TÌM SỐ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH HÀM HỢP

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

• $f(x)=m$ là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y=f(x)$, $y=m$. Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của hai đồ thị $y=f(x)$, $y=m$.

• $f(x)=g(x)$ là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y=f(x)$, $y=g(x)$. Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của hai đồ thị $y=f(x)$, $y=g(x)$.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

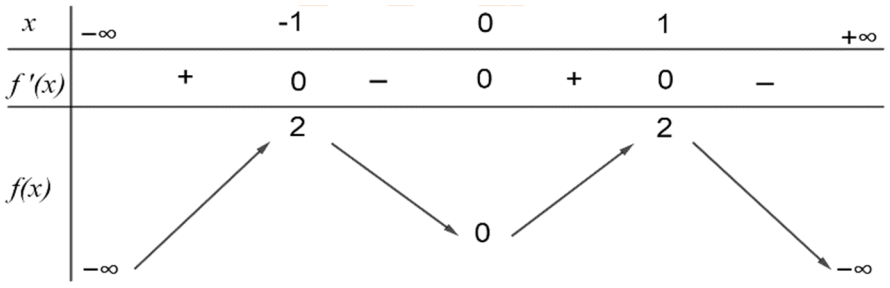
• Sử dụng BBT hoặc đồ thị của hàm số $f(x)$ để tìm số nghiệm thuộc đoạn $[a;b]$ của phương trình $c.f(g(x))+d=m$, với g(x) là hàm số lượng giác.

• Sử dụng BBT hoặc đồ thị của hàm số $f(x)$ để tìm số nghiệm thuộc đoạn $[a;b]$ của phương trình $c.f(g(x))+d=m$, với g(x) là hàm số căn thức, đa thức, …

• Sử dụng BBT hoặc đồ thị của hàm số $f(x)$ để tìm số nghiệm thuộc đoạn $[a;b]$ của phương trình $c.f(g(x))+d=m$, với g(x) là hàm số mũ, hàm số logarit.

• Sử dụng BBT hoặc đồ thị của hàm số $f(x)$ để tìm số nghiệm thuộc đoạn $[a;b]$ của phương trình $c.f(g(x))+d=m$, với g(x) là hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối.

(ĐỀ MINH HỌA LẦN 2 - BDG 2019 - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\frac{5\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(\sin x)=1$ là

A. 7 . **B.** 4 . **C.** 5 . **D.** 6 .

Phân tích:

1. DẠNG TOÁN: Đây là dạng toán sử dụng BBT hoặc đồ thị của hàm số $f(x)$ để tìm số nghiệm thuộc đoạn $[a;b]$ của PT $c.f(g(x))+d=m$.

2. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

Số nghiệm thuộc đoạn $[a';b']$ của PT $f(t)=k$ là số giao diểm của đồ thị $y=f(t)$ và đường thẳng $y=k$ với $t\in[a';b']$ (k là tham số).

3. HƯỚNG GIẢI:

B1: Đặt ẩn phụ $t = g(x)$. Với $x \in [a;b] \Rightarrow t \in [a';b']$.

B2: Với $c.f(g(x)) + d = m \Rightarrow f(t) = k$.

B3: Từ BBT của hàm số $y = f(x)$ suy ra BBT của hàm số $y = f(t)$ để giải bài toán số nghiệm thuộc đoạn $[a';b']$ của phương trình $f(t) = k$.

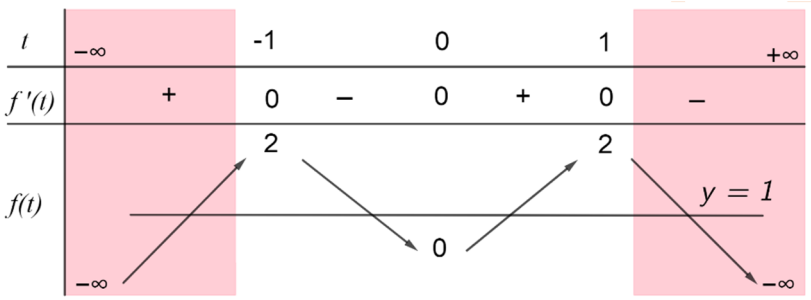
Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn C

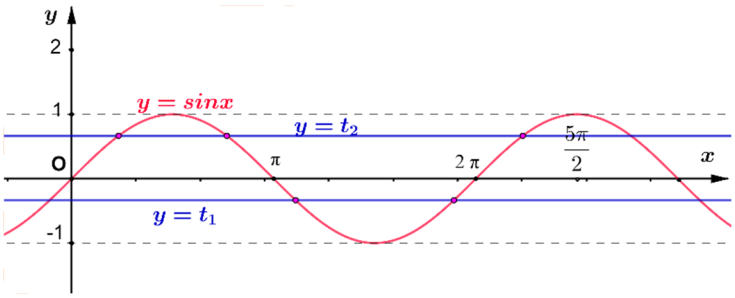
Đặt $t = \sin x,\ t \in [-1;1]$ thì PT $f(\sin x) = 1\ (1)$ trở thành $f(t) = 1\ (2)$.

BBT hàm số $y = f(t), t \in [-1;1]$:



Dựa vào BBT ta có số nghiệm $t \in [-1;1]$ của PT (1) là 2 nghiệm phân biệt $t_1 \in (-1;0),\ t_2 \in (0;1)$.

Quan sát đồ thị $y = \sin x$ và hai đường thẳng $y = t_1$ với $t_1 \in (-1;0)$ và $y = t_2$ với $t_2 \in (0;1)$.

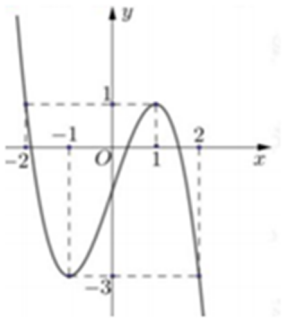


+ Với $t_1 \in (-1;0)$ thì PT $\sin x = t_1$ có 2 nghiệm $x \in \left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

+ Với $t_2 \in (0;1)$ thì PT $\sin x = t_2$ có 3 nghiệm $x \in \left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Vậy số nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(\sin x) = 1$ là $2 + 3 = 5$ nghiệm.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ.



Phương trình $f\left(2-f\left(x\right)\right)=1$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

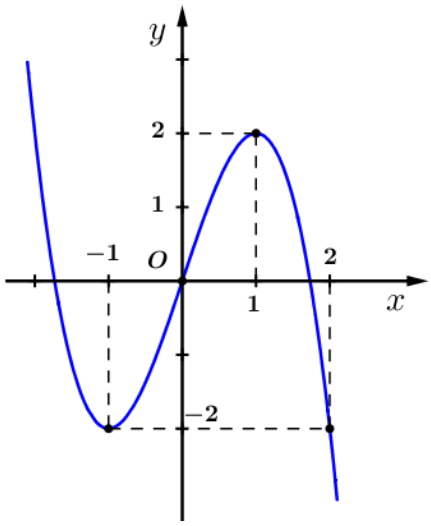
Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị ta có $f\left(2-f\left(x\right)\right)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2-f\left(x\right)=-2\\2-f\left(x\right)=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=4\\f\left(x\right)=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_0\left(x_0<-2\right)\\x=-2\\x=1\end{array}\right.$.

Vậy phương trình $f\left(2-f\left(x\right)\right)=1$ có ba nghiệm phân biệt.

Câu 2. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên.

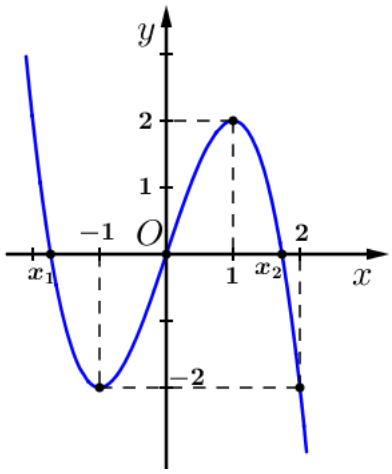


Số nghiệm phân biệt của phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=-2$ là

A. 7. **B.** 9. **C.** 3 **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

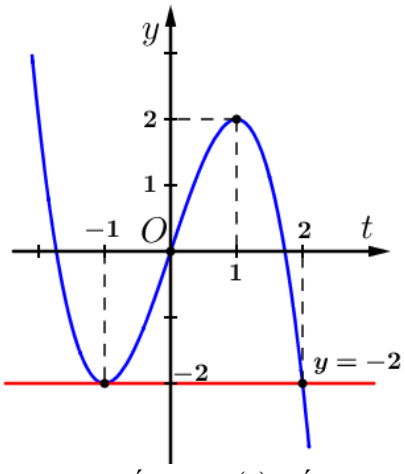


Dựa vào hình vẽ của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, ta thấy đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là $x=x_1$, $x=0$ và $x=x_2$.

Đặt $t=f\left(x\right)$.

Phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=-2$ trở thành phương trình $f\left(t\right)=-2$.

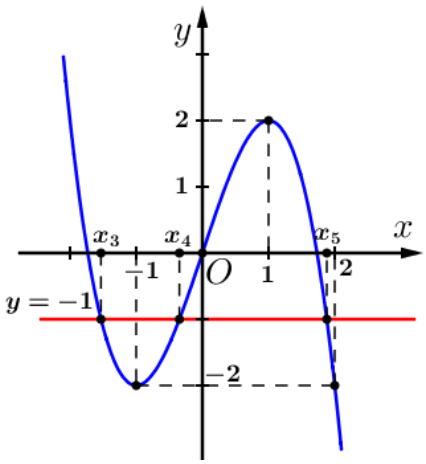
Ta có nghiệm của phương trình $f\left(t\right)=-2$ là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f\left(t\right)$ và đường thẳng $y=-2$.



Dựa vào hình vẽ trên, ta thấy đồ thị hàm số $y=f\left(t\right)$ cắt đường thẳng $y=-2$ tại 2 điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $t=-1$ và $t=2$, hay ta có $f\left(x\right)=-1$ và $f\left(x\right)=2$.

Trường hợp 1:

Xét phương trình $f\left(x\right)=-1$, ta có nghiệm của phương trình $f\left(x\right)=-1$ là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và đường thẳng $y=-1$.

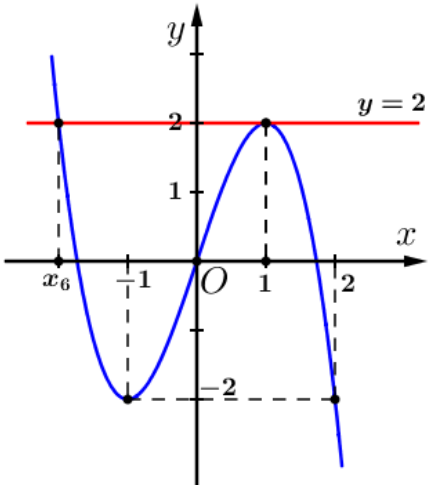


Dựa vào hình vẽ trên, ta thấy đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt đường thẳng $y=-1$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $x=x_3\left(x_1<x_3<-1\right)$, $x=x_4$, và $x=x_5$.

Vậy phương trình $f(x)=-1$ có 3 nghiệm phân biệt(1).

Trường hợp 2:

Xét phương trình $f(x)=2$, ta có nghiệm của phương trình $f(x)=2$ là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=2$.

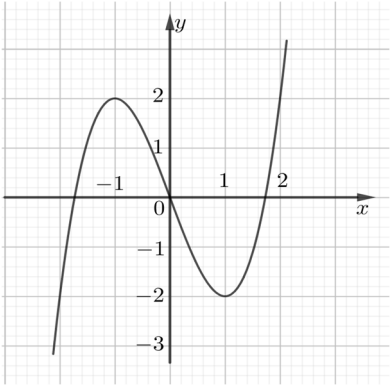


Dựa vào hình vẽ trên, ta thấy đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt đường thẳng $y=2$ tại 2 điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $x=x_6\left(x_6<x_1\right)$ và $x=1$.

Vậy phương trình $f(x)=2$ có 2 nghiệm phân biệt(2).

Từ (1) và (2), suy ra số nghiệm phân biệt của phương trình $f\left(f(x)\right)=-2$ là 5.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình dưới đây.

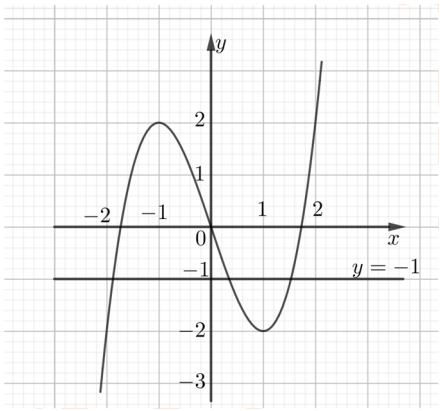


Số nghiệm phân biệt của phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)+1=0$ là

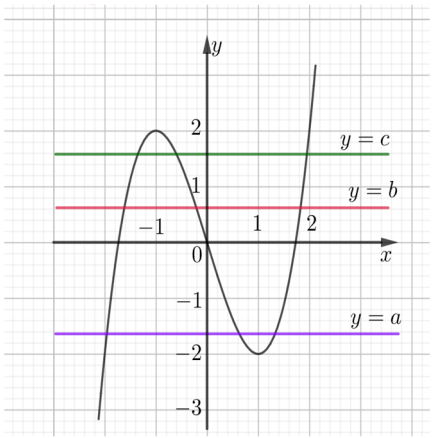
A. 9. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A



Xét $f\left(f\left(x\right)\right)+1=0\Leftrightarrow f\left(f\left(x\right)\right)=-1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x\right)=a\ \ \left(-2<a<-1\right) \\ f\left(x\right)=b\ \ \left(0<b<1\right) \\ f\left(x\right)=c\ \ \left(1<c<2\right) \end{array}\right.$.



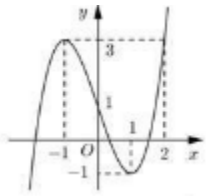
Xét $f\left(x\right)=a\ \left(-2<a<-1\right)$: Dựa vào đồ thị ta thấy $y=a$ cắt đồ thị tại 3 điểm phân biệt $\left(1\right)$.

Xét $f\left(x\right)=b\ \left(0<b<1\right)$: Dựa vào đồ thị ta thấy $y=b$ cắt đồ thị tại 3 điểm phân biệt $\left(2\right)$.

Xét $f\left(x\right)=c\ \left(1<c<2\right)$: Dựa vào đồ thị ta thấy $y=c$ cắt đồ thị tại 3 điểm phân biệt $\left(3\right)$.

Các nghiệm ở trên không có nghiệm nào trùng nhau nên $\left(*\right)$ có 9 nghiệm phân biệt

Câu 4. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ sau



Số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\pi^x\right)-\frac{m^2-1}{8}=0$ có hai nghiệm phân biệt là

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\pi^x,(t>0)$, khi đó: $f\left(\pi^x\right)-\frac{m^2-1}{8}=0$ có hai nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow f(t)=\frac{m^2-1}{8}$ có hai nghiệm dương phân biệt.

$\Leftrightarrow -1<\frac{m^2-1}{8}<1\Leftrightarrow -3<m<3$.

$\Rightarrow m$ là số nguyên nên $m\in\{-2;-1;0;1;2\}$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x+1$. Khi đó phương trình $f(f(x))=0$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 9. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải.

Chọn C

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		1		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		0		$+$		0		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\searrow$	$-\infty$

Ở đây $f(x)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.$ và $f(x)=-\frac{1}{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=4\end{array}\right.$.

Suy ra $f\left(f(x)\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=a\in(0;1)\\f(x)=b\in(1;3)\\f(x)=c\in(3;4)\end{array}\right.$.

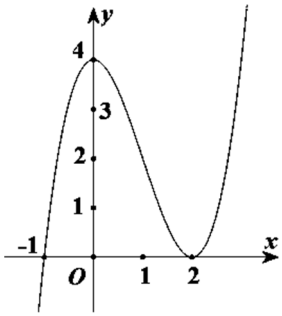
Phương trình $f(x)=a$ có 3 nghiệm.

Phương trình $f(x)=b$ có 1 nghiệm.

Phương trình $f(x)=c$ có 1 nghiệm.

Dễ thấy các nghiệm không trùng nhau nên phương trình đã cho có 5 nghiệm.

Câu 6. Cho $y=f(x)$ là hàm số bậc 3 và có đồ thị như hình vẽ bên.



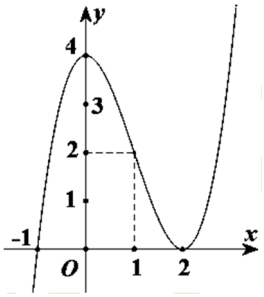
Số nghiệm thuộc nửa khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{29\pi}{6}\right]$ của phương trình $f\left(2\sin x+1\right)=\frac{19}{10}$ là

A. 17. **B.** 15. **C.** 10. **D.** 16.

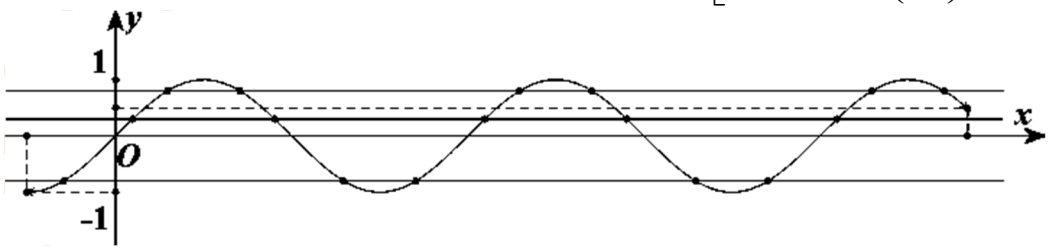
Lời giải.

Chọn D

Vì $y=f\left(x\right)$ là hàm số bậc 3 nên điểm uốn của ĐTHS là $I\left(1;2\right)$.



Do đó, từ đồ thị ta có: $f\left(2\sin x+1\right)=\frac{19}{10}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2\sin x+1=a\in\left(-1;0\right)\\2\sin x+1=b\in\left(1;2\right)\\2\sin x+1=c\in\left(2;3\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=\frac{a-1}{2}\in\left(-1;-\frac{1}{2}\right)\left(1\right)\\\sin x=\frac{b-1}{2}\in\left(0;\frac{1}{2}\right)\quad\left(2\right)\\\sin x=\frac{c-1}{2}\in\left(\frac{1}{2};1\right)\quad\left(3\right)\end{array}\right.$



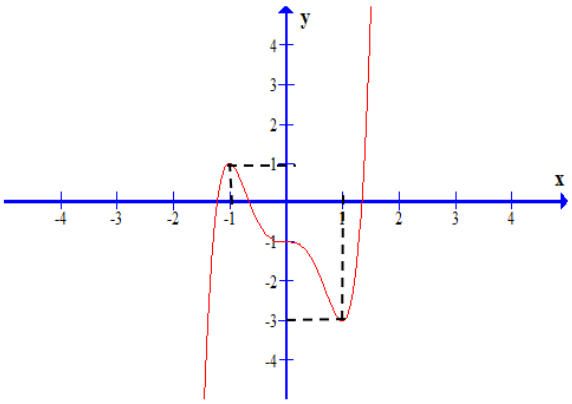
$29\pi/6$ $-\pi/2$

Dựa vào đồ thị hàm số $y=\sin x$ trên nửa khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{29\pi}{6}\right]$ hoặc dùng đường tròn lượng giác, ta được:

- Phương trình $\left(1\right)$ có 5 nghiệm phân biệt.
- Phương trình $\left(2\right)$ có 5 nghiệm phân biệt khác 5 nghiệm ở trên.
- Phương trình $\left(3\right)$ có 6 nghiệm phân biệt khác 10 nghiệm ở trên.

Vậy phương trình đã cho có 16 nghiệm trên nửa khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{29\pi}{6}\right]$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f\left(\left|x\right|-1\right)=m$ có 4 nghiệm phân biệt?



A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

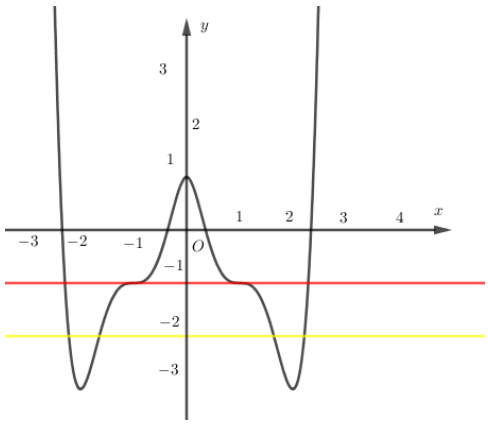
Lời giải

Chọn C

- Hàm số $y = f\left(|x|-1\right)$ là hàm số chẵn nên đồ thị hàm số nhận trục Oy làm trục đối xứng.

- Ta có $f\left(|x|-1\right)=\begin{cases} f\left(x-1\right) & khi\ x \ge 0 \\ f\left(-x-1\right) & khi\ x<0 \end{cases}$

+) Ta vẽ đồ thị $\left(C_1\right)$ của hàm số $y = f\left(x-1\right)$ được suy từ đồ thị $\left(C\right)$của hàm số $y = f\left(x\right)$ đã cho bằng cách tịnh tiến $\left(C\right)$ sang phải 1 đơn vị và bỏ đi phần đồ thị ở bên trái trục Oy.

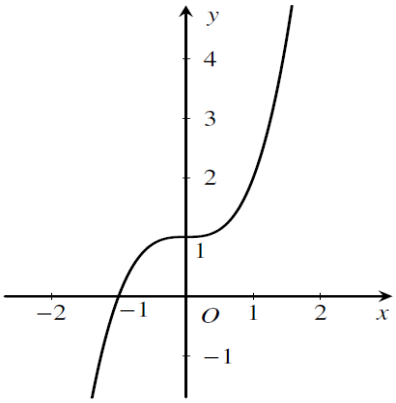


+) Sau đó lấy đối xứng phần đồ thị $\left(C_1\right)$ ở bên phải trục tung qua trục tung thì được đồ thị của hàm số $y = f\left(|x|-1\right)$.

Khi đó, để phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt thì ta phải có $-3 < m < 1$.

Suy ra, có 3 số nguyên thỏa mãn bài toán.

Câu 8. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của n để phương trình $f\left(16\cos^2 x+6\sin 2x-8\right)=f\left(n(n+1)\right)$ có nghiệm $x\in\mathbb{R}$?

A. 10 **B.** 4 **C.** 8 **D.** 6

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó: $f\left(16\cos^2 x+6\sin 2x-8\right)=f\left(n(n+1)\right)\Leftrightarrow 16\cos^2 x+6\sin 2x-8=n(n+1)$

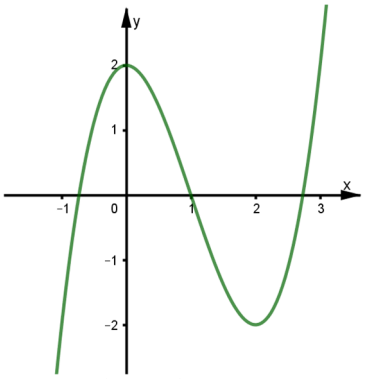
$\Leftrightarrow 16.\dfrac{1+\cos 2x}{2}+6\sin 2x-8=n(n+1)\Leftrightarrow 8\cos 2x+6\sin 2x=n(n+1)$

Phương trình có nghiệm $x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 8^2+6^2\ge n^2(n+1)^2\Leftrightarrow n^2(n+1)^2\le 100$

$\begin{cases} n(n+1)\ge -10 \\ n(n+1)\le 10 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} n^2+n+10\ge 0 \\ n^2+n-10\le 0 \end{cases}\Leftrightarrow n^2+n-10\le 0\Leftrightarrow\dfrac{-1-\sqrt{41}}{2}\le n\le\dfrac{-1+\sqrt{41}}{2}.$

Vì $n\in\mathbb{Z}$ nên $n\in\{-3;-2;-1;0;1;2\}$.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Gọi m là số nghiệm của phương trình $f\left(f(x)\right)=1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

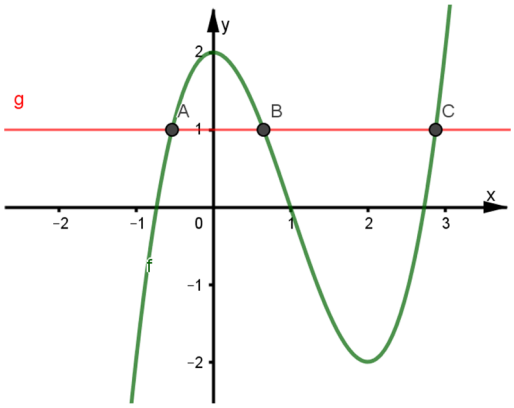
A. $m=6$. **B.** $m=7$. **C.** $m=5$. **D.** $m=9$.

Lời giải

Chọn B

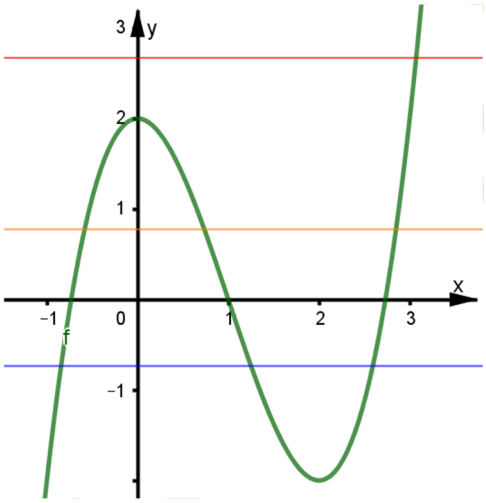
Đặt $f(x)=u$ khi đó phương trình $f\left(f(x)\right)=1$ trở thành $f(u)=1(1)$.

Nghiệm của phương trình (1) là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(u)$ và đường thẳng $y=1$.



Dựa vào đồ thị ta có 3 nghiệm giả sử $u_1 \in (-1;0)$, $u_2 \in (0;1)$, $u_3 \in \left(\frac{5}{2};3\right)$.

Xét số giao điểm của đồ thị hàm số $f(x)$ với từng đường thẳng $y=u_1$, $y=u_2$, $y=u_3$.



Dựa vào đồ thị ta có:

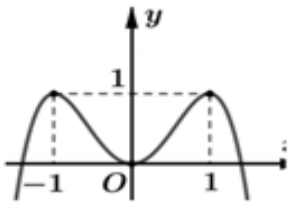
Phương trình $f(x)=u_1$, với $u_1 \in (-1;0)$ cho 3 nghiệm phân biệt.

Phương trình $f(x)=u_2$, với $u_2 \in (0;1)$ cho 3 nghiệm phân biệt.

Phương trình $f(x)=u_3$, với $u_3 \in \left(\frac{5}{2};3\right)$ cho 1 nghiệm duy nhất.

Suy ra phương trình ban đầu $f(f(x))=1$ có 7 nghiệm.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Hỏi có bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn nghiệm của phương trình $f[f(\cos 2x)]=0$?



A. 1 điểm. **B.** 3 điểm. **C.** 4 điểm. **D.** vô số.

Lời giải

Chọn C

Ta luôn có: $-1 \le \cos 2x \le 1$ nên từ đồ thị suy ra: $0 \le f(\cos 2x) \le 1$.

Trên đoạn $[0;1]$: $f[f(\cos 2x)]=0 \Leftrightarrow f(\cos 2x)=0$

Trên đoạn $[-1;1]$: $f(\cos 2x)=0 \Leftrightarrow \cos 2x=0 \Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$.

Vậy có 4 điểm.

Câu 11. Cho hàm số $f(x)=x^5+2x^3+5x-1$. Số nghiệm thực của bất phương trình $f\left(\sin^2 x-2\sin x-3\right)\geq f(0)$ trên đoạn $[-3\pi;3\pi]$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** vô số.

Lời giải

Chọn A

$f'(x)=5x^4+6x^2+5>0,\ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó, bất phương trình $f\left(\sin^2 x-2\sin x-3\right)\geq f(0) \Leftrightarrow \sin^2 x-2\sin x-3\geq 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x\leq -1\\ \sin x\geq 3\end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Nghiệm của bpt đã cho trên đoạn $[-3\pi;3\pi]$ là $-\frac{5\pi}{2},-\frac{\pi}{2}$ và $\frac{3\pi}{2}$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)=x^3-3x+1$. Tìm số nghiệm của phương trình $f\left(f(x)\right)=0$.

A. 5. **B.** 9. **C.** 4. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình $f(x)=0 \Leftrightarrow x^3-3x+1=0$ dùng máy tính cầm tay ta ước lượng được phương trình có ba nghiệm và $\left[\begin{array}{l}x_1\approx -1,879\\ x_2\approx 1,532\\ x_3\approx 0,347\end{array}\right.$.

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x+1$, ta có bảng biến thiên của $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

Xét phương trình $f\left(f(x)\right)=0\ (1)$ ta ước lượng được $\left[\begin{array}{l}f(x)\approx -1,879\\ f(x)\approx 1,532\\ f(x)\approx 0,347\end{array}\right.$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ ta có:

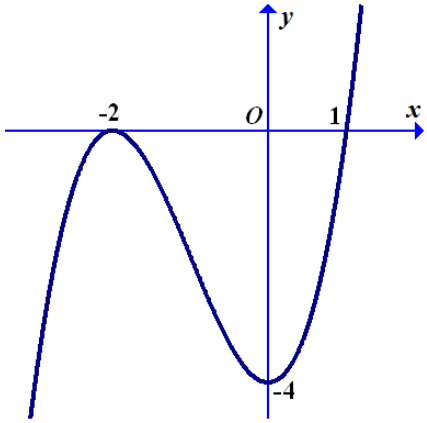
+ Với $f(x)\approx -1,879$ phương trình (1) có 1 nghiệm.

+ Với $f(x)\approx 1,532$ phương trình (1) có 3 nghiệm.

+ Với $f(x)\approx 0,347$ phương trình (1) có 3 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 7 nghiệm.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình bên dưới.



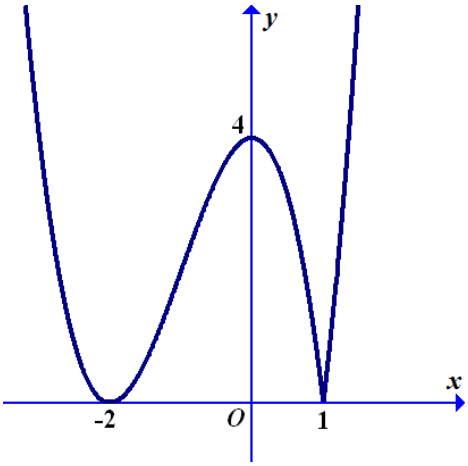
Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(x)-(m+5)|f(x)|+4m+4=0$ có 7 nghiệm phân biệt?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$, vẽ được đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ như sau:



Ta có $f^2(x)-(m+5)|f(x)|+4m+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|f(x)|=4 \quad (1)\\ |f(x)|=m+1 \quad (2)\end{array}\right.$

Từ đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ suy ra phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy để phương trình đã cho có 7 nghiệm phân biệt thì (2) có 4 nghiệm phân biệt và khác với các nghiệm của (1) $\Leftrightarrow 0<m+1<4 \Leftrightarrow -1<m<3$. Do đó có 3 giá trị nguyên của m.

Câu 14. Cho hàm số f xác định trên $\mathbb{R}$ và cũng nhận giá trị trên tập $\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$2f(x)-f(-x)=x^4-12x^3+4$ với mọi x, y thuộc R. Tính giá trị $f(1)$.

A. $f(1)=-1$ **B.** $f(1)=1$ **C.** $f(1)=9$ **D.** $f(1)=-9$

Lời giải

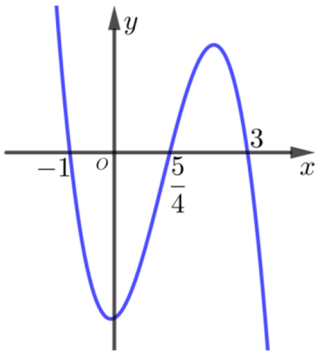
Chọn B

Cho $x=1$ ta được $2f(1)-f(-1)=1^4-12(1)^3+4=-7$

Cho $x=-1$ ta được $2f(-1)-f(1)=(-1)^4-12(-1)^3+4=17$

Ta có hệ $\begin{cases}2f(1)-f(-1)=-7\\ -f(1)+2f(-1)=17\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}f(1)=1\\ f(-1)=9\end{cases}$

Câu 15. Cho hàm số $f(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r$, (với $m,n,p,q,r\in\mathbb{R}$). Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Tập nghiệm của phương trình $f(x)=r$ có số phần tử là

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=4mx^3+3nx^2+2px+q\ (1)$

Dựa vào đồ thị $y=f'(x)$ ta thấy phương trình $f'(x)=0$ có ba nghiệm đơn là $-1,\ \frac{5}{4},\ 3$.

Do đó $f'(x)=m(x+1)(4x-5)(x-3)$ và $m<0$.

Hay $f'(x)=4mx^3-13mx^2-2mx+15m\ (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $n=-\frac{13}{3}m$, $p=-m$ và $q=15m$.

Khi đó phương trình $f(x)=r\Leftrightarrow mx^4+nx^3+px^2+qx=0$

$\Leftrightarrow m\left(x^4-\frac{13}{3}x^3-x^2+15x\right)=0$

$\Leftrightarrow 3x^4-13x^3-3x^2+45x=0$

$\Leftrightarrow x(3x+5)(x-3)^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-\frac{5}{3}\\x=3\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của phương trình $f(x)=r$ là $S=\left\{-\frac{5}{3};0;3\right\}$.

Câu 16. Cho hàm số f xác định trên tập số nguyên và nhận giá trị cũng trong tập số nguyên, thỏa mãn $\begin{cases}f(1)=0\\f(m+n)=f(m)+f(n)+3(4mn-1)\end{cases}$ với mọi m,n là số nguyên.

Tính $f(19)$.

A. $f(19)=1999$. **B.** $f(19)=1998$. **C.** $f(19)=2000$. **D.** $f(19)=2001$

Lời giải

Chọn B

$m=n=1\Rightarrow f(2)=2f(1)+9=9$

$m=n=2\Rightarrow f(4)=2f(2)+45=63$

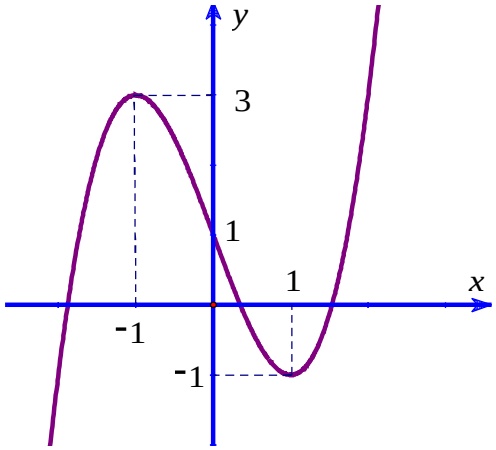
$m=n=4\Rightarrow f(8)=2f(4)+189=315$

$m=n=8\Rightarrow f(16)=2f(8)+765=1395$

$m=2;n=1\Rightarrow f(3)=f(2)+f(1)+21=30$

$m=16;n=3\Leftrightarrow f(19)=f(16)+f(3)+573=1998$

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(\cos x)=-2m+1$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ là



A. $(-1;1]$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(0;1]$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\cos x$. Khi đó: $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ thì $t\in(0;1)$.

Bài toán trở thành: Tìm m để phương trình $f(t)=-2m+1$ có nghiệm $t\in(0;1)$ hay phương trình $f(x)=-2m+1$ có nghiệm $x\in(0;1)$.

Từ đồ thị ta thấy điều kiện bài toán tương đương $-1<-2m+1<1\Leftrightarrow 0<m<1$.

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên sau.

x		0		2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	-1	↗	3	↘ $-\infty$

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(2\tan x)=2m+1$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\frac{\pi}{4})$.

A. $-1<m<\frac{1}{2}$. **B.** $-1\le m\le\frac{1}{2}$. **C.** $-1<m<1$. **D.** $m\le 1$.

Lời giải

Chọn C

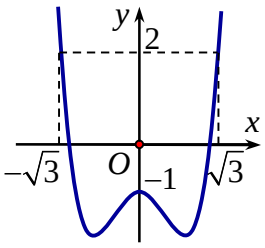
Đặt $t=2\tan x, x\in(0;\frac{\pi}{4})\Rightarrow t\in(0;2)$.

Phương trình $f(2\tan x)=2m+1$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\frac{\pi}{4})$.

$\Rightarrow$ Phương trình $f(t)=2m+1$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;2)$.

Từ BBT ta suy ra $-1<2m+1<3\Leftrightarrow -1<m<1$.

Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ



Đặt $g(x)=3f(x)-x^3+3x-m$, với m là tham số thực. Điều kiện cần và đủ để bất phương trình $g(x)\ge 0$ đúng với $\forall x\in\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$ là

A. $m\le 3f(\sqrt{3})$. **B.** $m\le 3f(0)$. **C.** $m\ge 3f(1)$. **D.** $m\ge 3f(-\sqrt{3})$.

Lời giải

Chọn A

$g(x)\ge 0\Leftrightarrow 3f(x)-x^3+3x-m\ge 0\Leftrightarrow 3f(x)-x^3+3x\ge m$.

Đặt $h(x)=3f(x)-x^3+3x$. Ta có $h'(x)=3f'(x)-3x^2+3$. Suy ra

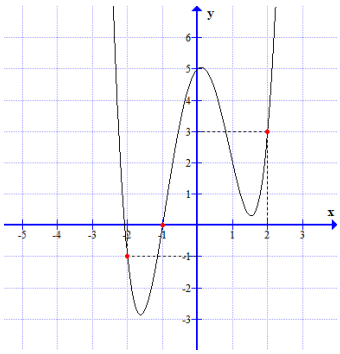
$$\begin{cases} h'(-\sqrt{3})=3f'(-\sqrt{3})-6=0 \\ h'(\sqrt{3})=3f'(\sqrt{3})-6=0 \\ h'(0)=3f'(0)=0 \\ h'(1)=3f'(1)<0 \end{cases}$$

Từ đó ta có bảng biến thiên

x	$-\sqrt{3}$		0		1		$\sqrt{3}$
h'		$-$	0		$-$		
h	$h(-\sqrt{3})$	$\searrow$	$h(0)$	$\searrow$			$h(\sqrt{3})$

Vậy $g(x)\le m\Leftrightarrow g(x)\le h(\sqrt{3})=3f(\sqrt{3})$.

Câu 20. Cho hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Xét tính đơn điệu của hàm số $g(x)=2f(x)-x^2-2x$ ta được

A. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-2);(-1;1);(2;+\infty)$; đồng biến trên $(-2;-1);(1;2)$.

B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-\infty;-2);(-1;1);(2;+\infty)$; nghịch biến trên $(-2;-1);(1;2)$.

C. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-\infty;2);(1;+\infty)$; nghịch biến trên $(-2;1)$.

D. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right);\left(0;\frac{3}{2}\right)$; nghịch biến trên $\left(-\frac{3}{2};0\right);\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$.

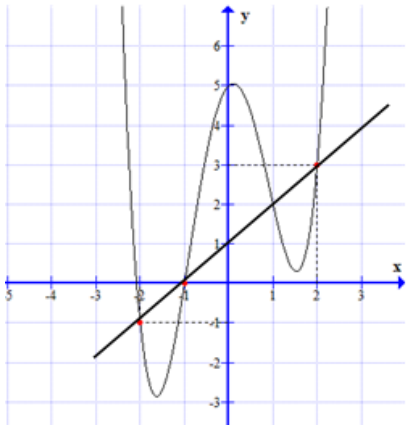
Lời giải

Chọn B

Ta có

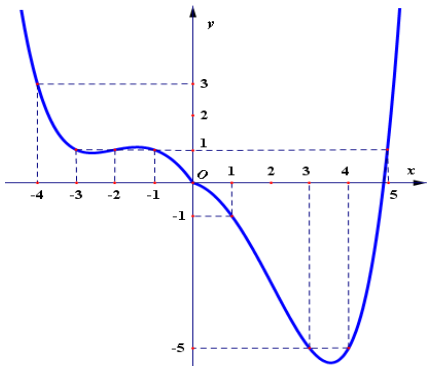
$$g'(x)=2f'(x)-2x-2;\ g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=x+1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=-1\\x=1\\x=2\end{array}\right.$$

Ta có đồ thị sau:



Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-2);(-1;1);(2;+\infty)$; nghịch biến trên $(-2;-1);(1;2)$.

Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2.f\left(3-3\sqrt{-9x^2+30x-21}\right)=m-2019$ có nghiệm.



A. 15. **B.** 14. **C.** 10. **D.** 13.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x \in \left[1;\frac{7}{3}\right]$.

Xét phương trình: $2.f\left(3-3\sqrt{-9x^2+30x-21}\right)=m-2019\ (1)$.

Ta có: $-9x^2+30x-21=4-(3x-5)^2 \Rightarrow 0 \le \sqrt{4-(3x-5)^2} \le 2 \Rightarrow -3 \le 3-3\sqrt{4-(3x-5)^2} \le 3$.

Đặt $t=3-3\sqrt{-9x^2+30x-21}$, $t \in [-3;3]$.

Khi đó, phương trình (1) trở thành: $2.f(t)=m-2019 \Leftrightarrow f(t)=\frac{m-2019}{2}\ (2)$.

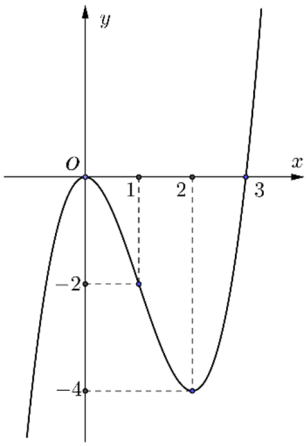
Phương trình (1) có nghiệm $x \in \left[1;\frac{7}{3}\right] \Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm $t \in [-3;3]$.

Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f(x)$, phương trình (2) có nghiệm $t \in [-3;3]$ khi và chỉ khi $-5 \le \frac{m-2019}{2} \le 1 \Leftrightarrow 2009 \le m \le 2021$.

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{2009, 2010, ..., 2021\}$.

Vậy số giá trị nguyên của m là: $2021-2009+1=13$.

Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên trên R có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $7f\left(5-2\sqrt{1+3\cos x}\right)=3m-7$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$?

A. 4. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 5 .

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=5-2\sqrt{1+3cosx}$ (1). Vì $x\in\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow 0\le cosx\le 1\Rightarrow t\in[1;3]$

Phương trình đầu trở thành $f(t)=\frac{3m-7}{7}$ (2)

Nhận xét:

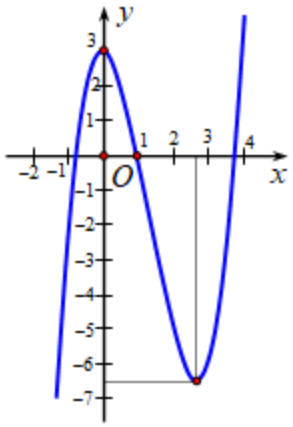
+Với $cosx=1\Rightarrow t=1$ nên khi $t=1$ phương trình (1) chỉ có một nghiệm thuộc $\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

+Với mỗi $t\in(1;3]$ thì phương trình (1) có hai nghiệm thuộc $\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

Như vậy dựa vào đồ thị hàm số ta thấy phương trình đầu có hai nghiệm phân biệt thuộc $\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ khi phương trình (2) có một nghiệm $t\in[1;3]\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{3m-7}{7}=-4\\-2<\frac{3m-7}{7}\le 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-7\\\frac{-7}{3}<m\le\frac{7}{3}\end{array}\right.$

Vì $m\in Z\Rightarrow m\in\{-7;-2;-1;0;1;2\}$

Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới. Đặt $g(x)=f[f(x)]$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$.



A. 2. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x)=f'[f(x)].f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\f'[f(x)]=0\end{array}\right.$

$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=x_3\in(2;3)\end{array}\right.$

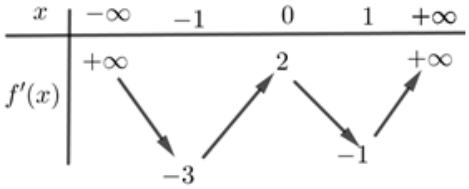
$f'[f(x)]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0\\f(x)=x_3\in(2;3)\end{array}\right.$.

+ $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\in(-1;0)\\x=1\\x=x_3\in(3;4)\end{array}\right.$

+ $f(x)=x_3\in(2;3)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_2>x_1\\x=x_3\in(0;1)\end{array}\right.$.

Vậy phương trình $g'(x)=0$ có 8 nghiệm phân biệt.

Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên của $f'(x)$ như hình sau:



Đặt $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2+2x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $g(1)<g(0)<g(-1)$. **B.** $g(-1)<g(0)<g(1)$.

C. $g(-1)=g(1)>g(0)$. **D.** $g(-1)=g(1)<g(0)$.

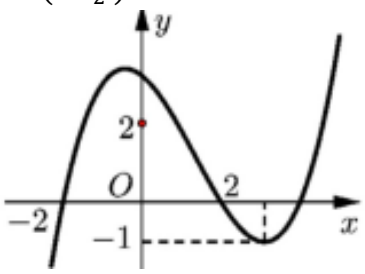
Lời giải

Chọn B

Ta có: $g'(x)=f'(x)-x+2, g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=x-2$

Do đường thẳng $y=x-2$ đi qua $(-1;-3),(1;-1)$ nên dựa vào bảng biến thiên ta có $g'(x)\geq 0,\forall x\Rightarrow g(-1)<g(0)<g(1)$

Câu 25. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(|2\cos x|)=1$ trên khoảng $\left(0;\frac{5\pi}{2}\right)$ là:



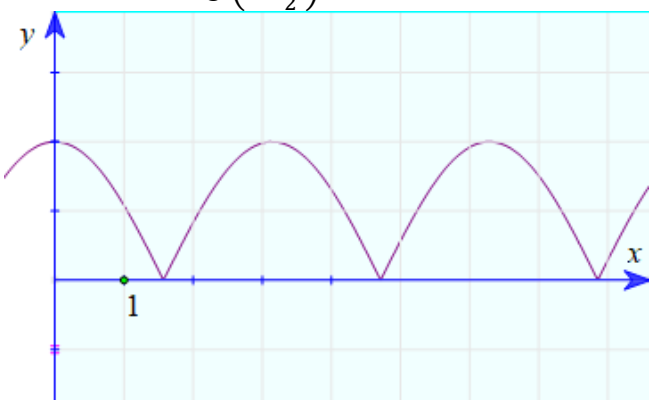
A. 4. **B. 3.** **C. 5.** **D. 2.**

Lời giải

Chọn C

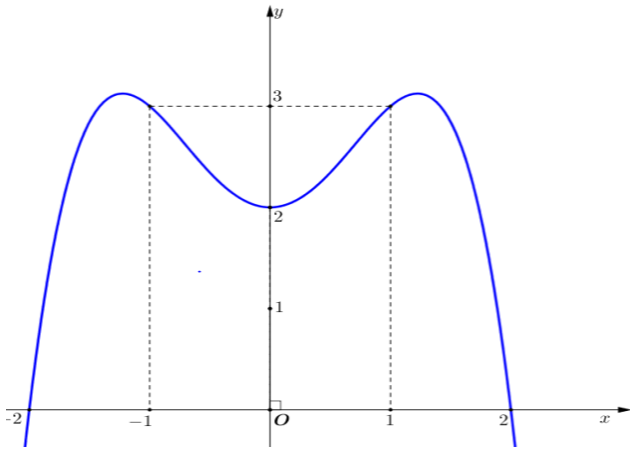
Đặt $t=|2\cos x|\in[0;2],\ \forall x\in\left(0;\frac{5\pi}{2}\right)\Rightarrow f(t)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=a\in(-2;0)\\t=b\in(0;2)\\t=c>2\end{array}\right.\Leftrightarrow|2\cos x|=b\in(0;2)(*)$.

Đồ thị hàm số $y=|2\cos x|$ trên khoảng $\left(0;\frac{5\pi}{2}\right)$ như hình vẽ bên.



Suy ra phương trình $(*)$ có 5 nghiệm thực phân biệt trên khoảng $\left(0;\frac{5\pi}{2}\right)$.

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau



Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(f(x))$ và trục hoành

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(f(x))$ và trục hoành là: $f(f(x)) = 0$ (1).

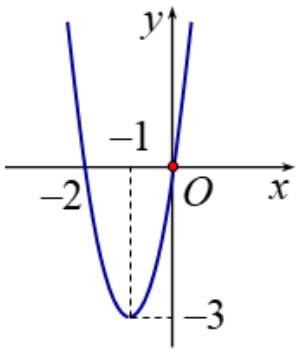
Ta có (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 2 \\ f(x) = -2 \end{array}\right.$.

Số nghiệm của phương trình (1) là tổng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và hai đường thẳng song song $y = 2$ và $y = -2$.

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta thấy tổng số giao điểm bằng 5. Suy ra phương trình (1) có 5n ghiệm phân biệt.

Vậy số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(f(x))$ và trục hoành là 5.

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đạo hàm là hàm số $y = f'(x)$ với đồ thị như hình vẽ bên.



Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ âm. Khi đó đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ là bao nhiêu?

A. –4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ đi qua các điểm $A(-2;0)$, $O(0;0)$ và $C(-1;-3)$ nên ta có

$\begin{cases} 12a-4b+c=0 \\ c=0 \\ 3a-2b+c=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow y=f(x)=x^3+3x^2+d$ và $f'(x)=3x^2+6x$.

Gọi tiếp điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục hoành là $M(x_0;0)$ với $x_0<0$.

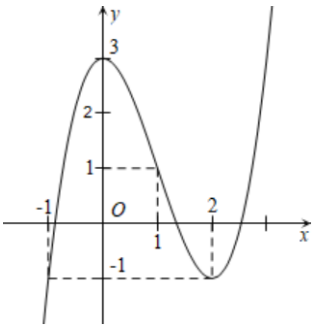
Tiếp tuyến có hệ số góc

$k=0 \Rightarrow y'(x_0)=0 \Leftrightarrow 3x_0^2+6x_0=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0 \\ x_0=-2 \end{array}\right.$. Vì $x_0<0 \Rightarrow x_0=-2$.

$M(-2;0)$ thuộc đồ thị hàm số $y=f(x) \Rightarrow -8+12+d=0 \Rightarrow d=-4$.

Khi đó $y=f(x)=x^3+3x^2-4$. Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ là -4.

Câu 28. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Số nghiệm của phương trình $[f(x^2+1)]^2-f(x^2+1)-2=0$ là

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=x^2+1 \Rightarrow t \geq 1$.

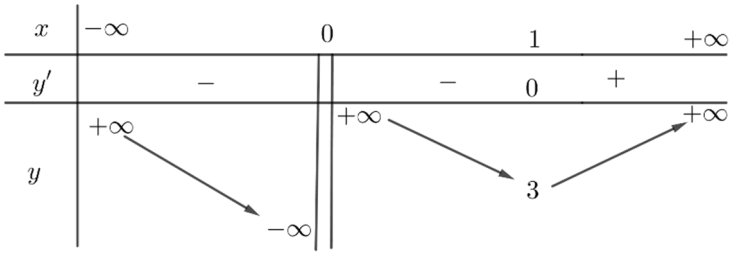
Ta thấy ứng với $t=1$ cho ta một giá trị của x và ứng với mỗi giá trị $t>1$ cho ta hai giá trị của x.

Phương trình đã cho trở thành: $[f(t)]^2-f(t)-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(t)=-1 \\ f(t)=2 \end{array}\right.$.

Từ đồ thị hàm số $y=f(t)$ trên $[1;+\infty)$ suy ra phương trình $f(t)=-1$ có 1 nghiệm $t=2$ và phương trình $f(t)=2$ có 1 nghiệm $t>2$ do đó phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Câu 29. ##Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.



Số nghiệm của phương trình $3\left|f(2x-1)\right|-10=0$ là.

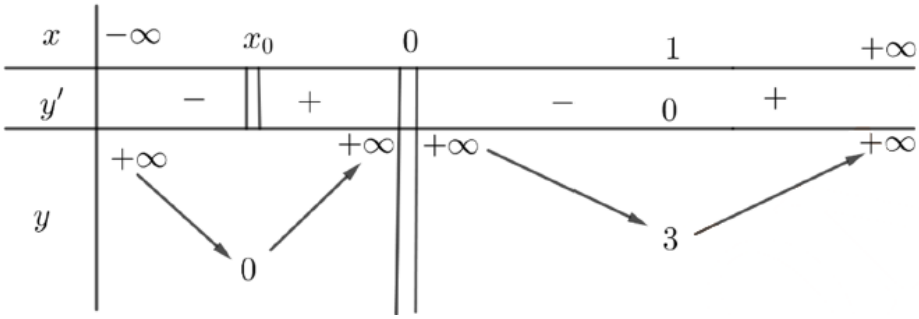
A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

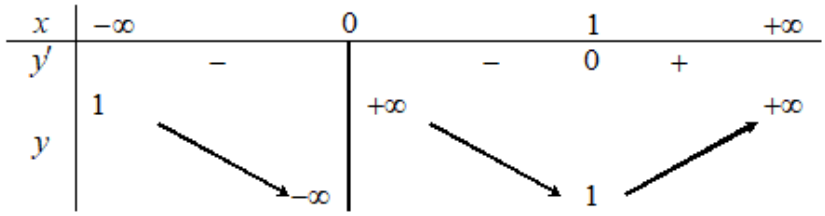
Đặt $t=2x-1$, ta có phương trình trở thành $\left|f\left(t\right)\right|=\frac{10}{3}$. Với mỗi nghiệm t thì có một nghiệm $x=\frac{t+1}{2}$ nên số nghiệm t của phương trình $\left|f\left(t\right)\right|=\frac{10}{3}$ bằng số nghiệm của $3\left|f\left(2x-1\right)\right|-10=0$.

Bảng biến thiên của hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ là



Suy ra phương trình $\left|f\left(t\right)\right|=\frac{10}{3}$ có 4 nghiệm phân biệt nên phương trình $3\left|f\left(2x-1\right)\right|-10=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 30. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)$ trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và có bảng biến thiên như hình dưới. Hỏi phương trình $\left|f\left(x\right)\right|=2$ có bao nhiêu nghiệm?

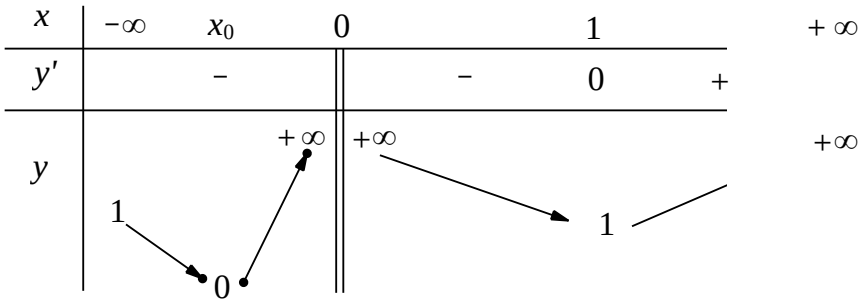


A. 1 nghiệm. **B.** 2 nghiệm. **C.** 3 nghiệm. **D.** 4 nghiệm.

Lời giải

Chọn C

Bảng biến thiên cho hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ như sau:



Dựa vào BBT suy ra: phương trình $\left|f\left(x\right)\right|=2$ có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 31. Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3-3x^2+1$. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{f\left[f\left(x\right)+2\right]+4}=f\left(x\right)+1$ là

A. 5. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=f(x)+2\Rightarrow t=x^3-3x^2+3$

Khi đó phương trình trở thành

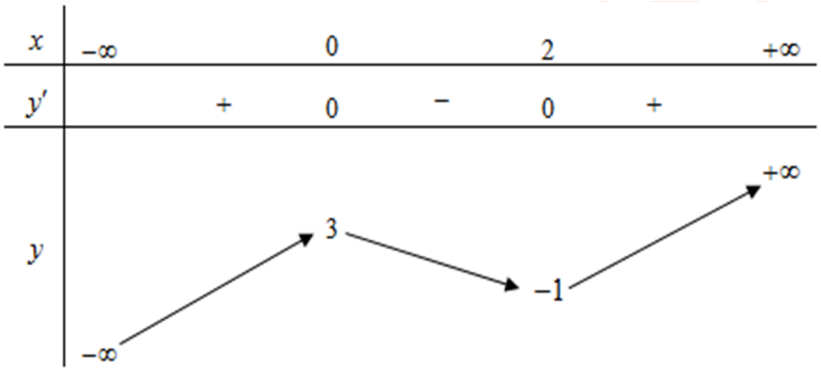
$$\sqrt{f(t)+4}=t-1\Leftrightarrow\begin{cases}t-1\ge 0\\ f(t)+4=t^2-2t+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge 1\\ t^3-4t^2+2t+4=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge 1\\ \left[\begin{array}{l}t=2\\ t=1\pm\sqrt{3}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\ t=1+\sqrt{3}\end{array}\right.$$

Xét hàm số $y=t=x^3-3x^2+3$

$$y'=3x^2-6x=3x(x-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2\end{array}\right.$$

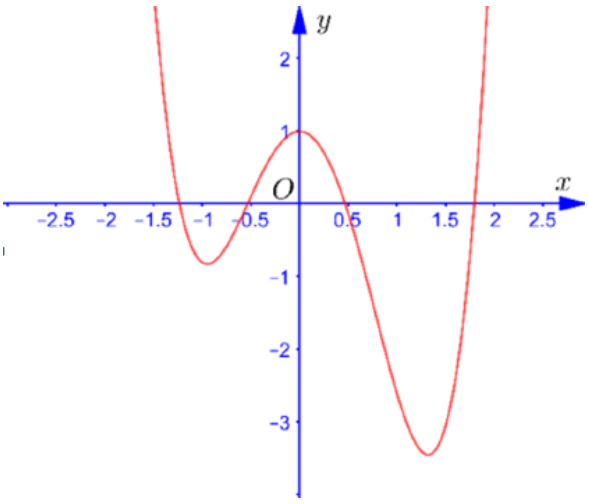
Ta có bảng biến thiên



Dựa vào BBT ta có phương trình $t=2$ có 3 nghiệm phân biệt, phương trình $t=1+\sqrt{3}$ có 3 nghiệm phân biệt.

Vây phương trình ban đầu có 6 nghiệm phân biệt.

Câu 32. Đồ thị hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ có dạng như hình vẽ sau:

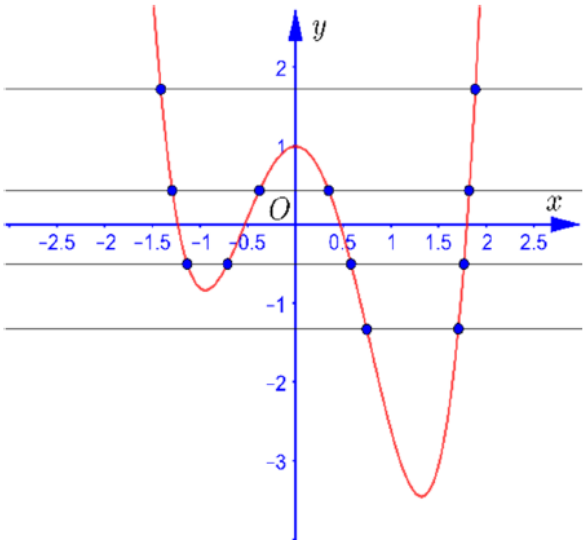


Phương trình $a(f(x))^4+b(f(x))^3+c(f(x))^2+df(x)+e=0$ (*) có số nghiệm là

A. 2. **B.** 6. **C.** 12. **D.** 16.

Lời giải

Chọn C



Ta thấy đồ thị $y=f(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt nên phương trình $f(x)=0$ có 4 nghiệm phân biệt: $x_1\in(-1,5;-1)$, $x_2\in(-1;-0,5)$, $x_3\in(0;0,5)$, $x_4\in(1,5;2)$.

Kẻ đường thẳng $y=m$, khi đó:

Với $m=x_1\in(-1,5;-1)$ có 2 giao điểm nên phương trình $f(x)=x_1$ có 2 nghiệm.

Với $m=x_2\in(-1;-0,5)$ có 4 giao điểm nên phương trình $f(x)=x_2$ có 4 nghiệm.

Với $m=x_3\in(0;0,5)$ có 4 giao điểm nên phương trình $f(x)=x_3$ có 4 nghiệm.

Với $m=x_4\in(1,5;2)$ có 2 giao điểm nên phương trình $f(x)=x_4$ có 2 nghiệm.

Vậy phương trình (*) có 12 nghiệm.

Câu 33. Cho hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f\left(x^2+x+3\right)+2f\left(x^2-3x+5\right)=6x^2-10x+17,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Tính $f(2018)$.

A. $f(2018)=2018$.

B. $f(2018)=2018^2$.

C. $f(2018)=4033$.

D. $f(2018)=3033$.

Lời giải

Chọn C

Ta cần thay x bởi đại lượng nào đó để bảo toàn được sự xuất hiện của $f\left(x^2+x+3\right)$ và $f\left(x^2-3x+5\right)$ trong phương trình.

Do đó ta cần có $x^2+x+3=x^2-3x+5\Leftrightarrow x=1-x$.

Như vậy ta thay x bởi $1-x$.

Cuối cùng ta tính được:

$$f\left(x^2+x+3\right)=2x^2+2x+3=2\left(x^2+x+3\right)-3.$$

Vậy $f(2018)=2.2018-3=4033$.

Câu 34. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

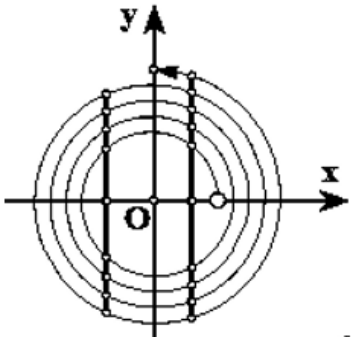
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\frac{9\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(\cos x)=2$ là

A. 16. **B.** 17. **C.** 18. **D.** 19.

Lời giải.

Chọn B



Từ BBT ta thấy: $f(\cos x)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=a(a<-1): \text{vo nghiem}\\ \cos x=b(-1<b<0)\\ \cos x=c(0<c<1)\\ \cos x=d(d>1): \text{vo nghiem}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=b(-1<b<0)\\ \cos x=c(0<c<1)\end{array}\right.$

Dựa vào đường tròn lượng giác, trên đoạn $\left[0;\frac{9\pi}{2}\right]$ thì:

- Phương trình $\cos x=b$ có 8 nghiệm phân biệt.
- Phương trình $\cos x=c$ có 9 nghiệm phân biệt khác 8 nghiệm ở trên.

Vậy phương trình $f(\cos x)=2$ có 17 nghiệm trên đoạn $\left[0;\frac{9\pi}{2}\right]$.

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		x_0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$			0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$\frac{10}{3}$	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[0;2020\pi]$ của phương trình $f(-\cos x)=2$ là

A. 2021. **B.** 3030. **C.** 2020. **D.** 3031.

Lời giải.

Chọn D

Từ BBT ta thấy: $f\left(-\cos x\right)=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\cos x=-1\\-\cos x=\dfrac{1}{2}\\\cos x=a\left(a>1\right):\text{voâ nghieäm}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=1\\\cos x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

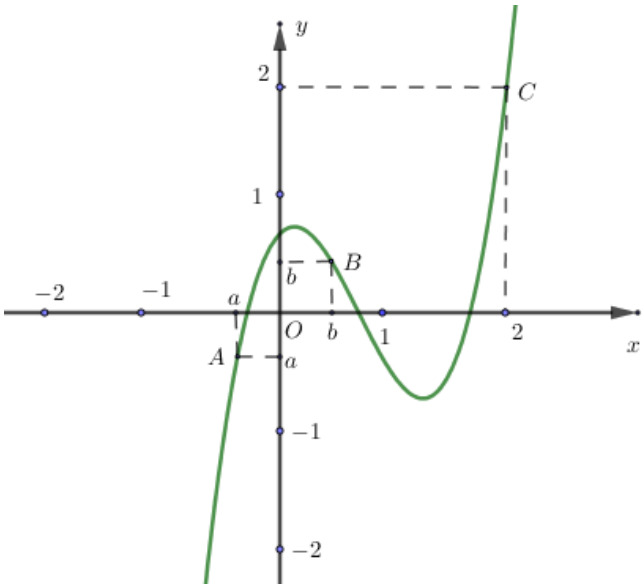
Dựa vào đường tròn lượng giác, trên đoạn $\left[0;2020\pi\right]$thì:

- Phương trình $\cos x=1$có 1011 nghiệm phân biệt.

- Phương trình $\cos x=-\dfrac{1}{2}$ có 2020 nghiệm phân biệt khác 1011 nghiệm ở trên.

Vậy phương trình $f\left(-\cos x\right)=2$ có 3031 nghiệm trên đoạn $\left[0;2020\pi\right]$.

Câu 36. ##Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+bx+c$ có đồ thị như hình vẽ:

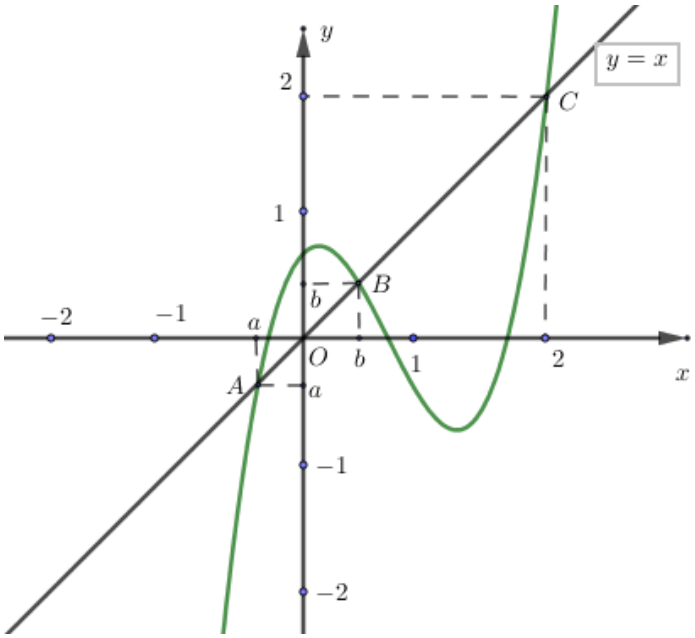


Số nghiệm nằm trong $\left(\dfrac{-\pi}{2};\dfrac{9\pi}{2}\right)$ của phương trình $f\left(\cos x+1\right)=\cos x+1$ là

A. 6. **B.** 10. **C.** 4. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B



Từ đồ thị ta có $f(x)=x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a\in(-\infty;0) \\ x=b\in(0;1) \\ x=2 \end{array}\right.$

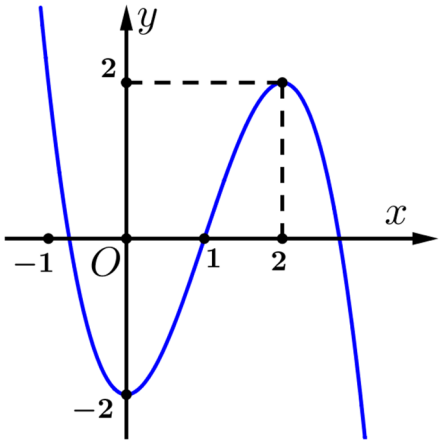
Do đó $f(\cos x+1)=\cos x+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x+1=a\in(-\infty;0) \\ \cos x+1=b\in(0;1) \\ \cos x+1=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos x=a-1=t_1\in(-\infty;-1) & (VN) \\ \cos x=b-1=t_2\in(-1;0) & (1) \\ \cos x=1 & (2) \end{array}\right.$

Dựa vào đường tròn lượng giác, phương trình (1) có 4 nghiệm nằm trong $\left(\frac{-\pi}{2};\frac{9\pi}{2}\right)$.

Phương trình (2) có 6 nghiệm nằm trong $\left(\frac{-\pi}{2};\frac{9\pi}{2}\right)$.

Vậy phương trình ban đầu có tất cả 10 nghiệm nằm trong $\left(\frac{-\pi}{2};\frac{9\pi}{2}\right)$.

Câu 37. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hỏi đồ thị hàm số $y=f(3x-4)$ cắt đường thẳng $y=-x+\frac{3}{2}$ tại nhiều nhất bao nhiêu điểm?



A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=(3x-4)\Rightarrow x=\dfrac{t+4}{3}$.

Phương trình hoành độ giao điểm là: $f(3x-4)=-x+\dfrac{3}{2}(*)$

Số nghiệm của $(*)$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(3x-4)$ và đường thẳng $y=-x+\dfrac{3}{2}$. Thế t vào $(*)$ ta có: $f(t)+\dfrac{t}{3}-\dfrac{1}{6}=0$.

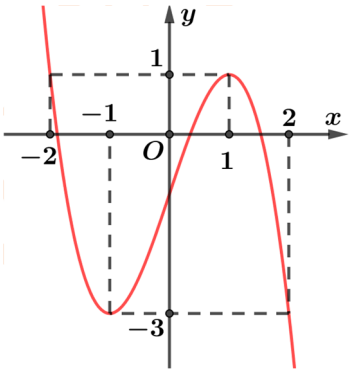
Đặt $g(t)=f(t)+\dfrac{t}{3}-\dfrac{1}{6}\Rightarrow g'(t)=f'(t)+\dfrac{1}{3}=0\Leftrightarrow f'(t)=\dfrac{-1}{3}$.

Quan sát đồ thị ta thấy $f'(t)=-\dfrac{1}{3}$ có 3 nghiệm thực phân biệt nên hàm $g(t)$ có 3 cực trị.

Số nghiệm lớn nhất của phương trình $g(t)=0$ là 4. Suy ra phương trình $(*)$ có tối đa 4 nghiệm .

Vậy chọn đáp án D.

Câu 38. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi phương trình $f(2-f(x))=1$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



A. 5. **B.** 6 . **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị ta suy ra: $f(2-f(x))=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2-f(x)=1\\2-f(x)=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=1\\f(x)=4\end{array}\right.$.

- $f(x)=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=1\end{array}\right.$.
- $f(x)=4\Rightarrow x=x_3<-2$.

Vậy phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

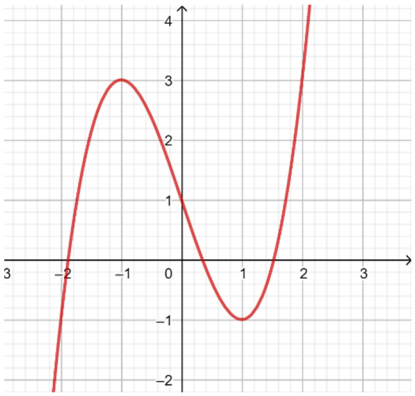
Câu 39. Cho hàm số $f(x)=x^3-3x+1$. Số nghiệm của phương trình $\left[f(x)\right]^3-3f(x)+1=0$ là

A. 1. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Đồ thị hàm số $y=f(x)=x^3-3x+1$ có dạng:



Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $f(x)=0$ có 3 nghiệm $x_1\in(-2;-1), x_2\in(0;1), x_3\in(1;2)$

Nếu phương trình $\left[f(x)\right]^3-3f(x)+1=0$ có nghiệm x_0 thì $f(x_0)\in\{x_1,x_2,x_3\}$.

Dựa vào đồ thị ta có:

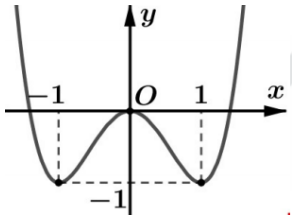
+ $f(x)=x_1, x_1\in(-2;-1)$ có 1 nghiệm duy nhất.

+ $f(x)=x_2, x_2\in(0;1)$ có 3 nghiệm phân biệt.

+ $f(x)=x_3, x_3\in(1;2)$ có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình $\left[f(x)\right]^3-3f(x)+1=0$ có 7 nghiệm phân biệt.

Câu 40. Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ có đồ thị như hình bên. Phương trình $\sqrt{f(\sqrt{f(x)})+2}=f(x)+1$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt.



A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d=4a(x+1)x(x-1)=4a(x^3-x)\Rightarrow f(x)=a(x^4-2x^2)+e.$$

Và $\begin{cases}f(0)=0\\f(-1)=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}e=0\\-a+e=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\3=0\end{cases}\Rightarrow f(x)=x^4-2x^2.$

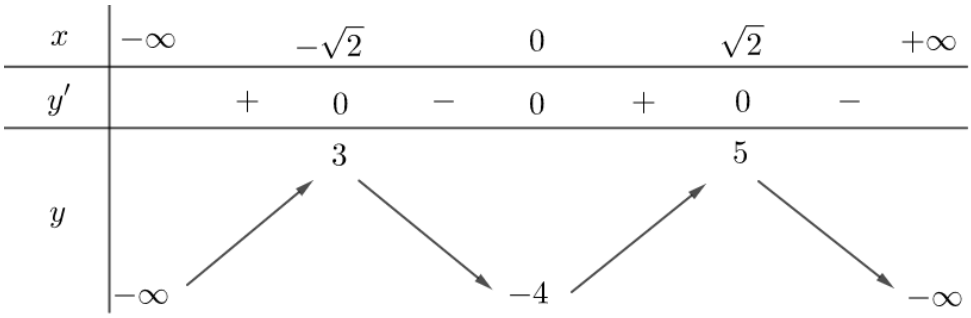
Đặt $t=\sqrt{f(x)};(t\geq 0)$ phương trình trở thành:

$\sqrt{f(t)+2}=t^2+1\Leftrightarrow\sqrt{t^4-2t^2+2}=t^2+1\Leftrightarrow t^4-2t^2+2=(t^2+1)^2\Leftrightarrow 4t^2=1$

$\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}(t\geq 0).$

Vậy $\sqrt{f(x)}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{4}$ phương trình này có 2 nghiệm.

Câu 41. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $2f\left(\sin x-\cos x\right)=m-1$ có hai nghiệm phân biệt trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)$?

A. 13. **B.** 15. **C.** 12. **D.** 14.

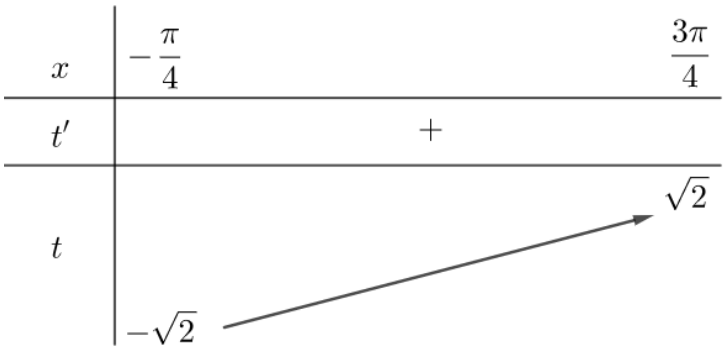
Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\sin x-\cos x$.

Ta có: $t'=\cos x+\sin x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>0,\forall x\in\left(-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)$.

Bảng biến thiên của $t=t\left(x\right)$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)$.

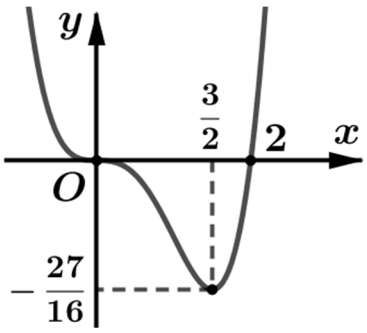


Nhận xét: Dựa vào bảng biến thiên của $t\left(x\right)$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)$ ta thấy với mỗi $x\in\left(-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)$ có duy nhất một giá trị $t\in\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$.

Do đó, phương trình $2f\left(\sin x-\cos x\right)=m-1$ có hai nghiệm phân biệt trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)\Leftrightarrow$ phương trình $2f\left(t\right)=m-1$ có hai nghiệm phân biệt trên $\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)\Leftrightarrow -4<\frac{m-1}{2}<3\Leftrightarrow -7<m<7$.

Mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\left\{-6;-5;..;5;6\right\}\Rightarrow$ có 13 giá trị nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 42. ##Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi;2\pi]$ của phương trình $2f\left(2|\sin x|\right)+1=0$ là

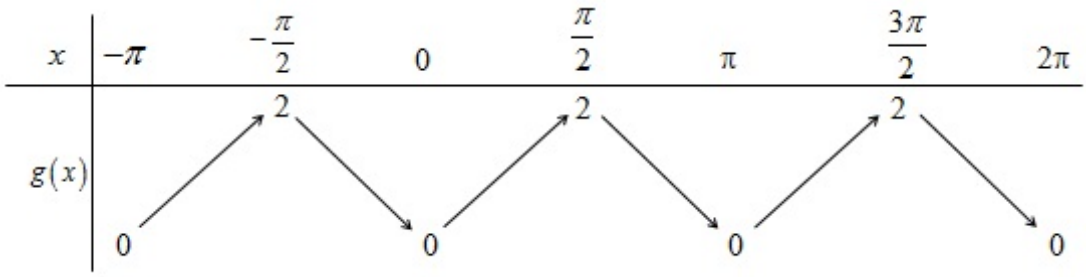
A. 6. **B.** 2. **C.** 8. **D.** 12.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=2|\sin x|$. Xét hàm $t=g(x)=2|\sin x|$ trên đoạn $[-\pi;2\pi]$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)=2|\sin x|$ trên đoạn $[-\pi;2\pi]$



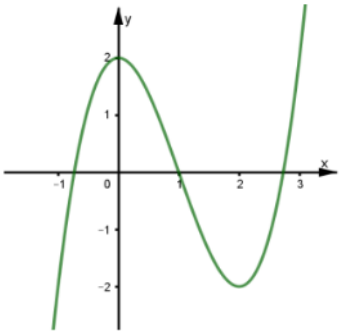
Dựa vào BBT ta có $t\in[0,2]\forall x\in[-\pi;2\pi]$

Nếu $t\in(0,2)$ thì mỗi giá trị t cho 6 giá trị x thuộc đoạn $[-\pi;2\pi]$

Phương trình $2f\left(2|\sin x|\right)+1=0$ trở thành $f(t)=-\dfrac{1}{2}$ với $t\in[0,2]$

Dựa vào đồ thị ta có phương trình $f(t)=-\dfrac{1}{2}$ có 2 nghiệm t phân biệt thuộc khoảng $(0,2)$ nên phương trình ban đầu có 12 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi;2\pi]$

Câu 43. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ



Gọi m là số nghiệm của phương trình $f\left(f(x)\right)=0$. Khẳng định nào sau đây đúng.

A. $m=4$ **B.** $m=6$ **C.** $m=5$ **D.** $m=7$

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị ta có $f\left(f(x)\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=x_1\\f(x)=1\\f(x)=x_2\end{array}\right.$ với $-1<x_1<0\,;\ 2<x_2<3$

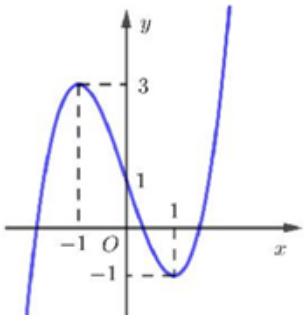
Trường hợp 1: $f(x)=x_1$ có 3 nghiệm phân biệt

Trường hợp 2: $f(x)=1$ có 3 nghiệm phân biệt

Trường hợp 3: $f(x)=x_2$ có 1 nghiệm

Vậy phương trình $f\left(f(x)\right)=0$ có 7 nghiệm hay $m=7$.

Câu 44. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình $f(\sin x)=2\sin x+m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$. Tổng các phần tử của S bằng



A. -10 **B.** -8 **C.** -6 **D.** -5

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\sin x\Rightarrow t\in(0;1]\Rightarrow f(\sin x)=2\sin x+m\Leftrightarrow m=f(t)-2t\left(t\in(0;1]\right)$

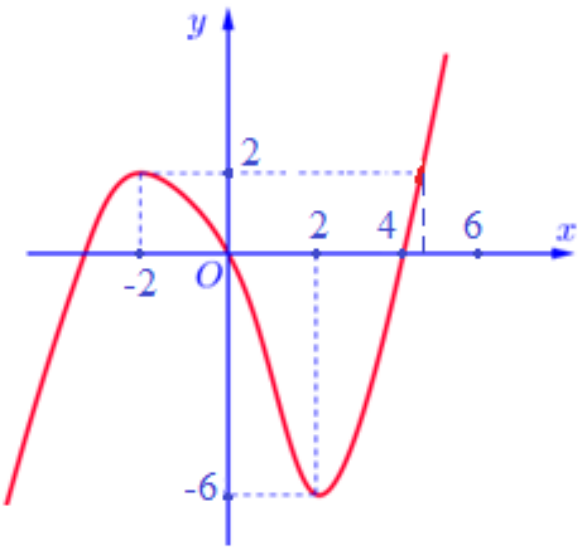
Xét $g(t)=f(t)-2t, t\in(0;1]$

$\Rightarrow g'(t)=f'(t)-2<0\,\forall t\in(0;1]\Rightarrow g(t)\in[-3;1)$

Phương trình $f(\sin x)=2\sin x+m$ có nghiệm $\Leftrightarrow m\in[-3;1)\Rightarrow m=\{-3;-2;-1;0\}$.

Vậy tổng các số là $S=-6$

Câu 45. ##Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $y=f(x)$ như hình vẽ dưới đây.



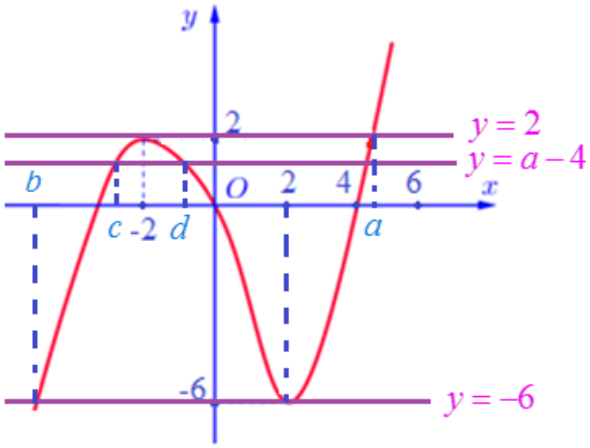
Số nghiệm thực của phương trình $f\left(4+f\left(2^x\right)\right)=2$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có:



Theo đồ thị :

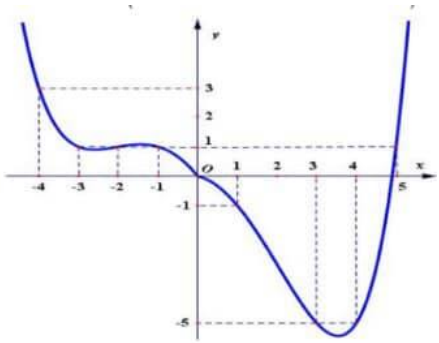
$$f\left(4+f\left(2^x\right)\right)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4+f\left(2^x\right)=-2 \\ 4+f\left(2^x\right)=a,(4<a<6) \end{array}\right.$$

TH1) $4+f\left(2^x\right)=-2 \Leftrightarrow f\left(2^x\right)=-6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x=2 \\ 2^x=b<-2(KTM) \end{array}\right. \Leftrightarrow x=1.$

TH2) $4+f\left(2^x\right)=a \Leftrightarrow f\left(2^x\right)=a-4,\ (0<a-4<2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x=c<-2(KTM) \\ 2^x=d<0(KTM) \\ 2^x=t>4 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\log_2 t.$

Vì $t>4$ nên $\log_2 t>\log_2 4=2>1$ nên phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt.

Câu 46. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2\cdot f\left(3-3\sqrt{-9x^2+30x-21}\right)=m-2019$ có nghiệm.



A. 15. **B.** 14. **C.** 10. **D.** 13.

Lời giải

Chọn D

Ta có $-9x^2+30x-21=-(3x-5)^2+4\le 4$ nên $\sqrt{-9x^2+30x-21}\in[0;2]$.

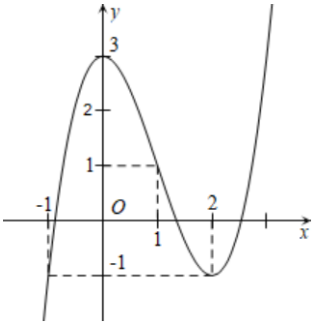
Đặt $t=3-3\sqrt{-9x^2+30x-21}$ thì $t\in[-3;3]$. Ta cần tìm số các giá trị nguyên của m để phương trình $f(t)=\dfrac{m-2019}{2}$ có nghiệm $t\in[-3;3]$.

Từ đồ thị suy ra đường thẳng $y=\dfrac{m-2019}{2}$ cắt đồ thị $y=f(t);t\in[-3;3]$ khi và chỉ khi $-5\le\dfrac{m-2019}{2}\le a;a=\max\limits_{[-3;3]}f(t)$, và cũng từ đồ thị ta có $1<a<1,5$.

Do đó $2009\le m\le 2a+2019$ và $2021<2a+2019<2022$. Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $2009\le m\le 2021$.

Vậy có tất cả $2021-2009+1=13$ giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 47. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau.



Số nghiệm của phương trình $\left[f\left(e^{\sqrt{x}}\right)\right]^2-f\left(e^{\sqrt{x}}\right)-2=0$ là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $x\ge 0$.

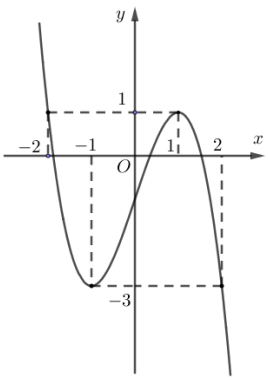
Đặt $t=e^{\sqrt{x}}$. Do $\sqrt{x}\ge 0\Rightarrow t\ge 1$ và ứng với mỗi giá trị $t\ge 1$ chỉ cho một giá trị $x\ge 0$.

Ta có phương trình trở thành: $\left[f(t)\right]^2-f(t)-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(t)=-1\\f(t)=2\end{array}\right.$.

Từ đồ thị hàm số $y=f(t)$ trên $[1;+\infty)$ suy ra phương trình $f(t)=-1$ có 1 nghiệm và phương trình $f(t)=2$ có 1 nghiệm khác với nghiệm của phương trình $f(t)=-1$.

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm.

Câu 48. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f\left(1-f(x)\right)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



A. 5. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

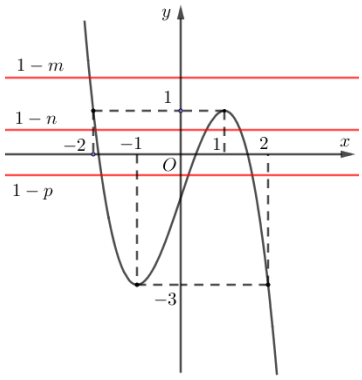
Từ đồ thị hàm số ta có :

$$f\left(1-f\left(x\right)\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-f\left(x\right)=m\left(-2<m<-1\right)\\1-f\left(x\right)=n\left(0<n<1\right)\\1-f\left(x\right)=p\left(1<p<2\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=1-m\\f\left(x\right)=1-n\\f\left(x\right)=1-p\end{array}\right.$$

+) Do $-2<m<-1\Rightarrow 2<1-m<3\Rightarrow$ phương trình $f\left(x\right)=1-m$ có 1 nghiệm x_1.

+) Do $0<n<1\Rightarrow 0<1-n<1\Rightarrow$ phương trình $f\left(x\right)=1-n$ có 3 nghiệm x_2,x_3,x_4.

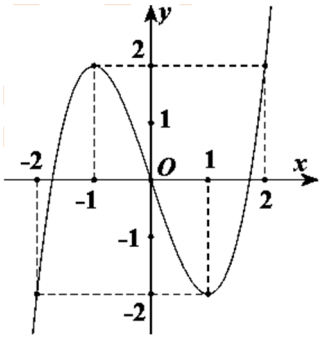
+) Do $1<p<2\Rightarrow -1<1-p<0\Rightarrow$ phương trình $f\left(x\right)=1-p$ có 3 nghiệm x_5,x_6,x_7.



Dựa vào đồ thị ta thấy 7 nghiệm này phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có đúng 7 nghiệm phân biệt.

Câu 49. Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{f\left(\cos x\right)+2}\right)=f\left(m\right)$ có nghiệm trên nửa khoảng $\left[0;\pi\right)$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải.

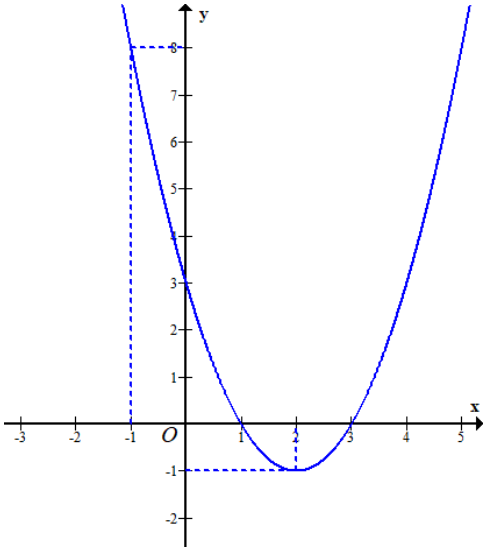
Chọn A

Sử dụng đường tròn lượng giác và qua sát đồ thị ta thấy:

$$x\in\left[0;\pi\right)\Rightarrow\cos x\in\left(-1;1\right]\Rightarrow f\left(\cos x\right)\in\left[-2;2\right)$$
$$\Rightarrow f\left(\cos x\right)+2\in\left[0;4\right)$$
$$\Rightarrow\sqrt{f\left(\cos x\right)+2}\in\left[0;2\right)$$
$$\Rightarrow f\left(\sqrt{f\left(\cos x\right)+2}\right)=f\left(m\right)\in\left[-2;2\right)$$
$$\Rightarrow m\in\left[-2;2\right)\setminus\left\{-1\right\}\Rightarrow m\in\left\{-2;0;1\right\}.$$

Vậy có tất cả 3 giá trị nguyên.

Câu 50. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình $f\left(f\left(|x|+1\right)\right)=m$ có 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-2;2]$. Số phần tử của S là

A. 7. **B.** 8. **C.** 3. **D.** 4.

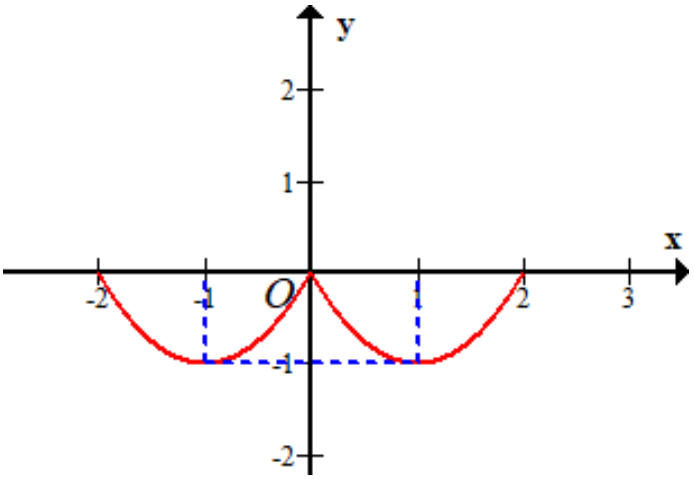
Lời giải

Chọn D

Gọi (P) là đồ thị hàm số $y=f(x)$

Vẽ đồ thị (P_1) của đồ thị hàm số $y=f(x+1)$ bằng cách: Tịnh tiến đồ thị (P) của hàm số $y=f(x)$ theo phương của trục hoành sang trái 1đơn vị.

Vẽ đồ thị (P_2) của hàm số $y=f\left(|x|+1\right)$ bằng cách: Giữ nguyên đồ thị (P_1) nằm bên phải trục tung rồi lấy đối xứng phần đó chính phần đồ thị đó qua trục tung, ta được đồ thị (P_2) của hàm số $y=f\left(|x|+1\right)$. Do đó, ta có đồ thị hàm số $y=f\left(|x|+1\right)$



Đặt $t=f\left(|x|+1\right)$, với $x\in[-2;2]\Rightarrow t\in[-1;0]$.

Ta có phương trình $f(t)=m(1)$.

Nếu $t=0$ cho ta ba nghiệm phân biệt $x\in[-2;2]$.

Nếu $t=-1$ cho ta hai nghiệm phân biệt $x\in[-2;2]$.

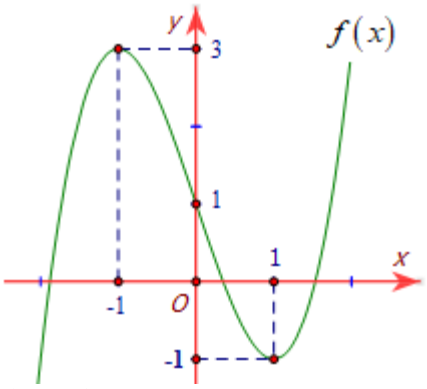
Nếu $t\in(-1;0)$ thì mỗi giá trị của t cho ta bốn nghiệm phân biệt $x\in[-2;2]$.

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ phương trình (1) có đúng 1 nghiệm $t\in(-1;0)\Leftrightarrow f(0)<m<f(-1)\Leftrightarrow 3<m<8$.

Vậy S có tất cả 4 phần tử.

NHẬN XÉT : Cách giải 2 : ***Chọn*** *hàm* $f(x)=(x-1)(x-3)$

Câu 51. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)=x^3-5x^2+2x+8$. Trong đó hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Số nghiệm của phương trình $g(f(x))=0$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Đặt $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d, a\neq 0\Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

Theo hình vẽ có: $\begin{cases}f'(1)=0\\f'(-1)=0\\f(1)=-1\\f(0)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a+2b+c=0\\3a-2b+c=0\\a+b+c+d=-1\\d=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=0\\c=-3\\d=1\end{cases}\Rightarrow f(x)=x^3-3x+1$.

Ta có: $g(x)=0\Leftrightarrow x^3-5x^2+2x+8\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x=2\\x=-1\end{array}\right.$.

Suy rA. $g(f(x))=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=4\\f(x)=2\\f(x)=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3-3x+1=4\\x^3-3x+1=2\\x^3-3x+1=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3-3x-3=0\ (1)\\x^3-3x-1=0\ (2)\\x^3-3x+2=0\ (3)\end{array}\right.$

Ta thấy: (1) có một nghiệm, (2) có ba nghiệm, (3) có hai nghiệm.

Vậy $g(f(x))=0$ có 6 nghiệm.

Câu 52. Cho hàm số $f(x)=x^7+x^5-x^4+x^3-2x^2+2x-10$ và $g(x)=x^3-3x+2$. Đặt $F(x)=g[f(x)]$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $F(x)=m$ có ba nghiệm thực phân biệt.

A. $m\in(-1;3)$ **B.** $m\in(0;4)$ **C.** $m\in(3;6)$ **D.** $m\in(1;3)$

Lời giải

Chọn B

Ta có $F'(x)=f'(x)g'[f(x)]$. $F'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\g'[f(x)]\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}7x^6+5x^4-4x^3+3x^2-4x+2=0\,(1)\\f(x)=1\\f(x)=-1\end{array}\right.$

(1)Vô nghiệm vì $7x^6+5x^4-4x^3+3x^2-4x+2>0\,\forall x$

Bản biến thiên:

$f(x)$	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$F'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$F(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Vậy $F(x)=m$ có ba nghiệm thực phân bit thì $m\in(0;4)$.

Câu 53. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ đều có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn:

$f^3(2-x)-2f^2(2+3x)+x^2.g(x)+36x=0$, với $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $A=3f(2)+4f'(2)$.

A. 11. **B.** 13. **C.** 14. **D.** 10.

Lời giải

Chọn D

Với $\forall x\in\mathbb{R}$, ta có $f^3(2-x)-2f^2(2+3x)+x^2.g(x)+36x=0\,(1)$.

Đạo hàm hai vế của (1), ta được

$-3f^2(2-x).f'(2-x)-12f(2+3x).f'(2+3x)+2x.g(x)+x^2.g'(x)+36=0\,(2)$.

Từ (1) và (2), thay $x=0$, ta có $\left\{\begin{array}{ll}f^3(2)-2f^2(2)=0 & (3)\\-3f^2(2).f'(2)-12f(2).f'(2)+36=0 & (4)\end{array}\right.$

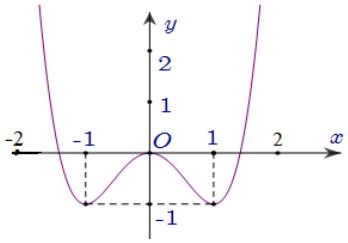
Từ (3), ta có $f(2)=0\vee f(2)=2$.

Với $f(2)=0$, thế vào (4) ta được $36=0$ (vô lí).

Với $f(2)=2$, thế vào (4) ta được $-36.f'(2)+36=0\Leftrightarrow f'(2)=1$.

Vậy $A=3f(2)+4f'(2)=3.2+4.1=10$.

Câu 54. ##Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Số nghiệm thực của bất phương trình $1+f(x^3-3x^2+1)\ge\sqrt{2f^2(x^3-3x^2+1)+2}$ là



A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

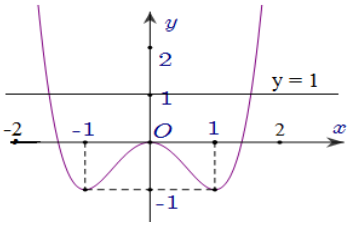
Chọn B

Đặt $a = f\left(x^3 - 3x^2 + 1\right)$ ta được bất phương trình

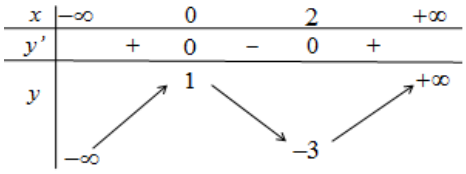
$1 + a \ge \sqrt{2a^2 + 2} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + a \ge 0 \\ 1 + 2a + a^2 \ge 2a^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge -1 \\ (a-1)^2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1.$

Với $a = 1$ ta được $f\left(x^3 - 3x^2 + 1\right) = 1$. Đặt $t = x^3 - 3x^2 + 1$ ta được PT $f(t) = 1\ (*)$.

Vẽ đường thẳng $y = 1$ lên đồ thị đã cho ta được PT $(*)$ có 1 nghiệm $t = t_1 \in (-2; -1)$ và 1 nghiệm $t = t_2 \in (1; 2)$.



Ta có BBT của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ như sau

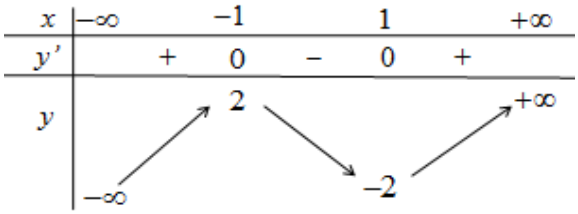


Với $t = t_1$ ta được PT $x^3 - 3x^2 + 1 = t_1$. Dựa vào BBT ta thấy PT này có 3 nghiệm phân biệt.

Với $t = t_2$ ta được PT $x^3 - 3x^2 + 1 = t_2$. Dựa vào BBT ta thấy PT này có 1 nghiệm.

Vậy BPT đã cho có 4 nghiệm thực.

Câu 55. ##Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm bậc 3 và có bảng biến thiên như sau



Phương trình $f^2(\sin x + \cos x) + 1 + \sin 2x = 2\sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) f(\sin x + \cos x)$ có mấy nghiệm thực thuộc đoạn $\left[-\dfrac{5\pi}{4}; \dfrac{5\pi}{4}\right]$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Vì hàm số có 2 điểm cực trị là $x = \pm 1$ nên $f'(x) = 3ax^2 - 3a \Rightarrow f(x) = ax^3 - 3ax + d$. Theo BBT thì đồ thị hàm số đi qua 2 điểm $(-1; 2)$ và $(1; -2)$ nên $\begin{cases} 2a + d = 2 \\ -2a + d = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ d = 0 \end{cases}$

Suy ra $f(x) = x^3 - 3x$.

Ta có $f^2(\sin x+\cos x)+1+\sin 2x=2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)f(\sin x+\cos x)$

$\Leftrightarrow f^2(\sin x+\cos x)+(\sin x+\cos x)^2=2(\sin x+\cos x)f(\sin x+\cos x)$

$\Leftrightarrow\left[f(\sin x+\cos x)-(\sin x+\cos x)\right]^2=0\Leftrightarrow f(\sin x+\cos x)=\sin x+\cos x$

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$, $t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$ ta được phương trình

$f(t)=t\Leftrightarrow t^3-3t=t\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=\pm2(\text{loại})\end{array}\right.$

Với $t=0$ ta được $\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Ta có $-\frac{5\pi}{4}\le-\frac{\pi}{4}+k\pi\le\frac{5\pi}{4}\Leftrightarrow-1\le k\le\frac{3}{2}\Rightarrow k=-1,k=0,k=1$. Vậy PT có 3 nghiệm.

Câu 56. ##Cho $y=f(x)$ là hàm số bậc ba và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-1	↗	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in(-5;5)$ để hàm số $g(x)=f\left(f(x)+m\right)$ có 4 điểm cực trị?

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

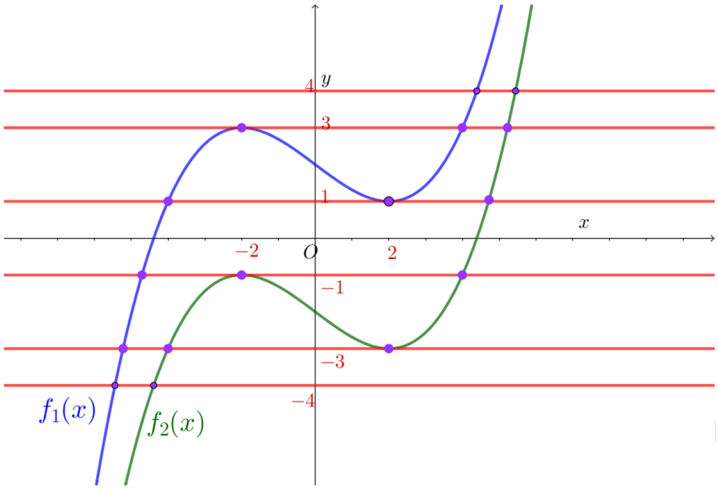
Chọn B

$g'(x)=f'(x).f'\left(f(x)+m\right).$

$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\f'\left(f(x)+m\right)=0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=2\\f(x)+m=-2\\f(x)+m=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=2\\f(x)+2=-m\\f(x)-2=-m\end{array}\right.$, trong đó $x=-2$ và $x=2$ là hai nghiệm bội lẻ.

Đặt $f_1(x)=f(x)+2$ và $f_2(x)=f(x)-2$, ta có đồ thị sau



Với $\begin{cases} m \in (-5;5) \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$ và nhìn vào đồ thị, ta thấy hàm số $g(x)$ có 4 điểm cực trị $\Leftrightarrow g'(x)=0$ có 4 nghiệm bội lẻ $\Leftrightarrow m \in \{-4;-3;-1;1;3;4\}$.

Câu 57. ##Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

Số nghiệm thuộc khoảng $(-\pi;\pi)$ của phương trình $f^2(\cos x)-f(\cos x)=2$ là

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

Chọn A

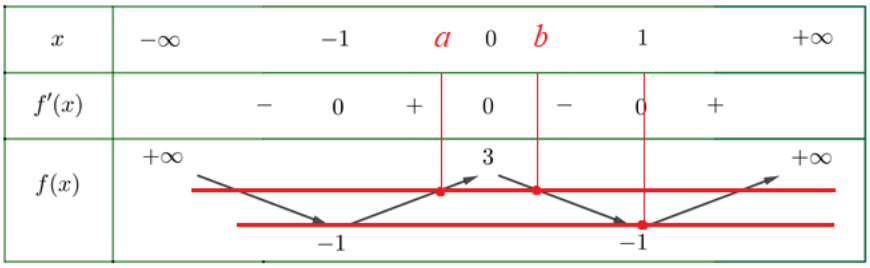
Đặt $t=\cos x$, $x \in (-\pi;\pi)$. Ta có bảng biến thiên (*)

x	$-\pi$		0		π
t	-1	↗	1	↘	-1

$\Rightarrow t \in (-1;1]$.

Phương trình đã cho trở thành $f^2(t)-f(t)-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(t)=2 \quad (1) \\ f(t)=-1 \ (2) \end{array}\right.$.

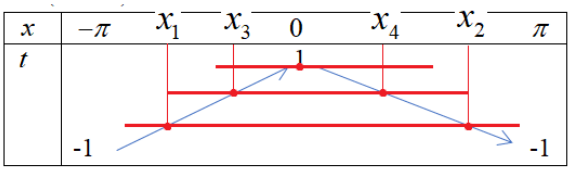
Từ bảng biến thiên của đề bài, với $t \in (-1;1]$ ta có nghiệm của phương trình (1) là $t=a \in (-1;0)$ hay $t=b \in (0;1)$ và nghiệm của phương trình (2) là $t=1$.



Từ bảng biến thiên (*), ta có:

$t = a \in (-1;0) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 \in (-\pi;0) \\ x = x_2 \in (0;\pi) \end{array}\right.$.

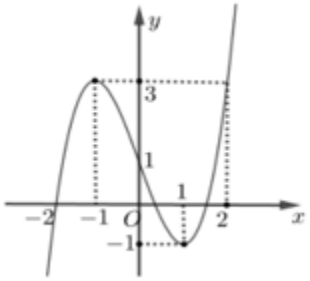
$t = b \in (0;1) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_3 \in (-\pi;0) \\ x = x_4 \in (0;\pi) \end{array}\right.$.



$t = 1 \Rightarrow x = 0$.

Vậy, phương trình đã cho có 5 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-\pi;\pi)$.

Câu 58. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f\left(3-\sqrt{4-x^2}\right) = m$ có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\sqrt{2};\sqrt{3}\right]$. Tìm tập S.



A. $S = \left(-1; f\left(3-\sqrt{2}\right)\right]$.

B. $S = \left(f\left(3-\sqrt{2}\right);3\right]$.

C. $S = \varnothing$.

D. $S = [-1;3]$.

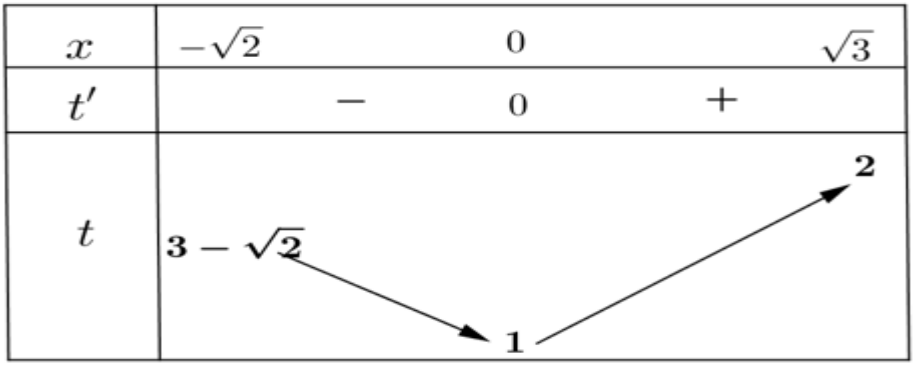
Lời giải

Chọn A

Xét phương trình $f\left(3-\sqrt{4-x^2}\right) = m$. Điều kiện $4-x^2 \ge 0 \Leftrightarrow -2 \le x \le 2$.

Đặt $t = 3-\sqrt{4-x^2}$ với $x \in \left[-\sqrt{2};\sqrt{3}\right]$. Ta có $t' = \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ và $t' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên của hàm số $t = 3-\sqrt{4-x^2}$ trên đoạn $\left[-\sqrt{2};\sqrt{3}\right]$

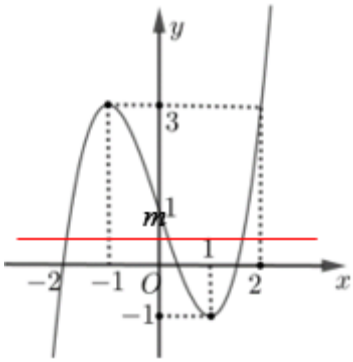


Nhận xét:

+) Mỗi $t \in \left(1;3-\sqrt{2}\right]$ cho ta 2 giá trị $x \in \left[-\sqrt{2};\sqrt{3}\right]$

+) Mỗi $t \in \left(3-\sqrt{2};2\right]$ cho ta một giá trị $x \in \left[-\sqrt{2};\sqrt{3}\right]$

+) $t=1$ cho ta 1 nghiệm duy nhất $x=0$.

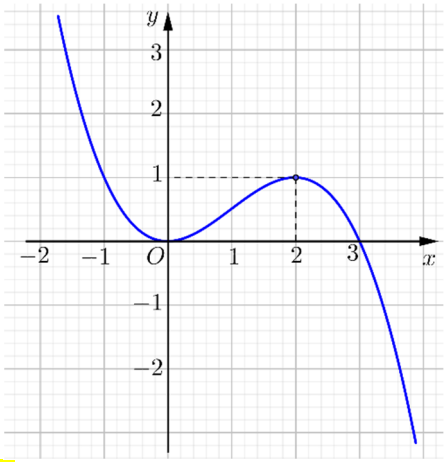


Dựa vào đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ ta suy ra đường thẳng $y=m$ chỉ cắt đồ thị hàm số $y=f\left(t\right)$ nhiều nhất tại một điểm trên $\left[1;2\right]$.

Do đó, để phương trình $f\left(3-\sqrt{4-x^2}\right)=m$ có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\sqrt{2};\sqrt{3}\right]$ thì $m \in \left(-1;f\left(3-\sqrt{2}\right)\right]$

Vậy, các giá trị của m cần tìm là $m \in \left(-1;f\left(3-\sqrt{2}\right)\right]$.

Câu 59. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+k$ với $(a,b,c,d,k \in \mathbb{R})$. Biết đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ, đạt cực trị tại điểm $O\left(0;0\right)$ và cắt trục hoành tại $A\left(3;0\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trên $\left[-5;5\right]$ để phương trình $f\left(-x^2+2x+m\right)=k$ có bốn nghiệm phân biệt?



A. 0. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị ta thấy $f'\left(x\right)$ không thể có bậc nhỏ hơn hoặc bằng 2, do đó $a \neq 0$.

Ta suy ra $f'\left(x\right)=\alpha x^2\left(x-3\right)$, $a \neq 0$. Đồ thị của nó đi qua $A\left(2;1\right)$ nên

$1 = a.2^2.(2-3) \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}$.

Suy ra $f'(x) = -\frac{x^2}{4}(x-3)$, do đó $f(x) = -\frac{x^4}{16} + \frac{x^3}{4} + k$.

Ta có $f(x) = k \Leftrightarrow -\frac{x^4}{16} + \frac{x^3}{4} + k = k \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \end{array}\right.$.

Suy ra $f\left(-x^2 + 2x + m\right) = k \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x^2 + 2x + m = 0 \\ -x^2 + 2x + m = 4 \end{array}\right.$.

Phương trình $-x^2 + 2x + m = 0\ (1)$ có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta_1' = 1 + m > 0 \Leftrightarrow m > -1$.

Phương trình $-x^2 + 2x + m = 4\ (2)$ có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta_2' = 1 + m - 4 > 0 \Leftrightarrow m > 3$.

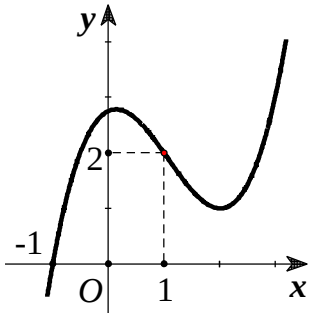
Hai phương trình (1) và (2) nếu như có nghiệm chung x_0 thì $\left\{\begin{array}{l} -x_0{}^2 + 2x_0 + m = 0 \\ -x_0{}^2 + 2x_0 + m = 4 \end{array}\right. \Rightarrow 4 = 0$ (

Vô lí). Suy ra phương trình (1) và (2) không có nghiệm chung.

Do vậy để phương trình $f\left(-x^2 + 2x + m\right) = k$ có 4 nghiệm phân biệt thì $\left\{\begin{array}{l} m > -1 \\ m > 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow m > 3$.

Do m nguyên và $m \in [-5;5]$ nên $m \in \{4;5\}$. Vậy có 2 giá trị của m.

Câu 60. Cho hàm số $f(x)$ là hàm số đa thức bậc ba có đồ thị như hình bên dưới. Số nghiệm thuộc khoảng $(0;3\pi)$ của phương trình $f(\sin x - 1) = \sin x$ là



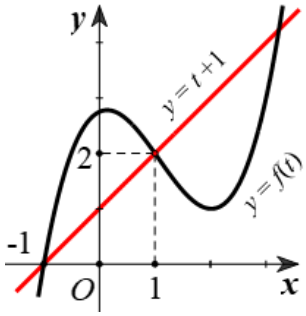
A. 5. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \sin x - 1$. Khi đó, phương trình đã cho trở thành $f(t) = t + 1$.

Vẽ đồ thị hàm số $y = f(t)$ và đường thẳng $y = t + 1$ trên cùng hệ trục tọa độ Oxy.



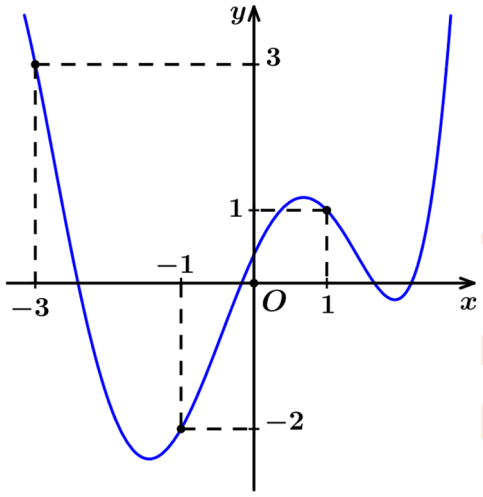
Từ đồ thị ta có $f(t) = t + 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 1 \\ t = m, \quad (m > 1). \end{array}\right.$

□Với $t=1$ thì $\sin x-1=1\Leftrightarrow \sin x=2\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.
□Với $t=m$ thì $\sin x-1=m\Leftrightarrow \sin x=m+1$. Phương trình này vô nghiệm vì $m+1>2$.
□Với $t=-1$ thì $\sin x-1=-1\Leftrightarrow \sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi,(k\in\mathbb{Z})$.

Do $x\in(0;3\pi)$ và $k\in\mathbb{Z}$ nên $0<k\pi<3\pi\Leftrightarrow 0<k<3\Leftrightarrow k\in\{1,2\}$.

Vậy phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm thuộc khoảng $(0;3\pi)$ là $x=\pi;x=2\pi$.

Câu 61. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau



Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2019;2019]$ sao cho phương trình $2f^2(x)-(4m^2-2m+1)f(x)+2m^2-m=0$ có đúng 8 nghiệm phân biệt.

A. 1. **B.** 2020. **C.** 2019. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

$2f^2(x)-(4m^2-2m+1)f(x)+2m^2-m=0\quad(1)$

$\Leftrightarrow 2f(x)\left[f(x)-(2m^2-m)\right]-\left[f(x)-(2m^2-m)\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[f(x)-(2m^2-m)\right]\left[2f(x)-1\right]=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=\frac{1}{2}\quad(2)\\ f(x)=2m^2-m\quad(3)\end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình (2) có bốn nghiệm phân biệt.

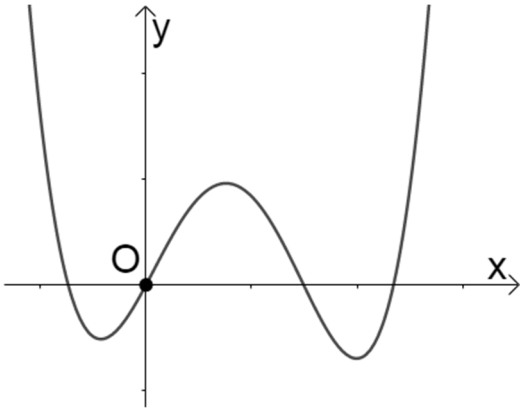
Để phương trình (1) có đúng 8 nghiệm thì phương trình (3) có 4 nghiệm phân biệt khác nghiệm của phương trình (2).

Yêu cầu bài toán $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow 2m^2-m\in\mathbb{Z}\Rightarrow 2m^2-m\neq\frac{1}{2}$ và $2m^2-m=2\left(m-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{8}\geq-\frac{1}{8}$.

Dựa và đồ thị ta có $\left[\begin{array}{l}2m^2-m=0\\2m^2-m=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0,m=\frac{1}{2}\\m=1,m=-\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=1\end{array}\right.$.

Vậy có 2 nguyên của m thoả mãn.

Câu 62. Biết rằng đồ thị hàm số bậc bốn $y=f(x)$ được cho như hình vẽ sau



Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y=g(x)=\left[f'(x)\right]^2-f(x).f''(x)$ và trục hoành.

A. 4. **B.** 0. **C.** 6. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta thấy đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt $0;x_1;x_2;x_3$ nên

$f(x)=ax(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3), a\neq 0$.

Khi đó

$f'(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)+ax(x-x_2)(x-x_3)+ax(x-x_1)(x-x_3)+ax(x-x_1)(x-x_2)$

.

Với $x\neq 0;x_1;x_2;x_3$ thì

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\frac{1}{x-x_3}$$

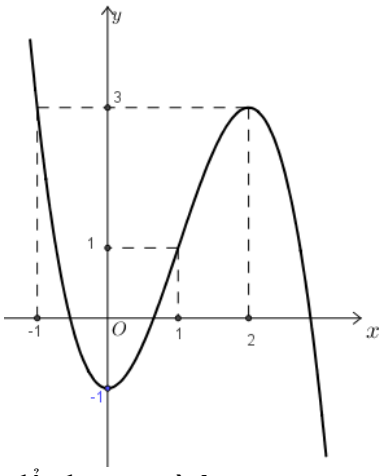
$$\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)'=\frac{f''(x).f(x)-\left[f'(x)\right]^2}{\left(f(x)\right)^2}=\frac{-1}{x^2}+\frac{-1}{(x-x_1)^2}+\frac{-1}{(x-x_2)^2}+\frac{-1}{(x-x_3)^2}.$$

Do đó

$\left[f'(x)\right]^2-f(x).f''(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x-x_1)^2}+\frac{1}{(x-x_2)^2}+\frac{1}{(x-x_3)^2}=0$, vô nghiệm.

Vậy đồ thị hàm số $y=g(x)=\left[f'(x)\right]^2-f(x).f''(x)$ không cắt trục hoành.

Câu 63. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$$f^2(\cos x)+(m-2019)f(\cos x)+m-2020=0$$

có đúng 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0;2\pi]$ là

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Phương trình $f^2(\cos x)+(m-2019)f(\cos x)+m-2020=0$ (1).

$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(\cos x)=-1 \\ f(\cos x)=2020-m \end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị hàm số

Xét phương trình: $f(\cos x)=-1 \Rightarrow \cos x=0 \overset{x\in[0;2\pi]}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2} \\ x=\dfrac{3\pi}{2} \end{array}\right.$.

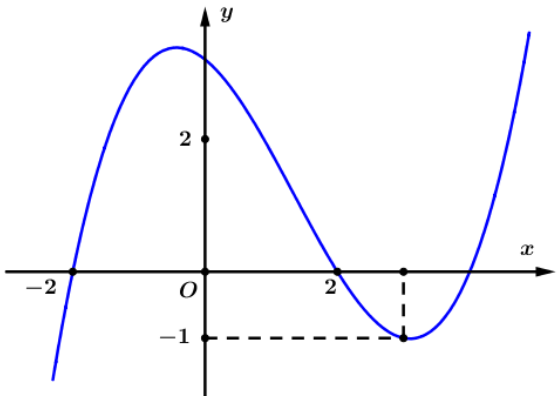
Phương trình (1) có 6 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $f(\cos x)=2020-m$ có 4 nghiệm phân biệt khác $\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}$ trên đoạn $[0;2\pi]$.

$\Leftrightarrow f(t)=2020-m$ có 2 nghiệm phân biệt $t\in(-1;1]\setminus\{0\}$ với $t=\cos x$

$\Leftrightarrow -1<2020-m\le 1 \Leftrightarrow 2019\le m<2021$.

Vậy có 2 giá trị nguyên của m là 2019 và 2020.

Câu 64. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $\left|f(x^3-3x)\right|=\dfrac{2}{3}$ là

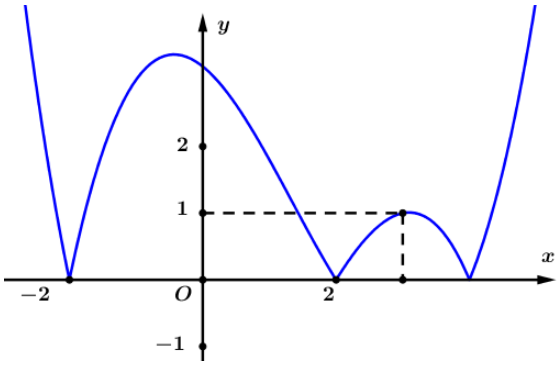


A. 6. **B.** 10. **C.** 3. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ suy ra đồ thị hàm số $y=\left|f(x)\right|$ là



Đặt $t = x^3 - 3x$, ta có: $\left|f\left(x^3-3x\right)\right| = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \left|f\left(t\right)\right| = \frac{2}{3}$.

Từ đồ thị trên suy ra phương trình $\left|f\left(t\right)\right| = \frac{2}{3}$ có sáu nghiệm phân biệt $t = t_i$, (với $i = \overline{1,6}$ và $t_1 < -2$; $-2 < t_2, t_3 < 2$; $t_4, t_5, t_6 > 2$).

Xét hàm số $t(x) = x^3 - 3x$, ta có: $t'(x) = 3x^2 - 3$; $t'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bảng biến thiên của hàm $t(x)$ là:

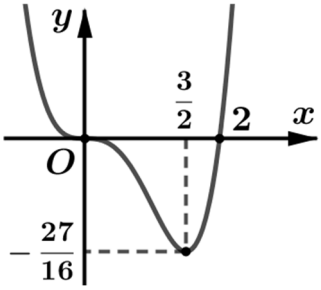
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$t'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$t(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có:

- Phương trình $x^3 - 3x = t_1$ có một nghiệm (do $t_1 < -2$).
- Mỗi phương trình $x^3 - 3x = t_2$, $x^3 - 3x = t_3$ có ba nghiệm phân biệt (do $-2 < t_2, t_3 < 2$).
- Mỗi phương trình $x^3 - 3x = t_4$, $x^3 - 3x = t_5$, $x^3 - 3x = t_6$ có một nghiệm (do $t_4, t_5, t_6 > 2$).

Vậy phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right| = \frac{2}{3}$ có 10 nghiệm.

Câu 65. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



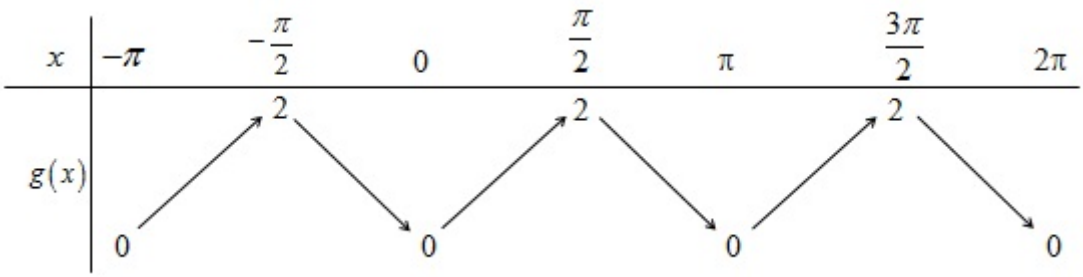
Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(2\left|\sin x\right|\right) = f\left(\frac{m}{2}\right)$ có đúng 12 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\pi; 2\pi\right]$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = g\left(x\right) = 2\left|\sin x\right|$ trên đoạn $\left[-\pi; 2\pi\right]$

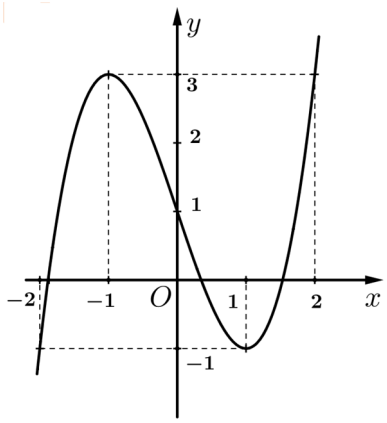


Phương trình $f\left(2\left|\sin x\right|\right)=f\left(\frac{m}{2}\right)$ có đúng 12 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\pi;2\pi\right]$ khi và chỉ khi phương trình $f\left(t\right)=f\left(\frac{m}{2}\right)$ có 2 nghiệm phân biệt $t\in\left(0;2\right)$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ suy ra phương trình $f\left(t\right)=f\left(\frac{m}{2}\right)$ có 2 nghiệm phân biệt $t\in\left(0;2\right)$ khi và chỉ khi $-\frac{27}{16}<f\left(\frac{m}{2}\right)<0\Leftrightarrow\begin{cases}0<\frac{m}{2}<2\\\frac{m}{2}\neq\frac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<m<4\\m\neq3\end{cases}$.

Do m nguyên nên $m\in\left\{1;2\right\}$. Vậy có 2 giá trị của m thoả mãn bài toán.

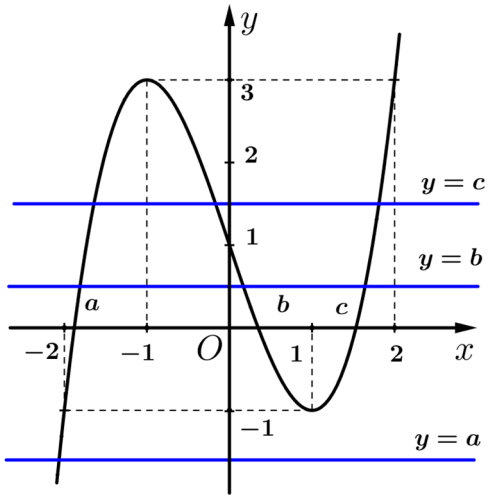
Câu 66. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d\ \left(a\neq0\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực?



A. 5. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C



Từ hình vẽ trên ta thấy $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=a\in(-2;-1)\\x_2=b\in(0;1)\\x_3=c\in(1;2)\end{array}\right.$ nên phương trình

$$f(f(x))=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}f(x)=a\in(-2;-1) & (1)\\f(x)=b\in(0;1) & (2).\\f(x)=c\in(1;2) & (3)\end{array}\right.$$

Dễ thấy: *) phương trình (1) có 1 nghiệm duy nhất $x_1<-2$

*) phương trình (2) có 3 nghiệm phân biệt

*) phương trình (3) có 3 nghiệm phân biệt khác 4 nghiệm đã tìm được ở trên.

Vậy phương trình $f(f(x))=0$ có tất cả 7 nghiệm phân biệt.

Câu 67. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	0	↗	2	↘	$-\infty$

Hỏi có bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn tập nghiệm của phương trình $f(f(\cos x))=2$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $f(f(\cos x))=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(\cos x)=-1\\f(\cos x)=1\end{array}\right.$.

+ $f(\cos x)=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=t_1\,(1),\ (t_1<-1)\\\cos x=t_2\,(2),\ (t_2>1)\end{array}\right.$.

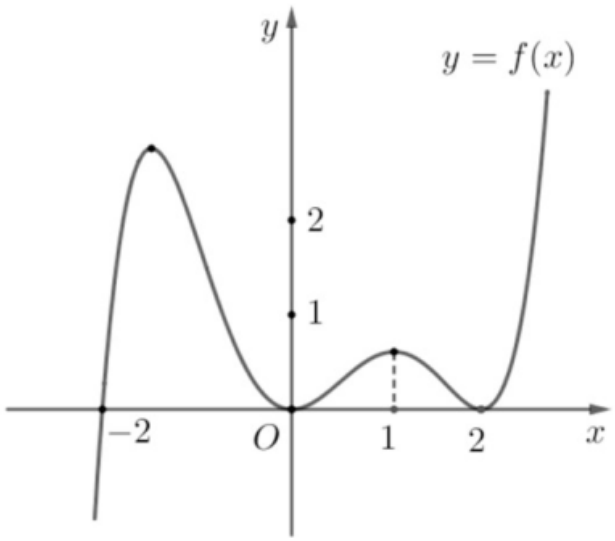
Dễ thấy phương trình (1) và (2) đều vô nghiệm.

$$+\ f(\cos x)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=t_3\,(3),\ (t_3<-1)\\ \cos x=t_4\,(4),\ (-1<t_4<0)\\ \cos x=t_5\,(5),\ (0<t_5<1)\\ \cos x=t_6\,(6),\ (t_6>1)\end{array}\right.$$

Ta thấy phương trình (3) và (6) đều vô nghiệm còn phương trình (4) và (5) mỗi phương trình tập nghiệm của nó đều được biểu diễn bởi hai điểm trên đường tròn lượng giác.

Vậy tập nghiệm của phương trình $f\left(f\left(\cos x\right)\right)=2$ được biểu diễn bởi bốn điểm trên đường tròn lượng giác.

Câu 68. Xét tất cả các số thực $a, b \in (0;\ 1)$ và hàm số đa thức $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên:



Đặt $g(x) = f(f(x))$. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(x).a^{g'(x)} + g'(x).b^{f(x)} = f(x) + g'(x)$ là

A. 14. **B.** 10. **C.** 12. **D.** 17.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases}u = f(x)\\ v = g'(x)\end{cases}$, phương trình đã cho thành $u.a^v + v.b^u = u + v \Leftrightarrow u.(a^v - 1) + v.(b^u - 1) = 0$ (1)

Dễ thấy $\left[\begin{array}{l}u = 0\\ v = 0\end{array}\right.$ thỏa mãn phương trình (1).

Trường hợp $\begin{cases}u \neq 0\\ v \neq 0\end{cases}$ ta có: $u.(a^v - 1) + v.(b^u - 1) = 0 \Leftrightarrow \frac{a^v-1}{v} + \frac{b^u-1}{u} = 0 \Leftrightarrow \frac{a^v-a^0}{v-0} + \frac{b^u-b^0}{u-0} = 0$ (2)

Mà các hàm số $y = a^v$, $y = b^u$ đều nghịch biến với $a, b \in (0;\ 1)$, do đó $\frac{a^v-a^0}{v-0} < 0, \frac{b^u-b^0}{u-0} < 0$, như vậy phương trình (2) vô nghiệm.

Ta có (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u = 0\\ v = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}f(x) = 0\\ f'(x).f'(f(x)) = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}f(x) = 0\\ f'(x) = 0\\ f'(f(x)) = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l}x \in \{-2,0,2\}\\ x \in \{a,0,1,2\}(a \in (-2;0))\\ f(x) \in \{a,0,1,2\}(a \in (-2;0))\end{array}\right.$$

Từ đồ thị của hàm số $f(x)$ suy ra:

+ phương trình $f(x)=a$ có 1 nghiệm;
+ phương trình $f(x)=1$ có 3 nghiệm;
+ phương trình $f(x)=2$ có 3 nghiệm;
Vậy tổng số nghiệm của phương trình đã cho là 12 nghiệm.

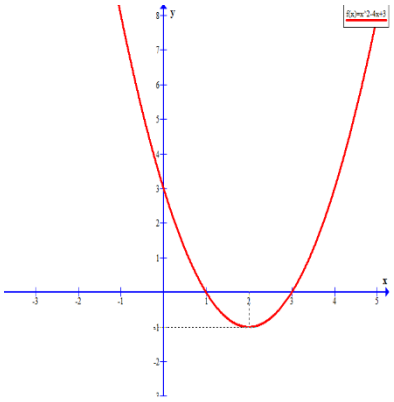
Câu 69. Cho hàm số $y=f(x)=x^2-4x+3$ có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình: $f^2(|x|)-(m-6)f(|x|)-m+5=0$ có 6 nghiệm thực phân biệt.

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

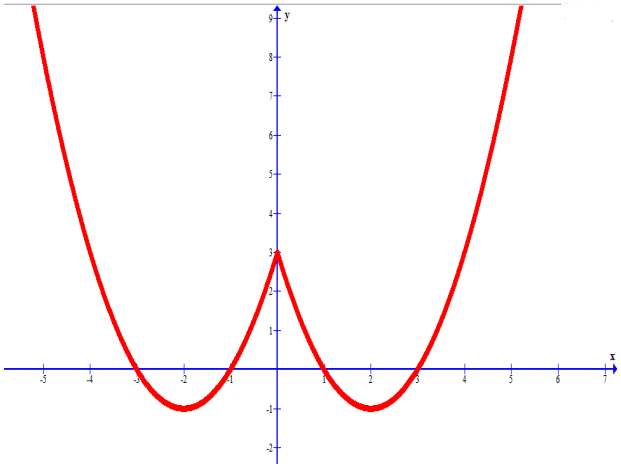
Lời giải

Chọn D

+) Ta có đồ thị hàm số: $y=f(x)=x^2-4x+3$ như hình vẽ:



+) Đồ thị hàm số $y=f(|x|)=|x|^2-4|x|+3$ như sau:



+) Ta có:

$f^2(|x|)-(m-6)f(|x|)-m+5=0$. (1).

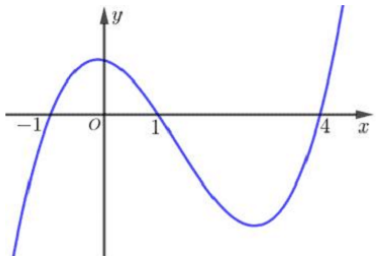
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(|x|)=-1 \\ f(|x|)=m-5 \quad (2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=2 \\ f(|x|)=m-5 \quad (2) \end{array}\right.$.

Phương trình (1) có 6 nghiệm thực phân biệt thì phương trình (2) có 4 nghiệm thực phân biệt $x\neq\pm 2$.

Dựa vào đồ thị hàm số ta có: $-1<m-5<3 \Leftrightarrow 4<m<8$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số m.

Câu 70. Cho hàm số $y=f(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r$, trong đó $m,n,p,q,r\in R$ Biết rằng hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Tập nghiệm của phương trình $f(x)=16m+8n+4p+2q+r$ có tất cả bao nhiêu phần tử.

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

+) Ta có $y=f(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r\Rightarrow f'(x)=4mx^3+3nx^2+2px+q\,(1)$

+) Dựa đồ thị $y=f'(x)$ suy ra $f'(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt $x=-1;x=1;x=4$

Do đó $m\neq 0$

Và $f'(x)=4m(x+1)(x-1)(x-4)\Leftrightarrow f'(x)=4m(x^2-1)(x-4)$

$\Leftrightarrow f'(x)=4m(x^3-4x^2-x+4)=4mx^3-16mx^2-4mx+16m\,(2)$

Từ (1) và (2) ta được $\begin{cases}3n=-16m\\2p=-4m\\q=16m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n=-\dfrac{16}{3}m\\p=-2m\\q=16m\end{cases}$

Suy ra $f(x)=mx^4-\dfrac{16}{3}mx^3-2mx^2+16mx+r$

+) phương trình $f(x)=16m+8n+4p+2q+r$

$\Leftrightarrow mx^4-\dfrac{16}{3}mx^3-2mx^2+16mx+r=16m+8n+4p+2q+r$

$\Leftrightarrow mx^4-\dfrac{16}{3}mx^3-2mx^2+16mx=16m+8.(-\dfrac{16}{3})m+4(-2)m+2.16m$

$\Leftrightarrow x^4-\dfrac{16}{3}x^3-2x^2+16x=16+8.(-\dfrac{16}{3})+4(-2)+2.16$

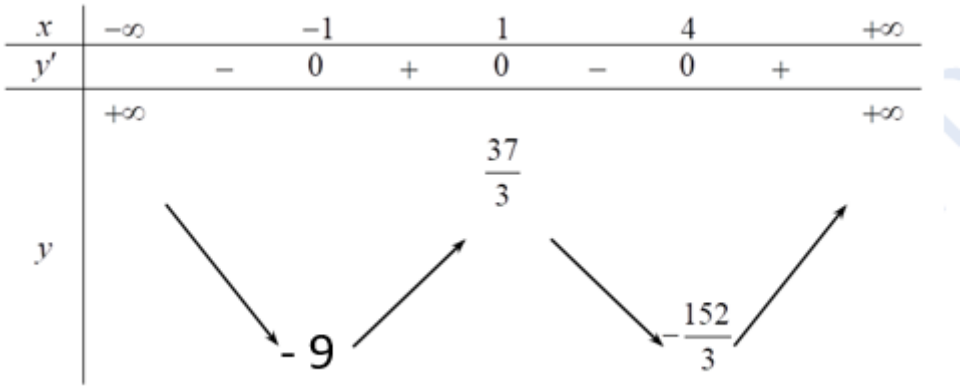
-9

$\Leftrightarrow x^4-\dfrac{16}{3}x^3-2x^2+16x+\dfrac{8}{3}=0\,(*)$

+) Xét $g(x)=x^4-\dfrac{16}{3}x^3-2x^2+16x+\dfrac{8}{3}\Rightarrow g'(x)=4x^3-16x^2-4x+16$

$\Rightarrow g'(x)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\\x=4\end{array}\right.$

Bảng biên thiên



Suy ra (*) có 4 nghiệm phân biệt

Câu 71. Phương trình $\sqrt{2-f(x)}=f(x)$ có tập nghiệm là $T_1=\{20;18;3\}$. Phương trình $\sqrt{2g(x)-1}+\sqrt[3]{3g(x)-2}=2g(x)$ có tập nghiệm $T_2=\{0;3;15;19\}$. Hỏi tập nghiệm của phương trình $\sqrt{f(x)g(x)}+1=\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}$ có bao nhiêu phần tử?

A. 4. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases}0\le f(x)\le 2\\ g(x)\ge\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

Ta có $\sqrt{2-f(x)}=f(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\ge 0\\ f^2(x)+f(x)-2=0\end{cases}\Leftrightarrow f(x)=1\Leftrightarrow x\in T_1=\{20;18;3\}$.

Lại có $\sqrt{2g(x)-1}+\sqrt[3]{3g(x)-2}=2g(x)$

$\Leftrightarrow g(x)-\sqrt{2g(x)-1}+g(x)-\sqrt[3]{3g(x)-2}=0$

$\Leftrightarrow\dfrac{g^2(x)-2g(x)+1}{g(x)+\sqrt{2g(x)-1}}+\dfrac{g^3(x)-3g(x)+2}{g^2(x)+g(x)\sqrt[3]{3g(x)-2}+\sqrt[3]{[3g(x)-2]^2}}=0$

$\Leftrightarrow\dfrac{[g(x)-1]^2}{g(x)+\sqrt{2g(x)-1}}+\dfrac{[g(x)-1]^2\cdot[g(x)+2]}{g^2(x)+g(x)\sqrt[3]{3g(x)-2}+\sqrt[3]{[3g(x)-2]^2}}=0$

$\Leftrightarrow[g(x)-1]^2\left(\dfrac{1}{g(x)+\sqrt{2g(x)-1}}+\dfrac{g(x)+2}{g^2(x)+g(x)\sqrt[3]{3g(x)-2}+\sqrt[3]{[3g(x)-2]^2}}\right)=0$

$\Leftrightarrow g(x)-1=0\Leftrightarrow g(x)=1\Leftrightarrow x\in T_2=\{0;3;15;19\}$.

Do đó, ta có

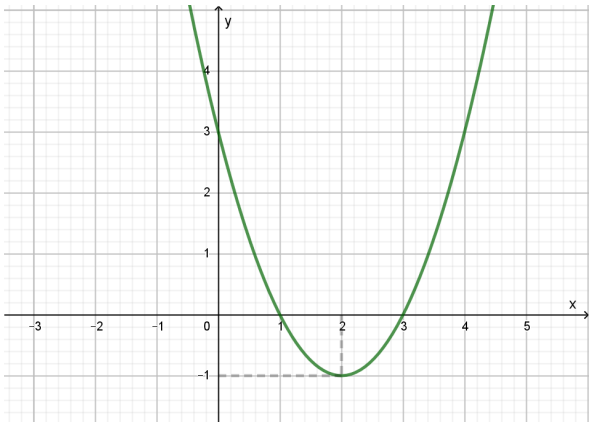
$\sqrt{f(x)g(x)}+1=\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}\Leftrightarrow[\sqrt{f(x)}-1]\cdot[1-\sqrt{g(x)}]=0$

$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}f(x)=1\\ g(x)=1\end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in T_1 = \{20;18;3\} \\ x \in T_2 = \{0;3;15;19\} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x \in T_1 \cup T_2 = \{0;3;15;18;19;20\}$.

Câu 72. Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị (C) (như hình vẽ). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(|x|) + (m-2) f(|x|) + m - 3 = 0$ có 6 nghiệm phân biệt?

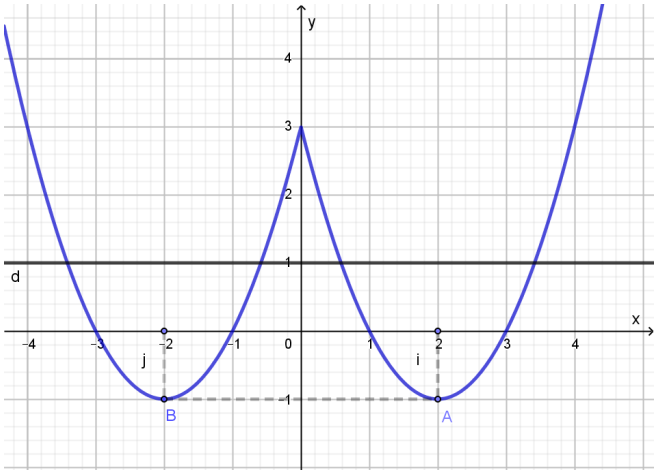


A. $m = 4$. **B.** $m = 3$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = 1$.

Lời giải

Chọn B

* Vẽ đồ thị hàm số (C') của hàm số $y = f(|x|)$: Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm phía bên phải trục Oy, bỏ đi phần đồ thị (C) bên trái trục Oy và lấy đối xứng phần đồ thị (C) phía bên phải trục Oy qua trục Oy.



* Ta có $f^2(|x|) + (m-2) f(|x|) + m - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(|x|) = -1 \\ f(|x|) = 3 - m \end{array}\right.$.

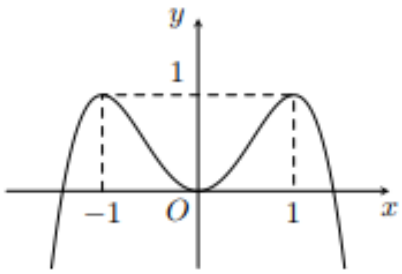
* Từ đồ thị (C'), ta có:

- Phương trình $f(|x|) = -1$ có hai nghiệm là $x = 2, x = -2$.

- Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình $f(|x|) = 3 - m$ có bốn nghiệm phân biệt khác ± 2 $\Leftrightarrow$ Đường thẳng $d: y = 3 - m$ cắt đồ thị (C') tại bốn điểm phân biệt khác A, B

$\Leftrightarrow -1 < 3 - m < 3 \Leftrightarrow 0 < m < 4$. Suy ra $m \in \{1,2,3\}$.

Câu 73. Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ trong đó a,b,c,d,e là các hệ số thực có đồ thị như hình vẽ sau đây.



Số nghiệm của phương trình $f\left(\sqrt{f(x)}\right)+f(x)+2\sqrt{f(x)}-1=0$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

*) **Phân tích:** Đây là bài toán tương giao dựa vào đồ thị.

-Phương pháp chung giải bài tập loại này là ta thường biến đổi phương trình đưa về dạng $f(x)=m$, $(m\in\mathbb{R})$.

- Ta thấy vế trái của phương trình có chứa $\sqrt{f(x)}$, $f\left(\sqrt{f(x)}\right)$, do đó để biến đổi phương trình về dạng $f(x)=m$ ta cần đặt ẩn phụ $t=\sqrt{f(x)}$.

-Ngoài ra ta có thể tìm hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ có đồ thị như giả thiết.

Sau đây tôi xin trình bày 2 cách.

Cách 1: Biến đổi phương trình.

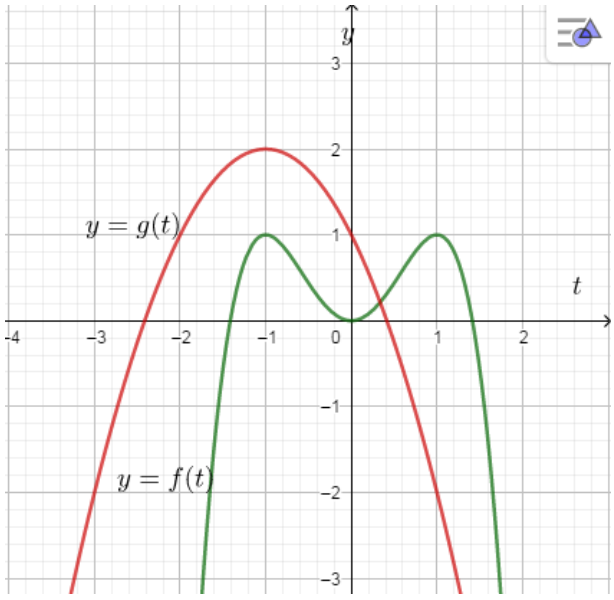
Điều kiện: $f(x)\ge 0$.

Đặt $\sqrt{f(x)}=t$. Dựa vào đồ thị và kết hợp điều kiện ta có $t\in[0;1]$.

Phương trình trở thành $f(t)+t^2+2t-1=0$

$\Leftrightarrow f(t)=-t^2-2t+1 \quad (1)$

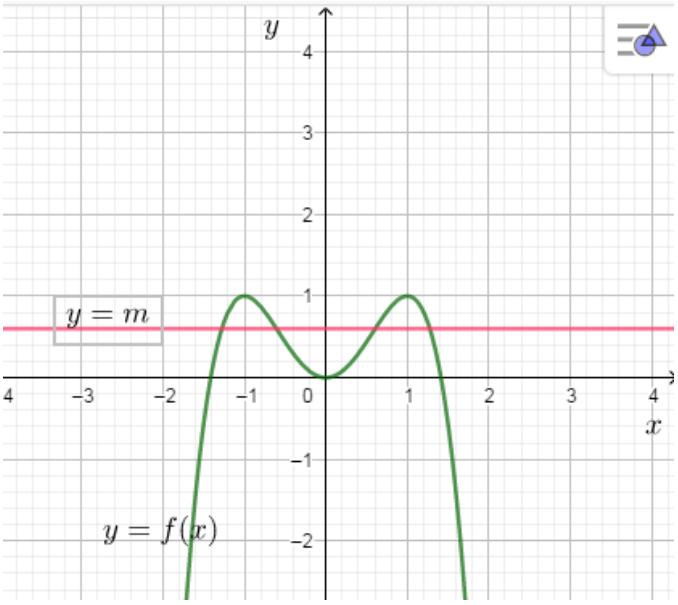
Ta có đồ thị hàm số $y=f(t)$ và $y=-t^2-2t+1$ như hình vẽ bên dưới.



Trên đoạn $[0;1]$ đồ thị hàm số $y=f(t)$ và đồ thị hàm số $y=g(t)=-t^2-2t+1$ cắt nhau tại một điểm duy nhất.

Do đó phương trình (1) có duy nhất nghiệm , $t=\sqrt{m}\in(0;1)$, với $m\in(0;1)$.

Hay phương trình tương đương với $f(x)=m,$.



Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt.

Cách 2:

Điều kiện: $f(x)\ge 0$

Đặt $\sqrt{f(x)}=t$. Dựa vào đồ thị và kết hợp điều kiện ta có $t\in[0;1]$.

Phương trình trở thành $f(t)+t^2+2t-1=0$

$\Leftrightarrow f(t)=-t^2-2t+1 \quad (1)$

Đồ thị hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ đi qua điểm $(0;0),(1;1),(-1;1)$ nên

$$\begin{cases} e=0 \\ a+b+c+d=1 \\ a-b+c-d=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e=0 \\ a+c=1 \\ b+d=0 \end{cases} \quad (2)$$

Ta có $f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$ và hàm số đạt cực trị tại $x=\pm 1$ nên

$$\begin{cases} 4a+3b+2c+d=0 \\ -4a+3b-2c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3b+d=0 \\ 4a+2c=0 \end{cases} \quad (3).$$

Giải hệ (2) và (3) ta có $a=-1;b=0;c=2;d=0;e=0$.

Do đó $f(x)=-x^4+2x^2$.

$(1)\Leftrightarrow -t^4+2t^2=-t^2-2t+1, \quad t\in[0;1]$

$\Leftrightarrow -t^4+3t^2+2t-1=0$.

Xét hàm số $h(t)=-t^4+3t^2+2t-1, \forall t\in[0;1]$.

$$\text{Có } h'(t) = -4t^3 + 6t + 2 \Rightarrow h'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \\ t = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} \\ t = -1 \end{array}\right.$$

Lập bảng xét dấu của $h(t)$

t	$-\infty$		-1		$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$		0		1		$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
h'		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
h		↗		↘		↗		↗		↗		↘	

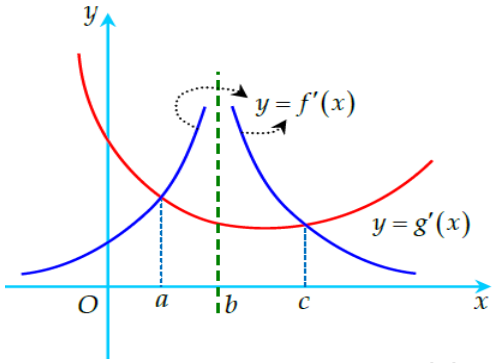
Hàm số đồng biến trên $t \in [0;1]$ nên phương trình $-t^4 + 3t^2 + 2t - 1 = 0$ có duy nhất nghiệm.

Sử dụng MTCT ta có nghiệm $t \approx 0.336$ hay $\sqrt{f(x)} \approx 0.336 \Leftrightarrow f(x) \approx 0.11$.

Do đó phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt.

Lưu ý: Việc tìm ra nghiệm thuộc $[0;1]$ của phương trình $h(t) = 0$ có thể dùng MTCT với chức năng MODE 7.

Câu 74. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}\backslash\{b\}$ và hàm số $g(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị của hai hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ như hình vẽ dưới. Đặt $h(x) = f(x) - g(x)$ và $S = -[h(x+b)]^2 + h(b+x^2)\big(1 + 2h(c)\big) - [h(c)]^2$ với a, b, c là các số thực đã biết. Khẳng định đúng với mọi $x \neq 0$ là?



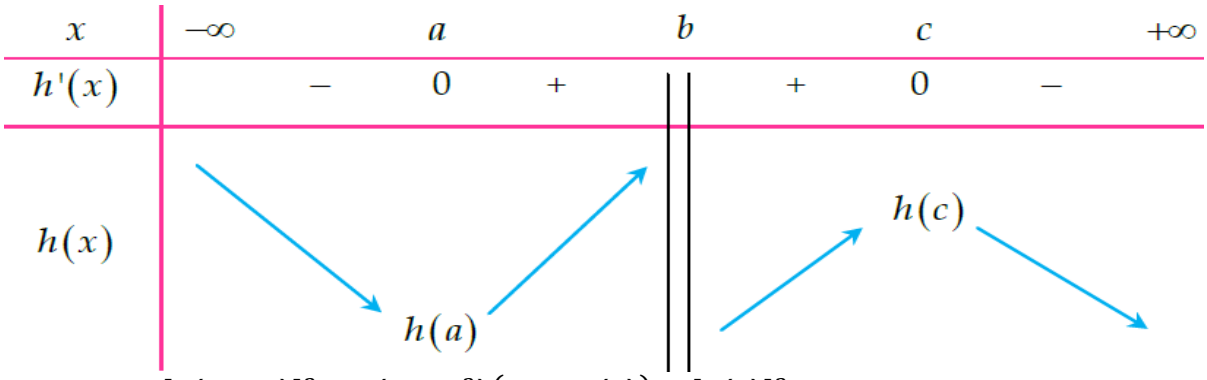
A. $S \in [h(c); h(a+c)]$..
B. $S \leq h(c)$.
C. $S \in [h(c); h(a+b)]$.
D. $S \in [h(a); h(c)]$.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị đã cho ta suy ra $h'(x) = f'(x) - g'(x)$, $h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \\ x = c \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên ta có



Lại có $S = -[h(x+b)]^2 + h(b+x^2)\left(1+2h(c)\right) - [h(c)]^2$

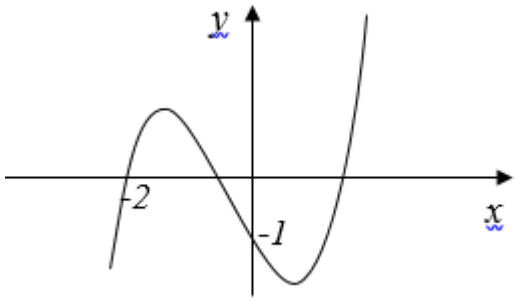
$\Rightarrow S = -[h(x+b)-h(c)]^2 + h(b+x^2) \le h(x^2+b)$ v × $-[h(x+b)-h(c)]^2 \le 0, \forall x \neq b$

Từ bảng biến thiên suy ra $\max\limits_{(b;+\infty)} h(x) = h(c)$.

Vì: $x^2 + b > b, \forall x \neq 0$ nên ta có $h(x^2+b) \le h(c), \forall x \neq 0$.

Vậy $S \le h(c), \forall x \neq 0$.

Câu 75. Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Bất phương trình $f(x) < m - x^3 - x$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (-2;0)$ khi và chỉ khi

A. $m > f(0)$. **B.** $m \ge f(-2) - 10$. **C.** $m > f(-2) - 10$. **D.** $m \ge f(0)$.

Lời giải

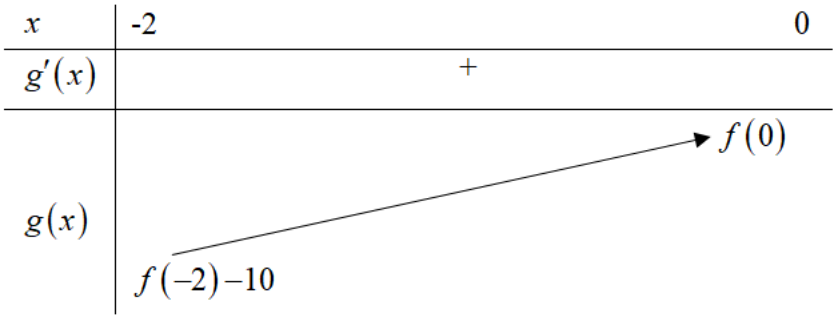
Chọn D

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ suy ra $f'(x) > -1, \forall x \in (-2;0)$.

Ta có $f(x) < m - x^3 - x, \forall x \in (-2;0) \Leftrightarrow f(x) + x^3 + x < m, \forall x \in (-2;0)$ (1)

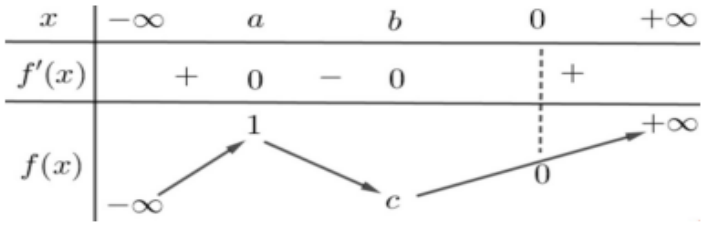
Đặt $g(x) = f(x) + x^3 + x$. Khi đó $g'(x) = f'(x) + 3x^2 + 1 > 0, \forall x \in (-2;0)$.

Bảng biến thiên



Vậy $g(x) < m, x \in (-2;0) \Rightarrow m \ge f(0)$

Câu 76. Cho các số thực $a, b, c < 0$ và hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

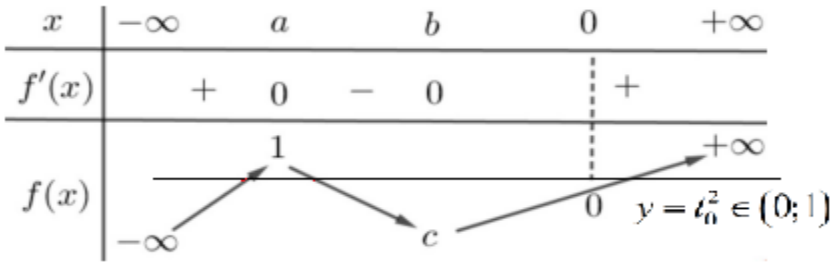


Phương trình $f\left(f\left(\sqrt{f(x)}\right)+f(x)+\sqrt{f(x)}\right)=f(1)$ có số nghiệm là.

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A



Đặt: $t=\sqrt{f(x)},(t\geq 0)$ phương trình trở thành $f(f(t)+t^2+t)=f(1)(*)$.

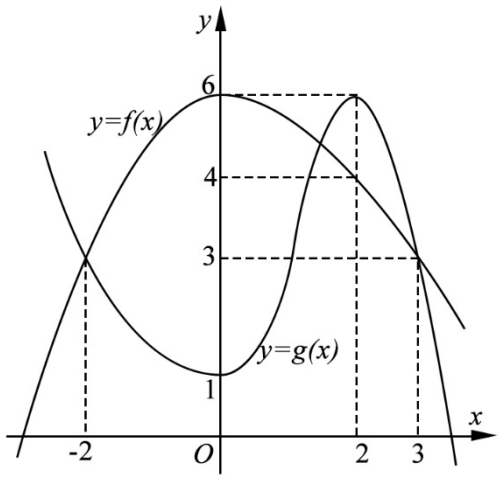
Từ bảng biến thiên ta thấy trên trên nửa khoảng $[0;+\infty)$ hàm số $f(x)$ đồng biến do đó $(*)\Leftrightarrow f(t)+t^2+t=1\Leftrightarrow f(t)+t^2+t-1=0(1)$.

Xét hàm số $g(t)=f(t)+t^2+t-1$ trên nửa khoảng $[0;+\infty)$ có $g'(t)=f'(t)+2t+1>0,\forall t>0$.

Mặt khác: $\begin{cases}g(0)=-1<0\\ g(1)=f(1)+1>0\end{cases}\Rightarrow g(0).g(1)<0\Rightarrow$ pt (1) có nghiệm duy nhất $t=t_0\in(0;1)$.

Vậy $\sqrt{f(x)}=t_0\Leftrightarrow f(x)=t_0^2\in(0;1)$. Phương trình này có 3 nghiệm vì đường thẳng $y=t_0^2\in(0;1)$ cắt đồ thị hàm số $f(x)$ tại 3 điểm phân biệt.

Câu 77. Cho hàm số $y=f(x)$ và hàm số $y=g(x)$ có đạo hàm xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\dfrac{f(x)}{g(x)}=m$ có nghiệm thuộc $[-2;3]$?

A. 4. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Dựa vào đồ thị, ta thấy các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên $[-2;3]$, do đó $h(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên $[-2;3]$.

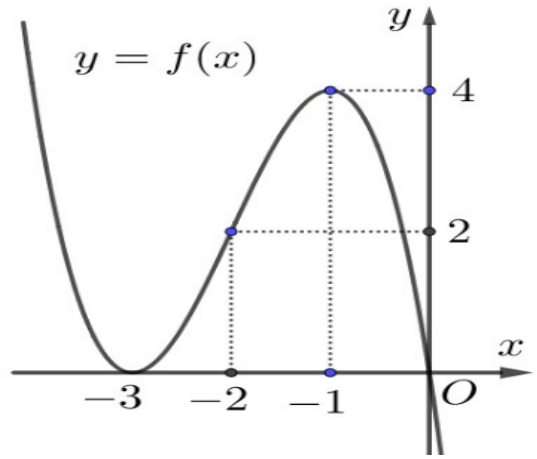
Ngoài ra với $x\in[-2;3]$, dễ thấy $f(x)\le 6$, $g(x)\ge 1$ nên $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}\le 6$, mà $h(0)=\dfrac{f(0)}{g(0)}=\dfrac{6}{1}=6$ nên $\max\limits_{[-2;3]}h(x)=6$ (1).

Lại có $h(x)>0$ với mọi $x\in[-2;3]$ và $h(-2)=1$ nên $0<\min\limits_{[-2;3]}h(x)\le 1$ (2).

Phương trình $\dfrac{f(x)}{g(x)}=m$ có nghiệm trên $[-2;3]$ khi và chỉ khi $\min\limits_{[-2;3]}h(x)\le m\le\max\limits_{[-2;3]}h(x)$ (3).

Từ (1), (2) và (3), kết hợp với $m\in\mathbb{Z}$, ta có $m\in\{1;2;3;4;5;6\}$.

Câu 78. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị trong hình dưới đây. Số nghiệm thực của phương trình $2f^2(x^2-1)-9f(x^2-1)+10=0$ là



A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

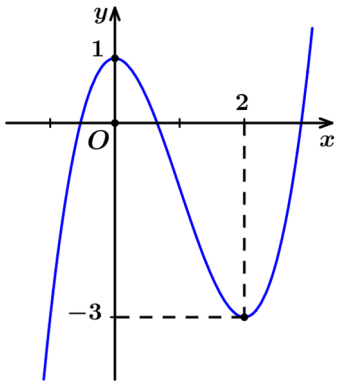
Đặt $t=x^2-1, t\ge -1$. Ta được phương trình sau:

$$2f^2(t)-9f(t)+10=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(t)=2\\ f(t)=\dfrac{5}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=a,(t<-3)\ \ (l)\\ t=-2\ \ (l)\\ t=b,(-1<b<0)\\ t=c\ \ (c<a<-3)\ \ (l)\\ t=d\ \ (-2<d<-1)\ \ (l)\\ t=e\ \ (-1<e<b<0)\end{array}\right.$$

Suy ra: $\left[\begin{array}{l}x^2-1=b\\ x^2-1=e\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\sqrt{1+b}\\ x=\pm\sqrt{1+e}\end{array}\right.$.

Vậy phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 79. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



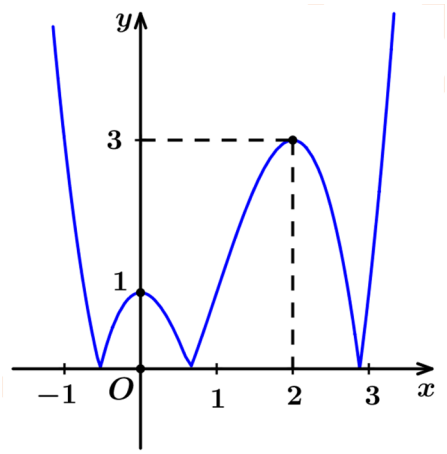
Số nghiệm của phương trình $\left|f\left(x^3-3x^2+2\right)\right|-1=0$ là

A. 9. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 12.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ suy ra đồ thị hàm số $y=\left|f(x)\right|$ như sau:



$\left|f\left(x^3-3x^2+2\right)\right|-1=0\Leftrightarrow\left|f\left(x^3-3x^2+2\right)\right|=1$ (1)

Đặt $x^3-3x^2+2=t$. Dựa vào đồ thị hàm số $y=\left|f(x)\right|$, phương trình $\left|f(t)\right|=1$ có 5 nghiệm phân biệt là:

$t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4,\ t_5$ với $-1<t_1<0=t_2,\ \frac{1}{2}<t_3<\frac{3}{2},\ 2<t_4<3<t_5$.

Xét hàm số $g(x)=x^3-3x^2+2$

$g'(x)=3x^2-6x$

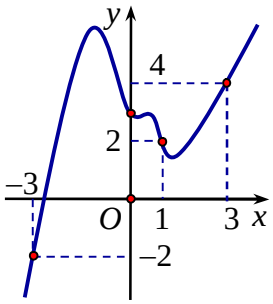
$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=0\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Khi đó, số nghiệm của các phương trình
$x^3-3x^2+2=t_1$, $x^3-3x^2+2=t_2$, $x^3-3x^2+2=t_3$, $x^3-3x^2+2=t_4$, $x^3-3x^2+2=t_5$ lần lượt bằng 3, 3, 3, 1, 1.
Vậy tổng số nghiệm của phương trình (1) bằng 11.

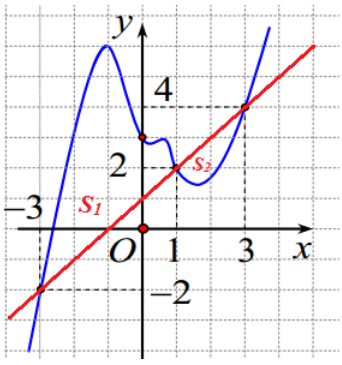
Câu 80. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[-3;3]$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Biết $f(1)=6$ và $g(x)=f(x)-\frac{(x+1)^2}{2}$.



Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. Phương trình $g(x)=0$ có đúng hai nghiệm thuộc $[-3;3]$.
B. Phương trình $g(x)=0$ có đúng một nghiệm thuộc $[-3;3]$.
C. Phương trình $g(x)=0$ không có nghiệm thuộc $[-3;3]$.
D. Phương trình $g(x)=0$ có đúng ba nghiệm thuộc $[-3;3]$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $g(x)=f(x)-\frac{(x+1)^2}{2}\Rightarrow g'(x)=f'(x)-(x+1)$.
Vẽ đường thẳng $y=x+1$ trên cùng một hệ trục tọa độ với đồ thị hàm số $y=f'(x)$ (như hình vẽ bên).
Từ đồ thị ta thấy: $g'(x)=f'(x)-(x+1)>0, \forall x\in(-3;1)$ (do đường cong nằm phía trên đường thẳng), $g'(x)=f'(x)-(x+1)<0, \forall x\in(1;3)$ (do đường cong nằm phía dưới đường thẳng).
Ta có: $g(1)=f(1)-\frac{(1+1)^2}{2}=6-2=4$.
Bảng biến thiên:

x	-3		1		3
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗	4	↘	

Dựa vào đồ thị ta thấy: diện tích S_1 lớn hơn 4 (trong phần bên trái có nhiều hơn 4 ô, mỗi ô có diện tích bằng 1), do đó:

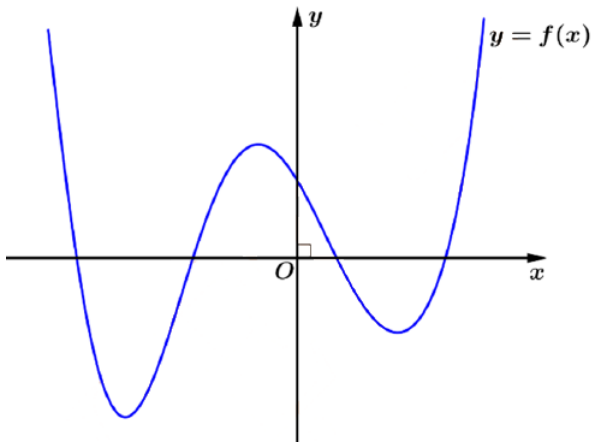
$4 < S_1 = \int_{-3}^{1} g'(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow 4 < g(x)|_{-3}^{1} \Leftrightarrow 4 < g(1) - g(-3) \Leftrightarrow g(-3) < 0.$

Mặt khác diện tích S_2 nhỏ hơn 4 (trong phần bên phải có ít hơn 4 ô), do đó:

$4 > S_2 = -\int_{1}^{3} g'(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow 4 > -g(x)|_{1}^{3} \Leftrightarrow 4 > g(1) - g(3) \Leftrightarrow g(3) > 0.$

Vậy phương trình $g(x) = 0$ có đúng một nghiệm thuộc đoạn $[-3;3]$ (nghiệm này nằm trong khoảng $(-3;1)$).

Câu 81. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Gọi (C_1) và (C_2) lần lượt là đồ thị của hàm số $y = f''(x).f(x) - [f'(x)]^2$ và $y = 2020^x$. Số giao điểm của (C_1) và (C_2) là

A. 4. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Giả sử: $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ với $a \neq 0$.

Từ đồ thị hàm số ta thấy phương trình $f(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt nên ta có:

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$ với x_1, x_2, x_3, x_4 là 4 nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

Suy ra:

$$f'(x) = a\left[(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + (x - x_1)(x - x_2)(x - x_4) + (x - x_1)(x - x_3)(x - x_4) + \right.$$
$$\left. + (x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)\right].$$

Do đó: $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{x - x_1} + \dfrac{1}{x - x_2} + \dfrac{1}{x - x_3} + \dfrac{1}{x - x_4}$

$$\Rightarrow \left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]' = \frac{f''(x).f(x) - (f'(x))^2}{(f(x))^2} = -\frac{1}{(x - x_1)^2} - \frac{1}{(x - x_2)^2} - \frac{1}{(x - x_3)^2} - \frac{1}{(x - x_4)^2} < 0,$$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1; x_2; x_3; x_4\}$.

Dễ thấy tại các điểm $\{x_1;x_2;x_3;x_4\}$ thì $y=f''(x_i).f(x_i)-\left[f'(x_i)\right]^2\le 0\ (i=\overline{1,4})$ và $2020^x>0$.

Nên: $f''(x).f(x)-\left(f'(x)\right)^2=2020^x$ vô nghiệm trên $\mathbb{R}$.

Vậy (C_1) và (C_2) không có điểm chung.

Câu 82. Cho hàm số: $f(x)=x^3-6x^2+9x$. Đặt $f^k(x)=f(f^{k-1}(x))$ (với k là số tự nhiên lớn hơn 1). Tính số nghiệm của phương trình $f^6(x)=0$.

A. 729. **B.** 365. **C.** 730. **D.** 364.

Lời giải

Chọn B

Có: $f(x)=x^3-6x^2+9x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.$

$f^k(x)=0\Leftrightarrow f(f^{k-1}(x))=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f^{k-1}(x)=0\\f^{k-1}(x)=3\end{array}\right.$

Mà $f(x)=3$ có 3 nghiệm phân biệt đều thuộc khoảng $(0;4)$, $f(x)=a$ với a thuộc $(0;4)$ cũng có 3 nghiệm phân biệt.

Đặt u_k là số nghiệm của phương trình $f^k(x)=0$. Có $u_1=2$

Đặt v_k là số nghiệm của phương trình $f^k(x)=3$. Có: $v_1=3;\ v_2=9;...;v_k=3^k$

Ta có: $u_k=u_{k-1}+v_{k-1}=2+3+3^2+...+3^{k-1}=1+1+3+3^2+...+3^{k-1}=\dfrac{3^k+1}{2}$

Vậy $u_6=\dfrac{3^6+1}{2}=365$.