

LƯ SĨ PHÁP

Giáo Viên Trường THPT Tuy Phong

TOÁN 11



CHƯƠNG V

ĐẠO HÀM

§1. ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM

§2. QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

§3. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

§4. VI PHÂN

§5. ĐẠO HÀM CẤP HAI

I LOVE MATH

LỜI NÓI ĐẦU

Quý đọc giả, quý thầy cô và các em học sinh thân mến!

Nhằm giúp các em học sinh có tài liệu tự học môn Toán, tôi biên soạn cuốn giải toán trọng tâm của lớp 11.

Nội dung của cuốn tài liệu bám sát chương trình chuẩn và chương trình nâng cao về môn Toán đã được Bộ Giáo dục và Đào tạo quy định.

NỘI DUNG

1. Tóm tắt lý thuyết cần nắm ở mỗi bài học
2. Bài tập có hướng dẫn giải và bài tập tự luyện
3. Phần bài tập trắc nghiệm đủ dạng và có đáp án.

Cuốn tài liệu được xây dựng sẽ còn có những khiếm khuyết. Rất mong nhận được sự góp ý, đóng góp của quý đồng nghiệp và các em học sinh để lần sau cuốn bài tập hoàn chỉnh hơn.

Mọi góp ý xin gọi về số 0355.334.679 – 0916 620 899

Email: lsp02071980@gmail.com

Chân thành cảm ơn.

Lư Sĩ Pháp

GV_ Trường THPT Tuy Phong

MỤC LỤC

§1. ĐẠO HÀM VÀ Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM	01 – 10
§2. QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM	11 – 21
§3. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC	22 – 30
§4. VI PHÂN	31 – 35
§5. ĐẠO HÀM CẤP HAI	36 – 42
ÔN TẬP CHƯƠNG IV	43 – 61
MỘT SỐ ĐỀ ÔN KIỂM TRA	62 – 68

CHƯƠNG V. ĐẠO HÀM

§1. ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$, $x_0 \in (a; b), x_0 + \Delta x \in (a; b)$

Nếu tồn tại, giới hạn (hữu hạn) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ được gọi là đạo hàm của $f(x)$ tại x_0 . Kí hiệu là $f'(x_0)$ hay $y'(x_0)$

$$\text{Như vậy } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$\Delta x = x - x_0$ gọi là số gia của đối số tại x_0

$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ gọi là số gia tương ứng của hàm số.

2. Quy tắc tính đạo hàm bằng định nghĩa

Để tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 bằng định nghĩa, ta có qui tắc:

Qui tắc:

Bước 1. Với Δx là số gia của đối số tại x_0 , tính $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$;

Bước 2. Lập tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

Bước 3. Tính $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Chú ý: Trong định nghĩa và quy tắc trên, thay x_0 bởi x ta sẽ có định nghĩa và quy tắc tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x \in (a; b)$

3. Quan hệ giữa tồn tại đạo hàm và tính liên tục của hàm số

Định lí 1.

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm x_0 .

Nhưng điều ngược lại thì chưa chắc đã đúng.

4. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Định lí 2.

Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến M_0T của (C) tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$.

Khi đó phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M_0 là: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, trong đó $y_0 = f(x_0), k = f'(x_0)$.

Chú ý: Ta có thể dễ dàng chứng minh sự không tồn tại đạo hàm tại một điểm nhờ khái niệm đạo hàm một bên và định lí:

$$f'(x_0) \text{ tồn tại} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_0^+) \text{ tồn tại} \\ f'(x_0^-) \text{ tồn tại} \\ f'(x_0^+) = f'(x_0^-) \end{cases}$$

$$\text{Trong đó } f'(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}; f'(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ và } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

5. Ý nghĩa cơ học của đạo hàm

Vận tốc tức thời $v(t_0)$ tại thời điểm t_0 (hay vận tốc tại t_0) của một chuyển động có

phương trình $s = s(t)$ bằng đạo hàm của hàm số $s = s(t)$ tại điểm t_0 , tức là $v(t_0) = s'(t_0)$

Các dạng toán**Dạng 1.** Tính đạo hàm bằng định nghĩa

Phương pháp: 1. Tính $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x) - f(x_0)$

2. Lập tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

3. Tính $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Khi thay x_0 bởi x ta tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x \in (a; b)$

Dạng 2. Quan hệ giữa tính liên tục và sự có đạo hàm

Phương pháp:

1. Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó. Nhưng điều ngược lại đã chưa chắc đúng.

2. Để chứng minh hàm số không có đạo hàm tại điểm x_0 , ta thực hiện:

- Chứng minh $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ không tồn tại

- Chứng minh hàm số không liên tục tại điểm x_0

Dạng 3. Tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0; f(x_0)) \in (C)$ (tiếp điểm). Phương pháp:

1. Tính $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ hay $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

2. Hệ số góc của tiếp tuyến (C) tại điểm M_0 là $k = f'(x_0)$

3. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) tại M_0 là $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Dạng 4. Tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ khi biết hệ số góc k

Phương pháp

1. Gọi $M_0(x_0; y_0) \in (C)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến với đồ thị (C)

2. Tính $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

3. Giải phương trình $k = f'(x_0)$, tìm x_0 và $y_0 = f(x_0)$

4. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) có hệ số góc k là $y = k(x - x_0) + y_0$

Lưu ý:

- Nếu hai đường thẳng song song với nhau thì có cùng hệ số góc k
- Nếu hai đường thẳng vuông góc với nhau thì tích hai hệ số góc bằng -1

B. BÀI TẬP

Bài 1.1. Bằng định nghĩa, hãy tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $f(x) = \frac{1}{x}$ tại điểm $x_0 = 2$

b) $f(x) = x^2$ tại điểm $x_0 = 2$

c) $f(x) = \sqrt{2x-1}$ tại điểm $x_0 = 5$

d) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ tại điểm $x_0 = 0$

HD & Giải

a) $f(x) = \frac{1}{x}$ tại điểm $x_0 = 2$

Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Với Δx là số gia của đối số tại $x_0 = 2$ sao cho $2 + \Delta x \in D$, thì

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(2 + \Delta x) - f(2) = \frac{1}{2 + \Delta x} - \frac{1}{2} = -\frac{\Delta x}{2(2 + \Delta x)}$$

Ta có $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{2(2 + \Delta x)}$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2(2 + \Delta x)} \right) = -\frac{1}{4}$$

Vậy $f'(2) = -\frac{1}{4}$

b) $f(x) = x^2$ tại điểm $x_0 = 2$

Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$

Với Δx là số gia của đối số tại $x_0 = 2$ sao cho $2 + \Delta x \in D$, thì

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(2 + \Delta x) - f(2) = (2 + \Delta x)^2 - 2^2 = \Delta x(4 + \Delta x)$$

Ta có $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4 + \Delta x$

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4 + \Delta x) = 4$$

Vậy $f'(2) = 4$

c) $f(x) = \sqrt{2x-1}$ tại điểm $x_0 = 5$

Tập xác định của hàm số đã cho là $D = \left\{ x / x \geq \frac{1}{2} \right\}$

Với Δx là số gia của đối số tại $x_0 = 5$ sao cho $5 + \Delta x \in D$, thì

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(5 + \Delta x) - f(5) = \sqrt{9 + 2\Delta x} - \sqrt{9}$$

Ta có $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{9 + 2\Delta x} - \sqrt{9}}{\Delta x}$

Khi đó $f'(5) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9 + 2\Delta x} - \sqrt{9}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{9 + 2\Delta x} + \sqrt{9}} = \frac{1}{3}$

d) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ tại điểm $x_0 = 0$

Tập xác định của hàm số đã cho là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Với Δx là số gia của đối số tại $x_0 = 0$ sao cho $0 + \Delta x \in D$, thì

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{\Delta x + 1}{\Delta x - 1} - \frac{1}{-1} = \frac{\Delta x + 1}{\Delta x - 1} + 1 = \frac{2\Delta x}{\Delta x - 1}$$

Ta có $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{\Delta x - 1}$

Khi đó $f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2}{\Delta x - 1} = -2$

Bài 1.2. Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau:

a) $y = ax^2$ (a là hằng số) trên $\mathbb{R}$

b) $y = x^3 + 2$ trên $\mathbb{R}$

c) $y = \frac{1}{2x-1}$ với $x \neq \frac{1}{2}$

d) $y = \sqrt{3-x}$ với $x < 3$

HD & Giải

a) $y = ax^2$ có tập xác định là $\mathbb{R}$, với x_0 tùy ý thuộc $\mathbb{R}$, có một số gia Δx

$$\text{Tính } \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = a(x_0 + \Delta x)^2 - ax_0^2 = \Delta x(2x_0 + \Delta x)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} a(2x_0 + \Delta x) = 2ax_0$$

$$\text{Vậy } y' = 2ax$$

$$\text{b) } y = x^3 + 2 \text{ trên } \mathbb{R}, \text{ thực hiện tương tự, ta có } y' = 3x^2$$

$$\text{c) } y = \frac{1}{2x-1}. \text{ Tập xác định của hàm số } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

Với $x_0 \in \mathbb{R}$ tùy ý, ta có một số gia Δx

$$\text{Tính } \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{1}{2(x_0 + \Delta x) - 1} - \frac{1}{2x_0 - 1} = \frac{-2\Delta x}{(2x_0 - 1)(2x_0 + 2\Delta x - 1)}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2}{(2x_0 - 1)(2x_0 + 2\Delta x - 1)} = \frac{-2}{(2x_0 - 1)^2}$$

$$\text{Vậy } y = \frac{1}{2x-1} \Rightarrow y' = \frac{-2}{(2x-1)^2}$$

$$\text{d) } y = \sqrt{3-x}, \text{ thực hiện tương tự. } y = \sqrt{3-x} \Rightarrow y' = \frac{-1}{2\sqrt{3-x}}$$

Bài 1.3. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2; & x \geq 0 \\ -x^2; & x < 0 \end{cases}$

không có đạo hàm tại điểm $x = 0$ nhưng có đạo hàm tại điểm $x = 2$.

HD & Giải

$$\text{Ta có: } f(0) = 1, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1)^2 = 1 \text{ và } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2) = 0$$

Nhận thấy $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ nên hàm số $y = f(x)$ gián đoạn tại $x = 0$. Từ đó suy ra hàm số đó không có đạo hàm tại $x = 0$.

$$\text{Ta có } x = 2 \in [0; +\infty) \text{ và } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(1 + \Delta x)^2 - 1^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2 + \Delta x) = 2$$

Vậy hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại $x = 2$ và $f'(2) = 2$

Bài 1.4. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2; & x \geq 0 \\ (x+1)^2; & x < 0 \end{cases}$

không có đạo hàm tại $x = 0$, nhưng liên tục tại điểm đó.

HD & Giải

$$\text{Ta có } f(0) = 1$$

$$f'(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 2) = -2$$

$$f'(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + 2) = 2$$

Vì $f'(x_0^+) \neq f'(x_0^-)$ nên hàm số $y = f(x)$ không có đạo hàm tại $x = 0$.

$$\text{Mặt khác, ta có } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1)^2 = 1; \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+1)^2 = 1$$

Và $f(0) = 1$ nên hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm $x = 0$.

Bài 1.5. Chứng minh rằng hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \cos x; & x \geq 0 \\ -\sin x; & x < 0 \end{cases}$ không có đạo hàm tại $x = 0$.

HD & Giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = 1$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-\sin x) = 0$ và $f(0) = \cos 0 = 1$

Nhận thấy $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ nên hàm số $y = f(x)$ gián đoạn tại $x = 0$

Do đó hàm số này không có đạo hàm tại điểm $x = 0$.

Bài 1.6. Chứng minh rằng hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 + 1; & x \geq 0 \\ x^3; & x < 0 \end{cases}$ không có đạo hàm tại $x = 0$.

HD&Giải

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1) = 1 = f(0) \text{ và } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 = 0$$

Nhận thấy $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ nên hàm số $y = f(x)$ gián đoạn tại $x = 0$

Do đó hàm số này không có đạo hàm tại điểm $x = 0$.

Bài 1.7. Cho parabol $y = -x^2 + 3x - 2$.

Viết phương trình tiếp tuyến của parabol tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$.

HD&Giải

Bằng định nghĩa, ta tính được $y'(2) = -1$. Do đó hệ số góc của tiếp tuyến là -1

Ngoài ra, ta có $y(2) = 0$

Vậy phương trình tiếp tuyến của parabol tại điểm $M_0(2; 0)$ là:

$$y = -1(x - 2) + 0 \text{ hay } y = -x + 2$$

Bài 1.8. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3$

a) Tại điểm $(-1; -1)$

b) Tại điểm có hoành độ bằng 2

c) Biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng 3

HD&Giải

Trước hết ta tính đạo hàm của hàm số $y = f(x) = x^3$ tại x_0 tùy ý trên $\mathbb{R}$, có một số gia Δx

$$\text{Tính } \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = \Delta x (3x_0^2 + 3x_0\Delta x + \Delta^2 x)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x_0^2 + 3x_0\Delta x + \Delta^2 x) = 3x_0^2$$

a) Tại tiếp điểm $x_0 = -1$, $f'(-1) = 3$.

Vậy tiếp tuyến cần tìm: $y - (-1) = 3[x - (-1)]$ hay $y = 3x + 2$

b) Tại điểm $x_0 = 2$, ta có $f'(2) = 12$ và $f(2) = 2^3 = 8$

Vậy pttt cần tìm: $y - 8 = 12(x - 2)$ hay $y = 12x - 16$

c) Biết $f'(x_0) = 3$, nên ta có $3x_0^2 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = f(1) = 1 \\ x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = f(-1) = -1 \end{cases}$

Vậy tiếp tuyến cần tìm là: $y = 3x - 2$ và $y = 3x + 2$

Bài 1.9. Viết phương trình tiếp tuyến của đường hypebol $y = \frac{1}{x}$

a) Tại điểm $M\left(\frac{1}{2}; 2\right)$

b) Tại điểm có hoành độ bằng -1

c) Biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng $-\frac{1}{4}$

HD&Giải

Trước hết ta tính đạo hàm của hàm số $y = f(x) = \frac{1}{x}$ tại x_0 tùy ý trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ có một số gia Δx

$$\text{Tính } \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} = \frac{-\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)} = -\frac{1}{x_0^2}$$

a) Tại tiếp điểm $M\left(\frac{1}{2}; 2\right)$, ta có $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -4$

Vậy tiếp tuyến cần tìm: $y = -4(x - 1)$

b) Tại điểm $x_0 = -1$, $f'(-1) = -1$ và $f(-1) = -1$

Vậy tiếp tuyến cần tìm là: $y = -1(x + 1) - 1$

c) Biết $f'(x_0) = -\frac{1}{4}$, nên $-\frac{1}{x_0^2} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = f(2) = \frac{1}{2} \\ x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = f(-2) = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Vậy tiếp tuyến cần tìm là: $y = -\frac{1}{4}x + 1$ và $y = -\frac{1}{4}x - 1$

Bài 1.10. Một chất điểm chuyển động có phương trình $s(t) = 3t^2 + 5t + 1$ (t tính bằng s, S tính bằng mét). Tính vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t_0 = 1s$.

HD\&Giải

Gọi $v(t)$ là vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t.

$$\text{Khi đó } v(t_0) = s'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{3t^2 + 5t - 8}{t - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} (3t + 8) = 11$$

Bài 1.11. Xét tính liên tục, sự tồn tại đạo hàm và tính đạo hàm (nếu có) của hàm số sau trên $\mathbb{R}$

$$y = f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 2 & \text{khi } x \leq 2 \\ \frac{1}{x-1} & \text{khi } x > 2 \end{cases}$$

HD\&Giải

Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$

Với $x < 2$ thì $f(x) = x^2 - x + 2$ là hàm số liên tục và đạo hàm là $f'(x) = 2x - 1$

Với $x > 2$ thì $f(x) = \frac{1}{x-1}$ là hàm số liên tục và có đạo hàm $f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$

Với $x = 2$ thì ta có $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - x + 2) = 4$ và $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-1} = 1$

Do đó $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, suy ra không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, tức là hàm số không liên tục tại $x = 2$, nên không có đạo hàm tại điểm này.

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1.12. Tính (bằng định nghĩa) đạo hàm của mỗi hàm số sau tại các điểm đã chỉ ra:

a) $y = x^2 + x$ tại $x_0 = 1$

b) $y = \frac{1}{x}$ tại $x_0 = 2$

c) $y = 2x + 1$ tại $x_0 = 0$

d) $y = x^2 + 3x$ tại $x_0 = 1$

Bài 1.13. Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$. Chứng minh rằng $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; ($x \neq 0$)

Bài 1.14. Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{|x|^3}$. Tính $f'(0)$ nếu có.

Bài 1.15. Xét tính liên tục, sự tồn tại đạo hàm và tính đạo hàm nếu có của hàm số sau trên $\mathbb{R}$

$$\text{a) } y = f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{khi } x < 1 \\ \frac{2}{x} & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } y = f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{khi } x \leq 0 \\ -x^3 + 1 & \text{khi } x > 0 \end{cases}$$

Bài 1.16. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = x^2$, biết rằng:

- Tiếp điểm có hoành độ là 2.
- Tiếp điểm có tung độ là 4.
- Hệ số góc của tiếp tuyến bằng 3.

Bài 1.17. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \sqrt{2x+1}$, biết hệ số góc của tiếp tuyến là $\frac{1}{3}$.

Bài 1.18. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị của hàm số $y = x^2 - 2x + 3$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $4x - 2y + 5 = 0$.

Bài 1.19. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị của hàm số $y = x^2 - 2x + 3$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x + 4y = 0$

Bài 1.20. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$ có đồ thị (C).

- Viết phương trình tiếp tuyến d của (C) tại điểm có hoành độ $x = 2$
- Chứng minh rằng d là tiếp tuyến của (C) có hệ số góc nhỏ nhất.

Bài 1.21. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$ có đồ thị (C).

- Viết phương trình tiếp tuyến d của (C) tại điểm có hoành độ $x = 0$
- Chứng minh rằng d là tiếp tuyến của (C) có hệ số góc lớn nhất.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Đạo hàm của hàm số $f(x) = x^2 - x$ tại điểm x_0 ứng với số gia Δx là:

- $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x + 2x + 1).$
- $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} ((\Delta x)^2 + 2x\Delta x + \Delta x).$
- $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} ((\Delta x)^2 + 2x\Delta x - \Delta x).$
- $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x + 2x - 1).$

Câu 2. Cho f là hàm số liên tục tại x_0 . Đạo hàm của f tại x_0 là:

- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ (nếu tồn tại giới hạn).
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h}$ (nếu tồn tại giới hạn).
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x_0)}{x - x_0}$
- $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$

Câu 3. Một vật rơi tự do theo phương trình $s = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ là gia tốc trọng trường. Tìm vận tốc trung bình của chuyển động trong khoảng thời gian từ t ($t = 5\text{s}$) đến $t + \Delta t$ với $\Delta t = 0,001\text{s}$.

- $v_{tb} = 49 \text{ m/s}.$
- $v_{tb} = 49,49 \text{ m/s}.$
- $v_{tb} = 49,0049 \text{ m/s}.$
- $v_{tb} = 49,245 \text{ m/s}.$

Câu 4. Tính tỷ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số $y = 3x + 1$ theo x và Δx .

- $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3.$
- $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1.$
- $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2.$
- $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.$

Câu 5. Vận tốc của một chất điểm chuyển động được biểu thị bởi công thức $v(t) = 8t + 3t^2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $v(t)$ tính bằng mét/giây. Tìm gia tốc của chất điểm tại thời điểm mà vận tốc chuyển động là 11 mét/giây.

- A. 14m/s^2 . B. 20m/s^2 . C. 6m/s^2 . D. 11m/s^2 .

Câu 6. Tính số gia của hàm số $y = x^2 - 4x + 1$ tại điểm x_0 ứng với số gia Δx là:

- A. $\Delta y = \Delta x(\Delta x + 2x_0 - 4)$. B. $\Delta y = 2x_0 + \Delta x$.
C. $\Delta y = \Delta x(2x_0 - 4\Delta x)$. D. $\Delta y = 2x_0 - 4\Delta x$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} mx^2 + 2x + 2 & \text{khi } x > 0 \\ nx + 1 & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của các tham số m, n sao cho $f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x = 0$.

- A. $m = 2, \forall n$. B. $n = 2, \forall m$.
C. $m = n = 2$. D. Không tồn tại m, n .

Câu 8. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{khi } x \leq 1 \\ ax + b & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của các tham số a, b sao cho $f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x = 1$.

- A. $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$. B. $a = 1, b = \frac{1}{2}$. C. $a = 1, b = -\frac{1}{2}$. D. $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$.

Câu 9. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào sau đây là đúng?

- A. Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.
B. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0 thì nó có đạo hàm tại điểm đó.
C. Nếu hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại x_0 thì nó có đạo hàm tại điểm đó.
D. Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó không liên tục tại điểm đó.

Câu 10. Tính số gia của hàm số $y = \frac{1}{x}$ tại điểm x (bất kì khác 0) ứng với số gia Δx .

- A. $\Delta y = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}$. B. $\Delta y = -\frac{\Delta x}{x + \Delta x}$. C. $\Delta y = \frac{\Delta x}{x + \Delta x}$. D. $\Delta y = \frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ bởi $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - 3x + 2} & \text{khi } x \neq 1 \\ 0 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Tính $f'(1)$.

- A. $f'(1) = 0$. B. Không tồn tại. C. $f'(1) = \frac{3}{2}$. D. $f'(1) = 1$.

Câu 12. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 9x + 7$.

- A. $y = 9x - 25$. B. $y = 9x - 7; y = 9x + 25$.
C. $y = 9x + 25$. D. $y = 9x + 7; y = 9x - 25$.

Câu 13. Tính số gia của hàm số $y = x^2 + 2$ tại điểm $x_0 = 2$ ứng với số gia $\Delta x = 1$.

- A. $\Delta y = 5$. B. $\Delta y = 2$. C. $\Delta y = 13$. D. $\Delta y = 9$.

Câu 14. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{45}x$.

- A. $y = 45x - 83$. B. $y = 45x - 173$.
C. $y = 45x + 173; y = 45x - 83$. D. $y = 45x - 173; y = 45x + 83$.

Câu 15. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết cosin góc tạo bởi tiếp tuyến và đường thẳng $\Delta: 4x - 3y = 0$ bằng $\frac{3}{5}$.

- A. $y = 2; y = 1$. B. $y = -2; y = 1$. C. $y = -2; y = -1$. D. $y = 2; y = -2$.

Câu 16. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = \frac{1}{x}$ tại điểm có hoành độ bằng -1 .

- A. $y = -x + 2$. B. $x + y + 2 = 0$. C. $y = x + 2$. D. $y = x - 2$.

Câu 17. Tính số gia của hàm số $y = \frac{x^2}{2}$ tại điểm $x_0 = -1$ ứng với số gia Δx .

- A. $\Delta y = \frac{1}{2}[(\Delta x)^2 + \Delta x]$. B. $\Delta y = \frac{1}{2}(\Delta x)^2 + \Delta x$.
C. $\Delta y = \frac{1}{2}(\Delta x)^2 - \Delta x$. D. $\Delta y = \frac{1}{2}[(\Delta x)^2 - \Delta x]$.

Câu 18. Tính tỷ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số $y = x^2 - 1$ theo x và Δx .

- A. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \Delta x + 2x$. B. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$. C. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \Delta x$. D. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$.

Câu 19. Tính tỷ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số $y = 2x^3$ theo x và Δx .

- A. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2$. B. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x^3 - 2(\Delta x)^3}{\Delta x}$.
C. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2(\Delta x)^2$. D. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x^2 + 6x\Delta x + 2(\Delta x)^2$.

Câu 20. Tính số gia của hàm số $y = x^3 + x^2 + 1$ tại điểm x_0 ứng với số gia $\Delta x = 1$.

- A. $\Delta y = 3x_0^2 - 5x_0 + 2$. B. $\Delta y = 3x_0^2 + 5x_0 + 3$.
C. $\Delta y = 2x_0^3 + 3x_0^2 + 5x_0 + 2$. D. $\Delta y = 3x_0^2 + 5x_0 + 2$.

Câu 21. Tìm hệ số góc k của tiếp tuyến của parabol $y = x^2$ tại điểm có hoành độ $\frac{1}{2}$.

- A. $k = -\frac{1}{2}$. B. $k = 0$. C. $k = 1$. D. $k = \frac{1}{4}$.

Câu 22. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = \frac{1}{x}$ biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng $-\frac{1}{4}$.

- A. $x + 4y - 1 = 0$; $x + 4y + 1 = 0$. B. $x + 4y - 4 = 0$; $x + 4y + 4 = 0$.
C. $y = -\frac{1}{4}x - 4$; $y = -\frac{1}{4}x + 4$. D. $y = -\frac{1}{4}x$.

Câu 23. Tìm tham số thực b để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \leq 2 \\ -\frac{x^2}{2} + bx - 6 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ có đạo hàm tại $x = 2$.

- A. $b = 1$. B. $b = -6$. C. $b = 3$. D. $b = 6$.

Câu 24. Một viên đạn được bắn lên cao theo phương trình $s(t) = 196t - 4,9t^2$ trong đó $t > 0$, t tính bằng giây kể từ thời điểm viên đạn được bắn lên cao và $s(t)$ là khoảng cách của viên đạn so với mặt đất được tính bằng mét. Tại thời điểm vận tốc của viên đạn bằng 0 thì viên đạn cách mặt đất bao nhiêu mét?

- A. 1906m. B. 1960m. C. 1690m. D. 1069m.

Câu 25. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây sai?

- A. Hàm số có đạo hàm tại $x = 2$. B. Hàm số liên tục tại $x = 2$.
C. Hàm số có đạo hàm tại $x = 0$. D. Hàm số không liên tục tại $x = 0$.

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 là $f'(x_0)$. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. B. $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

C. $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x+x_0) - f(x_0)}{x - x_0}$.

D. $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Câu 27. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = x^3$ tại điểm $(-1; -1)$.

A. $y = -3x - 4$.

B. $y = -1$.

C. $y = 3x - 2$.

D. $y = 3x + 2$.

Câu 28. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = t^2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Tính vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 2$ giây.

A. 2m/s.

B. 3m/s.

C. 4m/s.

D. 5m/s.

Câu 29. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = x^3$ tại điểm có tung độ bằng 8.

A. $y = -12x + 16$.

B. $y = 12x - 24$.

C. $y = 12x - 16$.

D. $y = 8$.

Câu 30. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm với đường thẳng $y = -2$.

A. $y = -9x + 7$; $y = -2$.

B. $y = -2$.

C. $y = 9x + 7$; $y = -2$.

D. $y = 9x + 7$; $y = 2$.

Câu 31. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Tính $f'(0)$.

A. $f'(0) = 1$.

B. $f'(0) = \frac{1}{2}$.

C. Không tồn tại.

D. $f'(0) = 0$.

Câu 32. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3-\sqrt{4-x}}{4} & \text{khi } x \neq 0 \\ \frac{1}{4} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Tính $f'(0)$.

A. Không tồn tại.

B. $f'(0) = \frac{1}{4}$.

C. $f'(0) = \frac{1}{16}$.

D. $f'(0) = \frac{1}{32}$.

Câu 33. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm với trục tung.

A. $y = 2x$.

B. $y = 2$.

C. $y = 0$.

D. $y = -2$.

Câu 34. Tính tỷ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số $y = \frac{1}{x}$ theo x và Δx .

A. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x+\Delta x}$.

B. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x+\Delta x}$.

C. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x(x+\Delta x)}$.

D. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x+\Delta x)}$.

Câu 35. Một chất điểm chuyển động có phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 9t + 2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Hỏi tại thời điểm nào thì vận tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất?

A. $t = 6s$.

B. $t = 1s$.

C. $t = 2s$.

D. $t = 3s$.

ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
D	A	C	A	A	A	B	C	A	A	B	A	A	D	D	B	C	A
19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
D	D	C	B	D	B	C	B	D	C	C	C	B	C	B	D	B	

§2. CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. Bảng đạo hàm

STT	HÀM SỐ SƠ CẤP	HÀM SỐ HỢP	QUY TẮC
		$u = u(x)$	$u = u(x), v = v(x)$
1	$(C)' = 0$	$(ku)' = ku'$	$(u+v)' = u' + v'$
2	$(x)' = 1, (kx)' = k$	$(u^\alpha)' = \alpha.u^{\alpha-1}.u'$	$(u-v)' = u' - v'$
3	$(x^n)' = nx^{n-1}, n \in \mathbb{N}, n > 1$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}, u > 0$	$(uv)' = u'v + uv'$
4	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}, u \neq 0$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, v \neq 0$
5	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, x \neq 0$	$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$	$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}, v \neq 0$
6	$(ax+b)' = a$	$\left(\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}x^2 + 2\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}x + \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}}{(a'x^2+b'x+c')^2}$	

II. Đạo hàm của hàm số hợp. Cho y là hàm số theo $u(u(x))$ thì: $y'_x = y'_u \cdot u'_x$

Các dạng toán

Dạng 1. Tính đạo hàm bằng các công thức đối với hàm đa thức, hàm hữu tỉ, hàm căn bậc hai

Phương pháp: Vận dụng bảng 1 và quy tắc tính đạo hàm để tính.

Dạng 2. Vận dụng đạo hàm vào giải phương trình hay bất phương trình.

Phương pháp: - Tính đạo hàm theo đề bài yêu cầu

- Thiết lập phương trình hay bất phương trình

Dạng 3. Tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ kẻ từ điểm $A(\alpha; \beta)$ với $A \in (C)$ hay $A \notin (C)$.

Phương pháp

Cách 1. Tìm tiếp điểm

1. Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm, tiếp tuyến (d): $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ (1)

2. $A \in (d)$ nên thay $x = \alpha, y = \beta$ vào (1). Giải và tìm x_0 , rồi tính $f'(x_0), f(x_0)$

3. Thay kết quả tìm được vào (1), có phương trình tiếp tuyến cần tìm.

Cách 2. Tìm hệ số góc k

1. Đường thẳng d đi qua điểm $A(\alpha; \beta)$ và có hệ số góc k có phương trình $y = k(x - \alpha) + \beta$ (1)

2. Đường thẳng d là tiếp tuyến với đồ thị (C) thì hệ phương trình sau phải có nghiệm

$$\begin{cases} f(x) = k(x - \alpha) + \beta \\ f'(x) = k \end{cases}$$

3. Giải hệ phương trình tìm x , rồi tìm k và thay k vào (1) ta được phương trình tiếp tuyến d .

B. BÀI TẬP

Bài 2.1. Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau tại điểm x_0 được cho kèm theo

a) $y = 7 + x - x^2, x_0 = 1$

b) $y = x^3 - 2x + 1, x_0 = 2$

c) $y = 2x^5 - 2x + 3, x_0 = 1$

d) $y = x^4 - x^2 + 2, x_0 = -1$

HD: Giải

$$a) y' = (7 + x - x^2)' = (7)' + (x)' - (x^2)' = 0 + 1 - 2x = 1 - 2x$$

$$\text{Tại } x_0 = 1, y'(1) = 1 - 2 \cdot 1 = -1.$$

$$b) y' = (x^3 - 2x + 1)' = 3x^2 - 2 \text{ và } y'(2) = 10$$

$$c) y' = (2x^5 - 2x + 3)' = 10x^4 - 2 \text{ và } y'(1) = 8$$

$$d) y' = (x^4 - x^2 + 2)' = 4x^3 - 2x \text{ và } y'(-1) = -2$$

Bài 2.2. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

$$a) y = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$$

$$b) y = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}x + x^2 - \frac{1}{2}x^4$$

$$c) y = \frac{x^4}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{4x^2}{5} - 1$$

$$d) y = 3x^5(8 - 3x^2)$$

HD & Giải

$$a) y' = (x^5 - 4x^3 + 2x - 3)' = 5x^4 - 12x^2 + 2$$

$$b) y' = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}x + x^2 - \frac{1}{2}x^4 \right)' = -\frac{1}{3} + 2x - 2x^3$$

$$c) y' = \left(\frac{x^4}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{4x^2}{5} - 1 \right)' = 2x^3 - 2x^2 + \frac{8x}{5}$$

$$d) y' = (3x^5(8 - 3x^2))' = 15x^4(8 - 3x^2) + 3x^5(-6x) = -63x^6 + 120x^4$$

Bài 2.3. Tìm đạo hàm các hàm số sau:

$$a) y = x^4 - x^2 + \sqrt{x}$$

$$b) y = x^3(\sqrt{x} - x^5)$$

$$c) y = (1 - 2x)^3$$

$$d) y = (x^7 - 5x^2)^3$$

$$e) y = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

$$f) y = \frac{3 - 5x}{x^2 - x + 1}$$

HD & Giải

$$a) y' = (x^4 - x^2 + \sqrt{x})' = 4x^3 - 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$b) y' = [x^3(\sqrt{x} - x^5)]' = (x^3)'(\sqrt{x} - x^5) + (\sqrt{x} - x^5)'x^3 = 3x^2\sqrt{x} + x^3\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - 8x^4\right)$$

$$c) y' = [(1 - 2x)^3]' = 3(1 - 2x)^2(1 - 2x)' = -6(1 - 2x)^2 \quad d) y' = ((x^7 - 5x^2)^3)' = 3(x^7 - 5x^2)^2(7x^5 - 10)$$

$$e) y' = \left(\frac{2x}{x^2 - 1} \right)' = \frac{-2(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f) y' = \left(\frac{3 - 5x}{x^2 - x + 1} \right)' = \frac{5x^2 - 6x - 2}{(x^2 - x + 1)^2}$$

Bài 2.4. Tính đạo hàm các hàm số sau

$$a) y = x^2 - x\sqrt{x} + 1$$

$$b) y = \sqrt{2 - 5x - x^2}$$

$$c) y = \frac{x^3}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (a \text{ là hằng số})$$

$$d) y = \frac{1 + x}{\sqrt{1 - x}}$$

HD & Giải

$$a) y' = (x^2 - x\sqrt{x} + 1)' = 2x - \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

$$b) y' = (\sqrt{2 - 5x - x^2})' = \frac{-2x - 5}{2\sqrt{2 - 5x - x^2}}$$

$$c) y' = \left(\frac{x^3}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right)' = \frac{x^2(3a^2 - 2x^2)}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}$$

$$d) y' = \left(\frac{1 + x}{\sqrt{1 - x}} \right)' = \frac{3 - x}{2\sqrt{(1 - x)^3}}$$

Bài 2.5. Tính đạo hàm các hàm số sau

a) $y = (x^7 + x)^2$

b) $y = (x^2 + 1)(5 - 3x^2)$

c) $y = \frac{2x}{x^2 - 1}$

d) $y = \frac{5x - 3}{x^2 + x + 1}$

e) $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

f) $y = x(2x - 1)(3x + 2)$

HD & Giải

a) $y' = \left[(x^7 + x)^2 \right]' = 2x(x^6 + 1)(7x^6 + 1)$

b) $y' = \left[(x^2 + 1)(5 - 3x^2) \right]' = 4x(-3x^2 + 1)$

c) $y' = \left(\frac{2x}{x^2 - 1} \right)' = \frac{-2(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2}$

d) $y' = \left(\frac{5x - 3}{x^2 + x + 1} \right)' = \frac{-5x^2 + 6x + 8}{(x^2 + x + 1)^2}$

e) $y' = \left(\frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} \right)' = \frac{x(x + 2)}{(x + 1)^2}$

f) $y' = (x(2x - 1)(3x + 2))' = 2(9x^2 + x - 1)$

Bài 2.6. Tính đạo hàm các hàm số sau:

a) $y = \frac{2x + 3}{x^2 - 5x + 5}$

b) $y = \frac{1}{(x^2 - x + 1)^5}$

c) $y = x^2 + x\sqrt{x} + 1$

d) $y = (x + 1)(x + 2)^2(x + 3)^3$

e) $y = \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x}}$

f) $y = \frac{1 - x}{\sqrt{1 - x}}$

HD & Giải

a) $y' = \left(\frac{2x + 3}{x^2 - 5x + 5} \right)' = \frac{-2x^2 - 6x + 25}{(x^2 - 5x + 5)^2}$

b) $y' = \left(\frac{1}{(x^2 - x + 1)^5} \right)' = \frac{-5(2x - 1)}{(x^2 - x + 1)^6}$

c) $y' = (x^2 + x\sqrt{x} + 1)' = 2x + \frac{3}{2}\sqrt{x}$ d) $y' = ((x + 1)(x + 2)^2(x + 3)^3)' = 2(x + 2)(x + 3)^2(3x^2 + 11x + 9)$

e) $y' = \left(\sqrt{\frac{x^2 + 1}{x}} \right)' = \frac{x^2 - 1}{2x^2 \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x}}}$

f) $y' = \left(\frac{1 - x}{\sqrt{1 - x}} \right)' = \frac{3 - x}{2\sqrt{(1 - x)^3}}$

Bài 2.7. Tính đạo hàm các hàm số sau

a) $y = (9 - 2x)(2x^3 - 9x^2 + 1)$

b) $y = \frac{2x - 3}{x + 4}$

c) $y = \frac{-x^2 - 3x + 5}{x - 2}$

d) $y = \left(x^5 - \frac{3}{\sqrt{x}} \right)^3$

e) $y = \sqrt{x^3 - 2x^2 + 1}$

f) $y = \left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} \right)^4$

HD & Giải

a) $y' = ((9 - 2x)(2x^3 - 9x^2 + 1))' = -16x^3 + 108x^2 - 162x - 2$

b) $y' = \left(\frac{2x - 3}{x + 4} \right)' = \frac{11}{(x + 4)^2}$

c) $y' = \left(\frac{-x^2 - 3x + 5}{x - 2} \right)' = \frac{-x^2 + 4x + 1}{(x - 2)^2}$

d) $y' = \left(\left(x^5 - \frac{3}{\sqrt{x}} \right)^3 \right)' = 3 \left(x^5 - \frac{3}{\sqrt{x}} \right)^2 \left(5x^4 + \frac{3}{2\sqrt{x^3}} \right)$

e) $y' = (\sqrt{x^3 - 2x^2 + 1})' = \frac{3x^2 - 4x}{2\sqrt{x^3 - 2x^2 + 1}}$

f) $y' = \left(\left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} \right)^4 \right)' = -4 \left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} \right)^3 \left(\frac{b}{x^2} + \frac{2c}{x^3} \right)$

Bài 2.8. Tìm đạo hàm các hàm số sau

a) $y = (4x^3 - 2x^2 - 5x)(x^2 - 7x)$

b) $y = \left(\frac{2}{x} + 3x \right)(\sqrt{x} - 1)$

$$c) y = \frac{-x^2 + 2x + 3}{x^3 - 2}$$

$$d) y = (x-2)\sqrt{x^2+1}$$

HD Giải

$$a) y' = \left((4x^3 - 2x^2 - 5x)(x^2 - 7x) \right)' = 20x^4 - 120x^3 + 27x^2 + 70x$$

$$b) y' = \left(\left(\frac{2}{x} + 3x \right) (\sqrt{x} - 1) \right)' = \left(-\frac{2}{x} + 3 \right) (\sqrt{x} - 1) + \frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{3x}{2\sqrt{x}}$$

$$c) y' = \left(\frac{-x^2 + 2x + 3}{x^3 - 2} \right)' = \frac{x^4 - 4x^3 - 9x^2 + 4x - 4}{(x^3 - 2)^2}$$

$$d) y' = \left((x-2)\sqrt{x^2+1} \right)' = \frac{2x^2 - 2x + 1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Bài 2.9. Cho $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Tìm x để:

a) $y' > 0$

b) $y' < 3$

HD Giải

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$.

a) $y' > 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x > 0 \Leftrightarrow x < 0$ hoặc $x > 2$

b) $y' < 3 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 3 < 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 < 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$

Bài 2.10. Cho $f(x) = x^3 + x - \sqrt{2}$; $g(x) = 3x^2 + x + \sqrt{2}$. Giải bất phương trình $f'(x) > g'(x)$.

HD Giải

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 1$; $g'(x) = 6x + 1$

$$f'(x) > g'(x) \Leftrightarrow 3x^2 + 1 > 6x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x > 0. \text{ Vậy } x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$$

Bài 2.11. Cho $f(x) = \frac{2}{x}$; $g(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$. Giải bất phương trình $f(x) \leq g'(x)$

HD Giải

Ta có $g'(x) = x - x^2$

$$f(x) \leq g'(x) \Leftrightarrow \frac{2}{x} \leq x - x^2 \Leftrightarrow \frac{x^3 - x^2 + 2}{x} \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x < 0. \text{ Vậy } x \in [-1; 0)$$

Bài 2.12. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$. Hãy giải bất phương trình $f'(x) \leq f(x)$.

HD Giải

$$\text{Ta có } f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} \Rightarrow f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x}}$$

$$\text{Ta cần giải bất phương trình: } \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x}} \leq \sqrt{x^2 - 2x} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > 2 \\ x-1 \leq x^2 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > 2 \\ x \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ x \geq \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của bpt đã cho là: } S = (-\infty; 0) \cup \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}; +\infty \right)$$

Bài 2.13. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C).a) Viết phương trình tiếp với đồ thị (C) kẻ từ điểm $A(0; 2)$ b) Tìm trên đường thẳng $y = 2$ các điểm để từ đó có thể kẻ đến (C) hai tiếp tuyến vuông góc với nhau.

HD Giải

a) Cách 1. Ta có $y' = f'(x) = 3x^2 - 6x$. Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm, tiếp tuyến với đồ thị (C) là (d):

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = (3x_0^2 - 6x_0)(x - x_0) + x_0^3 - 3x_0^2 + 2$$

$$\text{Mà } A \in (d) \text{ nên } 2 = (3x_0^2 - 6x_0)(0 - x_0) + x_0^3 - 3x_0^2 + 2 \Leftrightarrow -2x_0^3 + 3x_0^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Khi $x_0 = 0 \Rightarrow f(x_0) = f(0) = 2$ và $f'(x_0) = f'(0) = 0$.

Vậy phương trình tiếp tuyến là $(d_1): y = 2$

$$\text{Khi } x_0 = \frac{3}{2} \Rightarrow f(x_0) = f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{11}{8} \text{ và } f'(x_0) = f'\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{4}.$$

Vậy phương trình tiếp tuyến là $(d_2): y = -\frac{9}{4}x + 2$

Cách 2. Đường thẳng (d) qua điểm $A(0; 2)$, có hệ số góc k , có phương trình: $y = kx + 2$

Để đường thẳng (d) là tiếp tuyến với đồ thị (C) thì hệ phương trình sau phải có nghiệm:

$$\begin{cases} f(x) = kx + 2 \\ f'(x) = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2 = kx + 2 & (1) \\ 3x^2 - 6x = k & (2) \end{cases}$$

$$\text{Thay (2) vào (1), ta có } 2x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow k = 0 \\ x = \frac{3}{2} \Rightarrow k = -\frac{9}{4} \end{cases}$$

Vậy tiếp tuyến cần tìm $(d_1): y = 2, (d_2): y = -\frac{9}{4}x + 2$

b) Gọi $A(a; 2)$ thuộc đường thẳng $y = 2$ và (d) là đường thẳng qua A, có hệ số góc k , nên có phương trình $y = k(x - a) + 2$.

Để có hai tiếp với đồ thị (C) thì phương trình sau phải có nghiệm:

$$\begin{cases} f(x) = k(x - a) + 2 \\ f'(x) = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2 = k(x - a) + 2 & (1) \\ 3x^2 - 6x = k & (2) \end{cases}$$

$$\text{Thay (2) vào (1), ta có } x[-2x^2 + 3x(a + 1) - 6a] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -2x^2 + 3x(a + 1) - 6a = 0 & (3) \end{cases}$$

Đặt $g(x) = -2x^2 + 3x(a + 1) - 6a$

Để kẻ được hai tiếp tuyến đến đồ thị (C) và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau thì phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 khác 0 và $y'(x_1) \cdot y'(x_2) = -1$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} g(0) \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ y'(x_1) \cdot y'(x_2) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a \neq 0 \\ 3a^2 - 10a + 3 > 0 \\ 9x_1x_2[x_1x_2 - 2(x_1 + x_2 + 4)] = -1 & (4) \end{cases}$$

Theo Viét, ta có $x_1 + x_2 = \frac{3(a+1)}{2}; x_1x_2 = 3a$ thay vào (4), ta có $27a = -1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{27}$

Vậy điểm cần tìm $A\left(-\frac{1}{27}; 2\right)$

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 2.14. Tìm đạo hàm các hàm số sau

a) $y = x^5 - 4x^3 - x^2 + \frac{x}{2}$

b) $y = \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3} - \frac{6}{7x^4}$

c) $y = -6\sqrt{x} + \frac{3}{x}$

d) $y = (9 - 2x)(2x^3 - 9x + 1)$

e) $y = \frac{2x - 3}{x + 4}$

f) $y = \frac{5 - 3x - x^2}{x - 2}$

Bài 2.15. Tìm đạo hàm các hàm số sau

a) $y = (x^2 + 1)(x^3 + 1)^2(x^4 + 1)^3$

b) $y = \left(x^5 - \frac{3}{\sqrt{x}}\right)^3$

c) $y = \sqrt{x^3 - 2x^2 + 1}$

d) $y = (x - 2)\sqrt{x^2 + 1}$

e) $y = \sqrt{x + 2} + \sqrt{4 - x}$

f) $y = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

Bài 2.16. Tính $f'(-1)$ biết rằng $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}$ **Bài 2.17.** Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 8}$. Giải bất phương trình $f'(x) \leq 1$ **Bài 2.18.** Tìm các nghiệm của phương trình sau

a) $f'(x) = 0$, với $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 6x - 1$

b) $f'(x) = -5$, với $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{3x^2}{2} - 3$

c) $1 + 2f(x) - 80f'(x) = 0$, với $f(x) = \frac{1}{10 - x}$

d) $1 + 5f(x) + 6f'(x) = 0$, với $f(x) = \frac{1}{1 - x}$

Bài 2.19. Chứng minh rằng đạo hàm của hàm số chẵn là hàm số lẻ và đạo hàm của hàm số lẻ là hàm số chẵn, biết rằng các hàm số đó có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.**Bài 2.20.** Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = x^3 - 5x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) sao cho tiếp tuyến đó:

a) Song song với đường thẳng $3x + y - 1 = 0$

b) Vuông góc với đường thẳng $x - 7y - 28 = 0$

c) Đi qua điểm $A(0; 2)$

Bài 2.21. Cho hàm số $y = \frac{x + 1}{x - 1}$ có đồ thị (H). Viết phương trình tiếp tuyến của (H), biết:

a) Tại điểm có hoành độ $x = 2$

b) Tiếp tuyến song song với đường thẳng d: $y = -\frac{1}{8}x + 5$.

Bài 2.22. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$. Biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $y = 24x - 1$ **Bài 2.23.** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 4x^3 + x$. Biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $y = 13x + 1$ **Bài 2.24.** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = (x + 1)^3 - 3x - 4$. Biết tiếp tuyến đó vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{x}{9} + 1$ **Bài 2.25.** Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 6}{x + 1}$. Giải bất phương trình $f'(x) \leq 0$ **Bài 2.26.** Cho hàm số $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$ và $g(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 2x$. Giải bất phương trình $f'(x) \leq g'(x)$.**Bài 2.27.** Cho hàm số $f(x) = 2x^3 - x^2 - 12$ và $g(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} - \sqrt{3}$. Giải bất phương trình $f'(x) \geq g'(x)$.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = \sqrt[3]{x}$ với $x > 0$. Giá trị $f'(8)$ bằng:

A. $-\frac{1}{12}$.

B. $\frac{1}{6}$.

C. $\frac{1}{12}$.

D. $-\frac{1}{6}$.

Câu 2. Biết hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a > 0$) có đạo hàm $f'(x) > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $b^2 - 3ac \geq 0$.

B. $b^2 - 3ac < 0$.

C. $b^2 - 3ac \leq 0$.

D. $b^2 - 3ac > 0$.

Câu 3. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{a^3}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ (a là hằng số).

A. $y' = \frac{a^3(3a^2 - 2x)}{2(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}$.

B. $y' = \frac{a^3x}{a^2 - x^2}$.

C. $y' = \frac{a^3x}{2(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}$.

D. $y' = \frac{a^3x}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Câu 4. Cho hàm số $y = 3x^3 + x^2 + 1$, có đạo hàm là y' . Để $y' \leq 0$ thì x nhận các giá trị thuộc tập nào sau đây?

A. $\left[-\frac{2}{9}; 0\right]$.

B. $\left[-\frac{9}{2}; 0\right]$.

C. $\left(-\infty; -\frac{9}{2}\right] \cup [0; +\infty)$.

D. $\left(-\infty; -\frac{2}{9}\right] \cup [0; +\infty)$.

Câu 5. Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}mx^3 + (m-1)x^2 - mx + 3$, có đạo hàm là y' . Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt là x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 6$.

A. $m = -1 + \sqrt{2}$.

B. $m = -1 + \sqrt{2}; m = -1 - \sqrt{2}$.

C. $m = -1 - \sqrt{2}$.

D. $m = 1 - \sqrt{2}; m = 1 + \sqrt{2}$.

Câu 6. Tính đạo hàm của hàm số $y = (x^3 - 2x^2)^{2016}$.

A. $y' = 2016(x^3 - 2x^2)^{2015}$.

B. $y' = 2016(x^3 - 2x^2)^{2015}(3x^2 - 4x)$.

C. $y' = 2016(x^3 - 2x^2)(3x^2 - 4x)$.

D. $y' = 2016(x^3 - 2x^2)(3x^2 - 2x)$.

Câu 7. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{4}{x-1}$ tại điểm có hoành độ bằng -1 .

A. $y = x + 2$.

B. $y = -x - 3$.

C. $y = -x + 2$.

D. $y = x - 1$.

Câu 8. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x-1}$ tại điểm $x=1$.

A. Không tồn tại.

B. $f'(1) = 1$.

C. $f'(1) = 0$.

D. $f'(1) = \frac{1}{2}$.

Câu 9. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$. Phương trình $f'(x) = 0$ có tập nghiệm S là:

A. $S = \left\{0; \frac{2}{3}\right\}$.

B. $S = \left\{-\frac{2}{3}; 0\right\}$.

C. $S = \left\{0; \frac{3}{2}\right\}$.

D. $S = \left\{-\frac{3}{2}; 0\right\}$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2\sqrt{2}x^2 + 8x - 1$, có đạo hàm là $f'(x)$. Tập hợp những giá trị của x để $f'(x) = 0$ là:

A. $\{-2\sqrt{2}\}$.

B. $\{2; \sqrt{2}\}$.

C. $\{-4\sqrt{2}\}$.

D. $\{2\sqrt{2}\}$.

Câu 11. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$.

A. $y' = \frac{1+x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$. B. $y' = \frac{2(x+1)}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$. C. $y' = \frac{x^2-x+1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$. D. $y' = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Câu 12. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x(1-3x)}{x+1}$.

A. $y' = \frac{-3x^2-6x+1}{(x+1)^2}$. B. $y' = 1-6x^2$. C. $y' = \frac{1-6x^2}{(x+1)^2}$. D. $y' = \frac{-9x^2-4x+1}{(x+1)^2}$.

Câu 13. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

A. $y' = -\frac{x(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}$. B. $y' = \frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.
C. $y' = -\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$. D. $y' = \frac{x}{2(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

Câu 14. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ tại điểm $x=0$.

A. $f'(0) = \frac{1}{2}$. B. $f'(0) = \frac{1}{3}$. C. $f'(0) = 1$. D. $f'(0) = 2$.

Câu 15. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = -1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

A. $f'(x) = -\frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}$. B. $f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}$. C. $f'(x) = -\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$. D. $f'(x) = -\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$.

Câu 16. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x^2+2x-3}{x+2}$.

A. $y' = 1 + \frac{3}{(x+2)^2}$. B. $y' = \frac{x^2+6x+7}{(x+2)^2}$. C. $y' = \frac{x^2+4x+5}{(x+2)^2}$. D. $y' = \frac{x^2+8x+1}{(x+2)^2}$.

Câu 17. Cho hàm số $y = \sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $2y'\sqrt{x^2+1} = y$. B. $y'\sqrt{x^2+1} = 2y$. C. $2y\sqrt{x^2+1} = y'$. D. $y'\sqrt{x^2+1} = y$.

Câu 18. Tính đạo hàm của hàm số $y = (2x-1)\sqrt{x^2+x}$.

A. $y' = 2\sqrt{x^2+x} + \frac{4x^2-1}{\sqrt{x^2+x}}$. B. $y' = 2\sqrt{x^2+x} + \frac{4x^2-1}{2\sqrt{x^2+x}}$.
C. $y' = 2\sqrt{x^2+x} + \frac{4x^2+1}{2\sqrt{x^2+x}}$. D. $y' = 2\sqrt{x^2+x} - \frac{4x^2-1}{2\sqrt{x^2+x}}$.

Câu 19. Tính đạo hàm của hàm số $y = x\sqrt{x^2-2x}$.

A. $y' = \frac{2x^2-2x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$. B. $y' = \frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x}}$. C. $y' = \frac{3x^2-4x}{\sqrt{x^2-2x}}$. D. $y' = \frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x}}$.

Câu 20. Cho hàm số $y = (2x^2+1)^3$, có đạo hàm là y' . Để $y' \geq 0$ thì x nhận các giá trị nào sau đây?

A. $(-\infty; 0]$. B. $[0; +\infty)$.
C. $\mathbb{R}$. D. Không có giá trị nào của x .

Câu 21. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^2+5$ tại điểm có tung độ bằng -1 và hoành độ âm.

A. $y = 2\sqrt{6}(x-\sqrt{6})+1$. B. $y = 2\sqrt{6}(x-\sqrt{6})-1$.
C. $y = 2\sqrt{6}(x+\sqrt{6})-1$. D. $y = -2\sqrt{6}(x+\sqrt{6})-1$.

Câu 22. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{\frac{x^2+1}{x}}$.

A. $y' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{x^2+1}} \left(x - \frac{1}{x^2} \right)$.

B. $y' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{x^2+1}}$.

C. $y' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{x^2+1}} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)$.

D. $y' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{x^2+1}} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)$.

Câu 23. Hàm số nào sau đây có đạo hàm là hàm số $2x + \frac{1}{x^2}$?

A. $y = \frac{2x^2 + x - 1}{x}$

B. $y = \frac{x^3 - 1}{x}$.

C. $y = \frac{3(x^2 + x)}{x^3}$.

D. $y = \frac{x^3 + 5x - 1}{x}$

Câu 24. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{1-2x^2}$.

A. $y' = \frac{-4x}{\sqrt{1-2x^2}}$.

B. $y' = \frac{-2x}{\sqrt{1-2x^2}}$.

C. $y' = \frac{2x}{\sqrt{1-2x^2}}$.

D. $y' = \frac{1}{2\sqrt{1-2x^2}}$.

Câu 25. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{\frac{2x-1}{x+2}}$.

A. $y' = \frac{5}{(2x-1)^2} \cdot \sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}$.

B. $y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{(2x-1)^2} \cdot \sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}$.

C. $y' = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}$.

D. $y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{(x+2)^2} \cdot \sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}$.

Câu 26. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{x^2 - 2x + 5}$.

A. $y' = \frac{2x-2}{(x^2 - 2x + 5)^2}$.

B. $y' = \frac{-2x+2}{(x^2 - 2x + 5)^2}$.

C. $y' = (2x-2)(x^2 - 2x + 5)$.

D. $y' = \frac{1}{2x-2}$.

Câu 27. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = 9x$.

A. $y = 9x + 32$.

B. $y = 9x - 32$.

C. $y = 9x + 40$.

D. $y = 9x - 40$.

Câu 28. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ tại điểm $x = -1$.

A. $f'(-1) = 0$.

B. $f'(-1) = 1$.

C. $f'(-1) = -\frac{1}{2}$.

D. $f'(-1) = -2$.

Câu 29. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$. Tập nghiệm S của bất phương trình $f'(x) \geq f(x)$ có bao nhiêu giá trị nguyên?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 30. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x + 3$ tại điểm $M(1; 2)$.

A. $y = 2 - x$.

B. $y = 2x + 2$.

C. $y = 3x - 1$.

D. $y = x + 1$.

Câu 31. Tính đạo hàm của hàm số $y = (x^3 - 2x^2)^2$.

A. $f'(x) = 6x^5 - 20x^4 + 16x^3$.

B. $f'(x) = 6x^5 + 16x^3$.

C. $f'(x) = 6x^5 - 20x^4 + 4x^3$.

D. $f'(x) = 6x^5 - 20x^4 - 16x^3$.

Câu 32. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (2m+1)x^2 - mx - 4$, có đạo hàm là y' . Tìm tất cả các giá trị của m để $y' \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

A. $m \in \left[-1; -\frac{1}{4}\right]$.

B. $m \in (-\infty; -1] \cup \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

C. $m \in \left[-1; \frac{1}{4}\right]$.

D. $m \in \left(-1; -\frac{1}{4}\right)$.

Câu 33. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x(x-1)(x-2)\dots(x-2018)$ tại điểm $x=0$.

A. $f'(0) = -2018!$.

B. $f'(0) = 2018!$.

C. $f'(0) = 2018$.

D. $f'(0) = 0$.

Câu 34. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{-2x^2 + x - 7}{x^2 + 3}$.

A. $y' = \frac{-7x^2 - 13x - 10}{(x^2 + 3)^2}$.

B. $y' = \frac{-3x^2 - 13x - 10}{(x^2 + 3)^2}$.

C. $y' = \frac{-x^2 + x + 3}{(x^2 + 3)^2}$.

D. $y' = \frac{-x^2 + 2x + 3}{(x^2 + 3)^2}$.

Câu 35. Cho hàm số $f(x) = \frac{1-3x+x^2}{x-1}$. Giải bất phương trình $f'(x) > 0$.

A. $x \in \mathbb{R}$.

B. $x \in \emptyset$.

C. $x \in (1; +\infty)$.

D. $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Câu 36. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^2 + x}{x-2}$ tại điểm $x=1$.

A. $f'(1) = -3$.

B. $f'(1) = -2$.

C. $f'(1) = -5$.

D. $f'(1) = -4$.

Câu 37. Biết hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a < 0$) có đạo hàm $f'(x) < 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $b^2 - 3ac \geq 0$.

B. $b^2 - 3ac < 0$.

C. $b^2 - 3ac \leq 0$.

D. $b^2 - 3ac > 0$.

Câu 38. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x^2 - 4x^3}$.

A. $y' = \frac{x - 6x^2}{2\sqrt{x^2 - 4x^3}}$.

B. $y' = \frac{x - 6x^2}{\sqrt{x^2 - 4x^3}}$.

C. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 4x^3}}$.

D. $y' = \frac{x - 12x^2}{2\sqrt{x^2 - 4x^3}}$.

Câu 39. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{2x+5}{x^2+3x+3}$.

A. $y' = \frac{x^2 - 2x - 9}{(x^2 + 3x + 3)^2}$.

B. $y' = \frac{-2x^2 - 5x - 9}{(x^2 + 3x + 3)^2}$.

C. $y' = \frac{2x^2 + 10x + 9}{(x^2 + 3x + 3)^2}$.

D. $y' = \frac{-2x^2 - 10x - 9}{(x^2 + 3x + 3)^2}$.

Câu 40. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ tại điểm $x=-1$.

A. $f'(-1) = 15$.

B. $f'(-1) = 24$.

C. $f'(-1) = 4$.

D. $f'(-1) = 14$.

Câu 41. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x\sqrt{x}$.

A. $f'(x) = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2}$.

B. $f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$.

C. $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

D. $f'(x) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x}}{x}$.

Câu 42. Tính đạo hàm của hàm số $y = (7x-5)^4$.

A. $y' = 28(5-7x)^3$.

B. $y' = 4(7x-5)^3$.

C. $y' = -28(7x-5)^3$.

D. $y' = -28(5-7x)^3$.

Câu 43. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{3x^2 + 2x + 1}{2\sqrt{3x^3 + 2x^2 + 1}}$ tại điểm $x=0$.

A. $f'(0) = 1$.

B. $f'(0) = 0$.

C. $f'(0) = \frac{1}{2}$.

D. Không tồn tại.

Câu 44. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3$, biết tiếp tuyến có hệ số góc bằng 12.

A. $y = 12x \pm 4$.

B. $y = 12x \pm 8$.

C. $y = 12x \pm 2$.

D. $y = 12x \pm 16$.

Câu 45. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$.

A. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x-1}}$.

B. $y' = \frac{1}{4\sqrt{x+1}} + \frac{1}{4\sqrt{x-1}}$.

C. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$.

D. $y' = -\frac{1}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})^2}$.

Câu 46. Cho hàm số $f(x) = k\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}$. Với giá trị nào của k thì $f'(1) = \frac{3}{2}$?

A. $k = 3$.

B. $k = \frac{9}{2}$.

C. $k = -3$.

D. $k = 1$.

Câu 47. Tính đạo hàm của hàm số $y = (x^2 - 2)(2x - 1)$.

A. $y' = 3x^2 - 6x + 2$.

B. $y' = 2x^2 - 2x + 4$.

C. $y' = 6x^2 - 2x - 4$.

D. $y' = 4x$.

Câu 48. Tính đạo hàm của hàm số $y = (1 - x^3)^5$.

A. $y' = -15x^2(1 - x^3)^4$.

B. $y' = -3x^2(1 - x^3)^4$.

C. $y' = -5x^2(1 - x^3)^4$.

D. $y' = 5x^2(1 - x^3)^4$.

Câu 49. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 + x$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: x + 5y = 0$.

A. $y = x + 4$.

B. $y = 3x - 5$.

C. $y = 2x - 3$.

D. $y = 5x - 3$.

Câu 50. Cho hàm số $y = -2\sqrt{x} + 3x$. Tập nghiệm S của bất phương trình $y' > 0$ là:

A. $S = \left(\frac{1}{9}; +\infty\right)$.

B. $S = \emptyset$.

C. $S = (-\infty; +\infty)$.

D. $S = \left(-\infty; \frac{1}{9}\right)$.

ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
C	B	D	A	B	B	B	A	C	D	A	A	C	A	C	A	A	B	D	B	C	D	B	B	D
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
B	B	C	C	D	A	A	C	D	D	C	B	B	D	A	C	D	C	D	B	A	C	A	D	A

§3. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Giới hạn hàm số lượng giác

Định lý:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

b) Nếu hàm số $u = u(x)$ thỏa mãn điều kiện: $u(x) \neq 0$ với mọi $x \neq x_0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0$ thì

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1$$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

2. Bảng tính đạo hàm của hàm số lượng giác

Bảng 2

STT	Hàm sơ cấp	Hàm hợp ($u = u(x)$)
1	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u' \cos u$
2	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u' \sin u$
3	$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u} = u' (1 + \tan^2 u)$
4	$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$	$(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u} = -u' (1 + \cot^2 u)$

Các dạng toán**Dạng 1.** Tính đạo hàm bằng công thức đối với các hàm lượng giác

Phương pháp: 1. Áp dụng các quy tắc tính đạo hàm

2. Áp dụng các đạo hàm lượng giác cơ bản

Dạng 2. Giải phương trình $f'(x) = 0$ Phương pháp: 1. Tính đạo hàm $f'(x)$ 2. Để giải phương trình $f'(x) = 0$, ta áp dụng cách giải các phương trình lượng giác cơ bản và một số phương trình lượng giác thường gặp.

B. BÀI TẬP

Bài 3.1. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 5x}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \cdot \sin 2x}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x}$

HD & Giải

a) Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x}{2x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 2 \cdot 1 = 2$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \cdot \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{5x} \cdot \frac{\frac{\tan 3x}{3x}}{\frac{\sin 5x}{5x}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{3x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x}} = \frac{3}{5}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \cdot \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{2 \sin x \cdot \cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cos x} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}} = -1$$

Bài 3.2. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \sin\left(3x + \frac{\pi}{5}\right)$

b) $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

c) $y = \cos(x^3 - 1)$

d) $y = \tan(3x^2 + 5)$

e) $y = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right), x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

f) $y = \cot^3(3x - 1)$

HD & Giải

a) $y' = \left(\sin\left(3x + \frac{\pi}{5}\right) \right)' = \left(3x + \frac{\pi}{5}\right)' \cos\left(3x + \frac{\pi}{5}\right) = 3 \cos\left(3x + \frac{\pi}{5}\right)$

b) $y' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \right)' = \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x$

c) $y' = -3x^2 \sin(x^3 - 1)$

d) $y' = \left(\tan(3x^2 + 5) \right)' = \frac{(3x^2 + 5)'}{\cos^2(3x^2 + 5)} = \frac{6x}{\cos^2(3x^2 + 5)}$

e) $y' = \left(\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \right)' = \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)'}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = -\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$

f) $y' = \left(\cot^3(3x - 1) \right)' = 3 \cot^2(3x - 1) \left(\cot(3x - 1) \right)' = 3 \cot^2(3x - 1) \cdot \frac{-(3x - 1)'}{\sin^2(3x - 1)} = -\frac{9 \cos^2(3x - 1)}{\sin^4(3x - 1)}$

Bài 3.3. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 5 \sin x - 3 \cos x$

b) $y = x \cot x$

c) $y = \sqrt{1 + 2 \tan x}$

d) $y = \sin \sqrt{1 + x^2}$

e) $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

f) $y = \frac{\sin x}{x} + \frac{x}{\sin x}$

HD & Giải

a) $y' = 5 \cos x + 3 \sin x$

b) $y' = \cot x - \frac{x}{\sin^2 x}$

c) $y' = \frac{1}{\cos^2 x \sqrt{1 + 2 \tan x}}$

d) $y' = \frac{x \cos \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}}$

$$e) y' = -\frac{2}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$f) y' = (x \cos x - \sin x) \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$$

Bài 3.4. Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau:

$$a) y = \sin(x^2 - 3x + 2)$$

$$b) y = \cos \sqrt{2x+1}$$

$$c) y = \sqrt{\cos 2x}$$

$$d) y = \tan 3x - \cot 3x$$

$$e) y = \sqrt{1+2 \tan x}$$

$$f) y = \cot \sqrt{x^2+1}$$

HD & Giải

$$a) y' = \left(\sin(x^2 - 3x + 2) \right)' = (2x - 3) \cos(x^2 - 3x + 2)$$

$$b) y' = \left(\cos \sqrt{2x+1} \right)' = \frac{-\sin \sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}$$

$$c) y' = \left(\sqrt{\cos 2x} \right)' = -\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$$

$$d) y' = \left(\tan 3x - \cot 3x \right)' = \frac{12}{\sin^2 6x}$$

$$e) y' = \left(\sqrt{1+2 \tan x} \right)' = \frac{1}{\cos^2 x \cdot \sqrt{1+2 \tan x}}$$

$$f) y' = \left(\cot \sqrt{x^2+1} \right)' = \frac{-x}{\sqrt{x^2+1}} \left(1 + \cot^2 \sqrt{x^2+1} \right)$$

Bài 3.5. Tìm đạo hàm các hàm số sau

$$a) y = \tan(\sin x)$$

$$b) y = x \cot(x^2 - 1)$$

$$c) y = \frac{\sin^2 x}{1 + \tan 2x}$$

$$d) y = \cos^2 \sqrt{\frac{\pi}{4} - 2x}$$

$$e) y = x \sqrt{\sin 3x}$$

$$f) y = \sqrt{x} \cot 2x$$

HD & Giải

$$a) y' = \left(\tan(\sin x) \right)' = \frac{\cos x}{\cos^2(\sin x)}$$

$$b) y' = \left(x \cot(x^2 - 1) \right)' = \frac{\sin 2(x^2 - 1) - 4x^2}{2 \sin^2(x^2 - 1)}$$

$$c) y' = \left(\frac{\sin^2 x}{1 + \tan 2x} \right)' = \frac{\sin 2x}{1 + \tan 2x} - \frac{2 \sin^2 x (1 + \tan^2 2x)}{(1 + \tan 2x)^2}$$

$$d) y' = \left(\cos^2 \sqrt{\frac{\pi}{4} - 2x} \right)' = \frac{2 \sin \sqrt{\pi - 8x}}{\sqrt{\pi - 8x}}$$

$$e) y' = \left(x \sqrt{\sin 3x} \right)' = \frac{2 \sin 3x + 3x \cos 3x}{2 \sqrt{\sin 3x}}$$

$$f) y' = \left(\sqrt{x} \cot 2x \right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cot 2x - \frac{2\sqrt{x}}{\sin^2 2x}$$

Bài 3.6. Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau

$$a) y = \sin 3x + \cos \frac{x}{5} + \tan \sqrt{x}$$

$$b) y = \sin \frac{1}{x^2}$$

$$c) y = 3 \sin^2 x \cos x + \cos^2 x$$

$$d) y = (3 - \sin x)^3$$

$$e) y = \sin^2 3x + \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$f) y = \frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x}$$

HD & Giải

$$a) y' = \left(\sin 3x + \cos \frac{x}{5} + \tan \sqrt{x} \right)' = 3 \cos 3x - \frac{1}{5} \sin \frac{x}{5} + \frac{1}{2\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}}$$

$$b) y' = \left(\sin \frac{1}{x^2} \right)' = -\frac{2}{x^3} \cos \frac{1}{x^2}$$

$$c) y' = \left(3 \sin^2 x \cos x + \cos^2 x \right)' = \sin x (6 \cos^2 x - 3 \sin^2 x - 2 \cos x)$$

$$d) y' = \left((3 - \sin x)^3 \right)' = -3(3 - \sin x)^2 \cos x$$

$$e) y' = \left(\sin^2 3x + \frac{1}{\cos^2 x} \right)' = 3 \sin 6x + \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$$

$$f) y' = \left(\frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x} \right)' = \frac{x^2}{(\cos x + x \sin x)^2}$$

Bài 3.7. Chứng minh rằng:

$$a) \text{Hàm số } y = \tan x \text{ thỏa mãn hệ thức } y' - y^2 - 1 = 0$$

b) Hàm số $y = \cot 2x$ thỏa mãn hệ thức $y' + 2y^2 + 2 = 0$

HD & Giải

a) $y' = 1 + \tan^2 x$. Do đó $y' - y^2 - 1 = (1 + \tan^2 x) - \tan^2 x - 1 = 0$

b) $y' = -2(1 + \cot^2 2x)$. Do đó $y' + 2y^2 + 2 = -2(1 + \cot^2 2x) + 2\cot^2 2x + 2 = 0$

Bài 3.8. Giải phương trình $f'(x) = 0$ biết rằng:

a) $f(x) = 3\cos x + 4\sin x + 5x$

b) $f(x) = 1 - \sin(\pi + x) + 2\cos\left(\frac{2\pi + x}{2}\right)$

c) $f(x) = \sin 2x - 2\cos x$

d) $f(x) = \tan x + \cot x$

HD & Giải

a) Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có $f'(x) = -3\sin x + 4\cos x + 5$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3\sin x + 4\cos x + 5 \Leftrightarrow \frac{3}{5}\sin x - \frac{4}{5}\cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x - \alpha\right) = \sin \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \alpha + \frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \left(\cos \alpha = \frac{3}{5}; \sin \alpha = \frac{4}{5} \right)$$

b) Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có $f'(x) = \cos x + \sin \frac{x}{2}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x + \sin \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \sin \frac{x}{2} = -\cos x \Leftrightarrow \sin \frac{x}{2} = \sin \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi - k4\pi \\ x = \pi + \frac{k4\pi}{3}; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

c) Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có $f'(x) = 2\cos 2x + 2\sin x = 2(1 - 2\sin^2 x) + 2\sin x$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(1 - 2\sin^2 x) + 2\sin x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$$

d) Với mọi $x \neq \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$, ta có $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} = \frac{-4\cos 2x}{\sin^2 2x}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-4\cos 2x}{\sin^2 2x} = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$$

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 3.9. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{\sin^2 3x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tan x$

Bài 3.10. Tìm đạo hàm các hàm số sau:

a) $y = \frac{x}{\sin x + \cos x}$

b) $y = \cos \sqrt{x^2 - x + 1}$

c) $y = \cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x$

d) $y = \cot \sqrt{1 + x^2}$

e) $y = \sin(2\sin x)$

f) $y = \sqrt{1 + \tan x}$

Bài 3.11. Tìm đạo hàm các hàm số sau:

a) $y = x \cot^2 x$

b) $y = \frac{\sin \sqrt{x}}{\cos 3x}$

c) $y = (\sin 2x + 8)^3$

d) $y = (2x^3 - 5)\tan x$

e) $y = \sin^3(1-x)$

f) $y = \frac{1}{|\cos x|}$

Bài 3.12. Giải phương trình $f'(x) = 0$ biết:

a) $f(x) = \sqrt{3}\cos x + \sin x - 2x - 5$

b) $f(x) = \frac{2\cos 17x}{17} - \frac{\sqrt{3}\sin 5x}{5} + \frac{\cos 5x}{5} + 2$

Bài 3.13. Tìm a để phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm, biết $f(x) = a\cos x + 2\sin x - 3x + 1$ **Bài 3.14.** Cho hai hàm số $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ và $g(x) = \frac{1}{4}\cos 4x$. Chứng minh rằng

$$f'(x) = g'(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**Câu 1.** Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \tan\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$ tại điểm $x = 0$.

A. $f'(0) = -3$.

B. $f'(0) = \sqrt{3}$.

C. $f'(0) = -\sqrt{3}$.

D. $f'(0) = 4$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x) - \cos^2 x$ với $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Trong các biểu thức dưới đây, biểu thức nào xác định hàm số $f(x)$ thỏa mãn $y'(x) = 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$?

A. $f(x) = x + \sin 2x$.

B. $f(x) = x - \frac{1}{2}\cos 2x$.

C. $f(x) = x - \sin 2x$.

D. $f(x) = x + \frac{1}{2}\cos 2x$.

Câu 3. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sin^3 5x \cdot \cos^2 \frac{x}{3}$ tại điểm $x = \frac{\pi}{2}$.

A. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$.

C. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

D. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 4. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 2\sin\left(\frac{3\pi}{5} - 2x\right)$ tại điểm $x = -\frac{\pi}{5}$.

A. $f'\left(-\frac{\pi}{5}\right) = 2$.

B. $f'\left(-\frac{\pi}{5}\right) = -2$.

C. $f'\left(-\frac{\pi}{5}\right) = 4$.

D. $f'\left(-\frac{\pi}{5}\right) = -4$.

Câu 5. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ tại điểm $x = \frac{\pi}{8}$.

A. $f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0$.

B. $f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{3}{4}$.

C. $f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1$.

D. $f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = -1$.

Câu 6. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin \sqrt{2+x^2}$.

A. $y' = \frac{x+1}{\sqrt{2+x^2}} \cos \sqrt{2+x^2}$.

B. $y' = \frac{2x+2}{\sqrt{2+x^2}} \cos \sqrt{2+x^2}$.

C. $y' = -\frac{x}{\sqrt{2+x^2}} \cos \sqrt{2+x^2}$.

D. $y' = \frac{x}{\sqrt{2+x^2}} \cos \sqrt{2+x^2}$.

Câu 7. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sin(\pi \sin x)$ tại điểm $x = \frac{\pi}{6}$.

A. $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

B. $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$.

C. $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{2}$.

D. $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x) = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$. Tính giá trị biểu thức $P = f'\left(\frac{\pi}{6}\right) - f'\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

A. $y = \frac{x-3}{x+4}$

B. $P = \frac{8}{3}$.

C. $P = \frac{4}{3}$.

D. $P = \frac{4}{9}$.

Câu 9. Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos^3(2x-1)$.

A. $y' = -3\sin(4x-2)\cos(2x-1)$.

B. $y' = 3\cos^2(2x-1)\sin(2x-1)$.

C. $y' = -3\cos^2(2x-1)\sin(2x-1)$.

D. $y' = 6\cos^2(2x-1)\sin(2x-1)$.

Câu 10. Tính đạo hàm của hàm số $y = \tan \frac{x+1}{2}$.

A. $y' = -\frac{1}{\cos^2 \frac{x+1}{2}}$.

B. $y' = \frac{1}{\cos^2 \frac{x+1}{2}}$.

C. $y' = -\frac{1}{2\cos^2 \frac{x+1}{2}}$.

D. $y' = \frac{1}{2\cos^2 \frac{x+1}{2}}$.

Câu 11. Hàm số $f(x) = 4x$ có đạo hàm là $f'(x)$, hàm số $g(x) = 4x + \sin \frac{\pi x}{4}$ có đạo hàm là $g'(x)$.

Tính giá trị biểu thức $P = \frac{f'(2)}{g'(2)}$.

A. $P = 1$.

B. $P = \frac{16}{16+\pi}$.

C. $P = \frac{16}{17}$.

D. $P = \frac{1}{16}$.

Câu 12. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 2\sin 3x \cos 5x$ tại điểm $x = \frac{\pi}{8}$.

A. $f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2 + 4\sqrt{2}$.

B. $f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{-15\sqrt{2}}{2}$.

C. $f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = -8 + \sqrt{2}$.

D. $f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = -8 - \sqrt{2}$.

Câu 13. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$.

A. $y' = \frac{2 - 2\sin 2x}{(\sin x - \cos x)^2}$.

B. $y' = \frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}$.

C. $y' = \frac{-\sin 2x}{(\sin x - \cos x)^2}$.

D. $y' = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{(\sin x - \cos x)^2}$.

Câu 14. Tính đạo hàm của hàm số $y = -\frac{2}{\tan(1-2x)}$.

A. $y' = \frac{-4}{\sin^2(1-2x)}$.

B. $y' = \frac{-4}{\sin(1-2x)}$.

C. $y' = \frac{-4x}{\sin^2(1-2x)}$.

D. $y' = \frac{4x}{\sin^2(1-2x)}$.

Câu 15. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{\cos 2x}{3x+1}$.

A. $y' = \frac{2(3x+1)\sin 2x + 3\cos 2x}{(3x+1)^2}$.

B. $y' = \frac{-2(3x+1)\sin 2x - 3\cos 2x}{(3x+1)^2}$.

C. $y' = \frac{-2(3x+1)\sin 2x - 3\cos 2x}{3x+1}$.

D. $y' = \frac{-(3x+1)\sin 2x - 3\cos 2x}{(3x+1)^2}$.

Câu 16. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin^3(1-x)$.

A. $y' = -3\sin^2(1-x) \cdot \cos(1-x)$.

B. $y' = 3\sin^2(1-x) \cdot \cos(1-x)$.

C. $y' = \cos^3(1-x)$.

D. $y' = -\cos^3(1-x)$.

Câu 17. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sin 2x - 2x \cos 2x$ tại điểm $x = \frac{\pi}{4}$.

A. $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$.

B. $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

C. $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi$.

D. $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$.

Câu 18. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin(\sin x)$.

A. $y' = \cos(\sin x)$.

B. $y' = \cos(\cos x)$.

C. $y' = \cos x \cdot \cos(\sin x)$.

D. $y' = \cos x \cdot \cos(\cos x)$.

Câu 19. Tính đạo hàm của hàm số $y = \tan^3 x + \cot 2x$.

A. $y' = 3\tan^2 x - \frac{1}{\sin^2 2x}$.

B. $y' = \frac{3\tan^2 x}{\cos^2 x} - \frac{2}{\sin^2 2x}$.

C. $y' = 3\tan^2 x \cdot \cot x + 2\tan 2x$.

D. $y' = -\frac{3\tan^2 x}{\cos^2 x} + \frac{2}{\sin^2 2x}$.

Câu 20. Cho $f(x) = 2x^2 - x + 2$ và $g(x) = f(\sin x)$. Tính đạo hàm của hàm số $g(x)$.

A. $g'(x) = 2\cos 2x - \sin x$.

B. $g'(x) = 2\sin 2x + \cos x$.

C. $g'(x) = 2\sin 2x - \cos x$.

D. $g'(x) = 2\cos 2x + \sin x$.

Câu 21. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{\cos 3x}$ tại điểm $x = \frac{\pi}{3}$.

A. $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$.

B. $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$.

C. $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

D. $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 22. Tính đạo hàm của hàm số $y = x^2 \tan x + \sqrt{x}$.

A. $y' = 2x \tan x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

B. $y' = 2x \tan x + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

C. $y' = 2x \tan x + \frac{x^2}{\cos^2 x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

D. $y' = 2x \tan x + \frac{x^2}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Câu 23. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 5\sin x - 3\cos x$ tại điểm $x = \frac{\pi}{2}$.

A. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5$.

B. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$.

C. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3$.

D. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -5$.

Câu 24. Tính đạo hàm của hàm số $y = \cot \sqrt{x^2 + 1}$.

A. $y' = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} \cdot \sin^2 \sqrt{x^2 + 1}}$.

B. $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} \cdot \sin^2 \sqrt{x^2 + 1}}$.

C. $y' = -\frac{1}{\sin^2 \sqrt{x^2 + 1}}$.

D. $y' = \frac{1}{\sin^2 \sqrt{x^2 + 1}}$.

Câu 25. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$ tại điểm $x = \frac{\pi}{2}$.

A. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

B. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

C. Không tồn tại.

D. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Câu 26. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sin \sqrt{x} + \cos \sqrt{x}$ tại điểm $x = \frac{\pi^2}{16}$.

A. $f'\left(\frac{\pi^2}{16}\right) = \frac{2}{\pi}$.

B. $f'\left(\frac{\pi^2}{16}\right) = \sqrt{2}$.

C. $f'\left(\frac{\pi^2}{16}\right) = 0$.

D. $f'\left(\frac{\pi^2}{16}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

Câu 27. Hàm số $f(x) = x^4$ có đạo hàm là $f'(x)$, hàm số $g(x) = 2x + \sin \frac{\pi x}{2}$ có đạo hàm là $g'(x)$.

Tính giá trị biểu thức $P = \frac{f'(1)}{g'(1)}$.

A. $P = -\frac{4}{3}$.

B. $P = \frac{4}{3}$.

C. $P = 2$.

D. $P = -2$.

Câu 28. Tính đạo hàm của hàm số $y = -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right)$.

A. $y' = \frac{1}{2}x \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right).$

B. $y' = \frac{1}{2}x \cos\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right).$

C. $y' = x \cos\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right).$

D. $y' = \frac{1}{2}x^2 \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right).$

Câu 29. Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos\sqrt{2x+1}$.

A. $y' = -\frac{\sin\sqrt{2x+1}}{2\sqrt{2x+1}}.$

B. $y' = \frac{\sin\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}.$

C. $y' = -\sin\sqrt{2x+1}.$

D. $y' = -\frac{\sin\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}.$

Câu 30. Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos(\tan x)$.

A. $y' = -\sin(\tan x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x}.$

B. $y' = \sin(\tan x).$

C. $y' = -\sin(\tan x).$

D. $y' = \sin(\tan x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x}.$

Câu 31. Tính đạo hàm của hàm số $y = 2\sin^2 x - \cos 2x + x$.

A. $y' = 4\sin 2x + 1.$

B. $y' = 4\cos x + 2\sin 2x + 1.$

C. $y' = 4\sin x - 2\sin 2x + 1.$

D. $y' = 4\sin x + \sin 2x + 1.$

Câu 32. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{4}$.

A. $y' = -2\sin(\pi - 4x) + \frac{\pi}{2}.$

B. $y' = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \frac{\pi}{2}.$

C. $y' = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \frac{\pi}{2}x.$

D. $y' = -2\sin(\pi - 4x).$

Câu 33. Hàm số $f(x) = a\sin x + b\cos x + 1$ có đạo hàm là $f'(x)$. Để $f'(0) = \frac{1}{2}$ và $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1$ thì giá trị của a và b bằng bao nhiêu?

A. $a = \frac{1}{2}; b = -\frac{1}{2}.$

B. $a = b = \frac{1}{2}.$

C. $a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

D. $a = \frac{\sqrt{2}}{2}; b = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$

Câu 34. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ tại điểm $x = \frac{\pi}{4}$.

A. $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$

B. $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2.$

C. $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$

D. $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2.$

Câu 35. Tính đạo hàm của hàm số $y = 2\cos x^2$.

A. $y' = -4x \sin x^2.$

B. $y' = -4x \cos x^2.$

C. $y' = -2x \sin x^2.$

D. $y' = -2 \sin x^2.$

Câu 36. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 2\tan x$ tại điểm $x = \frac{\pi}{4}$.

A. $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4.$

B. $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2.$

C. $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4.$

D. $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$

Câu 37. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{\tan x + \cot x}$ tại điểm $x = \frac{\pi}{4}$.

A. $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

B. $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}.$

C. $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}.$

D. $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$

Câu 38. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{2}{\cos(\pi x)}$ tại điểm $x = \frac{1}{3}$.

A. $f'\left(\frac{1}{3}\right) = 4\pi\sqrt{3}.$

B. $f'\left(\frac{1}{3}\right) = 2\pi\sqrt{3}.$

C. $f'\left(\frac{1}{3}\right) = 8.$

D. $f'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4\pi\sqrt{3}}{3}.$

Câu 39. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin(x^2 - 3x + 2)$.

A. $y' = (2x-3) \cdot \sin(x^2 - 3x + 2).$

B. $y' = (2x-3) \cdot \cos(x^2 - 3x + 2).$

C. $y' = -(2x-3) \cdot \cos(x^2 - 3x + 2).$

D. $y' = \cos(x^2 - 3x + 2).$

Câu 40. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right).$

A. $y' = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right).$

B. $y' = -3\sin\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right).$

C. $y' = 3\cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right).$

D. $y' = -3\cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right).$

ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	D	D	C	D	D	B	C	A	D	A	D	B	A	B	A	C	C	B	C
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
B	C	B	A	B	C	C	C	D	A	A	A	B	B	A	C	D	A	B	D

§4. VI PHÂN

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và có đạo hàm tại $x \in (a; b)$. Giả sử Δx là số gia của x sao cho $x + \Delta x \in (a; b)$

Ta gọi tích $f'(x)\Delta x$ (hay $y'\Delta x$) là vi phân của hàm số $y = f(x)$ tại x ứng với số gia Δx , Kí hiệu là $df(x)$ hay dy

Như vậy: $dy = df(x) = f'(x)dx$ (vì $\Delta x = dx$) hay $dy = y'dx$

2. Ứng dụng của vi phân vào phép tính gần đúng

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

Các dạng toán

Dạng 1. Tìm vi phân của hàm số $y = f(x)$

Phương pháp: 1. Tính đạo hàm $f'(x)$

2. Vi phân của hàm số $y = f(x)$ tại x là $dy = df(x) = f'(x)dx$

3. Vi phân của hàm số $y = f(x)$ tại x_0 là $dy = df(x_0) = f'(x_0)dx$

Dạng 2. Tính giá trị gần đúng của một biểu thức

Phương pháp: 1. Lập hàm số $y = f(x)$ và chọn $x_0, \Delta x$ một cách thích hợp

2. Tính $f'(x), f'(x_0)$ và $f(x_0)$

3. Giá trị gần đúng của biểu thức $P = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$

B. BÀI TẬP

Bài 4.1. Tìm vi phân của các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 5x + 1$

b) $y = \sin^3 x$

c) $y = \sin x - x \cos x$

d) $y = \frac{1}{x^3}$

HD & Giải

a) $y = x^3 - 5x + 1, y' = 3x^2 - 5. dy = y'dx = (x^3 - 5x + 1)dx = (3x^2 - 5)dx$

b) $y = \sin^3 x, y' = 3\sin^2 x \cdot \cos x. dy = y'dx = (3\sin^2 x \cdot \cos x)dx$

c) $y = \sin x - x \cos x, y' = x \sin x. dy = y'dx = (x \cdot \sin x)dx$

d) $y = \frac{1}{x^3}, y' = -\frac{3}{x^4}. dy = y'dx = -\frac{3}{x^4}dx$

Bài 4.2. Tìm vi phân của các hàm số sau:

a) $y = \frac{1}{x^2}$

b) $y = \frac{x+2}{x-1}$

c) $y = \sin^2 x$

d) $y = \frac{\tan \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

HD & Giải

a) $dy = -\frac{2}{x^3}dx$

b) $dy = -\frac{3}{(x-1)^2}dx$

c) $dy = (\sin 2x)dx$

d) $dy = \frac{2\sqrt{x} - \sin(2\sqrt{x})}{4x\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}}dx$

Bài 4.3. Tìm vi phân các hàm số sau:

a) $y = \frac{\sqrt{x}}{a+b}$ (a, b là các hằng số)

b) $y = (x^2 + 4x + 1)(x^2 - \sqrt{x})$

c) $y = \tan^2 x$

d) $y = \frac{\cos x}{1-x^2}$

HD & Giải

a) $dy = \frac{1}{2(a+b)\sqrt{x}} dx$

b) $dy = \left[(2x+4)(x^2-\sqrt{x}) + (x^2+4x+1)\left(2x-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \right] dx$

c) $dy = \frac{2 \tan x}{\cos^2 x} dx$

d) $dy = \frac{(x^2-1)\sin x + 2x \cos x}{(1-x^2)^2} dx$

Bài 4.4. Tìm vi phân của các hàm số sau:

a) $y = x^2 + \sin^2 x$

b) $y = \tan^3 x$

c) $y = \tan^2 3x - \cot^2 3x$

d) $y = \sqrt{\cos^2 2x + 1}$

HD & Giải

a) $dy = (2x + \sin 2x) dx$

b) $dy = \frac{3 \sin^2 x}{\cos^4 x} dx$ (hoặc $dy = 3 \tan^2 x (1 + \tan^2 x) dx$)

c) $dy = \frac{6(2 \cos^4 3x + 1 - 2 \cos^2 3x)}{\sin^3 3x \cos^3 3x} dx$

d) $dy = -\frac{\sin 4x}{\sqrt{\cos^2 2x + 1}} dx$

Bài 4.5. Tính giá trị gần đúng của $P = \sqrt{3,99}$

HD & Giải

Đặt $f(x) = \sqrt{x}$, Chọn $x_0 = 4, \Delta x = -0,01$ thì $3,99 = 4 - 0,01 = x_0 + \Delta x$

Ta có $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, f'(4) = \frac{1}{4}, f(4) = 2$

$$P = \sqrt{3,99} = f(4 - 0,01) \approx f(4) + f'(4) \cdot (-0,01) \approx 1,9975$$

Vậy $P = \sqrt{3,99} \approx 1,9975$

Cách khác:Đặt $f(x) = \sqrt{x}$, Chọn $x_0 = 3, \Delta x = 0,99$ thì $3,99 = 3 + 0,99 = x_0 + \Delta x$

Ta có $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, f'(3) = \frac{1}{2\sqrt{3}}, f(3) = \sqrt{3}$

$$P = \sqrt{3,99} = f(3 + 0,99) \approx f(3) + f'(3) \cdot (0,99) = 1,9975$$

Vậy $P = \sqrt{3,99} \approx 1,9975$

Bài 4.6. Tính giá trị gần đúng của $P = \sin 30^\circ 30'$ (lấy 4 chữ số thập phân trong kết quả)

HD & Giải

Đặt $f(x) = \sin x$, Chọn $x_0 = \frac{\pi}{6}, \Delta x = \frac{\pi}{360}$ thì $30^\circ 30' = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{360} = x_0 + \Delta x$

Ta có $f'(x) = \cos x, f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

$$P = \sin 30^\circ 30' = f\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{360}\right) \approx f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f'\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \frac{\pi}{360} \approx 0,5076$$

Vậy $P = \sin 30^\circ 30' = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{360}\right) \approx 0,5076$

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ**Bài 4.7.** Tìm vi phân các hàm số sau

a) $y = f(x) = \frac{1}{x^3}$

b) $y = f(x) = \frac{x+2}{x-1}$

c) $y = f(x) = \frac{x^3+1}{x^3-1}$

d) $y = f(x) = \frac{2x^2+3x+4}{x-1}$

e) $y = f(x) = \frac{\cos x}{1-x^2}$

f) $y = \frac{\tan \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

Bài 4.8. Tìm

a) $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$

b) $\frac{d(\tan x)}{d(\cot x)}$

c) $\frac{d(\cos^2 x)}{d(\cos 2x)}$

d) $\frac{d(x^4-2x^2+3)}{d(2x^2)}$

e) $\frac{dx}{d(\sqrt{1+\cos^2 3x})}$

f) $\frac{d(x^3+3x^2+2x-5)}{d(2x^3-3x^2+x)}$

Bài 4.9. Tìm các giá trị gần đúng của các số sau (làm tròn đến hàng phần nghìn)

a) $A = \sqrt{4,01}$

b) $B = \frac{1}{0,9995}$

c) $C = \sin 29^\circ$

d) $D = \tan 44^\circ 52'$

e) $E = \cos 61^\circ$

f) $F = \sqrt{120}$

Bài 4.10. Tìm các giá trị gần đúng của các số sau (làm tròn đến hàng phần nghìn)

a) $A = \cos 45^\circ 30'$

b) $B = \sqrt{0,996}$

c) $C = \sqrt{0,99998}$

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**Câu 1.** Tính vi phân của hàm số $y = \frac{x^2+x+1}{x-1}$.

A. $dy = -\frac{2x+1}{(x-1)^2} dx.$

B. $dy = \frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2} dx.$

C. $dy = -\frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2} dx.$

D. $dy = \frac{2x+1}{(x-1)^2} dx.$

Câu 2. Tính vi phân của hàm số $y = \frac{\sqrt{x}}{a+b}$ với a, b là hằng số thực dương.

A. $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}(a+b)} dx.$

B. $dy = \frac{2}{(a+b)\sqrt{x}} dx.$

C. $dy = \frac{2\sqrt{x}}{a+b} dx.$

D. $dy = \frac{1}{2(a+b)\sqrt{x}} dx.$

Câu 3. Tính vi phân của hàm số $y = \frac{4x+1}{\sqrt{x^2+2}}$.

A. $dy = \frac{8-x}{(x^2+2)^{\frac{1}{2}}} dx.$

B. $dy = \frac{8+x}{(x^2+2)^{\frac{1}{2}}} dx.$

C. $dy = \frac{8+x}{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}} dx.$

D. $dy = \frac{8-x}{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}} dx.$

Câu 4. Tính vi phân của hàm số $y = \cos^2 \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right)$.

A. $dy = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2} \cdot \cos \left[2 \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right) \right] dx.$

B. $dy = -\frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2} \cdot \sin \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right) dx.$

$$\text{C. } dy = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2} \cdot \sin \left[2 \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right) \right] dx.$$

$$\text{D. } dy = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2} \cdot \sin \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right) dx.$$

Câu 5. Tính vi phân của hàm số $y = (x-2)\sqrt{x^2+3}$.

$$\text{A. } dy = \frac{x^2-2x+3}{\sqrt{x^2+3}} dx.$$

$$\text{B. } dy = \frac{2x^2-2x+3}{\sqrt{x^2+3}} dx.$$

$$\text{C. } dy = \frac{2x^2-x+3}{\sqrt{x^2+3}} dx.$$

$$\text{D. } dy = \frac{x^2-x+3}{\sqrt{x^2+3}} dx.$$

Câu 6. Tính vi phân của hàm số $y = \sqrt{x+\sqrt{x}}$.

$$\text{A. } dy = \frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}} dx.$$

$$\text{B. } dy = \frac{\sqrt{x}+2}{4\sqrt{x^2+x}} dx.$$

$$\text{C. } dy = \frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x+\sqrt{x}}} dx.$$

$$\text{D. } dy = \frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}} dx.$$

Câu 7. Tính vi phân của hàm số $y = \cot(2017x)$.

$$\text{A. } dy = \frac{2017}{\sin^2(2017x)} dx.$$

$$\text{B. } dy = -\frac{2017}{\cos^2(2017x)} dx.$$

$$\text{C. } dy = -\frac{2017}{\sin^2(2017x)} dx.$$

$$\text{D. } dy = -2017 \sin(2017x) dx.$$

Câu 8. Tính vi phân của hàm số $y = \frac{2x+3}{2x-1}$.

$$\text{A. } dy = -\frac{7}{(2x-1)^2} dx.$$

$$\text{B. } dy = \frac{4}{(2x-1)^2} dx.$$

$$\text{C. } dy = -\frac{4}{(2x-1)^2} dx.$$

$$\text{D. } dy = -\frac{8}{(2x-1)^2} dx.$$

Câu 9. Tính vi phân của hàm số $y = x^3 - 9x^2 + 12x - 5$.

$$\text{A. } dy = -(3x^2 - 18x + 12) dx.$$

$$\text{B. } dy = (-3x^2 + 18x - 12) dx.$$

$$\text{C. } dy = (3x^2 - 18x + 12) dx.$$

$$\text{D. } dy = (-3x^2 - 18x + 12) dx.$$

Câu 10. Tính vi phân của hàm số $f(x) = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}$ tại điểm $x = 4$ ứng với $\Delta x = 0,002$.

$$\text{A. } df(4) = \frac{1}{8}.$$

$$\text{B. } df(4) = \frac{1}{8000}.$$

$$\text{C. } df(4) = \frac{1}{400}.$$

$$\text{D. } df(4) = \frac{1}{1600}.$$

Câu 11. Tính vi phân của hàm số $y = (x-1)^2$.

$$\text{A. } dy = (x-1) dx.$$

$$\text{B. } dy = (x-1)^2 dx.$$

$$\text{C. } dy = 2(x-1) dx.$$

$$\text{D. } dy = 2(x-1).$$

Câu 12. Tính vi phân của hàm số $y = \frac{x+3}{1-2x}$ tại điểm $x = -3$.

$$\text{A. } dy = -\frac{1}{7} dx.$$

$$\text{B. } dy = -7 dx.$$

$$\text{C. } dy = \frac{1}{7} dx.$$

$$\text{D. } dy = 7 dx.$$

Câu 13. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{khi } x \geq 0 \\ 2x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

$$\text{A. } f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - x) = 0.$$

$$\text{B. } f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2x = 0.$$

$$\text{C. } df(0) = -dx.$$

$$\text{D. } f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1) = -1.$$

Câu 14. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{khi } x \geq 0 \\ x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây sai ?

A. Hàm số không có vi phân tại $x = 0$.

B. $f'(0^-) = 1$.

C. $df(0) = dx$.

D. $f'(0^+) = 1$.

Câu 15. Tính vi phân của hàm số $f(x) = 3x^2 - x$ tại điểm $x = 2$ ứng với $\Delta x = 0,1$.

A. $df(2) = 1,1$.

B. $df(2) = -0,4$.

C. $df(2) = -0,07$.

D. $df(2) = 10$.

Câu 16. Tính vi phân của hàm số $y = \frac{\tan \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

A. $dy = \frac{2\sqrt{x} - \sin(2\sqrt{x})}{4x\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}} dx$.

B. $dy = -\frac{2\sqrt{x} - \sin(2\sqrt{x})}{4x\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}} dx$.

C. $dy = \frac{2\sqrt{x}}{4x\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}} dx$.

D. $dy = \frac{\sin(2\sqrt{x})}{4x\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}} dx$.

Câu 17. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{1 + \cos^2 2x}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $df(x) = \frac{-\sin 2x}{\sqrt{1 + \cos^2 2x}} dx$.

B. $df(x) = \frac{-\sin 4x}{2\sqrt{1 + \cos^2 2x}} dx$.

C. $df(x) = \frac{-\sin 4x}{\sqrt{1 + \cos^2 2x}} dx$.

D. $df(x) = \frac{\cos 2x}{\sqrt{1 + \cos^2 2x}} dx$.

Câu 18. Tính vi phân của hàm số $f(x) = \sin 2x$ tại điểm $x = \frac{\pi}{3}$ ứng với $\Delta x = 0,001$.

A. $df\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0,001$.

B. $df\left(\frac{\pi}{3}\right) = -0,001$.

C. $df\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1$.

D. $df\left(\frac{\pi}{3}\right) = -0,1$.

Câu 19. Tính vi phân của hàm số $y = \sqrt{\sin x + 2x}$.

A. $dy = \frac{\cos x + 1}{\sqrt{\sin x + 2x}} dx$.

B. $dy = \frac{\cos x - 1}{\sqrt{\sin x + 2x}} dx$.

C. $dy = \frac{2 - \cos x}{2\sqrt{\sin x + 2x}} dx$.

D. $dy = \frac{\cos x + 2}{2\sqrt{\sin x + 2x}} dx$.

Câu 20. Tính vi phân của hàm số $y = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$.

A. $dy = -\frac{4x}{(1 + x^2)^2} dx$.

B. $dy = -\frac{4}{(1 + x^2)^2} dx$.

C. $dy = -\frac{4}{1 + x^2} dx$.

D. $dy = -\frac{dx}{(1 + x^2)^2}$.

ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	D	D	C	B	A	C	D	C	B	C	C	D	A	A	A	B	B	D	A

§5. ĐẠO HÀM CẤP HAI

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Định nghĩa

Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Nếu $f'(x)$ cũng có đạo hàm thì ta gọi đạo hàm của nó là đạo hàm cấp hai của $f(x)$ và kí hiệu $f''(x)$: Như vậy $(f'(x))' = f''(x)$

Ta có

$$(f(x))' = f'(x)$$

$$(f'(x))' = f''(x)$$

Tương tự

$$(f''(x))' = f'''(x) \equiv f^{(3)}(x)$$

.....

$$(f^{(n-1)}(x))' = f^{(n)}(x), n \in \mathbb{N}^*$$

$f^{(n)}(x)$ là đạo hàm cấp n của hàm số $f(x)$

2. Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai

Xét một chất điểm chuyển động có phương trình $s = f(t)$.

Vận tốc tại thời điểm t_0 của chất điểm đó là $v(t_0) = s'(t_0) = f'(t_0)$

Gia tốc tức thời tại điểm t_0 của một chất điểm chuyển động với phương trình $s = f(t)$ là:

$$a(t_0) = v'(t_0) = s''(t_0)$$

Các dạng toán

Dạng 1. Tìm đạo hàm cấp cao của hàm số $y = f(x)$

Phương pháp: 1. Tính đạo hàm cấp 1: $f'(x)$

2. Tính đạo hàm cấp 2: $f''(x) = (f'(x))'$

3. Tính đạo hàm đến các cấp được chỉ ra.

Dạng 2. Chứng minh một hệ thức có đạo hàm

Phương pháp:

1. Tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ đến cấp đã chỉ ra

2. Thay các kết quả đó vào vế phải (vế trái) của hệ thức và biến đổi bằng vế trái (vế phải).

Dạng 3. Tính gia tốc tức thời của một chuyển động có phương trình $s = s(t)$

Phương pháp:

1. Vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t là $v(t) = s'(t)$

2. Gia tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t là $a(t) = v'(t)$

B. BÀI TẬP

Bài 5.1. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = x\sqrt{1+x^2}$

b) $y = \tan x$

c) $y = \frac{1}{1-x}$

d) $y = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

e) $y = \cos^2 x$

f) $y = \sin 5x \cos 2x$

HD & Giải

$$\text{a) } y' = \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}; y'' = \frac{4x\sqrt{1+x^2} - \frac{x(1-2x^2)}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{x(3+2x^2)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

$$b) y' = \frac{1}{\cos^2 x}; y'' = -\frac{(\cos^2 x)'}{\cos^4 x} = \frac{2 \cos x \sin x}{\cos^4 x} = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}; \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right)$$

$$c) y' = \frac{1}{(1-x)^2}; y'' = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$d) y'' = \frac{3}{4\sqrt{(1-x)^5}}$$

$$e) y'' = -2 \cos 2x$$

$$f) y'' = -\frac{1}{2}(49 \sin 7x + 9 \sin 3x)$$

Bài 5.2. Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

$$a) y = \frac{2x+1}{x^2+x-2}$$

$$b) y = \frac{x}{x^2-1}$$

$$c) y = \frac{x+1}{x-2}$$

$$d) y = x\sqrt{1+x^2}$$

$$e) y = \frac{x^2}{1-x}$$

$$f) y = (1-x^2)\cos x$$

HD & Giải

$$a) y = \frac{2x+1}{x^2+x-2} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2} \Rightarrow y'' = 2 \left[\frac{1}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x+2)^3} \right]$$

$$b) y = \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} \right] \Rightarrow y' = \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{-1}{(x-1)^2} \right] \Rightarrow y'' = \left[\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x-1)^3} \right]$$

$$c) y = \frac{x+1}{x-2} = 1 + \frac{3}{x-2} \Rightarrow y' = \frac{-3}{(x-2)^2} \Rightarrow y'' = \frac{6}{(x-2)^3} \quad d) y = x\sqrt{1+x^2} \Rightarrow y'' = \frac{2x^3+3x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

$$e) y = \frac{x^2}{1-x} = -x-1 + \frac{1}{1-x} \Rightarrow y'' = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$f) y = (1-x^2)\cos x \Rightarrow y'' = (x^2-3)\cos x + 4x \sin x$$

Bài 5.3.

$$a) \text{ Cho } f(x) = (x+10)^6. \text{ Tính } f''(2)$$

$$b) \text{ Cho } f(x) = \sin 3x. \text{ Tính } f''\left(-\frac{\pi}{2}\right); f''(0); f''\left(\frac{\pi}{18}\right)$$

$$c) \text{ Nếu } y = \sqrt{2x-x^2} \text{ thì } y^3 \cdot y'' + 1 = 0$$

HD & Giải

$$a) f(x) = (x+10)^6 \Rightarrow f'(x) = 6(x+10)^5; f''(x) = 30(x+10)^4$$

$$\text{Do đó } f''(2) = 622080$$

$$b) f(x) = \sin 3x \Rightarrow f'(x) = 3 \cos 3x; f''(x) = -9 \sin 3x$$

$$\text{Do đó } f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -9; f''(0) = 0; f''\left(\frac{\pi}{18}\right) = -\frac{9}{2}$$

$$c) y = \sqrt{2x-x^2} \Rightarrow y' = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}; y'' = -\frac{1}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}$$

$$\text{Do đó } y^3 \cdot y'' + 1 = \sqrt{(2x-x^2)^3} \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{(2x-x^2)^3}} \right) + 1 = 0 \text{ (đpcm)}$$

Bài 5.4. Xét chuyển động của một chất điểm có phương trình $s(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ (A, ω, φ là những hằng số). Tìm gia tốc tức thời tại thời điểm t của chuyển động.

HD & Giải

Gọi $v(t)$ là vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t , ta có:

$$v(t) = s'(t) = (A \sin(\omega t + \varphi))' = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$$

Vậy gia tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t là: $a(t) = v'(t) = s''(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$

Bài 5.5. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 - 9t$, trong đó t tính bằng giây và S tính bằng mét.

- Tính vận tốc của chuyển động khi $t = 2s$
- Tính gia tốc của chuyển động khi $t = 3s$
- Tính gia tốc tại thời điểm vận tốc triệt tiêu
- Tính vận tốc tại thời điểm gia tốc triệt tiêu

HD & Giải

Gọi $v(t)$ là vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t

$$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t - 9; a(t) = v'(t) = 6t - 6$$

a) Tại $t = 2s$, $v(2) = -9 \text{ m/s}$

b) Tại $t = 3s$, $a(3) = 12 \text{ m/s}^2$

c) Tại $v = 0$ hay $3t^2 - 6t - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 (\text{loại}) \\ t = 3 \end{cases} \Rightarrow a(3) = 12 \text{ m/s}^2$

d) Tại thời điểm gia tốc triệt tiêu: $a(t) = 6t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow v(1) = -12 \text{ m/s}$

Bài 5.6. Cho một chất điểm chuyển động có phương trình là $s(t) = 2t^3 - 2t^2 + t - 1$, (trong đó t tính bằng s và S tính bằng m).

- Tính gia tốc tại thời điểm $t = 4s$
- Tính vận tốc tại thời điểm mà gia tốc bằng 0 (m/s^2)

HD & Giải

Ta có $v(t) = s'(t) = 6t^2 - 4t + 1; a(t) = v'(t) = 12t - 4$

a) $a(4) = v'(4) = 12 \cdot 4 - 4 = 44 \text{ m/s}^2$

b) $a(t) = 0 \Leftrightarrow 12t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3} \Rightarrow v\left(\frac{1}{3}\right) = 6 \cdot \frac{1}{9} - \frac{4}{3} + 1 = \frac{1}{3} (s)$

Bài 5.7. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho tại điểm có hoành độ x_0 , biết $f''(x_0) = -1$

HD & Giải

Hàm số $y = f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$. TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $f'(x) = x^3 - 4x; f''(x) = 3x^2 - 4$. Theo giả thiết: $f''(x_0) = -1 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 4 = -1 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1$

Với $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = -\frac{7}{4}; f'(1) = -3$, ta được phương trình tiếp tuyến $y = -3x + \frac{5}{4}$

Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -\frac{7}{4}; f'(-1) = 3$, ta được phương trình tiếp tuyến $y = 3x + \frac{5}{4}$

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 5.8. Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = \frac{2x+1}{x^2+x-2}$

b) $y = \frac{5x^2-3x-20}{x^2-2x-3}$

c) $y = x\sqrt{1+x^2}$

d) $y = 3x^3 + 4x^2 - 5x + 1$

e) $y = 4x^4 + 3x^2 - 7$

f) $y = \cos^2 x$

Bài 5.9. Cho hàm số $y = f(x) = 2x^2 + 16\cos x - \cos 2x$

- a) Tìm $f'(x)$ và $f''(x)$. Tính $f'(0)$ và $f''(\pi)$

b) Giải phương trình $f''(x) = 0$

Bài 5.10. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

a) Tìm $f'(x)$ và $f''(x)$. Tính $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ và $f''\left(-\frac{1}{2}\right)$

b) Chứng minh $(1-x^2)f''(x) = 3xf'(x) + f(x)$

Bài 5.11. Chứng minh rằng mỗi hàm số sau đây thỏa mãn hệ thức tương ứng đã chỉ ra

a) $y = \left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)^3$; $(1+x^2)y'' + xy' - 9y = 0$

b) $y = \frac{x-3}{x+4}$; $2(y')^2 = (y-1)y''$

c) $y = \sqrt{2x-x^2}$; $y^3 \cdot y'' + 1 = 0$

d) $y = \sin 2x$; $y^{(2n)} = (-1)^n 2^{2n} y$

Bài 5.12. Một chất điểm chuyển động thẳng có phương trình $s(t) = 200 + 14t - t^2$, trong đó t được tính bằng giây (s) và s được tính bằng mét (m).

a) Tại thời điểm nào chất điểm có vận tốc bằng không?

b) Tìm vận tốc và gia tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 3s$.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hàm số $y = x + \frac{5}{x}$ có đạo hàm là y' . Rút gọn biểu thức $M = xy' + y$.

A. $M = x$.

B. $M = \frac{10}{x}$.

C. $M = 2x$.

D. $M = -2x$.

Câu 2. Cho hàm số $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ có đạo hàm là y' và y'' và biểu thức $M = y'' + \omega^2 y$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $M = 0$.

B. $M = -1$.

C. $M = \cos^2(\omega x + 4)$.

D. $M(2; 5), M(0; -1)$

Câu 3. Cho hàm số $y = (x^2 - 1)^2$. Tính giá trị biểu thức $M = y^{(4)} + 2xy''' - 4y''$.

A. $M = 100$.

B. $M = 0$.

C. $M = 20$.

D. $M = 40$.

Câu 4. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = t^3 - 3t^2 - 9t$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động tại thời điểm vận tốc bị triệt tiêu là:

A. 9 m/s^2 .

B. -12 m/s^2 .

C. -9 m/s^2 .

D. 12 m/s^2 .

Câu 5. Cho hàm số $y = \frac{2}{1+x}$. Tính giá trị của $y^{(3)}(1)$.

A. $y^{(3)}(1) = -\frac{4}{3}$.

B. $y^{(3)}(1) = \frac{4}{3}$.

C. $y^{(3)}(1) = -\frac{3}{4}$.

D. $y^{(3)}(1) = \frac{3}{4}$.

Câu 6. Cho hàm số $y = \sin^3 x$. Rút gọn biểu thức $M = y'' + 9y$.

A. $M = 6 \sin x$.

B. $M = 6 \cos x$.

C. $M = -6 \sin x$.

D. $M = \sin x$.

Câu 7. Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x+4}$ và biểu thức $M = 2(y')^2 + (1-y)y''$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $M = 0$.

B. $M = 1$.

C. $M = \frac{1}{x+4}$.

D. $M = \frac{2x}{(x+4)^2}$.

Câu 8. Cho hàm số $y = x \cdot \tan x$. Rút gọn biểu thức $M = x^2 y'' + 2(x^2 + y^2)(1-y)$.

A. $M = 0$.

B. $M = 1$.

C. $M = x^2 - \tan^2 x$.

D. $M = \frac{4x^2}{\cos^2 x}$.

Câu 9. Cho hàm số $y = \cos^2 x$. Tính giá trị của $y^{(3)}\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

A. $y^{(3)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2$.

B. $y^{(3)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$.

C. $y^{(3)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}$.

D. $y^{(3)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2\sqrt{3}$.

Câu 10. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Gia tốc của chuyển động khi $t = 4$ s là $a = 18 \text{ m/s}^2$.

B. Gia tốc của chuyển động khi $t = 4$ s là $a = 9 \text{ m/s}^2$.

C. Vận tốc của chuyển động khi $t = 3$ s là $v = 12 \text{ m/s}$.

D. Vận tốc của chuyển động khi $t = 3$ s là $v = 24 \text{ m/s}$.

Câu 11. Tính đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \sin 5x \cos 2x$.

A. $y'' = -49 \sin 7x - 9 \sin 3x$.

B. $y'' = \frac{49}{2} \sin 7x + \frac{9}{2} \sin 3x$.

C. $y'' = -\frac{49}{2} \sin 7x - \frac{9}{2} \sin 3x$.

D. $y'' = 49 \sin 7x + 9 \sin 3x$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x) = 2x^2 + 16 \cos x - \cos 2x$. Tính giá trị của $f''(\pi)$.

A. $f''(\pi) = -8$.

B. $f''(\pi) = 24$.

C. $f''(\pi) = 4$.

D. $f''(\pi) = -16$.

Câu 13. Cho hàm số $y = \cos 2x$ có đạo hàm là y' và y'' . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $4y'' - y = 0$.

B. $y'' + 4y = 0$.

C. $y + 2y' = 0$.

D. $y + y'' = 0$.

Câu 14. Cho hai hàm số $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$ và $g(x) = 3 + 10x - 7x^2$. Nghiệm của phương trình $f''(x) + g'(x) = 0$ là:

A. $x = 1; x = -\frac{1}{6}$.

B. $x = -1; x = \frac{1}{6}$.

C. $x = -1; x = -\frac{1}{6}$.

D. $x = 1; x = \frac{1}{6}$.

Câu 15. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = t^3 + 4t^2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động tại thời điểm mà vận tốc của chuyển động bằng 11 m/s là:

A. 18 m/s^2 .

B. 12 m/s^2 .

C. 14 m/s^2 .

D. 16 m/s^2 .

Câu 16. Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x+4}$ có đạo hàm là y' và y'' . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $2(y')^2 = (y+1)y''$.

B. $2(y')^2 = (y-1)y''$.

C. $2(y')^2 = -(y-1)y''$.

D. $2(y')^2 = (-y-1)y''$.

Câu 17. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 - 9t + 2017$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Tính gia tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 3$ giây.

A. 12 m/s^2 .

B. 6 m/s^2 .

C. 15 m/s^2 .

D. 9 m/s^2 .

Câu 18. Cho hàm số $y = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2$. Giải bất phương trình $y'' < 0$.

A. $x \in (-1; 1)$.

B. $x \in (-2; 2)$.

C. $x \in (1; +\infty)$.

D. $x \in (-\infty; 1) \setminus \{0\}$.

Câu 19. Cho hàm số $y = \cot \frac{x}{2}$ có đạo hàm là y' . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $3y^2 + (y')^2 + 1 = 0$.

B. $y^2 - y' + 2 = 0$.

C. $y^2 + 2y' + 1 = 0$.

D. $3y^2 - y' + 1 = 0$.

Câu 20. Cho hàm số $y = \sin 2x - \cos 2x$. Giải phương trình $y'' = 0$.

A. $x = \frac{\pi}{8} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}..$

Câu 21. Cho hàm số $y = x \sin x$ và biểu thức $M = xy - 2(y' - \sin x) + xy''$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $M = \sin x$.

B. $M = 1$.

C. $M = 0$.

D. $M = 2$.

Câu 22. Cho hàm số $y = x \cdot \cos x$. Tính giá trị biểu thức $M = xy + xy'' - 2(y' - \cos x)$.

A. $M = -1$.

B. $M = 2$.

C. $M = 1$.

D. $M = 0$.

Câu 23. Cho hàm số $y = \cos^2 2x$ và biểu thức $M = y''' + 16y' + y'' + 16y - 8$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $M = \cos 4x$.

B. $M = 0$.

C. $M = 8$.

D. $M = -8$.

Câu 24. Cho hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$. Tính giá trị biểu thức $M = y^3 \cdot y'' + 1$.

A. $M = 2$.

B. $M = 1$.

C. $M = -1$.

D. $M = 0$.

Câu 25. Cho hàm số $f(x) = (x+10)^6$. Tính giá trị của $f''(2)$.

A. $f''(2) = 622080$.

B. $f''(2) = 1492992$.

C. $f''(2) = 124416$.

D. $f''(2) = 103680$.

Câu 26. Cho hàm số $y = \tan^2 x$ có đạo hàm là y' và y'' . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $y'' - 2(1 + 3y^2) = 0$.

B. $y'' - 3(1 + y^2) = 0$.

C. $y'' - 2(1 + y^2)(1 + 3y^2) = 0$.

D. $y'' + 5(1 + y^2)(1 + 3y^2) = 0$.

Câu 27. Cho hàm số $f(x) = \sin^3 x + x^2$. Tính giá trị của $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2$.

B. $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 5$.

C. $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

D. $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Câu 28. Cho hàm số $y = \frac{3x-2}{1-x}$. Giải bất phương trình $y'' > 0$.

A. $x < 1$.

B. $x \neq 1$.

C. Vô nghiệm.

D. $x > 1$.

Câu 29. Cho hàm số $y = -3x^3 + 3x^2 - x + 5$. Tính giá trị của $y^{(3)}(2017)$.

A. $y^{(3)}(2017) = -18$.

B. $y^{(3)}(2017) = -2017$.

C. $y^{(3)}(2017) = 2017$.

D. $y^{(3)}(2017) = 0$.

Câu 30. Cho hàm số $y = \frac{1}{(x+1)^3}$. Giải bất phương trình $y'' < 0$.

A. $x < -1$.

B. $x > -1$.

C. $x \neq 1$.

D. Vô nghiệm.

Câu 31. Cho hàm số $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$. Giải phương trình $f'(x) = f''(x)$.

A. $x = 5; x = 6$.

B. $x = -3$.

C. $x = 3; x = 2$.

D. $x = 4$.

Câu 32. Cho hàm số $f(x) = x \sin x$. Biểu thức $P = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right) + f''\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'''\left(\frac{\pi}{2}\right)$ có giá trị bằng:

A. $P = 2$.

B. $P = -2$.

C. $P = 4$.

D. $P = -4$.

Câu 33. Cho hàm số $y = 5 - \frac{3}{x}$. Tính giá trị biểu thức $M = xy'' + 2y'$.

A. $M = 10$.

B. $M = 1$.

C. $M = 4$.

D. $M = 0$.

Câu 34. Cho hàm số $y = \sin 2x$ có đạo hàm là y' và y'' . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $y^2 + (y')^2 = 4$.

B. $4y + y'' = 0$.

C. $y = y' \cdot \tan 2x$.

D. $4y - y'' = 0$.

Câu 35. Cho hàm số $y = \frac{3x-4}{x+2}$. Tìm x sao cho $y'' = 20$.

A. $x = -1$.

B. $x = 3$.

C. $x = -3$.

D. $x = 1$.

Câu 36. Tính đạo hàm cấp 3 của hàm số $f(x) = (2x+5)^5$.

A. $f^{(3)}(x) = 80(2x+5)^3$.

B. $f^{(3)}(x) = 480(2x+5)^2$.

C. $f^{(3)}(x) = -480(2x+5)^2$.

D. $f^{(3)}(x) = -80(2x+5)^3$.

Câu 37. Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$. Tính giá trị biểu thức $M = (y')^2 - 2y \cdot y''$.

A. $M = 2$.

B. $M = -1$.

C. $M = 1$.

D. $M = 0$.

Câu 38. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$ có đạo hàm là $f'(x)$ và $f''(x)$. Tính giá trị biểu thức $M = f'(\sqrt{2}) + \frac{2}{3}f''(\sqrt{2})$.

A. $M = 6\sqrt{2}$.

B. $M = 7$.

C. $M = \frac{13}{3}$.

D. $M = 8\sqrt{2}$.

Câu 39. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 6$. Giải bất phương trình $f''(x) \leq f'(x) - 1$. Nghiệm của bất phương trình là:

A. $x \in (-\infty; 1) \cup (1; 3) \cup (3; +\infty)$.

B. $x \in [1; 3]$.

C. $x \in \mathbb{R}$.

D. $x \in (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$.

Câu 40. Cho hàm số $y = \frac{1}{x^2 - 1}$. Tính giá trị của $y^{(3)}(2)$.

A. $y^{(3)}(2) = \frac{-80}{27}$.

B. $y^{(3)}(2) = \frac{40}{27}$.

C. $y^{(3)}(2) = \frac{-40}{27}$.

D. $y^{(3)}(2) = \frac{80}{27}$.

ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	A	D	D	C	A	A	D	C	A	C	B	B	D	C	B	A	D	C	D
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
C	D	B	D	A	C	B	A	A	A	B	B	D	B	C	B	B	C	D	A

ÔN TẬP CHƯƠNG V. ĐẠO HÀM

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

II. Bảng đạo hàm

STT	HÀM SỐ SƠ CẤP	HÀM SỐ HỢP	QUY TẮC
1	$(C)' = 0$	$(m)' = 0, m$ là tham số	
2	$(x)' = 1, (kx)' = kx' = k$	$(ku)' = ku'$	$(u+v)' = u' + v'$
3	$(x^n)' = nx^{n-1}, n \in \mathbb{N}, n > 1$	$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$	$(u-v)' = u' - v'$
4	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}, u > 0$	$(uv)' = u'v + uv'$
5	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, x \neq 0$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}, u \neq 0$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, v \neq 0$
6	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u' \cos u$	$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}, v \neq 0$
7	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u' \sin u$	$(ax+b)' = a$
8	$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u} = (1 + \tan^2 u)u'$ $u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ $x \neq -\frac{d}{c}$
9	$(\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$ $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$(\cot u)' = \frac{-u'}{\sin^2 u} = -(1 + \cot^2 u)u'$ $u \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$	

II. Ứng dụng của đạo hàm

1. Phương trình tiếp tuyến

Gọi Δ là tiếp tuyến của đường cong $(C): y = f(x)$ tại tiếp điểm $M(x_0; y_0)$. $\Delta: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ (1), x_0 gọi là hoành độ tiếp điểm.

$\hookrightarrow M(x_0; y_0)$ gọi là tiếp điểm

$\hookrightarrow k = f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến $\hookrightarrow y_0 = f(x_0)$ gọi là tung độ tiếp điểm.

Lưu ý: Trong phương trình tiếp tuyến (1), có ba yếu tố $x_0, y_0, f'(x_0)$. Để viết được phương trình (1), ta phải tìm hai yếu tố còn lại khi cho biết một yếu tố.

Chú ý: Cho đường thẳng $\Delta: y = kx + b$ và $\Delta': y = k'x + m$

$$\textcircled{1} \Delta // \Delta' \Rightarrow k = k'$$

$$\textcircled{2} \Delta \perp \Delta' \Rightarrow k \cdot k' = -1$$

$$\textcircled{3} \text{ Cho đường thẳng } \Delta: ax + by + c = 0 \text{ hay } \Delta: y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} = kx + m.$$

Hệ số góc của Δ là $k = -\frac{a}{b} = \tan \alpha$

2. Điều kiện tiếp xúc

Cho $(C): y = f(x), d: y = g(x)$.

(C) tiếp xúc với d khi và chỉ khi hệ phương trình $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$ có nghiệm

3. Vi Phân. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và có đạo hàm tại $x \in (a; b)$. Vi phân của hàm số kí hiệu là $df(x)$ hay dy . Như vậy: $dy = df(x) = f'(x)dx$ hay $dy = y'dx$

4. Đạo hàm cấp 2. Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Nếu $f'(x)$ cũng có đạo hàm thì ta gọi đạo

hàm của nó là đạo hàm cấp hai của $f(x)$ và kí hiệu $f''(x)$: Như vậy $(f'(x))' = f''(x)$

5. Ứng dụng cơ học của đạo hàm.

a. Một chuyển động có phương trình $s = s(t)$.

• Vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0 là $v(t_0) = s'(t_0)$

• Gia tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0 là $a(t_0) = v'(t_0) = s''(t_0)$

b. Điện lượng Q truyền trong dây dẫn là một số của thời gian t : $Q = Q(t)$

• Cường độ tức thời của dòng điện tại thời điểm t_0 là $I(t_0) = Q'(t_0)$

6. Giải phương trình, bất phương trình chứa đạo hàm, chứng minh đẳng thức đạo hàm.

Phương pháp: Tìm điều kiện đề bài, tính các đạo hàm theo yêu cầu bài toán và thực hiện các yêu cầu bài toán cần làm.

B. BÀI TẬP

Bài 1. Tìm đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = \frac{ax^3 + bx^2 + c}{(a+b)x}$ (a, b, c là các hằng số)

b) $y = \left(x^3 - \frac{1}{x^3} + 3\right)^4$

c) $y = x^3 \cos^2 x$

d) $y = \sin \sqrt{4+x^2}$

e) $y = \sqrt{1 + \tan\left(x + \frac{1}{x}\right)}$

f) $y = \frac{\cos \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$

HD & Giải

a) $y' = \left(\frac{a}{a+b}x^2 + \frac{b}{a+b}x + \frac{c}{(a+b)x}\right)' = \frac{2ax}{a+b} + \frac{b}{a+b} - \frac{c}{(a+b)x^2} = \frac{2ax^3 + bx^2 - c}{(a+b)x^2}$

b) $y' = 4\left(x^3 - \frac{1}{x^3} + 3\right)^3 \cdot \left(3x^2 + \frac{3}{x^4}\right) = 12\left(x^3 - \frac{1}{x^3} + 3\right)^3 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x^4}\right)$

c) $y' = (x^3 \cos^2 x)' = x^2(3 \cos^2 x - x \sin 2x)$

d) $y' = \left(\sin \sqrt{4+x^2}\right)' = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} \cos \sqrt{4+x^2}$

e) $y' = \left(\sqrt{1 + \tan\left(x + \frac{1}{x}\right)}\right)' = \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{2 \cos^2\left(x + \frac{1}{x}\right) \sqrt{1 + \tan\left(x + \frac{1}{x}\right)}}$
 $= \frac{x^2 - 1}{2x^2 \cos^2\left(x + \frac{1}{x}\right) \sqrt{1 + \tan\left(x + \frac{1}{x}\right)}}$

f) $y' = \left(\frac{\cos \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = -\frac{x(\sqrt{x^2+1} \sin \sqrt{x^2+1} + \cos \sqrt{x^2+1})}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$

Bài 2. Tính đạo hàm các hàm số sau:

a) $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - 5$

b) $y = \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3} - \frac{6}{7x^4}$

c) $y = \frac{3x^2 - 6x + 7}{4x}$

$$d) y = \left(\frac{2}{x} + 3x \right) (\sqrt{x} - 1)$$

$$e) y = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$$

$$f) y = \frac{-x^2 + 7x + 5}{x^2 - 3x}$$

HD Giải

$$a) y' = x^2 - x + 1$$

$$b) y' = -\frac{2}{x^2} + \frac{8}{x^3} - \frac{15}{x^4} + \frac{24}{7x^5}$$

$$c) y' = \frac{3x^2 - 7}{4x^2}$$

$$d) y' = \frac{9x^2\sqrt{x} - 6x^2 - 2\sqrt{x} + 4}{2x^2}$$

$$e) y' = \frac{1}{\sqrt{x}(1 - \sqrt{x})^2}$$

$$f) y' = \frac{-4x^2 - 10x + 15}{(x^2 - 3x)^2}$$

Bài 3. Cho hàm số $y = f(x) = x^2 - 2x + 3$ (C)a) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có tung độ $y_0 = 3$

HD Giải

a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $f'(x) = 2x - 2$ nên $f(-1) = 4$ và $f'(-1) = 1$
 phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y - 4 = x + 1 \Leftrightarrow y = x + 5$

b) Ta có $y_0 = 3$, nên giải phương trình $x_0^2 - 2x_0 + 3 = 3 \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 2 \end{cases}$

Và ta lại có $f'(x) = 2x - 2$

Với $x_0 = 0$, phương trình tiếp tuyến là: $y = -2x + 3$

Với $x_0 = 2$, phương trình tiếp tuyến là: $y = 10(x - 2) + 3 = 10x - 17$

Bài 4. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ có đồ thị (C). Viết phương trình của đường thẳng d song song với đường thẳng $y = \frac{x-2}{2}$ và tiếp xúc với (C).

HD Giải

Đường thẳng d song song với đường thẳng $y = \frac{x-2}{2}$ nên có hệ số góc là $\frac{1}{2}$

Mặt khác, ta có $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$ nên $f'(x_0) = \frac{2}{(x_0+1)^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_0+1)^2 = 4 \\ x_0 \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = -3 \end{cases}$

Có hai tiếp tuyến

$$\Delta_1 : y - f(1) = \frac{1}{2}(x - 1) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}(x - 1)$$

$$\Delta_2 : y - f(-3) = \frac{1}{2}(x + 3) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

Bài 5. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho, biết;

a) Hoành độ tiếp điểm $x_0 = 0$

b) Tiếp tuyến đi qua điểm A(0; 2)

HD Giải

Ta có $f(x) = \frac{2x-1}{x+2} \Rightarrow f'(x) = \frac{5}{(x+2)^2}; (x \neq -2)$

a) Với $x_0 = 0$ thì $f(x_0) = f(0) = -\frac{1}{2}$ và $f'(0) = \frac{5}{4}$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = \frac{5}{4}x - \frac{1}{2}$

b) Phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm A(0; 2) với hệ số bằng k là:
 $y = g(x) = kx + 2$

Để (d) là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+2}$ thì ta phải tìm k sao cho:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x-1}{x+2} = kx+2 & (1) \\ \frac{5}{(x+2)^2} = k & (2) \end{cases}$$

Thay k từ (2) vào (1), suy ra được $x = -1$ và $k = 5$.

Vậy phương trình tiếp tuyến phải tìm là: $y = 5x + 2$

Bài 6. Cho hàm số $y = mx^3 + x^2 + x - 5$. Tìm m để:

- a) y' bằng bình phương của một nhị thức bậc nhất
- b) $y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu
- c) $y' > 0$, với mọi x .

HD & Giải

Ta có $y' = 3mx^2 + 2x + 1$

- a) y' là bình phương của một nhị thức bậc nhất khi và chỉ khi $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m > 0 \\ 1 - 3m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{1}{3}$
- b) $y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi $a.c < 0 \Leftrightarrow 3m.1 < 0 \Leftrightarrow m < 0$
- c) $y' > 0$ với mọi x khi và chỉ khi $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m > 0 \\ 1 - 3m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{1}{3}$

Bài 7. Cho $f(x) = 2\sin^2 x + \sin x - 1$ và $g(x) = 2\sin^2 x - 3\sin x + 1$

a) Tính $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$ và $\frac{f''\left(\frac{\pi}{2}\right)}{g''\left(\frac{\pi}{2}\right)}$ b) Tìm $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{f(x)}{g(x)}$

HD & Giải

Vì $2\sin^2 x + \sin x - 1 = (\sin x + 1)(2\sin x - 1)$

$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = (\sin x - 1)(2\sin x - 1)$

Nên $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1} = \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}$

a) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(\frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}\right)' = \frac{-2\cos x}{(1 - \sin x)^2}$

$f'(x) = 4\sin x \cos x + \cos x = 2\sin 2x + \cos x$; $f''(x) = 4\cos 2x - \sin x \Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4 - 1 = -5$

$g'(x) = 4\sin x \cos x - 3\cos x = 2\sin 2x - 3\cos x$; $g''(x) = 4\cos 2x + 3\sin x \Rightarrow g''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4 + 3 = -1$

$$\text{Suy ra } \frac{f''\left(\frac{\pi}{2}\right)}{g''\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{-5}{-1} = 5$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{\frac{1}{2} - 1} = -3$$

Bài 8. Giải các phương trình:

a) $f'(x) = g(x)$ với $f(x) = \sin^3 2x$ và $g(x) = 4\cos 2x - 5\sin 4x$

b) $f'(x) = 0$ với $f(x) = 20\cos 3x + 12\cos 5x - 15\cos 4x$

c) $f'(x) = 0$ với $f(x) = 3x + \frac{60}{x} - \frac{64}{x^3} + 5$

HD & Giải

a) $f(x) = \sin^3 2x \Rightarrow f'(x) = 6\sin^2 2x \cos 2x$ phương trình

$$f'(x) = g(x) \Leftrightarrow 6\sin^2 2x \cos 2x = 4\cos 2x - 5\sin 4x$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x (6\sin^2 2x + 10\sin 2x - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \sin 2x = \frac{1}{3} \\ \sin 2x = -2 \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{3} + k\pi \end{cases}$$

b) $f'(x) = -60\sin 3x - 60\sin 5x + 60\sin 4x = -60(\sin 3x + \sin 5x - \sin 4x)$
 $= -60\sin 4x(2\cos x - 1)$

Phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 4x = 0 \\ 2\cos x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{4} \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

c) $f'(x) = 3 - \frac{60}{x^2} + \frac{64}{x^4} = 0$. Phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^4 - 60x^2 + 64 = 0; (x \neq 0) \Rightarrow x \in \{\pm 2; \pm 4\}$

Bài 9. Tìm phương trình các tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4x + 1$, biết rằng các tiếp tuyến này có hệ số góc $k = 4$.

HD & Giải

Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4x + 1$ xác định trên $\mathbb{R}$

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 4$

Phương trình các tiếp tuyến với đồ thị hàm số có dạng: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, x_0 là hoành độ tiếp điểm.

Hệ số góc của các tiếp tuyến này $k = f'(x_0) = 4 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 + 4 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = f(0) = 1 \\ x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = f(2) = 5 \end{cases}$

Vậy phương trình các tiếp tuyến cần tìm là: $d_1: y = 4x + 1$ và $d_2: y = 4x - 3$

Bài 10. Tìm phương trình các tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - x - 2}{x + 2}$ biết rằng các tiếp tuyến này song song với đường thẳng $y = 2 - 3x$.

HD & Giải

Hàm số $y = \frac{x^2 - x - 2}{x + 2} = x - 3 + \frac{4}{x + 2}$. Miền xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

Ta có $y' = 1 - \frac{4}{(x + 2)^2}$. Phương trình các tiếp tuyến với đồ thị hàm số có dạng:

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, x_0 là hoành độ tiếp điểm.

Theo giả thiết, các tiếp tuyến này song song với đường thẳng $y = 2 - 3x$, nên $k = f'(x_0) = -3$

Khi đó, ta có $1 - \frac{4}{(x + 2)^2} = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = f(-1) = 0 \\ x_0 = -3 \Rightarrow y_0 = f(-3) = -10 \end{cases}$

Vậy phương trình các tiếp tuyến cần tìm là: $d_1: y = -3x - 3$ và $d_2: y = -3x - 19$

Bài 11. Cho hai hàm số $y = \frac{1}{x\sqrt{2}}$ và $y = \frac{x^2}{\sqrt{2}}$. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị của mỗi hàm số đã cho tại giao điểm của chúng và suy ra góc giữa hai tiếp tuyến đó.

HD & Giải

Gọi I là giao điểm của hai hàm số trên, giải phương trình hoành độ giao điểm, tìm được $I \left(1; \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$.

$$y' = -\frac{1}{x^2\sqrt{2}} \text{ và } y' = \frac{2x}{\sqrt{2}}$$

Phương trình tiếp tuyến có dạng $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, với x_0 là tiếp điểm.

Vậy $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \sqrt{2}; y = \sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}$ và góc giữa hai tiếp tuyến là 90° .

Bài 12. Cho hai hàm số $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 - \frac{9}{4}$ có đồ thị là (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại các giao điểm của nó với trục Ox .

HD & Giải

Gọi Δ là tiếp tuyến cần tìm. $\Delta: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, x_0 là hoành độ tiếp điểm.

$$\text{Hàm số: } y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 - \frac{9}{4}$$

$$\text{Giao điểm của } (C) \text{ với trục } Ox \text{ là: } \frac{x^4}{4} - 2x^2 - \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow x^4 - 8x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 1)(x^2 - 9) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$$

(C) cắt trục Ox tại $x = -3$ và $x = 3$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm: $\Delta_1: y = y'(3)(x - 3)$ hay $\Delta_1: y = 15(x - 3)$

$\Delta_2: y = y'(-3)(x + 3)$ hay $\Delta_2: y = -15(x + 3)$

Bài 13. Cho hai hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ có đồ thị là (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại các giao điểm của nó với trục tung.

HD & Giải

Hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 1$. Tập xác định $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y'(x) = -x^2 + 4x - 3$. Kí hiệu d là tiếp tuyến của (C) và $(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm

Giao điểm của (C) với trục tung là $(0; 1)$.

Với $x_0 = 0 \Rightarrow y'(0) = -3$. Ta được phương trình tiếp tuyến là $d: y = -3x + 1$

Bài 14. Cho hai hàm số $y = x^3 - 3x - 1$ có đồ thị là (C). Viết phương trình đường thẳng d vuông góc với đường thẳng $y = \frac{x}{3}$ và tiếp xúc với đồ thị (C).

HD & Giải

Hàm số $y = x^3 - 3x - 1$ có TXĐ: $D = \mathbb{R}$ và $y' = 3x^2 - 3$

Đường thẳng d vuông góc với đường thẳng $y = \frac{x}{3}$ nên có hệ số góc bằng -3

Ta có: $y'(x) = 3x^2 - 3 = -3 \Rightarrow x = 0$. Với $x = 0 \Rightarrow y = -1$

Phương trình đường thẳng d là phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $(0; -1)$

Vậy $d: y + 1 = -3x$ hay $y = -3x - 1$

Bài 15. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-2}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết hệ số góc của tiếp tuyến đó bằng -5 .

HD & Giải

Hàm số $y = \frac{2x+1}{x-2}$. Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$; $y'(x) = -\frac{5}{(x-2)^2}$.

Kí hiệu d là tiếp tuyến của (C) và $(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm

Hệ số góc của d bằng $-5 \Rightarrow -\frac{5}{(x_0-2)^2} = -5 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = 3 \end{cases}$

Với $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = -3$. Ta được phương trình tiếp tuyến là $d_1: y = -5x + 2$

Với $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 7$. Ta được phương trình tiếp tuyến là $d_2: y = -5x + 22$

Bài 16. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình $f''(x) = 0$.

HD & Giải

Hàm số $y = f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2}$. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $f'(x) = 2x^3 - 6x$ và $f''(x) = 6x^2 - 6$

Theo giả thiết, ta có: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Với $x = -1 \Rightarrow f(-1) = -1, f'(-1) = 4$.

Vậy phương trình tiếp tuyến có dạng: $y = 4x + 3$

Với $x = 1 \Rightarrow f(1) = -1, f'(1) = -4$

Vậy phương trình tiếp tuyến có dạng: $y = -4x + 3$

Bài 17. Cho hàm số $y = f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 2$

a) Giải bất phương trình $f'(x-1) > 0$

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ x_0 , biết rằng $f''(x_0) = -6$.

HD & Giải

a) Hàm số $y = f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 2$. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $f'(x) = -3x^2 + 6x + 9$. $f'(x-1) = -3(x-1)^2 + 6(x-1) + 9 = -3x^2 + 12x$

$$f'(x-1) > 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 12x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 4$$

b) Phương trình tiếp tuyến (d) của đồ thị (C) có dạng: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, x_0 là hoành độ tiếp điểm.

Ta có: $f'(x) = -3x^2 + 6x + 9$ và $f''(x) = -6x + 6$

Theo giả thiết, ta có: $f''(x_0) = -6 \Leftrightarrow -6x_0 + 6 = -6 \Leftrightarrow x_0 = 2$

Với $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = f(2) = 24, f'(2) = 9$.

Vậy phương trình tiếp tuyến (d) là: $y = 9x + 6$

Bài 18. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi M là điểm thuộc (C) có tung độ bằng 5. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại M.

HD & Giải

Hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$. Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; $y'(x) = -\frac{3}{(x-1)^2}$.

Kí hiệu d là tiếp tuyến của (C) tại M. Ta có $M(m; 5) \in (C) \Leftrightarrow 5 = \frac{2m+1}{m-1} \Leftrightarrow m = 2$

Do đó $M(2; 5)$. Phương trình tiếp tuyến là $d: y = y'(2)(x-2) + 5$ hay $y = -3x + 11$

Bài 19. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(1; -2)$ và tiếp xúc với parabol (P): $y = x^2 - 2x$.

HD & Giải

Phương trình của đường thẳng d đi qua điểm $A(1; -2)$ và có hệ số góc k là $y = k(x-1) - 2$

Hoành độ giao điểm của d và (P): $x^2 - 2x = k(x-1) - 2 \Leftrightarrow x^2 - (k+2)x + k+2 = 0(*)$

Đường thẳng d tiếp xúc với (P) khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm kép, tức là:

$$\Delta = (k+2)^2 - 4(k+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = -2 \end{cases}$$

Vậy có hai tiếp tuyến của parabol đã cho đi qua điểm A: $y = 2x - 4$ và $y = -2x$

Bài 20. Cho (C): $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$. Viết phương trình tiếp tuyến (Δ) của (C) qua điểm $M(0; -1)$.

HD & Giải

(C): $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$, Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Gọi k là hệ số góc của tiếp tuyến (Δ) với đồ thị (C) qua điểm $M(0; -1)$. Khi đó (Δ): $y = kx - 1$

(Δ) tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^3 + 3x^2 - 1 = kx - 1 & (1) \\ 6x^2 + 6x = k & (2) \end{cases}$ có nghiệm

Thay k từ (2) vào (1), ta được: $2x^3 + 3x^2 - 1 = (6x^2 + 6x) - 1 \Leftrightarrow 4x^3 + 3x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{3}{4} \end{cases}$

Với $x = 0 \Rightarrow k = 0$. Vậy phương trình tiếp tuyến (Δ): $y = -1$

Với $x = -\frac{3}{4} \Rightarrow k = -\frac{9}{8}$. Vậy phương trình tiếp tuyến (Δ): $y = -\frac{9}{8}x - 1$

Bài 21. Cho (C): $y = x^3 - 3x^2 + 1$. Viết phương trình tiếp tuyến (Δ) của (C) biết (Δ) song song với (Δ'): $y = 9x$.

HD & Giải

Ta có (Δ) // (Δ'): $y = 9x \Rightarrow (\Delta): y = 9x + m$ ($m \neq 0$)

(Δ) tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 1 = 9x + m & (1) \\ 3x^2 - 6x = 9 & (2) \end{cases}$ có nghiệm

$$(2) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Với $x = -1 \Rightarrow m = 6$. Vậy phương trình tiếp tuyến $(\Delta): y = 9x + 6$

Với $x = 3 \Rightarrow m = -26$. Vậy phương trình tiếp tuyến $(\Delta): y = 9x - 26$

Bài 22. Cho $(C): y = \frac{2x+1}{x-1}$. Viết phương trình tiếp tuyến (Δ) của (C) biết (Δ) vuông góc với (Δ') có phương trình $3x - y + 5 = 0$.

HD & Giải

$$(C): y = \frac{2x+1}{x-1}. \text{ Tập xác định } D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Ta có: $(\Delta'): 3x - y + 5 = 0 \Rightarrow y = 3x + 5$. Do (Δ) vuông góc với (Δ') nên phương trình $(\Delta): y = -\frac{1}{3}x + m$

$$(\Delta) \text{ tiếp xúc với } (C) \text{ khi và chỉ khi hệ phương trình: } \begin{cases} \frac{2x+1}{x-1} = -\frac{1}{3}x + m & (1) \\ \frac{-3}{(x-1)^2} = -\frac{1}{3} & (2) \end{cases} \text{ có nghiệm}$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 9 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 3 \\ x-1 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -2 \end{cases}$$

Với $x = 4 \Rightarrow m = \frac{13}{3}$. Vậy phương trình tiếp tuyến $(\Delta): y = -\frac{1}{3}x + \frac{13}{3}$

Với $x = -2 \Rightarrow m = \frac{1}{3}$. Vậy phương trình tiếp tuyến $(\Delta): y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 23. Tìm đạo hàm các hàm số sau

a) $y = \frac{x^4}{2} + \frac{5x^3}{3} - \sqrt{2x+1}$

b) $y = \frac{x^2 + 3x - a^2}{x-1}$ (a là hằng số)

c) $y = (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x$

d) $y = \tan^2 x + \tan x^2$

e) $y = (\sin 2x + 8)^3$

f) $y = (2x^3 - 5) \tan x$

g) $y = \left(x^3 - \frac{1}{x^3} + 3\right)^4$

h) $y = \sqrt{1 + \tan\left(x + \frac{1}{x}\right)}$

Bài 24. Tìm đạo hàm các hàm số sau

a) $y = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$

b) $y = \frac{(2-x^2)(3-x^2)}{(1-x)^2}$

c) $y = \frac{\cos x}{2 \sin^2 x}$

d) $y = \sin 2x - 2 \cos x$

e) $y = \sqrt{\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)}$

f) $y = \cos^2 \frac{x}{3} \tan \frac{x}{2}$

g) $y = \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x}$

h) $y = \frac{(x^2 - x + 1)^2}{\sqrt{3x^2 + 1}}$

k) $y = \tan^3\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)^2$

Bài 25. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (2 - 7x)(x^2 - 3x + 2)$

b) $y = (9 - 2x)(2x^3 - 9x^2 + 1)$

c) $y = \left(x^5 - \frac{3}{\sqrt{x}}\right)^3$

d) $y = (x+1)(x+2)^2(x+3)^3$

e) $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 3x + 2}$

f) $y = \frac{-x^2 + 7x + 5}{x^2 - 3x}$

g) $y = \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x - 1}$

h) $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$

k) $y = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

l) $y = (x^2 - 4x)\sqrt{x^2 - 4x + 3}$

m) $y = \left(x^3 - \frac{1}{x^3} + 3\right)^4$

n) $y = \frac{1}{(x^2 - x + 1)^5}$

Bài 26. Tìm đạo hàm của hàm số tại điểm đã chỉ ra

a) $y = f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+1}; f'(0) = ?$

b) $y = f(x) = (4x+5)^2; f'(0) = ?$

c) $y = f(x) = \sin 4x \cdot \cos 4x; f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = ?$

d) $y = f(x) = \sin 4x \cdot \cos 4x, f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = ?$

e) $y = \cos^2\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right); f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = ?$

f) $y = \sin^2\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right), f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = ?$

g) $y = f(x) = \sin^2 x + \cot 2x, f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = ?$

h) $y = f(x) = \cos^2 2x \cdot \sqrt{\tan 2x}, f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = ?$

Bài 27. Tìm đạo hàm của hàm số tại điểm đã chỉ ra

a) $y = f(x) = \frac{\cos x}{1 - \sin x}, f'(\pi)$

b) $y = f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}, f'(\pi)$

c) $y = f(x) = 2 + \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \cos \frac{x}{3}, f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$

d) $y = f(x) = \sin 2x + \cot 3x, f'\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

e) $y = f(x) = \cos 3x - \tan 2x, f'\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

f) $y = f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \sin x, f'\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

g) $y = f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}, f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$

h) $f(x) = -30 + \sin 2x + \cos \frac{2x}{3} + \cot^2 x, f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

k) $y = f(x) = \sqrt{\sin 2x} + \cot^2 x, f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

l) $y = f(x) = \tan^2 x + \sqrt{\cos 4x}, f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Bài 28. Xác định a để $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, biết $f(x) = x^3 + (a-1)x^2 + 2x + 1$ **Bài 29.** Tìm các nghiệm của phương trình sau

a) $f'(x) = 0$ với $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 6x - 1$

b) $f'(x) = -5$ với $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{3x^2}{2} - 3$

c) $f'(x) = 0$ với $f(x) = \sqrt{3} \cos x + \sin x - 2x - 5$

d) $f'(x) = g(x)$ với $f(x) = \sin^3 2x$ và $g(x) = 4 \cos 2x - 5 \sin 4x$

e) $f'(x) = 0$ với $f(x) = 3 \cos x + 4 \sin x + 5x$

f) $f'(x) = 0$ với $f(x) = \sin 2x - 2 \cos x$

Bài 30. Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = f(x) = x^4 + 2x^2 - 1$. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) trong các trường hợp sau;

a) Biết tung độ của tiếp tuyến bằng 2.

b) Biết tiếp tuyến song song với trục hoành.

c) Biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{8}x + 3$.

d) Biết tiếp tuyến đi qua điểm A(0;6).

Bài 31. Viết phương trình tiếp tuyến

- a) Của đường cong (C): $y = \frac{x+1}{x-1}$ tại điểm $A(2;3)$
- b) Của đường cong (C): $y = x^3 + 4x^2 - 1$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$
- c) Của parabol (P): $y = x^2 - 4x + 4$ tại điểm có tung độ $y_0 = 1$
- d) Của đường cong (C): $y = x^3 - 3x^2 + 4x + 9$, biết rằng tiếp tuyến này song song với đường thẳng $4x - y + 5 = 0$.
- e) Của đường cong (C): $y = \frac{x-1}{x+1}$, biết rằng tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $2x + y + 1 = 0$
- f) Của đường cong (C): $y = \sqrt{2x+1}$, biết hệ số góc của tiếp tuyến là $\frac{1}{3}$.

Bài 32. Cho hàm số $f(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^{n+1}}{n+1}$, ($n \in \mathbb{N}$). Tìm

- a) $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow 2} f'(x)$ c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} f'\left(\frac{1}{2}\right)$ d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} f'(3)$

Bài 33. Chứng minh rằng đối với hàm số $y = x \sin x$, ta có: $xy'' - 2(y' - \sin x) + xy = 0$

Bài 34. Trên đường cong $y = 4x^2 - 6x + 3$, hãy tìm điểm tại đó tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 2x$

Bài 35. Cho các hàm số $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị (C) và $g(x) = x^2 - 3x - 1$

- a) Xác định b, c, d sao cho đồ thị (C) đi qua các điểm $A(1;3), B(-1;-3)$ và $f'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3}$
- b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$
- c) Giải phương trình $f'(\sin x) = 3$
- d) Giải phương trình $f''(\cos x) = g'(\sin x)$
- e) Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(\sin 5x) + 2}{g'(\sin 3x) + 3}$

Bài 36. Cho hàm số $f(x) = x - 2\sqrt{x^2 + 12}$. Giải bất phương trình $f'(x) \leq 0$.

Bài 37. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x - \frac{2}{x-1}$, biết tiếp tuyến đó đi qua điểm $A(3;3)$.

Bài 38. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ có đồ thị (C).

- a) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho tại giao điểm A của (C) với trục tung.
- b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho, biết rằng tiếp tuyến đó song song với tiếp tuyến tại điểm A.

Bài 39. Cho hàm số $y = x^3 - 3x - 1$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết rằng hệ số góc của tiếp tuyến đó bằng 9.

Bài 40. Cho hàm số $y = -x^4 - x^2 + 6$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{6}x - 1$.

Bài 41. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 1$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng -1 .

Bài 42. Cho hàm số $y = \frac{2x+3}{x+1}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = x + 2$.

Bài 43. Cho hàm số $y = x^4 - 4x^2$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tung độ tiếp điểm là $y = -3$.

Bài 44. Cho hàm số $y = \frac{4x-3}{-4+3x}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết rằng tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $y = -7x + 2014$.

Bài 45. Cho hàm số $y = \frac{-x-4}{x-2}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết rằng hệ số góc của tiếp tuyến đó bằng 24.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho một chất điểm chuyển động có phương trình là $s(t) = 2t^3 - 2t^2 + t - 1$, (s tính theo mét (m) và t tính theo giây (s)). Tính gia tốc a tại thời điểm $t = 4(s)$.

- A. $a = 25(m/s^2)$. B. $a = 44(m/s^2)$. C. $a = 60(m/s^2)$. D. $a = 48(m/s^2)$.

Câu 2. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào sai?

- A. $(ax+b)^n = na(ax+b)^{n-1}, n \in \mathbb{N}, n > 1$. B. $(kx^{10})' = 10kx^9$.
C. $(C+x)' = C+1$ (C là hằng số). D. $\left(\frac{a}{x}\right)' = -\frac{a}{x^2}, x \neq 0$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 2x + 3$ (C). Gọi S là tập hợp tất cả phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có tung độ $y_0 = 3$. Tìm số phần tử của S.

- A. 2. B. 0. C. 3. D. 1.

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$. Tính $f^{(n)}(x)$ với mọi $n \geq 2$.

- A. $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{n!}{x^{n-1}}$. B. $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{x^{n+1}}$.
C. $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{n}{x^{n+1}}$. D. $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{n!}{x^{n+1}}$.

Câu 5. Cho một chất điểm chuyển động có phương trình là $s(t) = 2t^3 - 2t^2 + t - 1$, (s tính theo mét (m) và t tính theo giây (s)). Tính vận tốc v tại thời điểm mà gia tốc $a = 0$ (m/s^2).

- A. $v = 7m/s$. B. $v = \frac{2}{3}m/s$. C. $v = 3m/s$. D. $v = \frac{1}{3}m/s$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x) = \cos^2 x - \tan^2 3x$ (a là tham số khác 0). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $f'(x) = 2 \cos x - 2 \tan 3x$. B. $f'(x) = \sin 2x - \frac{2 \tan 3x}{\cos^2 3x}$.
C. $f'(x) = 2 \cos x - \frac{6 \tan 3x}{\cos^2 x}$. D. $f'(x) = -\sin 2x - \frac{6 \sin 3x}{\cos^3 3x}$.

Câu 7. Cho $f(x) = x^3 + x - \sqrt{2}$; $g(x) = 3x^2 + x + \sqrt{2}$. Giải bất phương trình $f'(x) > g'(x)$.

- A. $x \in [2; +\infty)$. B. $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.
C. $x \in (0; 2)$. D. $x \in (-\infty; 0]$.

Câu 8. Cho hàm số $y = (x-2)\sqrt{x^2+1}$. Tính y' .

- A. $y' = \frac{x^2-x+1}{\sqrt{x^2+1}}$. B. $y' = \frac{2x^2-2x}{\sqrt{x^2+1}}$.

$$\text{C. } y' = \frac{2x^2 - 2x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

$$\text{D. } y' = \frac{2x^2 + 2x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Câu 9. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x + 1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C) tại điểm M có hoành độ bằng 1.

$$\text{A. } y = x + \frac{1}{6}.$$

$$\text{B. } y = x - \frac{5}{6}.$$

$$\text{C. } y = -x + \frac{5}{6}.$$

$$\text{D. } y = -x - \frac{7}{6}.$$

Câu 10. Cho $f(x) = 3x + \frac{60}{x} - \frac{64}{x^3} + 5$. Giải phương trình $f'(x) = 0$.

$$\text{A. } x \in \{\pm 4; \pm 1\}.$$

$$\text{B. } x \in \{2; 4\}.$$

$$\text{C. } x \in \{\pm 2; \pm 3\}.$$

$$\text{D. } x \in \{\pm 2; \pm 4\}.$$

Câu 11. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào sai?

$$\text{A. } (\cos 2x)' = 2 \sin 2x.$$

$$\text{B. } (\sin 3x)' = 3 \cos 3x.$$

$$\text{C. } (\tan x)' = 1 + \tan^2 x.$$

$$\text{D. } (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x) = x^2 - 2x + 3$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$.

$$\text{A. } y = x - 7.$$

$$\text{B. } y = x + 5.$$

$$\text{C. } y = x - 5.$$

$$\text{D. } y = x + 7.$$

Câu 13. Biết $\left(\frac{3-5x}{x^2-x+1}\right)' = \frac{ax^2+bx+c}{(x^2-x+1)^2}$. Tính $S = ac + b$.

$$\text{A. } S = 5.$$

$$\text{B. } S = -16.$$

$$\text{C. } S = 16.$$

$$\text{D. } S = -10.$$

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x) = x^2 - 2x + 3$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$.

$$\text{A. } y = -4x + 6.$$

$$\text{B. } y = -4x + 2.$$

$$\text{C. } y = -4x - 2.$$

$$\text{D. } y = 4x + 2.$$

Câu 15. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \leq 0 \\ -x^3 + bx + c & \text{khi } x > 0 \end{cases}$ với $b, c \in \mathbb{R}$. Tìm b, c để $f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x_0 = 0$.

$$\text{A. } b = 1, c = 0.$$

$$\text{B. } b = 1, c = 2.$$

$$\text{C. } b = c = 0.$$

$$\text{D. } b = 0, c = 1.$$

Câu 16. Cho hàm số $f(x) = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + a^3$ (a là tham số khác 0). Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

$$\text{A. } f'(a^2) = a^3 + 3a^2.$$

$$\text{B. } f'(a^2) = 3a^2.$$

$$\text{C. } f'(a^2) = -a^3.$$

$$\text{D. } f'(a^2) = |a|^3.$$

Câu 17. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{1 + \tan^2 x + \tan^4 x}$. Tính $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

$$\text{A. } f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1.$$

$$\text{B. } f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

$$\text{C. } f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 12.$$

$$\text{D. } f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{3}.$$

Câu 18. Cho hàm số $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ (C). Xác định các hệ số b, c, d biết rằng đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ đi qua các điểm $A(-1; -3), B(1; -1)$ và $f'\left(\frac{1}{3}\right) = 0$.

$$\text{A. } b = 1, c = 2, d = 3.$$

$$\text{B. } b = \frac{1}{2}, c = 0, d = \frac{3}{2}.$$

$$\text{C. } b = -1, c = 2, d = -3.$$

$$\text{D. } b = -\frac{1}{2}, c = 0, d = -\frac{3}{2}.$$

Câu 19. Cho hàm số $y = x^2 + \sin^2 x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $dy = 2x + \sin 2x$.

B. $dy = (x^2 + \sin^2 x)dx$.

C. $dy = (2x + \sin 2x)dx$.

D. $dy = (2x + 2 \cos x)dx$.

Câu 20. Cho hàm số $y = x \sin x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $dy = (x \sin x + \cos x)dx$.

B. $dy = (\sin x + \cos x)dx$.

C. $dy = (\sin x + x \cos x)dx$.

D. $dy = (x + \cos x)dx$.

Câu 21. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 8}$. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $f'(x) \leq 1$.

A. $S = (-2; 4)$.

B. $S = (-\infty; -2) \cup (4; +\infty)$.

C. $S = (4; +\infty)$.

D. $S = (-\infty; -2)$.

Câu 22. Cho hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C) tại điểm M có tung độ bằng 5.

A. $y = -3x + 11$.

B. $y = -3x - 1$.

C. $y = -3x + 1$.

D. $y = -3x - 5$.

Câu 23. Một chất điểm chuyển động có phương trình $s(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$. Gia tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t được tính bởi công thức nào dưới đây ?

A. $a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$.

B. $a(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$.

C. $a(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$.

D. $a(t) = A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$.

Câu 24. Viết phương trình tiếp tuyến của đường hypebol $y = \frac{1}{x}$ tại điểm có hoành độ bằng -1 .

A. $y = -x$.

B. $y = -x - 2$.

C. $y = -x - 1$.

D. $y = x + 2$.

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ (C). Viết phương trình đường thẳng d song song với đường thẳng $y = \frac{x-2}{2}$ và tiếp xúc với đồ thị (C).

A. $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

B. $y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$.

C. $y = 2x + 3$.

D. $y = x - 1$.

Câu 26. Tìm phương trình các tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - x - 2}{x + 2}$ biết rằng các tiếp tuyến này song song với đường thẳng $y = 2 - 3x$.

A. $y = x - 1$ và $y = x + 3$.

B. $y = -3x - 3$ và $y = -3x - 19$.

C. $y = -3x - 3$ và $y = -3x - 7$.

D. $y = 3x + 3$ và $y = -3x - 19$.

Câu 27. Cho hàm số: $y = x^3 - (m-1)x^2 + (3m+1)x + m - 2$. Tìm tham số m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng 1 đi qua điểm $A(2; -1)$.

A. $m = -2$.

B. $m = 2$.

C. $m = 3$.

D. $m = -1$.

Câu 28. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{x}}$ với $x < 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x^3(x-3)}}$.

B. $f'(x) = \frac{-3}{x^2\sqrt{\frac{x-3}{x}}}$.

C. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x-3}{x}}}$.

D. $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{\frac{x-3}{x}}}$.

Câu 29. Cho hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $y^3 \cdot y'' + 1 = 0$.

B. $y \cdot y'' + 1 = 0$.

C. $y^3 \cdot y'' - 1 = 0$.

D. $y^2 \cdot y'' - 1 = 0$.

Câu 30. Biết $(\cos 3x + 3 \sin x + 2)' = a \sin 3x + b \cos x + c$. Tính $P = (ab)^c$.

A. $P = 1$.

B. $P = 9$.

C. $P = 81$.

D. $P = \frac{1}{27}$.

Câu 31. Cho hàm số $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ và điểm $x_0 = 0$. Gọi $\Delta_x = x - x_0$ gọi là số gia của đối số tại x_0 và

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ gọi là số gia tương ứng của hàm số. Tính $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

A. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = -1$.

B. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = 1$.

C. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = -2$.

D. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = 2$.

Câu 32. Cho hàm số $y = x\sqrt{x}$, với $x > 0$. Tính y' .

A. $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

B. $y' = \frac{3}{2}x$.

C. $y' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

D. $y' = \frac{x}{\sqrt{x}}$.

Câu 33. Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 , không được tính theo công thức nào dưới đây ?

A. $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x + x_0) - f(x_0)}{x - x_0}$.

B. $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

C. $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

D. $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Câu 34. Cho hàm số $y = f(x) = x^2 - 2x + 3$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có tung độ bằng 3.

A. $y = 10x + 17$.

B. $y = 10x + 7$.

C. $y = x + 7$.

D. $y = x + 1$.

Câu 35. Một chất điểm chuyển động có phương trình $s(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$. Vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t được tính bởi công thức nào dưới đây ?

A. $v(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$.

B. $v(t) = A\omega \sin(\omega t + \varphi)$.

C. $v(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$.

D. $v(t) = \omega \cos(\omega t + \varphi)$.

Câu 36. Một chất điểm chuyển động thẳng có phương trình $s = 200 + 14t - t^2$ (s tính theo mét (m) và t tính theo giây (s)). Tính vận tốc v và gia tốc a của chất điểm tại thời điểm $t = 3s$

A. $v = 3m/s, a = -1m^2/s$.

B. $v = 8m/s, a = 2m^2/s$.

C. $v = 12m/s, a = -2m^2/s$.

D. $v = 8m/s, a = -2m^2/s$.

Câu 37. Cho một chất điểm chuyển động có phương trình là $S(t) = 2t^3 - 2t^2 + t - 1$, (trong đó t tính bằng s và S tính bằng m). Tính vận tốc V của chuyển động tại thời điểm mà gia tốc bằng 0 (m/s^2)

A. $V = \frac{1}{3}m/s^2$.

B. $V = \frac{1}{2}m/s^2$.

C. $V = 5m/s^2$.

D. $V = 10m/s^2$.

Câu 38. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm $y = 4x^3 - 3x$ tiếp xúc với đường thẳng $y = mx - 1$.

A. $m \geq 2$.

B. $m < 1$.

C. $m > 1$.

D. $m < -2$.

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C). Tìm phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(x_0; y_0)$.

A. $y + y_0 = y'(x_0)(x + x_0)$.

B. $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$.

C. $y + y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$.

D. $y - y_0 = y'(x_0)(x + x_0)$.

Câu 40. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{2x-1}$ và điểm $x_0 = 5$. Gọi $\Delta_x = x - x_0$ gọi là số gia của đối số tại x_0 và

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ gọi là số gia tương ứng của hàm số. Tính $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

A. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{1}{6}.$

B. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = 3.$

C. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = 6.$

D. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{1}{3}.$

Câu 41. Cho hàm số $y = \frac{x}{\sqrt{x}}$, với $x > 0$. Tính y' .

A. $y' = 1.$

B. $y' = \frac{1}{2}\sqrt{x}.$

C. $y' = \frac{2}{3}\sqrt{x}.$

D. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$

Câu 42. Cho hàm số $y = mx^3 + x^2 + x - 5$ (m là tham số thực). Tìm m để phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

A. $m < 0.$

B. $m \leq 0.$

C. $m > -4.$

D. $m \geq 1.$

Câu 43. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho, biết rằng tiếp tuyến đi qua điểm $A(0; 2)$.

A. $y = 3x - 2.$

B. $y = 5x + 2.$

C. $y = 5x - 2.$

D. $y = 3x + 2.$

Câu 44. Cho hàm số $y = \tan x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $y' - y^2 + 1 = 0.$

B. $y' - y^2 - 1 = 0.$

C. $y' + 2y^2 + 2 = 0.$

D. $y' - y - 1 = 0.$

Câu 45. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $f'(x) \leq f(x)$.

A. $S = \left[0; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right].$

B. $S = \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right).$

C. $S = (-\infty; 0) \cup \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right).$

D. $S = \left[0; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right).$

Câu 46. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 2x + 3$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$.

A. $y = x + 5.$

B. $y = 2x + 3.$

C. $y = -x + 1.$

D. $y = 4x + 5.$

Câu 47. Cho hàm số $y = mx^3 + x^2 + x - 5$ (m là tham số thực). Tìm m để $y' > 0$ với mọi x .

A. $m > 1.$

B. $m > \frac{1}{3}.$

C. $m < \frac{1}{3}.$

D. $m = 0.$

Câu 48. Cho hàm số $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ (C). Biết rằng đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ đi qua các điểm $A(-1; -3)$, $B(1; -1)$ và $f'\left(\frac{1}{3}\right) = 0$. Tính $S = b + c + d$.

A. $S = -2.$

B. $S = -\frac{5}{2}.$

C. $S = 0.$

D. $S = \frac{3}{2}.$

Câu 49. Cho hàm số $y = \sin \sqrt{4+x^2}$. Tính y' .

A. $y' = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} \cos \sqrt{4+x^2}.$

B. $y' = 2x \cos \sqrt{4+x^2}.$

C. $y' = \cos \sqrt{4+x^2}.$

D. $y' = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} \sin \sqrt{4+x^2}.$

Câu 50. Biết $(\sin 2x + 2 \cos x + 1)' = a \cos 2x + b \sin x + c$. Tính $P = (ab)^c$.

A. $P = 16.$

B. $P = 32.$

C. $P = 1.$

D. $P = 4.$

Câu 51. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{khi } x \leq 1 \\ ax + b & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Tìm a, b để hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại $x = 1$?

A. $a=1; b=\frac{1}{2}$.

B. $a=\frac{1}{2}; b=\frac{1}{2}$.

C. $a=\frac{1}{2}; b=-\frac{1}{2}$.

D. $a=1; b=-\frac{1}{2}$.

Câu 52. Cho hàm số $y=f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho tại điểm có hoành độ x_0 , biết $f''(x_0)=-1$.

A. $y=3x+\frac{5}{4}$.

B. $y=3x-\frac{7}{4}$.

C. $y=-3x-\frac{5}{4}$.

D. $y=3x+\frac{7}{4}$.

Câu 53. Cho hàm số $y=\sin 3x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $dy=-3\cos 3x dx$.

B. $dy=\cos 3x dx$.

C. $dy=3\cos 3x dx$.

D. $dy=3\sin 3x dx$.

Câu 54. Cho hàm số $f(x)=\sqrt{\cos 2x}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $df(x)=\frac{2\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}} dx$.

B. $df(x)=\frac{-\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}} dx$.

C. $df(x)=\frac{\sin 2x}{2\sqrt{\cos 2x}} dx$.

D. $df(x)=\frac{-\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$.

Câu 55. Cho $(C): y=\frac{2x+1}{x-1}$. Viết phương trình tiếp tuyến (Δ) của (C) biết (Δ) vuông góc với (Δ') có phương trình $3x-y+5=0$.

A. $y=-x+13$ hoặc $y=-x+1$.

B. $y=-\frac{1}{3}x+\frac{13}{3}$.

C. $y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$.

D. $y=-\frac{1}{3}x+\frac{13}{3}$ hoặc $y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$.

Câu 56. Tìm số phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+4x+1$, biết rằng tiếp tuyến này có hệ số góc $k=4$.

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Câu 57. Cho hàm số $f(x)=\sin^3 x+x^2$. $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right)$. Tính $f'''\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $f'''\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{2}$.

B. $f'''\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi^2$.

C. $f'''\left(-\frac{\pi}{2}\right)=5$.

D. $f'''\left(-\frac{\pi}{2}\right)=1$.

Câu 58. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y=-x^4-x^2+6$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y=\frac{1}{6}x-1$.

A. $y=-6x-5$.

B. $y=-6x+15$.

C. $y=-6x+10$.

D. $y=-6x+1$.

Câu 59. Cho một chất điểm chuyển động có phương trình là $S(t)=2t^3-2t^2+t-1$, (trong đó t tính bằng s và S tính bằng m). Tính gia tốc a của chuyển động tại thời điểm $t=4s$.

A. $a=40m/s^2$.

B. $a=12m/s^2$.

C. $a=44m/s^2$.

D. $a=4m/s^2$.

Câu 60. Cho hàm số $y=\frac{1}{(x^2-x+1)^5}$. Tính $y'(2)$.

A. $y'(2)=-\frac{15}{234}$.

B. $y'(2)=-\frac{5}{243}$.

C. $y'(2)=\frac{5}{234}$.

D. $y'(2)=-\frac{1}{234}$.

Câu 61. Cho hàm số $f(x)=20\cos 3x+12\cos 5x-15\cos 4x$. Tìm nghiệm của phương trình $f'(x)=0$.

A. $\begin{cases} x=k\pi \\ x=\pm\pi+k2\pi \end{cases} (k\in\mathbb{Z})$.

B. $\begin{cases} x=\frac{k\pi}{4} \\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi \end{cases} (k\in\mathbb{Z})$.

C.
$$\begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

D.
$$\begin{cases} x = \frac{k3\pi}{4} \\ x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 62. Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$. Giải phương trình $y'(x) = 10$.

A. $x = -3, x = 3$.

B. $x = -2, x = 1$.

C. $x = -4, x = 3$.

D. $x = -4, x = 2$.

Câu 63. Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 + 3x - 1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $dy = \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x-1}} dx$.

B. $dy = \frac{3}{2\sqrt{x^2+3x-1}} dx$.

C. $dy = \frac{1}{2\sqrt{x^2+3x-1}} dx$.

D. $dy = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x-1}} dx$.

Câu 64. Cho hàm số $f(x) = x^2 \cos x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{4}$.

B. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

C. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{4}$.

D. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Câu 65. Cho hàm số $y = mx^3 + x^2 + x - 5$ (m là tham số thực). Tìm m để bất phương trình $y' > 0$, với mọi x .

A. $m < 2$.

B. $m < -1$.

C. $m > \frac{1}{3}$.

D. $m \geq \frac{1}{3}$.

Câu 66. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 4x$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng -3 .

A. $y = -3x + \frac{7}{4}$.

B. $y = \pm 3x - \frac{7}{4}$.

C. $y = \pm 3x + \frac{5}{4}$.

D. $y = 3x + \frac{5}{4}$.

Câu 67. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x$. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $f'(x) \leq 0$.

A. $S = (-\infty; +\infty)$.

B. $S = (0; +\infty)$.

C. $S = [-2; 2]$.

D. $S = \emptyset$.

Câu 68. Mệnh đề nào dưới đây sai ?

A. Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 được định nghĩa là $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

B. Nếu hàm số liên tục tại một điểm thì nó có đạo hàm tại điểm đó.

C. Hệ số góc của tiếp tuyến của đường cong (C): $y = f(x)$ tại tiếp điểm $M(x_0, y_0)$ là $k = f'(x)$.

D. Nếu hàm số có đạo hàm tại một điểm thì nó liên tục tại điểm đó.

Câu 69. Cho hàm số $f(x) = x^2 + 1 - \frac{\cos x}{1 - \sin x}$. Tính $f'(\pi)$.

A. $f'(\pi) = 2\pi + 1$.

B. $f'(\pi) = -1$.

C. $f'(\pi) = 2\pi$.

D. $f'(\pi) = 2\pi - 1$.

Câu 70. Biết $\left(\frac{3-5x}{x^2-x+1}\right)' = \frac{ax^2+bx+c}{(x^2-x+1)^2}$. Tính $S = a - bc$.

A. $S = 4$.

B. $S = 7$.

C. $S = -3$.

D. $S = -7$.

Câu 71. Biết $\left(\frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 3x}}\right)' = \frac{a \sin 6x}{b\sqrt{(1+\cos^2 3x)^c}}$. Tính $S = a + b + c$.

A. $S = 5$.

B. $S = 3$.

C. $S = 8$.

D. $S = 6$.

Câu 72. Biết $\left[(x-2)\sqrt{x^2+1}\right]' = \frac{ax^2+bx+c}{\sqrt{x^2+1}}$. Tính $P = abc$.

A. $P = -1$.

B. $P = 2$.

C. $P = 35$.

D. $P = -4$.

Câu 73. Hàm số nào dưới đây có đạo hàm bằng $2x + \frac{1}{x^2}$?

- A. $y = \frac{x^3 + 5x - 1}{x^2}$. B. $y = \frac{x^3 + 5x - 1}{x}$. C. $y = \frac{x^3 + 1}{x}$. D. $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}$.

Câu 74. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào sai?

- A. $(C)' = 1$ (C là hằng số). B. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, x \neq 0$.
C. $(x^n)' = nx^{n-1}, n \in \mathbb{N}, n > 1$. D. $(kx)' = k$.

Câu 75. Cho hàm số $f(x) = (3 - x^2)^{10}$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

- A. $f'(1) = -10240$. B. $f'(2) = 20$. C. $f'(-1) = 10240$. D. $f'(-2) = -40$.

Câu 76. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$. Tính $f'(2)$.

- A. $f'(2) = 0$. B. $f'(2) = -5$. C. $f'(2) = 1$. D. $f'(2) = -3$.

ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
B	C	C	D	D	D	B	C	C	D	A	B	B	B	C	D	D	D	C	C	D	A	C	B	A
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
B	A	A	A	A	C	A	A	A	A	D	A	B	B	D	D	A	B	B	C	A	B	A	A	C
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
D	A	C	B	D	B	C	C	C	B	B	C	D	A	C	C	D	B	D	D	C	D	B	A	B
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
D																								

MỘT SỐ ĐỀ ÔN KIỂM TRA

ĐỀ 1

I. Phần trắc nghiệm

Câu 1: Tính $f'(x)$ biết $f(x) = (2x^2 + 5)^2$

- A. $8x(2x^2 + 5)^2$ B. $8(2x^2 + 5)$ C. $8x(2x^2 + 5)$ D. $8x$

Câu 2: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0; y_0)$, với $y_0 = f(x_0)$ có dạng như thế nào?

- A. $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$. B. $y - y_0 = f'(x) \cdot (x - x_0)$.
C. $y + y_0 = f'(x_0) \cdot (x + x_0)$. D. $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) - y_0$.

Câu 3: Cho $(x \cdot \cot 3x)' = a \cdot \cot 3x + \frac{bx}{\sin^2 3x}$. Tính $S = a + b$?

- A. $S = -2$. B. $S = 4$. C. $S = 1$. D. $S = -3$.

Câu 4: Cho đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$, tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $\Delta: y = 9x + 2$ có phương trình

- A. $y = 9x - 15, y = 9x + 7$. B. $y = 9x - 1, y = 9x + 17$.
C. $y = 9x - 5, y = 9x + 17$. D. $y = 9x - 15, y = 9x + 17$.

Câu 5: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 2$ có hệ số góc $k = -9$, có phương trình là :

- A. $y = -9x + 16$. B. $y = -9x - 27$. C. $y = -9x - 11$. D. $y = -9x + 43$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$. Tập nghiệm của bất phương trình $y' < 0$ là:

- A. $(-1; 3)$ B. $\mathbb{R}$ C. $[-1; 3]$ D. $(-1; 3) \setminus \{1\}$

Câu 7: Xét ba câu sau:

- (1) Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x = x_0$ thì $f(x)$ liên tục tại điểm đó
(2) Nếu hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x = x_0$ thì $f(x)$ có đạo hàm tại điểm đó
(3) Nếu $f(x)$ gián đoạn tại $x = x_0$ thì chắc chắn $f(x)$ không có đạo hàm tại điểm đó

Trong ba câu trên:

- A. Cả ba đều đúng. B. Cả ba đều sai.
C. Có một câu đúng và hai câu sai. D. Có hai câu đúng và một câu sai.

Câu 8: Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$. Tính $f'(2)$.

- A. $f'(2) = -3$. B. $f'(2) = 0$. C. $f'(2) = -5$. D. $f'(2) = 1$.

Câu 9: Một chất điểm chuyển động có phương trình $s = t^3 + 3t$ (t tính bằng giây, s tính bằng mét) Tính vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t_0 = 2$ (giây)?

- A. $7m/s$ B. $15m/s$ C. $14m/s$ D. $12m/s$

Câu 10: Tìm phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{4}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$.

- A. $y = -x + 2$. B. $y = -x - 3$. C. $y = x + 2$. D. $y = x - 1$

II. Phần tự luận

Bài 1: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \frac{x^4}{4} - 3\sqrt{x} + x^7 - 12$ b) $y = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$

Bài 2: Cho hàm số $y = \sqrt{1 + \sin^2 x} \cdot \cos x$. Tính $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Bài 3: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại

điểm có hoành độ $x_0 = 1$.

Bài 4: Cho hàm số $y = \frac{2x+2}{x-1}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến tạo với hai trục tọa độ lập thành một tam giác cân.

ĐỀ 2

I. Phần trắc nghiệm

Câu 1. Cho $y = \frac{x^2}{x-1}$. Tập nghiệm của bất phương trình $y' > 0$ là

- A. $(0; 2)$ B. $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ C. $(-\infty; 3)$ D. $(-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$

Câu 2: Cho $(\sin^2 x - \cos^2 x + x)' = a + b \sin 2x$. Khi đó tổng $a + b$ bằng:

- A. 3. B. 0. C. 5. D. 2.

Câu 3. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong (C): $y = \frac{2x-1}{x+1}$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng d: $x + 3y - 6 = 0$

- A. $y = 3x - 1, y = 3x + 11$ B. $y = 3x - 1, y = -3x + 11$
C. $y = 3x + 1, y = 3x + 11$ D. $y = 3x - 1, y = 3x - 11$

Câu 4. Đạo hàm của hàm số $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$ là:

- A. $\frac{3-x}{(1-x)\sqrt{1-x}}$. B. $\frac{3-x}{1-x}$. C. $\frac{x-3}{2\sqrt{(1-x)^3}}$. D. $\frac{3-x}{2\sqrt{(1-x)^3}}$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 2}$. Giá trị $f'(1)$ bằng:

- A. $\frac{4}{3}$. B. -2. C. 4. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 6. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S = 3t^3 - 3t^2 + t$, trong đó t được tính bằng giây và S được tính bằng mét. Vận tốc tại thời điểm $t = 1$ (m/s) là:

- A. 2(m/s). B. 1(m/s). C. 6(m/s). D. 4(m/s).

Câu 7. Giới hạn (nếu tồn tại) nào sau đây dùng để định nghĩa đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại x_0 ?

- A. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. B. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.
C. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. D. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Câu 8. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào **sai**?

- A. $(kx)' = k$. B. $(x^n)' = nx^{n-1}, n \in \mathbb{N}, n > 1$.
C. $(Cx)' = 1$. (C là hằng số). D. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, x \neq 0$.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x) = x^2 - 2x + 3$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$.

- A. $y = -4x - 2$. B. $y = -4x + 2$. C. $y = 4x + 2$. D. $y = -4x + 6$.

Câu 10. Cho hàm số $y = x^2 + 2x + 1$ khi đó phương trình tiếp tuyến tại điểm có tung độ bằng 4 là

- A. $x + 4y + 8 = 0$. B. $4x + y - 8 = 0$. C. $4x + y + 8 = 0$. D. $4x + 3y + 8 = 0$.

II. Phần tự luận

Bài 1: (2,5đ) Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x^6 - 4\sqrt{x} + \frac{x^3}{3} + 10.$

b) $y = (2x-1)(x^2+x+8)$

Bài 2: Cho hàm số $y = \sqrt{1+\cos^2 x} \cdot \sin x$. Tính $f'(\pi)$.

Bài 3: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$.

Bài 4: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x+3}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến tạo với hai trục tọa độ lập thành một tam giác cân.

ĐỀ 3

I. Phần trắc nghiệm

Câu 1: Cho hàm số $y = x\sqrt{x}$, với $x > 0$. Tính y' .

A. $y' = \frac{x}{\sqrt{x}}$.

B. $y' = \frac{3}{2}x$.

C. $y' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

D. $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

Câu 2: Biết $\left(\frac{3-5x}{x^2-x+1}\right)' = \frac{ax^2+bx+c}{(x^2-x+1)^2}$. Tính $S = ac + b$.

A. $S = 16$.

B. $S = -10$.

C. $S = -16$.

D. $S = 5$.

Câu 3: Cho $f(x) = x^3 + x - \sqrt{2}$; $g(x) = 3x^2 + x + \sqrt{2}$. Giải bất phương trình $f'(x) > g'(x)$.

A. $x \in (-\infty; 0]$.

B. $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

C. $x \in [2; +\infty)$.

D. $x \in (0; 2)$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x) = x^2 - 2x + 3$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$.

A. $y = x - 5$.

B. $y = -4x + 2$.

C. $y = x + 7$.

D. $y = x - 7$.

Câu 5: Biết $(\cos 3x + 3\sin x + 2)' = a \cos 3x + b \cos x + c$. Tính $P = (ab)^c$.

A. $P = 9$.

B. $P = \frac{1}{27}$.

C. $P = 81$.

D. $P = 1$.

Câu 6: Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào sai?

A. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, x \neq 0$.

B. $(x^n)' = nx^{n-1}, n \in \mathbb{N}, n > 1$.

C. $(C)' = 1$ (C là hằng số).

D. $(kx)' = k$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ và điểm $x_0 = 0$. Gọi $\Delta_x = x - x_0$ gọi là số gia của đối số tại x_0 và

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ gọi là số gia tương ứng của hàm số. Tính $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

A. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = -2$.

B. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = -1$.

C. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = 1$.

D. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = 2$.

Câu 8: Cho hàm số $y = mx^3 + x^2 + x - 5$ (m là tham số thực). Tìm m để phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

A. $m < 0$.

B. $m \leq 0$.

C. $m > -4$.

D. $m \geq 1$.

Câu 9: Cho một chất điểm chuyển động có phương trình là $S(t) = 2t^3 - 2t^2 + t - 1$, (trong đó t tính bằng s và S tính bằng m). Tính gia tốc a của chuyển động tại thời điểm $t = 4s$.

- A. $a = 44 m/s^2$. B. $a = 4 m/s^2$. C. $a = 40 m/s^2$. D. $a = 12 m/s^2$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng -1 .

- A. $y = \pm 3x + \frac{5}{4}$. B. $y = 3x + \frac{5}{4}$. C. $y = -3x + \frac{7}{4}$. D. $y = \pm 3x - \frac{7}{4}$.

II. Phần tự luận

Bài 1. Tính đạo hàm của hàm số $y = (x-1)^2(2x+1)$

Bài 2. Cho hàm số $y = f(x) = x^2 - 1 + \sin 6x \cdot \cos 6x$. Tính $f'\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

Bài 3. Cho hai hàm số $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 - \frac{9}{4}$ có đồ thị là (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại các giao điểm của nó với trục Ox .

Bài 4. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-2}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết rằng tiếp tuyến song song với đường thẳng $5x + y + 1 = 0$.

ĐỀ 4

I. Phần trắc nghiệm

Câu 1: Biết $(\sin 2x + 2 \cos x + 1)' = a \cos 2x + b \sin x + c$. Tính $P = (ab)^c$.

- A. $P = 32$. B. $P = 16$. C. $P = 4$. D. $P = 1$.

Câu 2: Cho một chất điểm chuyển động có phương trình là $S(t) = 2t^3 - 2t^2 + t - 1$, (trong đó t tính bằng s và S tính bằng m). Tính vận tốc V của chuyển động tại thời điểm mà gia tốc bằng 0 (m/s^2)

- A. $V = 5 m/s^2$. B. $V = \frac{1}{2} m/s^2$. C. $V = \frac{1}{3} m/s^2$. D. $V = 10 m/s^2$.

Câu 3: Biết $\left(\frac{3-5x}{x^2-x+1}\right)' = \frac{ax^2+bx+c}{(x^2-x+1)^2}$. Tính $S = a+bc$.

- A. $S = 7$. B. $S = -7$. C. $S = 4$. D. $S = -3$.

Câu 4: Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào sai?

- A. $(ax+b)^n = na(ax+b)^{n-1}, n \in \mathbb{N}, n > 1$. B. $(kx^{10})' = 10kx^9$.
C. $\left(\frac{a}{x}\right)' = -\frac{a}{x^2}, x \neq 0$. D. $(C+x)' = C+1$ (C là hằng số).

Câu 5: Cho $f(x) = 3x + \frac{60}{x} - \frac{64}{x^3} + 5$. Giải phương trình $f'(x) = 0$.

- A. $x \in \{\pm 2; \pm 3\}$. B. $x \in \{2; 4\}$. C. $x \in \{\pm 4; \pm 1\}$. D. $x \in \{\pm 2; \pm 4\}$.

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{x}{\sqrt{x}}$, với $x > 0$. Tính y' .

- A. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. B. $y' = \frac{1}{2}\sqrt{x}$. C. $y' = \frac{2}{3}\sqrt{x}$. D. $y' = 1$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x) = x^2 - 2x + 3$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có tung độ bằng 3.

- A. $y = 10x + 17$. B. $y = 10x + 7$. C. $y = x + 7$. D. $y = x + 1$.

Câu 8: Viết phương trình tiếp tuyến của đường hypebol $y = \frac{1}{x}$ tại điểm có hoành độ bằng -1.

- A. $y = -x - 1$. B. $y = -x - 2$. C. $y = x + 2$. D. $y = -x$.

Câu 9: Cho hàm số $y = mx^3 + x^2 + x - 5$ (m là tham số thực). Tìm m để bất phương trình $y' > 0$, với mọi x .

- A. $m \geq \frac{1}{3}$. B. $m > \frac{1}{3}$. C. $m < -1$. D. $m < 2$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{2x-1}$ và điểm $x_0 = 5$. Gọi $\Delta_x = x - x_0$ gọi là số gia của đối số tại x_0 và

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ gọi là số gia tương ứng của hàm số. Tính $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

- A. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{1}{6}$. B. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = 3$.
C. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{1}{3}$. D. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = 6$.

II. Phần tự luận

Bài 1. Tính đạo hàm của hàm số $y = 4x^4(2x^2 + 3x + 1)$

Bài 2. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{\sin x}{1 + \cos x}$. Tính $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Bài 3. Cho hai hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ có đồ thị là (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại các giao điểm của nó với trục tung.

Bài 4. Cho (C): $y = \frac{2x+1}{x-1}$. Viết phương trình tiếp tuyến (Δ) của (C) biết (Δ) vuông góc với (Δ') có phương trình $3x - y + 5 = 0$.

ĐỀ 5

I. Phần trắc nghiệm

Câu 1: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 2$ có hệ số góc $k = -9$, có phương trình là

- A. $y - 16 = -9(x + 3)$. B. $y + 16 = -9(x + 3)$.
C. $y + 16 = -9(x - 3)$. D. $y - 16 = -9(x - 3)$.

Câu 2: Cho $u = u(x), v = v(x)$, $n \in \mathbb{N}^*$, k là hằng số. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. B. $(u \pm v)' = u' \pm v'$. C. $(u^n)' = n.u^{n-1}$. D. $(k.x)' = k$.

Câu 3: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0; y_0)$, với $y_0 = f(x_0)$ có dạng là

- A. $y - y_0 = f'(x).(x - x_0)$. B. $y - y_0 = f'(x_0).(x - x_0)$.
C. $y = f'(x_0).(x - x_0) - y_0$. D. $y + y_0 = f'(x_0).(x + x_0)$.

Câu 4: Cho $\left[(4x-3)\sqrt{2x+1}\right]' = \frac{mx+n}{\sqrt{2x+1}}$. Tính $A = m - n$?

A. $A = 11$.

B. $A = 13$.

C. $A = 9$.

D. $A = 7$.

Câu 5: Tìm đạo hàm của hàm số $y = x^{2017} - \frac{2}{x} + 2018$?

A. $y' = 2016x^{2017} + \frac{2}{x^2}$.

B. $y' = x^{2016} + \frac{1}{x^2} + 2017$.

C. $y' = 2017x^{2016} - \frac{2}{x^2}$.

D. $y' = 2017x^{2016} + \frac{2}{x^2}$.

Câu 6: Cho $(\cos 2x - \tan 3x)' = a \sin 2x + \frac{b}{\cos^2 3x}$. Tính $S = a - b$?

A. $S = -5$.

B. $S = -1$.

C. $S = 1$.

D. $S = 5$.

Câu 7: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{4}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ có phương trình là

A. $y = -x - 3$.

B. $y = x - 1$.

C. $y = x + 2$.

D. $y = -x + 2$.

Câu 8: Một vật rơi tự do theo phương trình $S = \frac{1}{2}gt^2$ (m), với $g = 9,8$ (m/s^2). Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 5$ (s) là

A. $122,5$ (m/s).

B. $29,5$ (m/s).

C. 10 (m/s).

D. 49 (m/s).

Câu 9: Cho $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x) \leq 0$ là

A. $[-2; 2]$.

B. $\emptyset$.

C. $(0; +\infty)$.

D. $\mathbb{R}$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x) = 2 \sin x - \sin 2x$. Giải phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm là

A. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

II. Phần tự luận

Bài 1. Tìm đạo hàm của hàm số $y = (\sqrt{x} + 1) \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right)$.

Bài 2. Tính giá trị đạo hàm của hàm số $y = \frac{\tan^2 x}{\sin 2x}$ tại $x = \frac{\pi}{3}$.

Bài 3. Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 1}{2x - 1}$ tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung.

Bài 4. Lập phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = x^3 - 3x^2 + 2$ vuông góc với đường thẳng $x - 3y - 9 = 0$.

ĐỀ 6

I. Phần trắc nghiệm

Câu 1: Tìm đạo hàm của hàm số $y = x^5 + \sqrt{x} - 3$?

A. $y' = 5x^4 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

B. $y' = 5x^4 + \frac{1}{2\sqrt{x}} - 3$.

C. $y' = 5x^4 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

D. $y' = 4x^5 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}, (C)$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng 5 là

A. $y = -3x - 1$.

B. $y = -3x + 11$.

C. $y = -3x + 1$.

D. $y = 3x + 1$.

Câu 3: Cho $u = u(x), v = v(x), n \in \mathbb{N}^*$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

B. $(u.v)' = u'.v'$.

C. $(x^n)' = n.x^{n-1}$.

D. $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$.

Câu 4: Cho $(\sin 3x \cdot \cot x)' = a \cos 3x \cdot \cot x + \frac{b \sin 3x}{\sin^2 x}$. Tính $P = a.b$?

A. $P = 3$.

B. $P = -2$.

C. $P = 2$.

D. $P = -3$.

Câu 5: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Hệ số góc của tiếp tuyến của đường cong $y = f(x)$ tại tiếp điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ là $f'(x_0)$.

B. $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

C. Nếu một hàm số có đạo hàm tại một điểm thì nó liên tục tại điểm đó.

D. Nếu một hàm số liên tục tại một điểm thì nó có đạo hàm tại điểm đó.

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = \sin x + \cos x - \sqrt{2}x$. Giải phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm là

A. $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 7: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ tại điểm có hoành độ bằng 2 là

A. $y = -2x + 7$.

B. $y = 2x - 1$.

C. $y = \frac{1}{2}x + 4$.

D. $y = -2x + 1$.

Câu 8: Cho $\left(\frac{3-2x}{\sqrt{4x-1}}\right)' = \frac{ax-b}{(4x-1)\sqrt{4x-1}}$. Tính $E = \frac{a}{b}$?

A. $E = 4$.

B. $E = -1$.

C. $E = -16$.

D. $E = -4$.

Câu 9: Cho chuyển động được xác định bởi phương trình $S = 2t^3 + 3t^2 + 5t$, trong đó t được tính bằng giây và S được tính bằng mét. Vận tốc của chuyển động khi $t = 2(s)$ là

A. $41(m/s)$.

B. $36(m/s)$.

C. $20(m/s)$.

D. $24(m/s)$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x) > 0$ là

A. $(2; +\infty)$.

B. $(0; 2)$.

C. $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

D. $(-\infty; 0)$.

II. Phần tự luận

Bài 1. Tìm đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{\frac{2x-3}{3x-2}}$.

Bài 2. Tính giá trị đạo hàm của hàm số $y = \cot 3x \cdot \cos^2 x$ tại $x = \frac{\pi}{4}$.

Bài 3. Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị (H): $y = \frac{x-1}{x+2}$ tại giao điểm của (H) và trục hoành.

Bài 4. Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \sqrt{3x-2}$ song song với đường thẳng $3x - 2y + 1 = 0$.