhanh dần với vận tốc $v(t)=0,5t$

$\Rightarrow$ Quãng đường ô tô thứ nhất đi được trong $10\,\mathrm{s}$ là $\int\limits_{0}^{10} 0,5t\mathrm{dt}=25(\mathrm{m})$.

Trong $25\,\mathrm{s}$ tiếp theo, ô tô thứ nhất đi được $5.25=125$

Vậy quãng đường ô tô thứ nhất đi được đến khi bị đuổi kịp là $25+125=150(\mathrm{m})$

Mặt khác $S=S_0+\frac{1}{2}at^2$

$\Rightarrow$ Gia tốc của ô tô thứ hai là $a=\frac{2(S-S_0)}{t^2}=\frac{2.150}{25^2}=0,48\left(\mathrm{m/s}^2\right)$

Vậy khi đuổi kịp ô tô thứ nhất, vận tốc của ô tô thứ hai là $v_t=v_0+at=12$.

Bài tập 6: Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t)=7t$ đi được 5, người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc

$a=-70\left(\mathrm{m/s^2}\right)$. Tính quãng đường $S\left(\mathrm{m}\right)$ đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

A. $S=95,70\left(\mathrm{m}\right)$. **B.** $S=87,50\left(\mathrm{m}\right)$. **C.** $S=94,00\left(\mathrm{m}\right)$. **D.** $S=96,25\left(\mathrm{m}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Quãng đường ô tô đi được từ lúc xe lăn bánh đến khi được phanh.

$$S_1=\int_0^5 v_1\left(t\right)\mathrm{d}t=\int_0^5 7t\mathrm{d}t=7\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^5=87,5\left(\mathrm{m}\right).$$

Vận tốc $v_2\left(t\right)\left(\mathrm{m/s}\right)$ của ô tô từ lúc được phanh đến khi dừng hẳn thỏa mãn

$v_2\left(t\right)=\int\left(-70\right)\mathrm{d}t=-70t+C$, $v_2\left(5\right)=v_1\left(5\right)=35\Rightarrow C=385$. Vậy $v_2\left(t\right)=-70t+385$.

Thời điểm xe dừng hẳn tương ứng với t thỏa mãn $v_2\left(t\right)=0\Leftrightarrow t=5,5\left(\mathrm{s}\right)$.

Quãng đường ô tô đi được từ lúc xe được phanh đến khi dừng hẳn.

$$S_2=\int_5^{5,5} v_1\left(t\right)\mathrm{d}t=\int_5^{5,5}\left(-70t+385\right)\mathrm{d}t=8,75\left(\mathrm{m}\right).$$

Quãng đường cần tính $S=S_1+S_2=96,25\left(\mathrm{m}\right)$.

Bài tập 7: Một vật di chuyển với gia tốc $a\left(t\right)=-20\left(1+2t\right)^{-2}\left(m/s^2\right)$. Khi $t=0$ thì vận tốc của vật là $30\left(m/s\right)$. Tính quãng đường vật đó di chuyển sau 2 giây.

A. $S=46m$. **B.** $S=47m$. **C.** $S=48m$. **D.** $S=49m$.

Lời giải :

Chọn C

Vận tốc vật là : $v\left(t\right)=\int a\left(t\right)dt=\int -20\left(1+2t\right)^{-2}dt=10\left(1+2t\right)^{-1}+C$.

Khi $t=0$ thì $v\left(0\right)=10.(1)^{-1}+C=30\Leftrightarrow C=20$.

Nên $v\left(t\right)=10\left(1+2t\right)^{-1}+20\left(m/s\right)$.

Suy ra : $S=\int_0^2\left(10\left(1+2t\right)^{-1}+20\right)dt\approx 48\left(m\right)$

Bài tập 8: Vật chuyển động với vận tốc ban đầu $5m/s$ và có gia tốc được xác định bởi công thức $a=\dfrac{2}{t+1}$ $\left(m/s^2\right)$. Vận tốc của vật sau 10s đầu tiên là

A. $10m/s$. **B.** $9m/s$. **C.** $11m/s$. **D.** $12m/s$

Hướng dẫn giải:

Chọn A

Ta có $v(t)=\int \frac{2}{t+1}dt=2\ln(t+1)+c$

Mà vận tốc ban đầu 5m/s tức là : $v(0)=5 \Leftrightarrow 2\ln(0+1)+c=5 \Leftrightarrow c=5$.

Nên $v(t)=2\ln(t+1)+5$

Vận tốc của vật sau 10s đầu tiên là : $v(10)=2\ln(11)+5\approx 9,8$

Chọn Chọn **A.**

Bài tập 9: Trong giờ thực hành môn Vật Lí. Một nhóm sinh viên đã nghiên cứu về sự chuyển động của các hạt. Trong quá trình thực hành thì nhóm sinh viên này đã phát hiện một hạt prôton di chuyển trong điện trường với biểu thức gia tốc là: $a=-20(1+2t)^{-2}$.Với t của ta được tính bằng giây. Nhóm sinh viên đã tìm hàm vận tốc v theo t, biết rằng khi $t=0$ thì $v=30m/s^2$. Hỏi biểu thức đúng là?

A. $v=\left(\frac{10}{1+2t}+25\right)\ cm/s^2$. **B.** $v=\left(\frac{10}{1+t}+20\right)\ cm/s^2$.

C. $v=\left(\frac{10}{1+2t}+10\right)\ cm/s^2$. **D.** $v=\left(\frac{10}{1+2t}+20\right)\ cm/s^2$

Hướng dẫn giải :

Chọn D

Trước hết để giải bài toán này ta cũng chú ý. Biểu thức vận tốc v theo thời gian t có gia tốc a là: $v=\int a.dt$

Áp dụng công thức trên, ta có : $v=\int adt=\int \frac{-20}{(1+2t)^2}dt$

Đến đây ta đặt :

$u=1+2t \Rightarrow du=2dt \Rightarrow dt=\frac{du}{2}$

$v=\int \frac{-10}{u}du=\int -10u^{-2}du=\frac{10}{u}+K=\frac{10}{1+2t}+K$

Với $t=0, v=30 \Rightarrow K=20$

Vậy biểu thức vận tốc theo thời gian là : $v=\left(\frac{10}{1+2t}+20\right)\ cm/s^2$.

Bài tập 10: Người ta tổ chức thực hành nghiên cứu thí nghiệm bằng cách như sau. Họ tiến hành quan sát một tia lửa điện bắn từ mặt đất bắn lên với vận tốc $15m/s$. Hỏi biểu thức vận tốc của tia lửa điện là?

A. $v=-9,8t+15$. **B.** $v=-9,8t+13$. **C.** $v=9,8t+15$. **D.** $v=-9,8t-13$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Tia lửa chịu sự tác động của trọng lực hướng xuống nên ta có gia tốc $a=-9,8\left(m/s^2\right)$

Ta có biểu thức vận tốc v theo thời gian t có gia tốc a là :

$$v=\int adt=\int -9,8dt=-9,8t+C$$

Ở đây, với : $t=0, v=15m/s \Rightarrow C=15$

Vậy ta được biểu thức vận tốc có dạng : $v=-9,8t+15$

Bài tập 11: Người ta tổ chức thực hành nghiên cứu thí nghiệm bằng cách như sau. Họ tiến hành quan sát một tia lửa điện bắn từ mặt đất bắn lên với vận tốc $15m/s$. Hỏi sau 2,5 giây thì tia lửa điện đấy có chiều cao là bao nhiêu?

A. $6.235(m)$. **B.** $5.635(m)$. **C.** $4.235(m)$. **D.** $6.875(m)$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Tia lửa chịu sự tác động của trọng lực hướng xuống nên ta có gia tốc $a=-9,8\left(m/s^2\right)$

Ta có biểu thức vận tốc v theo thời gian t có gia tốc a là :

$$v=\int adt=\int -9,8dt=-9,8t+C$$

Ở đây, với $t=0, v=15m/s \Rightarrow C=15$

Vậy ta được biểu thức vận tốc có dạng:

$v=-9,8t+15$

Lấy tích phân biểu thức vận tốc, ta sẽ có được bểu thức quãng đường:

$$s=\int vdt=\int \left(-9,8t+15\right)dt=-4,9\,\mathrm{t}^2+15t+K$$

Theo đề bài, ta được khi $t=0 \Rightarrow s=0 \Rightarrow K=0$.

Vậy biểu thức tọa độ của quảng đường là : $s=-4,9t^2+15t$.

Khi $t=2,5(s)$, ta sẽ được $s=6,875(m)$.

Dạng 8: Bài toán thực tế

1. Phương pháp: Vận dụng các kiến thức về tích phân và bài toán ứng dụng.

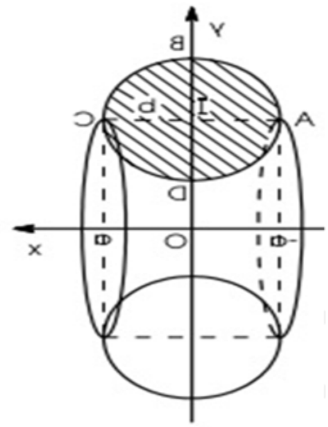
2. Các Bài tập mẫu:

Bài tập 1: Tính thể tích hình xuyến tạo thành do quay hình tròn $(C): x^2+\left(y-2\right)^2=1$ quanh trục Ox

.

Hướng dẫn giải:

Hình tròn (C) có tâm $I(0;2)$, bán kính $R=1$ là $x^2+(y-2)^2=1$



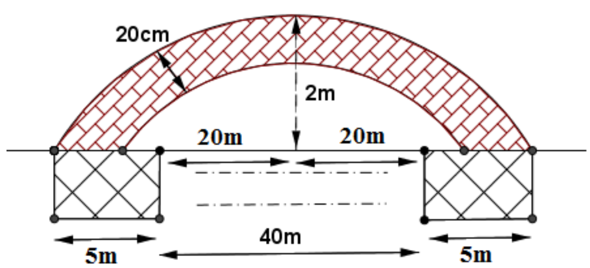
Ta có $(y-1)^2=1-x^2\,(-1\le x\le 1)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=2+\sqrt{1-x^2}\\ y=2-\sqrt{1-x^2}\end{array}\right.$

Thể tích cần tính:

$$V=\pi\int_{-1}^{1}\left[\left(2+\sqrt{1-x^2}\right)^2-\left(2-\sqrt{1-x^2}\right)^2\right]dx=4\pi^2$$

Bài tập 2: Thành phố định xây cây cầu bắc ngang con sông dài $500m$, biết rằng người ta định xây cầu có 10 nhịp cầu hình dạng parabol,mỗi nhịp cách nhau $40m$,biết 2 bên đầu cầu và giữa mối nhịp nối người ta xây 1 chân trụ rộng $5m$. Bề dày nhịp cầu không đổi là $20cm$. Biết 1 nhịp cầu như hình vẽ. Hỏi lượng bê tông để xây các nhịp cầu là bao nhiêu

A. $20m^3$.
B. $50m^3$.
C. $40m^3$.
D. $100m^3$.

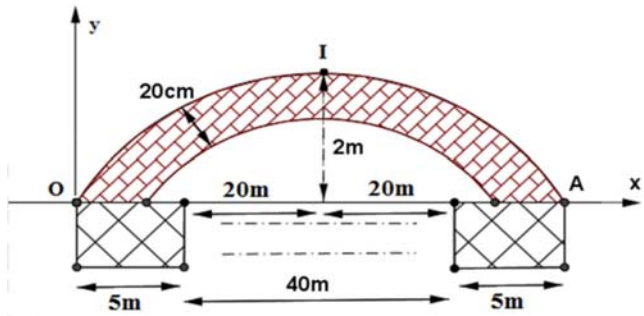


Hướng dẫn giải:

Chọn C

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ với gốc $O(0;0)$ là chân cầu,

đỉnh $I(25;2)$, điểm $A(50;0)$



Gọi Parabol trên có phương trình: $(P_1): y_1 = ax^2 + bx + c = ax^2 + bx\left(O \in (P_1)\right)$

$\Rightarrow y_2 = ax^2 + bx - \dfrac{20}{100}ax = ax^2 + bx - \dfrac{1}{2}$ là phương trình parabol dưới

Ta có $I, A \in (P_1) \Rightarrow (P_1): y_1 = -\dfrac{2}{625}x^2 + \dfrac{4}{25}x \Rightarrow y_2 = -\dfrac{2}{625}x^2 + \dfrac{4}{25}x - \dfrac{1}{5}$

Khi đó diện tích mỗi nhịp cầu là $S = S_1$ với S_1 là phần giới hạn bởi $y_1; y_2$ trong khoảng $(0;25)$

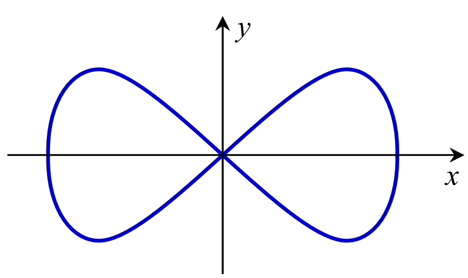
$$S = 2\left(\int_0^{0,2}\left(-\frac{2}{625}x^2 + \frac{4}{25}x\right)dx + \int_{0,2}^{15}\frac{1}{5}dx\right) \approx 0,9m^2$$

Vì bề dày nhịp cầu không đổi nên coi thể tích là tích diện tích và bề dày $V = S.0,2 \approx 1,98m^3 \Rightarrow$ số lượng bê tông cần cho mỗi nhịp cầu $\approx 2m^3$

Vậy mười nhịp cầu hai bên cần $\approx 40m^3$ bê tông

Chọn Chọn. **C.**

Bài tập 3: Trong Công viên Toán học có những mảnh đất mang hình dáng khác nhau. Mỗi mảnh được trồng một loài hoa và nó được tạo thành bởi một trong những đường cong đẹp trong toán học. Ở đó có một mảnh đất mang tên Bernoulli, nó được tạo thành từ đường Lemmiscate có phương trình trong hệ tọa độ Oxy là $16y^2 = x^2(25 - x^2)$ như hình vẽ bên.



Tính diện tích S của mảnh đất Bernoulli biết rằng mỗi đơn vị trong hệ tọa độ Oxy tương ứng với chiều dài 1 mét.

A. $S = \dfrac{125}{6}\left(m^2\right)$. **B.** $S = \dfrac{125}{4}\left(m^2\right)$.

C. $S = \dfrac{250}{3}\left(m^2\right)$. **D.** $S = \dfrac{125}{3}\left(m^2\right)$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Vì tính đối xứng trụ nên diện tích của mảnh đất tương ứng với 4 lần diện tích của mảnh đất thuộc góc phần tư thứ nhất của hệ trục tọa độ Oxy.

Từ giả thuyết bài toán, ta có $y = \pm\frac{1}{4}x\sqrt{5 - x^2}$.

Góc phần tư thứ nhất $y = \frac{1}{4}x\sqrt{25 - x^2}; x \in [0;5]$

Nên $S_{(I)} = \frac{1}{4}\int_0^5 x\sqrt{25 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{125}{12} \Rightarrow S = \frac{125}{3}(m^3)$

Bài tập 4: Một Bác thợ gốm làm một cái lọ có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x+1}$ và trục Ox quay quanh trục Ox biết đáy lọ và miệng lọ có đường kính lần lượt là $2dm$ và $4dm$, khi đó thể tích của lọ là:

A. $8\pi\ dm^2$..

B. $\frac{15}{2}\pi\ dm^3$..

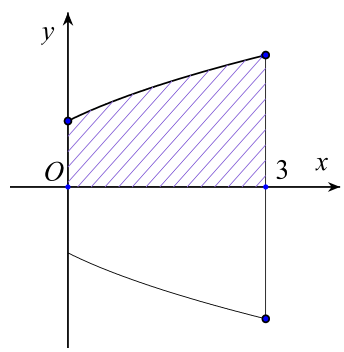
C. $\frac{14}{3}\pi\ dm^2$..

D. $\frac{15}{2}\ dm^2$.

Lời giải

Chọn B

• $r_1 = y_1 = 1 \Rightarrow x_1 = 0$



• $r_2 = y_2 = 2 \Rightarrow x_2 = 3$

Suy ra: $V = \pi\int_0^3 y^2\mathrm{d}x = \pi\int_0^3 (x+1)\mathrm{d}x = \pi\left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_0^3 = \frac{15}{2}\pi$

Bài tập 5: Để kéo căng một lò xo có độ dài tự nhiên từ $10cm$ đến $15cm$ cần lực $40N$. Tính công (A) sinh ra khi kéo lò xo có độ dài từ $15cm$ đến $18cm$.

A. $A = 1,56\ (J)$.

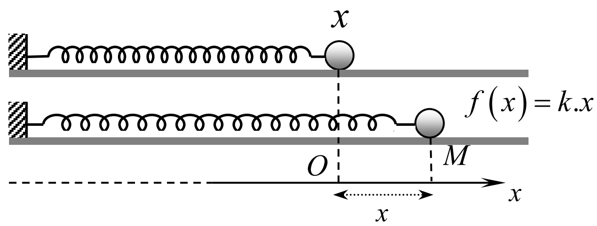
B. $A = 1\ (J)$.

C. $A = 2,5\ (J)$.

D. $A = 2\ (J)$.

Lời giải

Chọn A



Theo Định luật Hooke, lực cần dùng để giữ lò xo giãn thêm x mét từ độ dài tự nhiên là $f\left(x\right)=kx$, với $k\left(N/m\right)$ là độ cứng của lò xo. Khi lò xo được kéo giãn từ độ dài $10cm$ đến $15cm$, lượng kéo giãn là $5\ cm=0.05\ m$. Điều này có nghĩa $f\left(0.05\right)=40$, do đó:

$$0,05k=40\Leftrightarrow k=\frac{40}{0,05}=800\left(N/m\right)$$

Vậy $f\left(x\right)=800x$ và công cần để kéo dãn lò xo từ $15cm$ đến $18cm$ là:

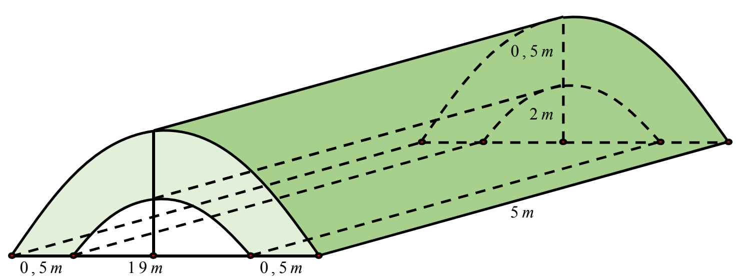
$$A=\int\limits_{0,05}^{0,08}800\,\mathrm{d}x=400x^2\Big|_{0,05}^{0,08}=400\left[\left(0,08\right)^2-\left(0,05\right)^2\right]=1,56\left(J\right)$$

Góc phần tư thứ nhất $y=\frac{1}{4}x\sqrt{25-x^2};x\in\left[0;5\right]$

Nên $S_{(I)}=\frac{1}{4}\int\limits_0^5 x\sqrt{25-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{125}{12}\Rightarrow S=\frac{125}{3}(m^3)$

3. Bài tập trắc nghiệm:

Câu 1: Trong chương trình nông thôn mới, tại một xã X có xây một cây cầu bằng bê tông như hình vẽ. Tính thể tích khối bê tông để đổ đủ cây cầu.

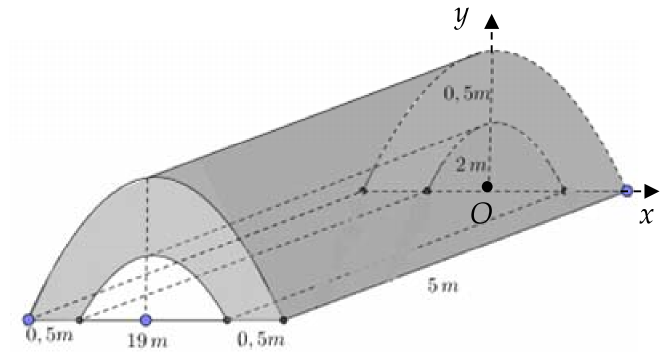


A. $19m^3$. **B.** $21m^3$. **C.** $18m^3$. **D.** $40m^3$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.



Ta có

Gọi $(P_1): y = ax^2 + c$ là Parabol đi qua hai điểm $A\left(\frac{19}{2};0\right), B(0;2)$

Nên ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} 0 = a.\left(\frac{19}{2}\right)^2 + 2 \\ 2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{8}{361} \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow (P_1): y = -\frac{8}{361}x^2 + 2$

Gọi $(P_2): y = ax^2 + c$ là Parabol đi qua hai điểm $C(10;0), D\left(0;\frac{5}{2}\right)$

Nên ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} 0 = a.(10)^2 + \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{40} \\ b = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow (P_2): y = -\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}$

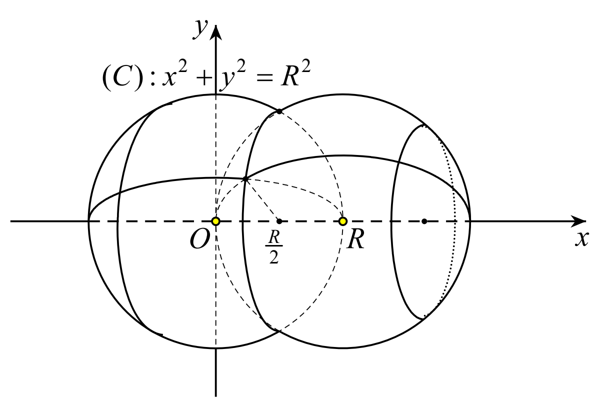
Ta có thể tích của bê tông là: $V = 5.2\left[\int_0^{10}\left(-\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}\right)dx - \int_0^{\frac{19}{2}}\left(-\frac{8}{361}x^2 + 2\right)dx\right] = 40m^3$.

Câu 2: Cho hai mặt cầu (S_1), (S_2) có cùng bán kính R thỏa mãn tính chất: tâm của (S_1) thuộc (S_2) và ngược lại. Tính thể tích phần chung V của hai khối cầu tạo bởi (S_1) và (S_2).

A. $V = \pi R^3$. **B.** $V = \frac{\pi R^3}{2}$. **C.** $V = \frac{5\pi R^3}{12}$. **D.** $V = \frac{2\pi R^3}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C



Gắn hệ trục Oxy như hình vẽ

Khối cầu $S(O,R)$ chứa một đường tròn lớn là $(C): x^2+y^2=R^2$

Dựa vào hình vẽ, thể tích cần tính là

$$V=2\pi\int_{\frac{R}{2}}^{R}\left(R^2-x^2\right)\mathrm{d}x=2\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{\frac{R}{2}}^{R}=\frac{5\pi R^3}{12}.$$

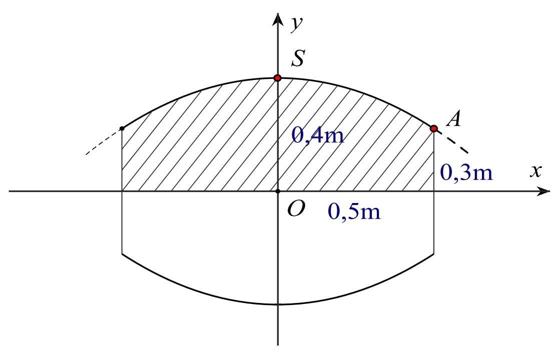
Câu 3: Một thùng rượu có bán kính các đáy là 30cm, thiết diện vuông góc với trục và cách đều hai đáy có bán kính là 40cm, chiều cao thùng rượu là 1m. Biết rằng mặt phẳng chứa trục và cắt mặt xung quanh thùng rượu là các đường parabol, hỏi thể tích của thùng rượu

là bao nhiêu?

A. $425,2$ lit. **B.** 425162 lit. **C.** 212581 lit. **D.** $212,6$ lit.

Hướng dẫn giải

Chọn A



• Gọi $(P): y=ax^2+bx+c$ là parabol đi qua điểm $A(0,5;0,3)$ và có đỉnh $S(0;0,4)$. Khi đó, thể tích thùng rượu bằng thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi (P), trục hoành và hai đường thẳng $x=\pm 0,5$ quay quanh trục Ox.

• Dễ dàng tìm được $(P): y=-\frac{2}{5}x^2+0,4$

• Thể tích thùng rượu là:

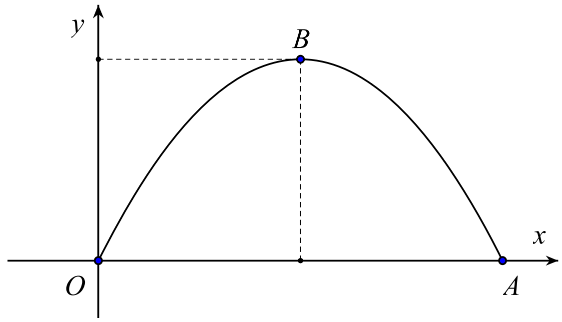
$$V=\pi\int_{-0,5}^{0,5}\left(-\frac{2}{5}x^2+0,4\right)^2dx=2\pi\int_{0}^{0,5}\left(-\frac{2}{5}x^2+0,4\right)^2dx=\frac{203\pi}{1500}\approx 425,5\ (\mathrm{l}).$$

Câu 4: Bác Năm làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là 2,25 mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thuê mỗi mét vuông là 1500000 đồng. Vậy số tiền bác Năm phải trả là:

A. 33750000 đồng. **B.** 12750000 đồng. **C.** 6750000 đồng. **D.** 3750000 đồng.

Hướng dẫn giải

Chọn C



• Gắn parabol (P) và hệ trục tọa độ sao cho (P) đi qua $O(0;0)$

• Gọi phương trình của parabol là: (P): $y = ax^2 + bx + c$

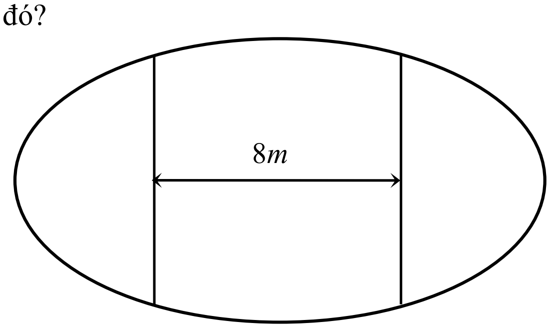
Theo đề ra, (P) đi qua ba điểm $O(0;0)$, $A(3;0)$, $B(1,5;2,25)$.

Từ đó, suy ra (P): $y = -x^2 + 3x$

• Diện tích phần Bác Năm xây dựng: $S = \int_0^3 \left|-x^2 + 3x\right| dx = \dfrac{9}{2}$

• Vậy số tiền bác Năm phải trả là: $\dfrac{9}{2}.1500000 = 6750000$.

Câu 5: Ông An có một mảnh vườn hình Elip có độ dài trục lớn bằng $16m$ và độ dài trục bé bằng $10m$. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng $8m$ và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng. Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng/$1m^2$. Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó?



A. 7.862.000 đồng. **B.** 7.653.000 đồng. **C.** 7.128.000 đồng. **D.** 7.826.000 đồng.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Giả sử elip có phương trình $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Từ giả thiết ta có $2a = 16 \Rightarrow a = 8$ và $2b = 10 \Rightarrow b = 5$

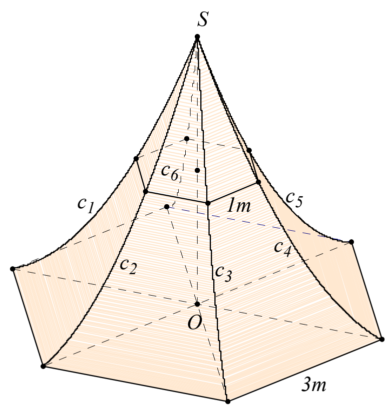
Vậy phương trình của elip là $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{25}=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=-\dfrac{5}{8}\sqrt{64-y^2}\ \ (E_1) \\ y=\dfrac{5}{8}\sqrt{64-y^2}\ \ (E_1) \end{array}\right.$

Khi đó diện tích dải vườn được giới hạn bởi các đường (E_1); (E_2); $x=-4$; $x=4$ và diện tích của dải vườn là $S=2\int\limits_{-4}^{4}\dfrac{5}{8}\sqrt{64-x^2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{5}{2}\int\limits_{0}^{4}\sqrt{64-x^2}\,\mathrm{d}x$

Tính tích phân này bằng phép đổi biến $x=8\sin t$, ta được $S=80\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$

Khi đó số tiền là $T=80\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right).100000=7652891,82\simeq 7.653.000$.

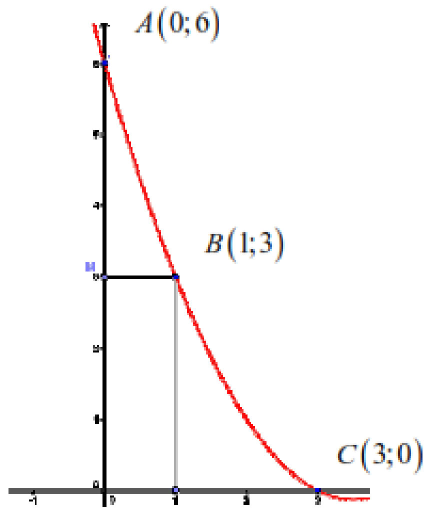
Câu 6: Người ta dựng một cái lều vải có dạng hình "chóp lục giác cong đều" như hình vẽ bên. Đáy của là một hình lục giác đều cạnh $3m$. Chiều cao $SO=6m$. Các cạnh bên của là các sợi dây c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6 nằm trên các đường parabol có trục đối xứng song song với SO. Giả sử giao tuyến của với mặt phẳng vuông góc với SO là một lục giác đều và khi qua trung điểm của SO thì lục giác đều có cạnh bằng $1m$. Tính thể tích phần không gian nằm bên trong cái lều đó.



A. $\dfrac{135\sqrt{3}}{5}\,(m^3)$. **B.** $\dfrac{96\sqrt{3}}{5}\,(m^3)$. **C.** $\dfrac{135\sqrt{3}}{4}\,(m^3)$. **D.** $\dfrac{135\sqrt{3}}{8}\,(m^3)$

Hướng dẫn giải

Chọn D



Đặt hệ tọa độ như hình vẽ, ta có parabol cần tìm đi qua 3 điểm có tọa độ lần lượt là $A(0;6), B(1;3), C(3;0)$ nên có phương trình là $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{7}{2}x+6$

Theo hình vẽ ta có cạnh của thiết diện là BM

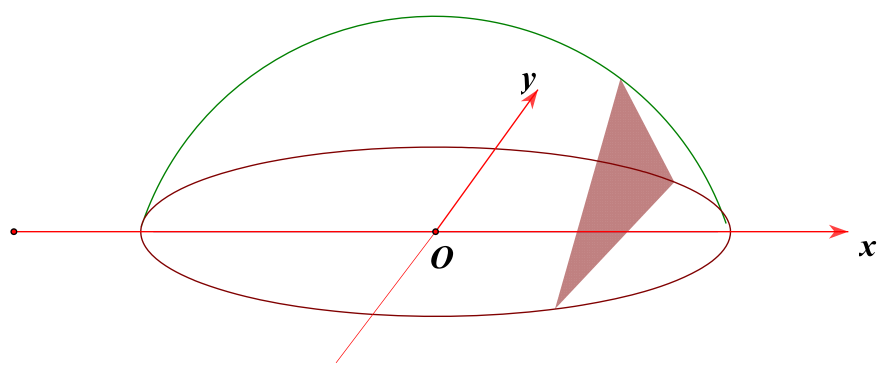
Nếu ta đặt $t=OM$ thì $BM=\frac{7}{2}-\sqrt{2t+\frac{1}{4}}$

Khi đó diện tích của thiết diện lục giác:

$S(t)=6.\frac{BM^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{7}{2}-\sqrt{2t+\frac{1}{4}}\right)^2$, với $t\in[0;6]$

Vậy thể tích của túp lều theo đề bài là: $V=\int\limits_0^6 S(t)dt=\int\limits_0^6 \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{7}{2}-\sqrt{2t+\frac{1}{4}}\right)^2 dt=\frac{135\sqrt{3}}{8}$..

Câu 7: Một vật có kích thước và hình dáng như hình vẽ dưới đây. Đáy là hình tròn giới hạn bởi đường tròn $x^2+y^2=16$, cắt vật bởi các mặt phẳng vuông góc với trục Ox ta được thiết diện là tam giác đều. Thể tích của vật thể là:



A. $V=\frac{32\sqrt{3}}{3}$.. **B.** $V=\frac{256\sqrt{3}}{3}$..

C. $V=\dfrac{256}{3}$.. **D.** $V=\dfrac{32}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

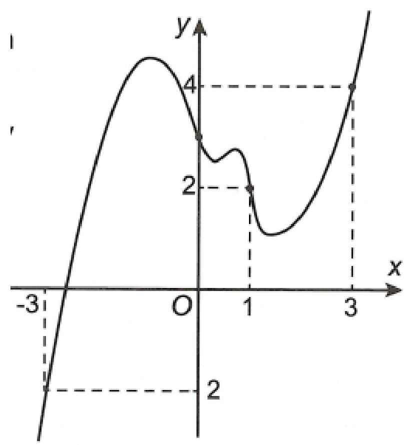
Giải phương trình $x^2+y^2=16 \Leftrightarrow y^2=16-x^2 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{16-x^2}$

Diện tích thiết diện là $S(x)=\dfrac{1}{2}\left|2\sqrt{16-x^2}\right|^2.\sin\dfrac{\pi}{3}=\left(16-x^2\right)\sqrt{3}$

Thể tích cần tìm là $V=\int\limits_{-4}^{4}S(x)dx=\sqrt{3}\int\limits_{-4}^{4}\left(16-x^2\right)dx=\dfrac{256\sqrt{3}}{3}$.

Dạng 9: Các bài toán bản chất đặt sắc của tích phân

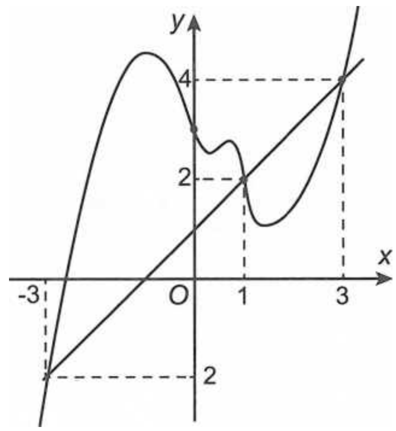
Bài tập 1: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị trên $\left[-2;6\right]$ như hình vẽ bên. Biết các miền A, B, $x=2$ có diện tích lần lượt là 32; 2; 3. Tích phân $\int\limits_{-2}^{2}\left[f\left(2x+2\right)+1\right]dx$ bằng



A. $\dfrac{45}{2}$. **B.** 41. **C.** 37. **D.** $\dfrac{41}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.



Ta có $\int\limits_{-2}^{2}\left[f\left(2x+2\right)+1\right]dx=\int\limits_{-2}^{2}f\left(2x+2\right)dx+4$

Xét $I_1=\int\limits_{-2}^{2}f\left(2x+2\right)dx$.

Đặt $t=2x+2\Rightarrow dt=2dx\Rightarrow dx=\dfrac{dt}{2}$

Đổi cận: $x=-2\Rightarrow t=-2$; $x=2\Rightarrow t=6$.

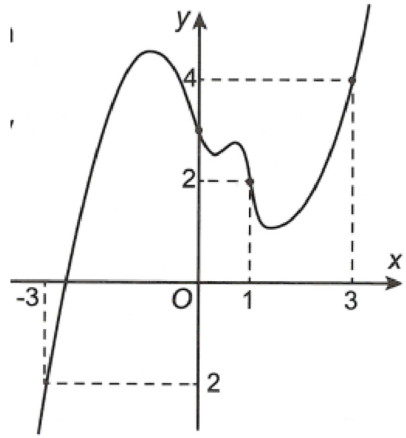
Suy ra $I_1=\dfrac{1}{2}\int\limits_{-2}^{6}f\left(t\right)dt$.

Gọi x_1; x_2 là các hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ với trục hoành $\left(-2<x_1<x_2<6\right)$. Ta có

$$I_1=\frac{1}{2}\left(\int\limits_{-2}^{x_1}f\left(t\right)df+\int\limits_{x_1}^{x_2}f\left(t\right)df+\int\limits_{x_2}^{6}f\left(t\right)df\right)=\frac{1}{2}\left(S_A-S_B+S_C\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(32-2+3\right)=\frac{33}{2}$$

Vậy $\int\limits_{-2}^{2}\left[f\left(2x+2\right)+1\right]dx=I_1+4=\dfrac{33}{2}+4=\dfrac{41}{2}$

Bài tập 2: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị của hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình bên. Đặt $g\left(x\right)=2f\left(x\right)-\left(x+1\right)^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $g(3) > g(-3) > g(1)$.

B. $g(-3) > g(3) > g(1)$.

C. $g(1) > g(-3) > g(3)$.

D. $g(1) > g(3) > g(-3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $g'(x) = 2f'(x) - 2(x+1)$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x+1$. Đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $f'(x)$ và đường thẳng *d*: $y = x+1$.

Dựa vào đồ thị ta thấy: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \pm 3 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(-3)$	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	$g(3)$	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra $g(-3) < g(1)$ và $g(3) < g(1)$

Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích các hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f'(x)$, đường thẳng *d*: $y = x+1$ trên các đoạn $[-3;1]$ và $[1;3]$ ta có:

+) Trên đoạn $[-3;1]$ ta có $f'(x) \ge x+1$ nên $S_1 = \int\limits_{-3}^{1} |g'(x)| dx = \dfrac{1}{2}\int\limits_{-3}^{1} [f'(x) - (x+1)] dx$.

+) Trên đoạn $[1;3]$ ta có $f'(x) \le x+1$ nên $S_2 = \int_1^3 |g'(x)| dx = \frac{1}{2}\int_1^3 [(x+1) f'(x)] dx$.

Dựa vào đồ thị ta thấy $S_1 > S_2$ nên ta có:

$$g(x)\Big|_{-3}^{1} > -g(x)\Big|_{1}^{3} \Leftrightarrow g(1) - g(-3) > -g(3) + g(1) \Leftrightarrow g(3) > g(-3).$$

Vậy $g(1) > g(3) > g(-3)$.

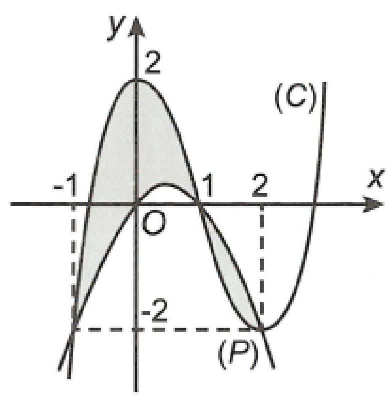
Lưu ý:

- Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $f'(x)$ và đường thẳng d: $y = x+1$ chính là nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$.

- Lập bảng biến thiên ta thấy $g(1)$ lớn hơn $g(\pm 3)$. Ta chỉ cần so sánh $g(3)$ và $g(-3)$.

- So sánh diện tích dựa vào đồ thị.

Ví dụ 4: Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm đa thức bậc ba và parabol (P) có trục đối xứng vuông góc với trục hoành. Phần **tô đậm** của hình vẽ có diện tích bằng



A. $\frac{37}{12}$. **B.** $\frac{7}{12}$. **C.** $\frac{11}{12}$. **D.** $\frac{5}{12}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Vì đồ thị hàm bậc ba và đồ thị hàm bậc hai cắt trục tung tại các điểm có tung độ lần lượt là $y = 2$ và $y = 0$ nên ta xét hai hàm số là $y = ax^3 + bx^2 + cx + 2$, $y = mx^2 + nx$ (với $a,\ m \ne 0$).

Suy ra (C): $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 2$ và (P): $y = g(x) = mx^2 + nx$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (P) là:

$$ax^3 + bx^2 + cx + 2 = mx^2 + nx \Leftrightarrow (ax^3 + bx^2 + cx + 2) - (mx^2 + nx) = 0.$$

Đặt $P\left(x\right)=\left(ax^3+bx^2+cx+2\right)-\left(mx^2+nx\right)$.

Theo giả thiết, $\left(C\right)$ và $\left(P\right)$ cắt nhau tại các điểm có hoành độ lần lượt là $x=-1$, $x=1$, $x=2$ nên $P\left(x\right)=a\left(x+1\right)\left(x-1\right)\left(x-2\right)$.

Ta có $P\left(0\right)=2a$.

Mặt khác, ta có $P\left(0\right)=f\left(0\right)-g\left(0\right)=2\Rightarrow a=1$.

Vậy diện tích phần tô đậm là $S=\int\limits_{-1}^{2}\left|\left(x+1\right)\left(x-1\right)\left(x-2\right)\right|dx=\dfrac{37}{12}$