

MỤC LỤC

Chương I.	HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC	3
Ⓐ	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	3
📁	Mức độ Nhận biết, Thông hiểu.....	3
📁	Mức độ Vận dụng.....	4
Ⓑ	BÀI TẬP TỰ LUẬN.....	4
Chương II.	DÃY SỐ, CẤP SỐ CỘNG, CẤP SỐ NHÂN	5
Ⓐ	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	5
📁	Mức độ Nhận biết, Thông hiểu.....	5
📁	Mức độ Vận dụng.....	5
Ⓑ	BÀI TẬP TỰ LUẬN.....	6
Chương III.	CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM	7
Ⓐ	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	7
📁	Mức độ Nhận biết, Thông hiểu.....	7
📁	Mức độ Vận dụng.....	8
Ⓑ	BÀI TẬP TỰ LUẬN.....	8
Chương IV.	QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN	10
Ⓐ	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	10
📁	Mức độ Cơ bản.....	10
📁	Mức độ Vận dụng.....	13
Ⓑ	BÀI TẬP TỰ LUẬN.....	14
Chương V.	GIỚI HẠN. HÀM SỐ LIÊN TỤC	16
Ⓐ	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	16
📁	Mức độ Nhận biết, Thông hiểu.....	16
📁	Mức độ Vận dụng.....	17
Ⓑ	BÀI TẬP TỰ LUẬN.....	17

Chương I.

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

A. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1 Mức độ Nhận biết, Thông hiểu

Câu 1. Góc có số đo $\frac{\pi}{12}$ đổi sang độ là

- A. 15° . B. 16° .
C. 14° . D. $17^\circ 30'$.

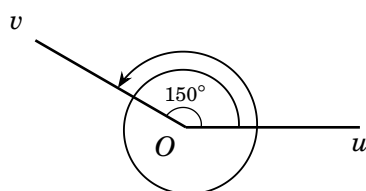
Câu 2. Góc có số đo 108° đổi sang radian là

- A. $\frac{3\pi}{2}$. B. $\frac{5\pi}{2}$. C. $\frac{5\pi}{3}$. D. $\frac{3\pi}{5}$.

Câu 3. Giá trị $\cot \frac{89\pi}{6}$ bằng

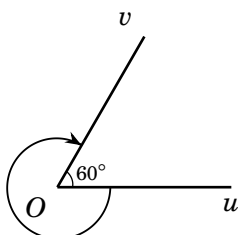
- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $-\sqrt{3}$. C. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $\sqrt{3}$.

Câu 4. Xác định số đo của góc lượng giác (Ou, Ov) được biểu diễn trong hình bên dưới.



- A. 410° . B. 510° . C. 150° . D. 420° .

Câu 5. Xác định số đo của góc lượng giác (Ou, Ov) được biểu diễn trong hình bên dưới



- A. -300° . B. 510° .
C. 60° . D. -420° .

Câu 6. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

- A. $\tan(\pi - \alpha) = \tan \alpha$. B. $\cot(\pi - \alpha) = \cot \alpha$.
C. $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$. D. $\sin(\pi - \alpha) = -\sin \alpha$.

Câu 7. Cho $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, với $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Tính $\cos \alpha$.

- A. $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$. B. $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.
C. $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. D. $\cos \alpha = \frac{2}{3}$.

Câu 8. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

- A. $\sin 2a = \sin a + \cos a$.
B. $\sin 2a = 2 \sin a$.
C. $\sin 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$.
D. $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$.

Câu 9. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề sai?

- A. $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$.
B. $\cos a - \cos b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$.
C. $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$.
D. $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$.

Câu 10. Chu kỳ của hàm số $y = \cot x$ là

- A. $k\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. 2π .
C. π . D. $\frac{\pi}{2}$.

Câu 11. Chu kỳ của hàm số $y = \cos x$ là

- A. $\frac{2\pi}{3}$. B. 2π . C. π . D. $k2\pi$.

Câu 12. Tập giá trị của hàm số $y = \cos x$ là tập hợp nào sau đây?

- A. $[0; +\infty]$. B. $\mathbb{R}$.
C. $(-\infty; 0]$. D. $[-1; 1]$.

Câu 13. Giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y = 3 \sin 2x - 5$ lần lượt là

- A. $m = 2, M = 8$. B. $m = -8, M = -2$.
C. $m = -5, M = -2$. D. $m = -8, M = -5$.

Câu 14. Phương trình $\cos x = a$ có nghiệm khi và chỉ khi

- A. $|a| \leq 1$. B. $|a| > 1$.
C. $|a| < 1$. D. $|a| \geq 1$.

Câu 15. Giải phương trình $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

- A. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$. B. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$.
C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k\pi \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$.

Câu 16. Phương trình $\cos 3x = \cos \frac{\pi}{15}$ có nghiệm là

- A. $x = \pm \frac{\pi}{15} + k2\pi$. B. $x = \pm \frac{\pi}{45} + \frac{k2\pi}{3}$.
C. $x = -\frac{\pi}{45} + \frac{k2\pi}{3}$. D. $x = \frac{\pi}{45} + \frac{k2\pi}{3}$.

Câu 17. Giải phương trình $\tan x = \sqrt{3}$ ta được tập nghiệm là

- A. $\left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. B. $\emptyset$.
C. $\left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $\left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

2 Mức độ Vận dụng

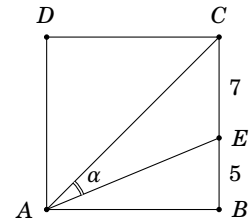
Câu 18. Cho hai dao động điều hòa cùng phương có phương trình lần lượt là $x_1 = 5\cos(100\pi t + \pi)(\text{cm})$ và $x_2 = 5\cos(100\pi t - \pi/2)(\text{cm})$. Phương trình dao động tổng hợp của hai dao động trên là

- A. $x = 5\sqrt{2}\cos\left(100\pi t + \frac{3\pi}{4}\right)(\text{cm})$.
B. $x = 5\sqrt{2}\cos\left(100\pi t - \frac{3\pi}{4}\right)(\text{cm})$.

- C. $x = 10\cos\left(100\pi t - \frac{3\pi}{4}\right)(\text{cm})$.
D. $x = 10\cos\left(100\pi t + \frac{3\pi}{4}\right)(\text{cm})$.

Câu 19. Cho hình vuông $ABCD$ như hình vẽ. Tính giá trị của $\tan \alpha$.

- A. $\frac{4}{13}$. B. $\frac{6}{13}$.
C. $\frac{4}{13}$. D. $\frac{6}{17}$.



Câu 20. Nhiệt độ ngoài trời ở một thành phố vào các thời điểm khác nhau trong ngày có thể được mô phỏng bởi công thức

$$h(t) = 29 + 3\sin\left[\frac{\pi}{12}(t - 9)\right]$$

với h tính bằng độ C và t là thời gian trong ngày tính bằng giờ. Nhiệt độ thấp nhất trong ngày vào lúc mấy giờ?

- A. 5 giờ. B. 0 giờ. C. 3 giờ. D. 4 giờ.

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

BÀI 1. Giải các phương trình lượng giác sau:

- a) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
c) $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; d) $\cos(2x - 30^\circ) = -1$;
e) $\tan 3x = \tan \frac{\pi}{7}$; f) $\cot\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{3}$.

BÀI 2. Số giờ có ánh nắng mặt trời của một thành phố A trong ngày thứ t (ở đây t là số ngày tính từ ngày 1 tháng Giêng) của một năm không nhuận được mô hình hóa bởi hàm số

$$L(t) = 12 + 2,83\sin\left[\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right] \text{ với } t \in \mathbb{Z} \text{ và } 0 < t \leq 365.$$

- a) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có ít giờ ánh sáng mặt trời nhất?
b) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ ánh sáng mặt trời nhất?
c) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có khoảng 10 giờ ánh sáng mặt trời?

BÀI 3. Chiều cao h (m) của một cabin trên vòng quay vào thời điểm t giây sau khi bắt đầu chuyển động được cho bởi công thức $h(t) = 30 + 20\sin\left(\frac{\pi}{25}t + \frac{\pi}{3}\right)$.

- a) Cabin đạt độ cao tối đa là bao nhiêu?
b) Sau bao nhiêu giây thì cabin đạt độ cao 40 m lần đầu tiên?

Chương II.

DÃY SỐ, CẤP SỐ CỘNG, CẤP SỐ NHÂN

A. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1 Mức độ Nhận biết, Thông hiểu

Câu 1. Cho dãy số (u_n) có $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$. Tính u_8 .

- A. $u_8 = \frac{5}{3}$. B. $u_8 = \frac{11}{9}$.
C. $u_8 = \frac{17}{9}$. D. $u_8 = 1$.

Câu 2. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó là

- A. -3; 6; 9. B. 3; 8; 13.
C. 3; 5; 7. D. 3; -2; -7.

Câu 3. Dãy nào sau đây là cấp số cộng?

- A. 1; 5; 9; 5; 1. B. 1; 3; 5; 7; 11.
C. 2; 5; 8; 11. D. 3; 7; 3; 7.

Câu 4. Cho cấp số cộng 1, 8, 15, 22, 29, Công sai của cấp số cộng này là

- A. 9. B. 1. C. 8. D. 7.

Câu 5. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 3$ và $d = 2$. Số hạng thứ 2 của cấp số cộng đã cho là

- A. 3. B. 6. C. 1. D. 5.

Câu 6. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 4$ và $d = 2$. Số hạng thứ 50 của cấp số cộng đó là

- A. $u_{50} = 100$. B. $u_{50} = 102$.
C. $u_{50} = 104$. D. $u_{50} = 198$.

Câu 7. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 3$ và $d = -2$. Tổng của 20 số hạng đầu của cấp số cộng đó là

- A. $S_{20} = -380$. B. $S_{20} = -214$.
C. $S_{20} = -640$. D. $S_{20} = -320$.

Câu 8. Dãy số nào sau đây không phải là cấp số nhân?

- A. 1, -1, 1, -1, 1. B. 1, 2, 3, 4, 5.
C. 1, -2, 4, -8, 16. D. 1, 2, 4, 8, 16.

Câu 9. Cho cấp số nhân (u_n) , biết $u_1 = -9, u_2 = 3$. Công bội q là

- A. $q = \frac{1}{3}$. B. $q = -3$.
C. $q = 3$. D. $q = -\frac{1}{3}$.

Câu 10. Cho cấp số nhân (u_n) , biết $u_1 = 3$ và công bội $q = -2$. Tìm u_3 .

- A. $u_3 = 16$. B. $u_3 = 14$.
C. $u_3 = 12$. D. $u_3 = 11$.

Câu 11. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2$ và $q = -3$. Khi đó, số hạng u_6 bằng

- A. $-3 \cdot 2^5$. B. $2 \cdot (-3)^5$.
C. $-3 \cdot 2^6$. D. $2 \cdot (-3)^6$.

Câu 12. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 3$ và công bội $q = 2$. Tổng $S_{10} = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{10}$ bằng

- A. $\frac{1023}{2}$. B. 1023. C. 1536. D. 3069.

2 Mức độ Vận dụng

Câu 13. Một người muốn chia 1000 · 000 đồng cho bốn người con, đứa lớn hơn đứa nhỏ kế tiếp 100 · 000 đồng. Hỏi đứa con lớn nhất được bao nhiêu tiền.

- A. 400 · 000 đồng. B. 200 · 000 đồng.
C. 100 · 000 đồng. D. 300 · 000 đồng.

Câu 14. Một du khách vào trường đua ngựa xem đua ngựa và đặt cược chọn con thắng cuộc. Nếu chọn đúng con thắng cuộc thì sẽ nhận được số tiền gấp đôi số tiền đặt cược, còn nếu chọn sai thì sẽ mất số tiền đặt cược. Người du khách đó lần đầu tiên đặt 20000 đồng, mỗi lần sau tiền đặt gấp đôi tiền đặt lần trước. Người đó thua 9 lần liên tiếp và thắng ở lần thứ 10. Hỏi du khách đó thắng hay thua bao nhiêu?

- A. Thắng 20000 đồng.
B. Hoà vốn.
C. Thua 20000 đồng.
D. Thua 40000 đồng.

Câu 15. Một gia đình cần khoan một cái giếng để lấy nước. Họ thuê một đội khoan giếng nước đến để khoan giếng. Biết giá của mét khoan đầu tiên là 80000 đồng, kể từ mét khoan thứ hai giá của mỗi mét khoan tăng thêm 5000 đồng so với giá của mét khoan trước đó. Biết cần phải khoan sâu xuống 50 m mới có nước. Hỏi phải trả bao nhiêu tiền để khoan cái giếng đó?

- A. 4245000 đồng. B. 5250000 đồng.
C. 4000000 đồng. D. 10125000 đồng.

Câu 16. Chu kì bán rã của nguyên tố phóng xạ Poloni 210 là 138 ngày (nghĩa là sau 138 ngày khối lượng của nguyên tố đó chỉ còn một nửa). Tính (chính xác đến hàng phần trăm) khối lượng còn lại của 20 gam Poloni 210 sau 7314 ngày (khoảng 20 năm).

- A. $3,22 \cdot 10^{-15}$. B. $3,52 \cdot 10^{-15}$.
C. $2,52 \cdot 10^{-15}$. D. $2,22 \cdot 10^{-15}$.

Câu 17. Tế bào E.Coli trong điều kiện nuôi cấy thích hợp cứ 20 phút lại nhân đôi một lần. Nếu lúc đầu có 10^{12} tế bào thì sau 3 giờ sẽ phân chia thành bao nhiêu tế bào?

- A. $256 \cdot 10^{12}$ tế bào. B. $1024 \cdot 10^{12}$ tế bào.
C. $512 \cdot 10^{13}$ tế bào. D. $512 \cdot 10^{12}$ tế bào.

Câu 18. Ông Trung có 100 triệu đồng gửi tiết kiệm vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn 6 tháng với lãi suất 8% cho một kì hạn. Giả sử lãi suất không thay đổi. Hỏi sau 3 năm số

tiền trong tài khoản tiết kiệm của ông Trung **gần nhất** với số nào sau đây?

- A. 126532000 đồng. B. 158687000 đồng.
C. 125971000 đồng. D. 112486000 đồng.

Câu 19. Ba số phân biệt có tổng là 217 có thể coi là các số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, cũng có thể coi là số hạng thứ 2, thứ 9, thứ 44 của một cấp số cộng. Hỏi phải lấy bao nhiêu số hạng đầu của cấp số cộng này để tổng của chúng bằng 210?

- A. 40. B. 30. C. 20. D. 10.

Câu 20. Một đa giác có n cạnh và có chu vi bằng 158 cm. Biết số đo các cạnh của đa giác lập thành một cấp số cộng và công sai $d = 3$ cm và cạnh lớn nhất có độ dài là 44 cm. Đa giác có số cạnh n bằng

- A. $n = 6$. B. $n = 7$. C. $n = 5$. D. $n = 4$.

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

BÀI 1. Tìm công sai của cấp số cộng (u_n) , biết

- a) $u_1 = -21$ và $u_{14} = 18$; b) $u_5 = -15$ và $u_{20} = 60$;
c) $u_1 = 2$ và $u_2 + u_3 = 5$; d) $u_2 + u_4 = 16$ và $u_3 + u_7 = -4$.

BÀI 2. Xác định công bội của một cấp số nhân (u_n) , biết

- a) $u_1 = \frac{1}{2}$ và $u_6 = 16$; b) $u_1 = -\frac{1}{2}$ và $u_7 = -32$;
c) $u_3 = 9$ và $u_6 = 243$; d) $u_2 = \frac{1}{4}$ và $u_5 = 16$.

BÀI 3. Có bao nhiêu hàng ghế trong một góc khán đài của một sân vận động, biết rằng góc khán đài đó có 2040 chỗ ngồi, hàng ghế đầu tiên có 10 chỗ ngồi và mỗi hàng ghế sau có thêm 4 chỗ ngồi so với hàng ghế ngay trước nó?

BÀI 4. Nếu anh Nam nhận được lời mời làm việc cho một công ty nước ngoài với mức lương khởi điểm là 35000 đô la mỗi năm và được tăng thêm 1400 đô la lương mỗi năm, thì sẽ mất bao nhiêu năm làm việc để tổng lương mà anh Nam nhận được là 319200 đô la?

Chương III.

CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

A. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1 Mức độ Nhận biết, Thông hiểu

Câu 21. Điều tra về chiều cao của 100 học sinh lớp 10 trường THPT A, ta được kết quả

Chiều cao (cm)	[150;152)	[152;154)	[154;156)	[156;158)	[158;160)	[160;162)	[162;168)
Số học sinh	5	18	40	25	8	3	1

a) Mẫu số liệu trên có bao nhiêu nhóm

- A. 5. B. 6. C. 7. D. 8.

b) Số học sinh có chiều cao trong khoảng [154;156) là

- A. 40. B. 18. C. 5. D. 8.

Câu 22. Khảo sát thời gian xem ti vi trong một ngày của một số học sinh khối 11 thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau

Thời gian (phút)	[0;20)	[20;40)	[40;60)	[60;80)	[80;100)
Số học sinh	5	9	12	10	6

a) Giá trị đại diện của nhóm [60;80) là

- A. 40. B. 70. C. 60. D. 30.

b) Nhóm [20;40) có tần số là

- A. 5. B. 9. C. 12. D. 10.

c) Nhóm chứa một của mẫu số liệu này là

- A. [80;100). B. [20;40). C. [40;60). D. [60;80).

d) Nhóm chứa trung vị là

- A. [0;20). B. [20;40). C. [40;60). D. [60;80).

e) Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là

- A. [0;20). B. [20;40). C. [40;60). D. [60;80).

2 Mức độ Vận dụng

Câu 23. Tìm hiểu thời gian hoàn thành một bài tập (đơn vị: phút) của một số học sinh thu được kết quả sau

Thời gian (phút)	[0;4)	[4;8)	[8;12)	[12;16)	[16;20)
Số học sinh	2	4	7	4	3

Thời gian trung bình (phút) để hoàn thành bài tập của các em học sinh là

- A. 7. B. 11,3. C. 10,4. D. 12,5.

Câu 24. Cho mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao của 25 cây dừa giống như sau

Chiều cao (cm)	[0;10)	[10;20)	[20;30)	[30;40)	[40;50)
Số cây	4	6	7	5	3

a) Một của mẫu số liệu ghép nhóm này là

- A. $M_o = \frac{70}{3}$. B. $M_o = \frac{50}{3}$. C. $M_o = \frac{70}{2}$. D. $M_o = \frac{80}{3}$.

b) Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm này là

- A. $M_e = \frac{175}{7}$. B. $M_e = \frac{165}{5}$. C. $M_e = \frac{165}{7}$. D. $M_e = \frac{165}{3}$.

c) Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm này là

- A. $Q_1 = 13,5$. B. $Q_1 = 13,9$. C. $Q_1 = 15,75$. D. $Q_1 = 13,75$.

Câu 25. Cho mẫu số liệu ghép nhóm về khối lượng (đơn vị: gram) của 30 củ khoai tây như sau

Khối lượng	[70;80)	[80;90)	[90;100)	[100;110)	[110;120)
Tần số	3	6	12	6	3

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm này là

- A. $Q_3 = 133$. B. $Q_3 = 134$. C. $Q_3 = 132$. D. $Q_3 = 102,5$.

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

BÀI 5. Người ta ghi lại tốc độ của 40 xe đạp đi qua một vị trí trên đường. Mẫu số liệu dưới đây ghi lại tốc độ của 40 xe đó (đơn vị: km/h)

10	10,4	11	16	12	13	15,8	12,7	16,8	19
17	15,1	14	12,3	17,2	10,5	13,2	18,1	19,6	17,4
11,8	13,6	12,7	15,9	14,2	12,6	11,6	10,4	14,1	15,1
12,3	15,2	11,9	16,3	18,4	17,1	14,2	12,1	13,7	13,2

- a) Lập bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả tần số tích lũy có năm nhóm ứng với sáu nửa khoảng [10;12), [12;14), [14;16), [16;18), [18;20).
- b) Hãy ước lượng số trung bình, một và các tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

BÀI 6. Một công ty bảo hiểm thống kê lại độ tuổi các khách hàng mua bảo hiểm xe ô tô ở bảng sau:

Độ tuổi	[25;30)	[30;35)	[35;40)	[40;45)	[45;50)	[50;55)
Số khách hàng	25	38	62	42	37	29

Hãy ước lượng số trung bình, mốt và các tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

BÀI 7. Các bạn học sinh một lớp thống kê số túi nhựa mà gia đình bạn đó sử dụng trong một tuần. Kết quả được tổng hợp lại ở bảng sau:

Số tuổi	[5;9]	[10;14]	[15;19]	[20;24]	[25;29]
Số gia đình	8	15	12	7	2

- Hãy ước lượng số trung bình và mốt của mẫu số liệu trên.
- Cô giáo dự định trao danh hiệu “Gia đình xanh” cho 25% gia đình các bạn sử dụng ít túi nhựa nhất. Cô giáo nên trao danh hiệu cho các gia đình dùng không quá bao nhiêu túi nhựa?

BÀI 8. Bảng sau thống kê doanh số bán hàng của các nhân viên một trung tâm thương mại trong một ngày.

Doanh số (triệu đồng)	[20;30)	[30;40)	[40;50)	[50;60)	[60;70)
Số nhân viên	4	8	12	7	5

- Hãy ước lượng số trung bình, mốt và trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.
- Trung tâm thương mại dự định sẽ thưởng cho 25% số nhân viên có doanh số bán hàng cao nhất. Theo mẫu số liệu trên, trung tâm thương mại nên khen thưởng các nhân viên có doanh số bán hàng ít nhất là bao nhiêu?

—HẾT—

Chương IV.

QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN

A. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

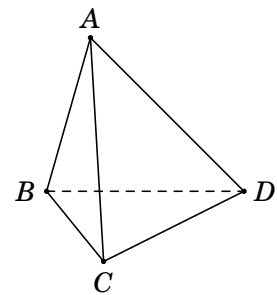
1 Mức độ Cơ bản

Câu 26. Các yếu tố nào sau đây xác định một mặt phẳng duy nhất?

- A. Bốn điểm phân biệt.
- B. Một điểm và một đường thẳng.
- C. Ba điểm phân biệt.
- D. Hai đường thẳng cắt nhau.

Câu 27. Cho tứ diện $ABCD$ như hình bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

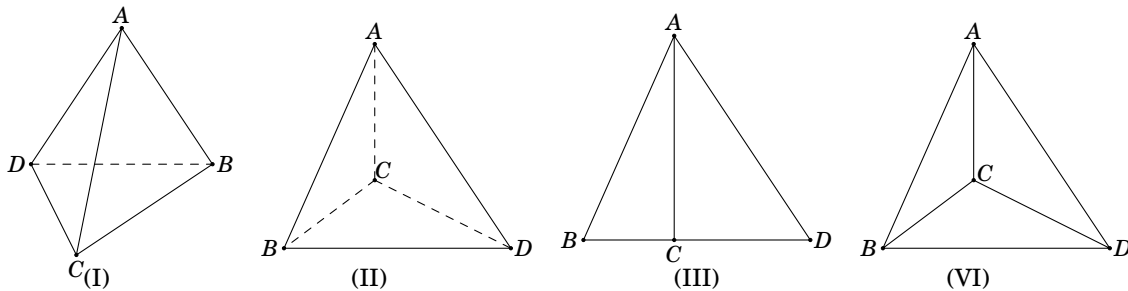
- A. AB và CD cắt nhau.
- B. BD và AC cắt nhau.
- C. BD và AC chéo nhau.
- D. BC và AD song song.



Câu 28. Hình chóp tứ giác có tất cả bao nhiêu mặt là tam giác?

- A. 5.
- B. 3.
- C. 6.
- D. 4.

Câu 29. Trong các hình sau



Hình nào có thể là hình biểu diễn của một hình tứ diện?

- A. (I).
- B. (I), (II).
- C. (I), (II), (IV).
- D. (I), (II), (III), (IV).

Câu 30. Trong không gian, hai đường thẳng không có điểm chung thì

- A. cắt nhau.
- B. chéo nhau hoặc song song.
- C. chéo nhau.
- D. song song.

Câu 31. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

- A. Hai đường thẳng phân biệt không song song thì chéo nhau.
- B. Hai đường thẳng lần lượt nằm trên hai mặt phẳng phân biệt thì chéo nhau.
- C. Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau.
- D. Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung.

Câu 32. Trong không gian cho hai đường thẳng cắt nhau a và b . Nếu c là một đường thẳng song song với a thì

- A. c và b song song với nhau.
- B. c và b cắt nhau.
- C. c và b chéo nhau.
- D. c và b không song song với nhau.

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có điểm O là giao điểm của hai đường chéo. Giao điểm của đường thẳng AC với mặt phẳng (SBD) là điểm nào?

- A. Điểm B . B. Điểm A . C. Điểm O . D. Điểm S .

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là tứ giác lồi $ABCD$, giao tuyến của mặt (SAD) và (SBD) là

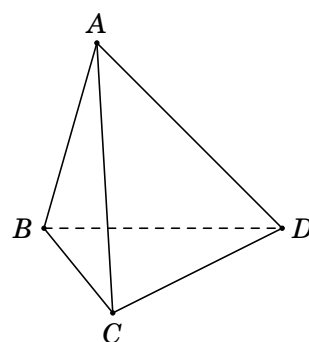
- A. SB . B. SA . C. SD . D. SC .

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và BC . Giao tuyến của hai mặt phẳng (SMN) và (SAC) là

- A. SF (F là trung điểm CD). B. SO (O là tâm hình bình hành $ABCD$).
C. SG (G là trung điểm AB). D. SD .

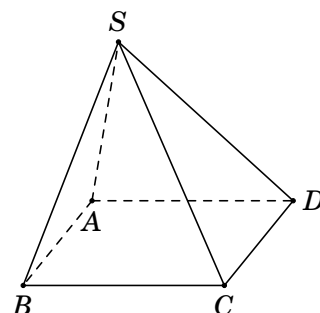
Câu 36. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC . Trên đoạn BD lấy P sao cho $BP = 2PD$. Khi đó giao điểm của đường thẳng CD với mặt phẳng (MNP) là

- A. giao điểm của NP và CD . B. giao điểm của MN và CD .
C. trung điểm của CD . D. giao điểm của MP và CD .



Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm SA, SB, SC, SD . Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào không song song với IJ ?

- A. EF . B. DC . C. AB . D. AD .



Câu 38. Cho hai đường thẳng song song a, b và mặt phẳng (P) . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Nếu $a \parallel (P)$ thì $b \parallel (P)$. B. Nếu a cắt (P) thì b cắt (P) .
C. Nếu a nằm trên (P) thì $b \parallel (P)$. D. Nếu a nằm trên (P) thì b nằm trên (P) .

Câu 39. Cho hai mặt phẳng (P) và điểm A nằm ngoài mặt phẳng (P) . Khẳng định nào sau đây đúng?

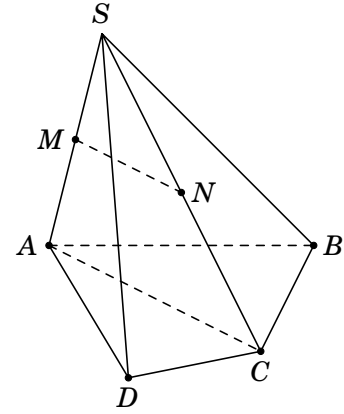
- A. Qua A có vô số mặt phẳng song song với (P) .
B. Qua A có đúng một mặt phẳng song song với (P) .
C. Qua A không có mặt phẳng nào song song với (P) .
D. Qua A có đúng hai mặt phẳng song song với (P) .

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đường thẳng AD song song với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng dưới đây?

- A. (SBC) . B. $(ABCD)$. C. (SAC) . D. (SAB) .

Câu 41. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SC . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $MN \parallel (ABCD)$.
B. $MN \parallel (SAB)$.
C. $MN \parallel (SBC)$.
D. $MN \parallel (SCD)$.



Câu 42. Nếu mặt phẳng (R) cắt hai mặt phẳng song song (P) và (Q) lần lượt theo hai giao tuyến a và b thì vị trí tương đối giữa hai đường thẳng a và b là

- A. song song. B. chéo nhau. C. trùng nhau. D. cắt nhau.

Câu 43. Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) và đường thẳng b nằm trong mặt phẳng (β) . Biết $(\alpha) \parallel (\beta)$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

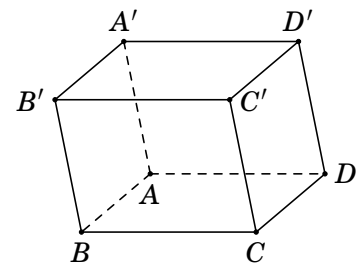
- A. $a \parallel (\beta)$.
B. $b \parallel (\alpha)$.
C. $a \parallel b$.
D. Nếu có một mặt phẳng (γ) chứa a và b thì $a \parallel b$.

Câu 44. Khẳng định nào sau đây là **sai** khi nói về hình lăng trụ?

- A. Hình lăng trụ có đáy là hình bình hành được gọi là hình hộp.
B. Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình bình hành.
C. Các cạnh bên của hình lăng trụ bằng nhau và song song với nhau.
D. Hai đáy của hình lăng trụ là hai đa giác đều.

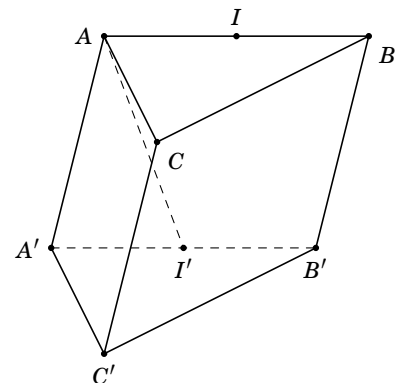
Câu 45. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Hình chiếu song song của A trên mặt phẳng $(CDD'C')$ theo phương BC' là

- A. D' . B. D .
C. B . D. C' .



Câu 46. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, gọi I, I' lần lượt là trung điểm của $AB, A'B'$. Qua phép chiếu song song đường thẳng AI' , hình chiếu của điểm I lên mặt phẳng chiếu $(A'B'C')$ là điểm nào sau đây?

- A. A' . B. I' .
C. B' . D. C' .

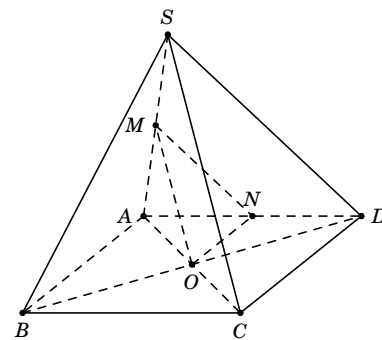


Câu 47. Cho hình lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$. B. $AA_1 \parallel (BCC_1)$.
C. $AB \parallel (A_1B_1C_1)$. D. AA_1B_1B là hình chữ nhật.

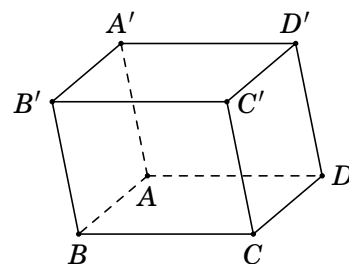
Câu 48. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, AD . Hỏi mặt phẳng (MNO) song song với mặt phẳng nào sau đây?

- A. (SAB) . B. (SBC) . C. (SCD) . D. (SAD) .



Câu 49. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng $(AB'D')$ song song với mặt phẳng nào sau đây?

- A. (BCA') . B. (BDA') . C. $(A'C'C)$. D. (BDC') .

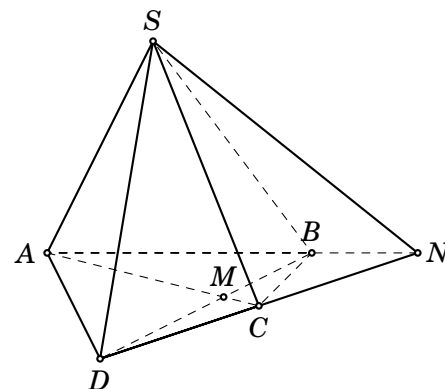


Câu 50. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng song song với đường thẳng nào sau đây?

- A. BD . B. SC . C. AC . D. AB .

Câu 51. Cho hình chóp $S.ABCD$ có AC cắt BD tại M, AB cắt CD tại N . Trong các đường thẳng sau đây, đường thẳng nào là giao tuyến của (SAC) và (SBD) ?

- A. SM . B. SN . C. SB . D. SC .



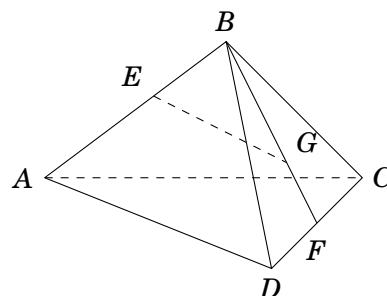
2 Mức độ Vận dụng

Câu 52. Cho ba mặt phẳng $(P), (Q), (R)$ đôi một song song với nhau. Đường thẳng d cắt các mặt phẳng $(P), (Q), (R)$ lần lượt tại A, B, C . Đường thẳng d' cắt các mặt phẳng $(P), (Q), (R)$ lần lượt tại A', B', C' . Biết rằng $\frac{AB}{AC} = \frac{2}{3}$, tỷ số $\frac{A'B'}{A'C'}$ bằng

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{3}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

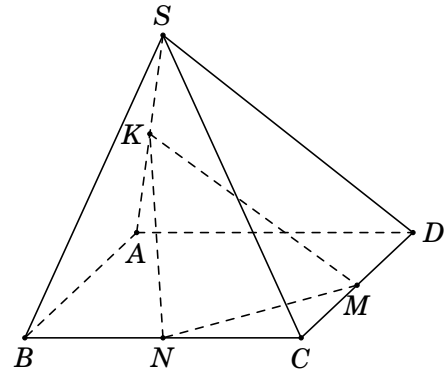
Câu 53. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AB và CD ; G là trọng tâm tam giác BCD . Giao điểm của đường thẳng EG và mặt phẳng (ACD) là

- A. điểm F .
B. giao điểm của đường thẳng EG và CD .
C. giao điểm của đường thẳng EG và AF .
D. giao điểm của đường thẳng EG và AC .



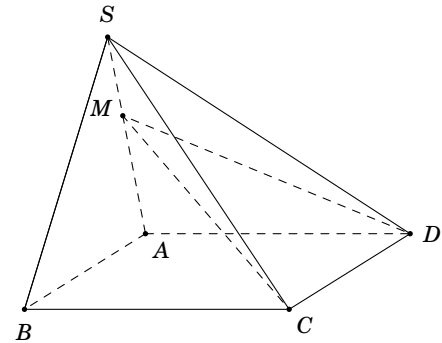
Câu 54. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm các cạnh DC, BC, SA . Giao tuyến của (MNK) với (SAB) là đường thẳng KT , với T được xác định theo một trong bốn phương án được liệt kê dưới đây. Khẳng định nào sau đây đúng.

- A. T là giao điểm của MN với SB .
- B. T là giao điểm của MN với AB .
- C. T là giao điểm của KN với AB .
- D. T là giao điểm của KN với SB .



Câu 55. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Trên cạnh SA lấy điểm M sao cho $MA = 2MS$. Mặt phẳng (CDM) cắt SB tại N . Tỉ số $\frac{SN}{SB}$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$.
- B. $\frac{1}{3}$.
- C. $\frac{2}{3}$.
- D. $\frac{3}{4}$.



B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

BÀI 9. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E, F lần lượt là các điểm thuộc các cạnh AB, AC sao cho $AE = \frac{1}{2}BE$ và $AF = 2CF$. Gọi O là một điểm nằm trong tam giác BCD .

- a) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (OEF) và (ABD) .
- b) Xác định giao điểm (nếu có) của đường thẳng AD và mặt phẳng (OEF) .

BÀI 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, K lần lượt là các trung điểm của đoạn thẳng SC, SA và AB .

- a) Tìm giao tuyến hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) .
- b) Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng AM và mp (SBD) .
- c) Chứng minh MN song song với mặt phẳng $(ABCD)$.
- d) Chứng minh đường thẳng KN song song với mặt phẳng (SOD) .
- e) Chứng minh (KOM) song song với mặt phẳng (SAB) .
- f) Chứng minh KM song song với mặt phẳng (SAB) .

BÀI 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Lấy điểm M trên cạnh AD sao cho $AD = 3AM$. Gọi G, N lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAB, ABC . Chứng minh

- a) Đường thẳng MN song song với mặt phẳng (SCD) .
- b) Đường thẳng GN song song với mặt phẳng (SAC) .
- c) Đường thẳng GM song song với mặt phẳng (SCD) .

BÀI 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi hai điểm M, N lần lượt trên các cạnh SB, SC sao cho $\frac{SN}{SC} = \frac{1}{2}$ và $\frac{SM}{SB} = \frac{2}{3}$.

- a) Chứng minh rằng BC song song mặt phẳng (SAD) .
- b) Xác định giao tuyến Δ của hai mặt phẳng (AMN) và $(ABCD)$.
- c) Chứng minh rằng BD song song mặt phẳng (AMN) .
- d) Gọi P là giao điểm của SD và (AMN) . Tính tỷ số $\frac{SP}{SD}$.
- e) Chứng minh rằng ba đường thẳng Δ, PN và CD đồng quy.

BÀI 13. Cho hình hộp $ABCD A'B'C'D'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của $AD, B'C', DD'$

- a) Chứng minh rằng $ADC'B$ là hình bình hành.
- b) Chứng minh rằng $BD \parallel (AB'D')$, $MN \parallel (AB'D')$.
- c) Chứng minh rằng $(MNP) \parallel (AB'D')$ và $BD \parallel (MNP)$.
- d) Xác định giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với các mặt của hình hộp.
- e) Lấy một đường thẳng cắt ba mặt phẳng $(AB'D')$, (MNP) , $(C'BD)$ lần lượt tại I, J, H . Tính tỉ số $\frac{IJ}{JH}$.

BÀI 14. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AA', AB, AC .

- a) Chứng minh rằng $BC \parallel (MNP)$.
- b) Xác định giao tuyến d của hai mặt phẳng (MNP) và $(A'B'C')$.
- c) Chứng minh rằng $d \parallel NP$.

—HẾT—

Chương V.

GIỚI HẠN. HÀM SỐ LIÊN TỤC

A. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1 Mức độ Nhận biết, Thông hiểu

Câu 56. Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) , biết $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$. Trong các kết luận sau, kết luận nào **sai**?

- A. $\lim(u_n + v_n) = a + b$.
- B. $\lim(u_n - v_n) = a - b$.
- C. $\lim(u_n v_n) = ab$.
- D. $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}$.

Câu 57. Cho các dãy số (u_n) , (v_n) và $\lim u_n = a$, $\lim v_n = +\infty$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n}$ bằng

- A. $+\infty$. B. 0. C. 1. D. $-\infty$.

Câu 58. $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n$ bằng

- A. $+\infty$. B. 0. C. $-\infty$. D. 2.

Câu 59. Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2020}{n}$.

- A. $+\infty$. B. $-\infty$. C. 2020. D. 0.

Câu 60. Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n-3}{1-3n}$.

- A. $-\frac{2}{3}$. B. 2. C. $\frac{1}{3}$. D. 1.

Câu 61. Cho dãy số (u_n) có $\lim u_n = 2$. Tính giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3u_n - 1}{2u_n + 5}$.

- A. $+\infty$. B. $\frac{3}{2}$. C. $-\frac{1}{5}$. D. $\frac{5}{9}$.

Câu 62. Biết $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$ và $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -2$. Tính $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) + 2g(x)]$.

- A. -1. B. 1. C. 5. D. -6.

Câu 63. Biết $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4$ và $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1$. Tính $\lim_{x \rightarrow 1} [4f(x) + 3g(x)]$.

- A. 11. B. 19. C. 10. D. 9.

Câu 64. Cho $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$. Tìm khẳng định **sai**.

- A. $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) + 3] = 6$. B. $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{f(x) + 1} = 2$.
- C. $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) - 2x] = -1$. D. $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) - x^2] = 1$.

Câu 65. $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 + 7x + 11)$ có kết quả là

- A. 37. B. 38. C. 39. D. 40.

Câu 66. Giá trị của $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3}{x^3 + 2}$ là

- A. 1. B. -2. C. 2. D. $-\frac{3}{2}$.

Câu 67. Cho c là hằng số, k là số nguyên dương. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$. B. $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$.
- C. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{c}{x^k} = 0$. D. $\lim_{x \rightarrow +\infty} c = +\infty$.

Câu 68. Cho $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, kết quả của $\lim_{x \rightarrow a} (-3 \cdot f(x))$ bằng

- A. $-\infty$. B. 0. C. $+\infty$. D. 3.

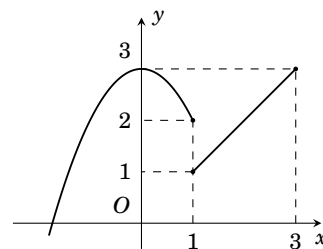
Câu 69. Tính tổng $S = 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^{n-3}} + \dots$.

- A. $S = \frac{27}{2}$. B. $S = 14$.
- C. $S = 16$. D. $S = 15$.

Câu 70. Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn bằng 2, tổng của ba số hạng đầu tiên của cấp số nhân bằng $\frac{9}{4}$. Số hạng đầu u_1 của cấp số nhân đó là

- A. $u_1 = 3$. B. $u_1 = 4$.
- C. $u_1 = \frac{9}{2}$. D. $u_1 = 5$.

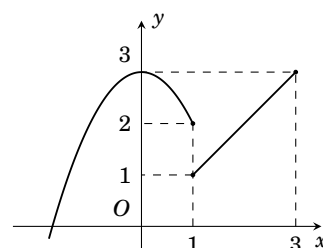
Câu 71. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Tính $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$.

- A. 5. B. 4. C. 2. D. 0.

Câu 72. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Tính $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.

- A. 5. B. 4. C. 2. D. 0.

Câu 73. Tính $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^3 - 2x + 1)$.

- A. 1. B. 0. C. $+\infty$. D. $-\infty$.

Câu 74. Tính $\lim_{x \rightarrow 3^-} (\sqrt{x-3} - 3x + x^2)$.

- A. Không tồn tại. B. $-\infty$.
C. 0. D. $+\infty$.

Câu 75. Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng 0?

- A. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+2n^3}{2n^2-1}$. B. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-3}{-2n^3-4}$.
C. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-3n^3}{-2n^2-1}$. D. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-3n^4}{-2n^4+n^2}$.

Câu 76. Dãy số nào sau đây có giới hạn là $+\infty$?

- A. $u_n = \frac{1+n^2}{5n+5}$. B. $u_n = \frac{n^2-2}{5n+5n^3}$.
C. $u_n = \frac{n^2-2n}{5n+5n^2}$. D. $u_n = \frac{1+2n}{5n+5n^2}$.

Câu 77. Dãy số nào sau đây có giới hạn là $-\infty$?

- A. $u_n = \frac{1+2n}{5n+5n^2}$. B. $u_n = \frac{n^3+2n-1}{-n+2n^3}$.
C. $u_n = \frac{2n^2-3n^4}{n^2+2n^3}$. D. $u_n = \frac{n^2-2n}{5n+1}$.

Câu 78. Giá trị $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 - 4n})$ bằng

- A. 3. B. 1. C. 2. D. 4.

Câu 79. Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$.

- A. 1. B. $-\infty$. C. -1. D. $+\infty$.

Câu 80. Tìm $\lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^4 - 3x^2 + 2)$.

- A. $+\infty$. B. $-\infty$. C. 4. D. 2.

2 Mức độ Vận dụng

Câu 81. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{an+4}{5n+3}$, với a là tham số thực. Để dãy số (u_n) có giới hạn bằng 2 thì giá trị của a là

- A. $a = 10$. B. $a = 8$.
C. $a = 6$. D. $a = 4$.

Câu 82. Cho số thực a thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a\sqrt{2x^2+3}+2017}{2x+2018} = \frac{1}{2}$. Khi đó giá trị của a là

- A. $a = \frac{-\sqrt{2}}{2}$. B. $a = \frac{1}{2}$.
C. $a = \frac{-1}{2}$. D. $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 83. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{1-x} & \text{với } x < 1 \\ \sqrt{2x-2} & \text{với } x \geq 1 \end{cases}$.

Khi đó $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ là

- A. $+\infty$. B. -1. C. 0. D. 1.

Câu 84. Cho $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+6} - x\sqrt{3}}{x\sqrt{2} - \sqrt{x^2+3}} = a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{6} + d$, ($a, b, c, d \in \mathbb{Q}$). Tính $ab + cd$.

- A. 1. B. 0. C. -2. D. 2.

Câu 85. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-12}{x+4} & \text{khi } x \neq -4 \\ mx+1 & \text{khi } x = -4 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = -4$.

- A. $m = 4$. B. $m = 2$. C. $m = 3$. D. $m = 5$.

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

BÀI 15. Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2+1}{2n^2+n+2}$.

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2+2n} - n)$.

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n+3}{1+3^n}$.

d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n^3+2n-1)$.

BÀI 16. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+2x-15}{x-3}$.

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x}-1}{2x}$.

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - x)$.

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2-5x+2}{x^2-4}$.

d) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-2}{x-1}$.

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 - x^2 + 4x + 2)$.

BÀI 17. Xét tính liên tục của mỗi hàm số sau tại điểm $x = 2$.

a) $f(x) = \begin{cases} 6-2x & \text{khi } x \geq 2 \\ 2x^2-6 & \text{khi } x < 2; \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 0 & \text{khi } x = 2. \end{cases}$

BÀI 18. Chứng minh rằng phương trình

- a) $x^3 + 2x - 1 = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(-1; 1)$.
- b) $\sqrt{x^2 + x} + x^2 = 1$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.

BÀI 19. Trong hồ có chứa 6000 lít nước ngọt. Người ta bơm nước biển có nồng độ muối là 30 gam/lít vào hồ với tốc độ 15 lít/phút.

- a) Chứng tỏ rằng nồng độ muối của nước trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm là $C(t) = \frac{30t}{400+t}$ (gam/lít).
- b) Nồng độ muối trong hồ như thế nào nếu $t \rightarrow +\infty$.

BÀI 20. Từ độ cao 100 m, người ta thả một quả bóng cao su xuống đất. Giả sử cứ sau mỗi lần chạm đất, quả bóng nảy lên một độ cao bằng $\frac{1}{4}$ độ cao mà quả bóng đạt được trước đó. Gọi h_n là độ cao quả bóng đạt được ở lần nảy thứ n .

- a) Tìm số hạng tổng quát của dãy số (h_n) .
- b) Tính giới hạn của dãy số (h_n) và nêu ý nghĩa giới hạn của dãy số (h_n) .
- c) Gọi S_n là tổng độ dài quãng đường đi được của quả bóng từ lúc bắt đầu thả quả bóng đến khi quả bóng chạm đất lần thứ n . Tính S_n , nếu quá trình này cứ tiếp tục diễn ra mãi thì tổng quãng đường quả bóng di chuyển được là bao nhiêu?

—HẾT—

MỤC LỤC

Chương I.	HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC	3
Ⓐ	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	3
📁	Mức độ Nhận biết, Thông hiểu.....	3
📁	Mức độ Vận dụng.....	4
Ⓑ	BÀI TẬP TỰ LUẬN.....	5
Chương II.	DÃY SỐ, CẤP SỐ CỘNG, CẤP SỐ NHÂN	8
Ⓐ	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	8
📁	Mức độ Nhận biết, Thông hiểu.....	8
📁	Mức độ Vận dụng.....	9
Ⓑ	BÀI TẬP TỰ LUẬN.....	10
Chương III.	CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM	13
Ⓐ	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	13
📁	Mức độ Nhận biết, Thông hiểu.....	13
📁	Mức độ Vận dụng.....	14
Ⓑ	BÀI TẬP TỰ LUẬN.....	15
Chương IV.	QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN	19
Ⓐ	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	19
📁	Mức độ Cơ bản.....	19
📁	Mức độ Vận dụng.....	26
Ⓑ	BÀI TẬP TỰ LUẬN.....	28
Chương V.	GIỚI HẠN. HÀM SỐ LIÊN TỤC	32
Ⓐ	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	32
📁	Mức độ Nhận biết, Thông hiểu.....	32
📁	Mức độ Vận dụng.....	34
Ⓑ	BÀI TẬP TỰ LUẬN.....	35
	ĐÁP ÁN CÁC TRẮC NGHIỆM	38
📁	Trắc nghiệm chương I.....	38
📁	Trắc nghiệm chương II.....	38
📁	Trắc nghiệm chương III.....	38
📁	Trắc nghiệm chương IV.....	38
📁	Trắc nghiệm chương V.....	38

Chương I.

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

A. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1 Mức độ Nhận biết, Thông hiểu

Câu 1. Góc có số đo $\frac{\pi}{12}$ đổi sang độ là

- A.** 15° . **B.** 16° .
C. 14° . **D.** $17^\circ 30'$.

🗨 **Lời giải.**

Ta có: $\alpha = \frac{\pi}{12}$ radian, suy ra $\alpha = \left(\frac{\pi}{12} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 15^\circ$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 2. Góc có số đo 108° đổi sang radian là

- A.** $\frac{3\pi}{2}$. **B.** $\frac{5\pi}{2}$. **C.** $\frac{5\pi}{3}$. **D.** $\frac{3\pi}{5}$.

🗨 **Lời giải.**

Ta có: $108^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{3\pi}{5}$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 3. Giá trị $\cot \frac{89\pi}{6}$ bằng

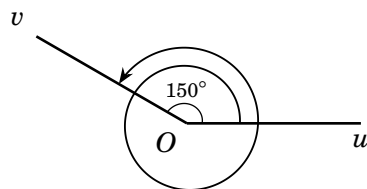
- A.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $-\sqrt{3}$. **C.** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\sqrt{3}$.

🗨 **Lời giải.**

Ta có $\cot \frac{89\pi}{6} = \cot \left(14\pi + \frac{5\pi}{6}\right) = \cot \frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3}$.

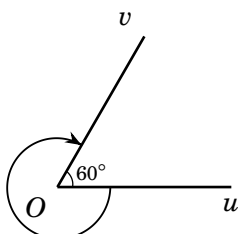
Chọn đáp án **B** □

Câu 4. Xác định số đo của góc lượng giác (Ou, Ov) được biểu diễn trong hình bên dưới.



- A.** 410° . **B.** 510° . **C.** 150° . **D.** 420° .

Câu 5. Xác định số đo của góc lượng giác (Ou, Ov) được biểu diễn trong hình bên dưới



- A.** -300° . **B.** 510° .
C. 60° . **D.** -420° .

Câu 6. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

- A.** $\tan(\pi - \alpha) = \tan \alpha$. **B.** $\cot(\pi - \alpha) = \cot \alpha$.
C. $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$. **D.** $\sin(\pi - \alpha) = -\sin \alpha$.

🗨 **Lời giải.**

Theo công thức về cung liên kết, ta có $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 7. Cho $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, với $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Tính $\cos \alpha$.

- A.** $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$. **B.** $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.
C. $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\cos \alpha = \frac{2}{3}$.

🗨 **Lời giải.**

Ta có $\sin \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$.

Vì $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ nên $\cos \alpha < 0$ do đó $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 8. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

- A.** $\sin 2a = \sin a + \cos a$.
B. $\sin 2a = 2 \sin a$.
C. $\sin 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$.
D. $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$.

🗨 **Lời giải.**

Hiển nhiên, $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$ là đúng.

Chọn đáp án **D** □

Câu 9. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề sai?

- A.** $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$.
B. $\cos a - \cos b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$.
C. $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$.
D. $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$.

🗨 **Lời giải.**

Công thức đúng là $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$.

Chọn đáp án **(B)** ☐

Câu 10. Chu kỳ của hàm số $y = \cot x$ là

- A. $k\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. 2π .
C π . D. $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Với mọi $x \in \mathcal{D}$, $k \in \mathbb{Z}$ ta có $x - k\pi \in \mathcal{D}$ và $x + k\pi \in \mathcal{D}$,

$\cot(x + k\pi) = \cot x$.

Vậy $y = \cot x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ π là số dương nhỏ nhất thỏa $\cot(x + k\pi) = \cot x$.

Chọn đáp án **(C)** ☐

Câu 11. Chu kỳ của hàm số $y = \cos x$ là

- A. $\frac{2\pi}{3}$. **B** 2π . C. π . D. $k2\pi$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R}$.

Với mọi $x \in D$, $k \in \mathbb{Z}$ ta có $x - k2\pi \in D$ và $x + k2\pi \in D$, $\cos(x + k2\pi) = \cos x$.

Vậy $y = \cos x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π (ứng với $k = 1$) là số dương nhỏ nhất thỏa $\cos(x + k2\pi) = \cos x$.

Chọn đáp án **(B)** ☐

Câu 12. Tập giá trị của hàm số $y = \cos x$ là tập hợp nào sau đây?

- A. $[0; +\infty]$. B. $\mathbb{R}$.
 C. $(-\infty; 0]$. **D** $[-1; 1]$.

Lời giải.

Với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $-1 \leq \cos x \leq 1$.

Chọn đáp án **(D)** ☐

Câu 13. Giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y = 3\sin 2x - 5$ lần lượt là

- A. $m = 2, M = 8$. **B** $m = -8, M = -2$.
 C. $m = -5, M = -2$. D. $m = -8, M = -5$.

Lời giải.

Ta có: $-1 \leq \sin 2x \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq 3\sin 2x \leq 3$.

$$\Leftrightarrow -3 - 5 \leq 3\sin 2x - 5 \leq 3 - 5 \Leftrightarrow -8 \leq y = 3\sin 2x - 5 \leq -2.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số đã cho lần lượt là -8 và -2 .

Chọn đáp án **(B)** ☐

Câu 14. Phương trình $\cos x = a$ có nghiệm khi và chỉ khi

- A** $|a| \leq 1$. B. $|a| > 1$.
 C. $|a| < 1$. D. $|a| \geq 1$.

Lời giải.

Vì $|\cos x| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ nên phương trình $\cos x = a$ có nghiệm khi và chỉ khi $|a| \leq 1$.

Chọn đáp án **(A)** ☐

Câu 15. Giải phương trình $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

- A. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$. B. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$.

C.
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k\pi \end{cases}$$

D
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$$

Lời giải.

Ta có $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Chọn đáp án **(D)** ☐

Câu 16. Phương trình $\cos 3x = \cos \frac{\pi}{15}$ có nghiệm là

- A. $x = \pm \frac{\pi}{15} + k2\pi$. **B** $x = \pm \frac{\pi}{45} + \frac{k2\pi}{3}$.
 C. $x = -\frac{\pi}{45} + \frac{k2\pi}{3}$. D. $x = \frac{\pi}{45} + \frac{k2\pi}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\cos 3x = \cos \frac{\pi}{15} \Leftrightarrow 3x = \pm \frac{\pi}{15} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{45} + \frac{k2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Chọn đáp án **(B)** ☐

Câu 17. Giải phương trình $\tan x = \sqrt{3}$ ta được tập nghiệm là

- A. $\left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. B. $\emptyset$.
C $\left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $\left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Lời giải.

Ta có $\tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Chọn đáp án **(C)** ☐

2 Mức độ Vận dụng

Câu 18. Cho hai dao động điều hòa cùng phương có phương trình lần lượt là $x_1 = 5\cos(100\pi t + \pi)$ (cm) và $x_2 = 5\cos(100\pi t - \pi/2)$ (cm). Phương trình dao động tổng hợp của hai dao động trên là

- A. $x = 5\sqrt{2}\cos\left(100\pi t + \frac{3\pi}{4}\right)$ (cm).
B $x = 5\sqrt{2}\cos\left(100\pi t - \frac{3\pi}{4}\right)$ (cm).
 C. $x = 10\cos\left(100\pi t - \frac{3\pi}{4}\right)$ (cm).
 D. $x = 10\cos\left(100\pi t + \frac{3\pi}{4}\right)$ (cm).

Lời giải.

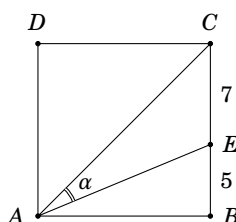
Ta có

$$\begin{aligned}x = x_1 + x_2 &= 5\cos(100\pi t + \pi) + 5\cos(100\pi t - \pi/2) \\&= 5[\cos(100\pi t + \pi) + \cos(100\pi t - \pi/2)] \\&= 5 \cdot 2\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \cos \frac{3\pi}{4} \\&= -5\sqrt{2}\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \\&= 5\sqrt{2}\cos\left(100\pi t - \frac{3\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 19. Cho hình vuông $ABCD$ như hình vẽ. Tính giá trị của $\tan \alpha$.

- A. $\frac{4}{13}$. B. $\frac{6}{13}$.
C. $\frac{9}{13}$. **D. $\frac{7}{17}$.**



Lời giải.

Đặt $\widehat{BAE} = \beta$,
suy ra $\tan \beta = \frac{BE}{AB} = \frac{5}{12}$ và $\alpha = 45^\circ - \beta$. Ta có

$$\tan \alpha = \tan(45^\circ - \beta) = \frac{1 - \tan \beta}{1 + \tan \beta} = \frac{1 - \frac{5}{12}}{1 + \frac{5}{12}} = \frac{7}{17}$$

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

BÀI 1. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

c) $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

e) $\tan 3x = \tan \frac{\pi}{7}$;

b) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

d) $\cos(2x - 30^\circ) = -1$;

f) $\cot\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{3}$.

Lời giải.

$$\checkmark \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình có các nghiệm là $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$ và $x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

$$\checkmark \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 3x + \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\checkmark \cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = \cos \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 20. Nhiệt độ ngoài trời ở một thành phố vào các thời điểm khác nhau trong ngày có thể được mô phỏng bởi công thức

$$h(t) = 29 + 3\sin\left[\frac{\pi}{12}(t - 9)\right]$$

với h tính bằng độ C và t là thời gian trong ngày tính bằng giờ. Nhiệt độ thấp nhất trong ngày vào lúc mấy giờ?

- A. 5 giờ. B. 0 giờ. **C. 3 giờ.** D. 4 giờ.

Lời giải.

Nhiệt độ thấp nhất trong ngày là 26° , xảy ra khi

$$\sin\left[\frac{\pi}{12}(t - 9)\right] = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{12}(t - 9) = \frac{-\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = 3 + 24k, k \in \mathbb{Z}.$$

Do t là thời gian trong ngày tính bằng giờ nên $0 \leq t \leq 24$. Suy ra: $t = 3$

Chọn đáp án (C) □

☑ $\cos(2x - 30^\circ) = -1 \Leftrightarrow 2x - 30^\circ = 180^\circ + k360^\circ \Leftrightarrow x = 105^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$

☑ $\tan 3x = \tan \frac{\pi}{7} \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{7} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{21} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{\pi}{21} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$

☑ $\cot\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cot\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = \cot \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{11\pi}{60} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{11\pi}{60} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

□

BÀI 2. Số giờ có ánh nắng mặt trời của một thành phố A trong ngày thứ t (ở đây t là số ngày tính từ ngày 1 tháng Giêng) của một năm không nhuận được mô hình hóa bởi hàm số

$$L(t) = 12 + 2,83 \sin \left[\frac{2\pi}{365}(t - 80) \right] \text{ với } t \in \mathbb{Z} \text{ và } 0 < t \leq 365.$$

- Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có ít giờ ánh sáng mặt trời nhất?
- Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ ánh sáng mặt trời nhất?
- Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có khoảng 10 giờ ánh sáng mặt trời?

Lời giải.

a) Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có

$$\begin{aligned} -1 \leq \sin \left[\frac{2\pi}{365}(t - 80) \right] \leq 1 &\Leftrightarrow -2,83 \leq 2,83 \sin \left[\frac{2\pi}{365}(t - 80) \right] \leq 2,83 \\ &\Leftrightarrow 9,17 \leq 12 + 2,83 \sin \left[\frac{2\pi}{365}(t - 80) \right] \leq 14,83. \end{aligned}$$

Ngày thành phố A có ít giờ ánh sáng mặt trời nhất ứng với

$$\sin \left[\frac{2\pi}{365}(t - 80) \right] = -1 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{365}(t - 80) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = -\frac{45}{4} + 365k, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vì $0 < t \leq 365$ nên $k = 1$, suy ra $t = -\frac{45}{4} + 365 = 353,75$.

Như vậy, vào ngày thứ 353 của năm, tức là khoảng ngày 20 tháng 12 thì thành phố A sẽ có ít giờ ánh sáng mặt trời nhất.

b) Ngày thành phố A có nhiều giờ ánh sáng mặt trời nhất ứng với

$$\sin \left[\frac{2\pi}{365}(t - 80) \right] = 1 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{365}(t - 80) = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = 171,25 + 365k, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vì $0 < t \leq 365$ nên $k = 0$, suy ra $t = 171,25$.

Như vậy, vào ngày thứ 171 của năm, tức là khoảng ngày 20 tháng 6 thì thành phố A sẽ có nhiều giờ ánh sáng mặt trời nhất.

c) Ngày thành phố A có 10 giờ ánh sáng mặt trời nhất ứng với

$$\begin{aligned} 12 + 2,83 \sin \left[\frac{2\pi}{365}(t - 80) \right] &= 10 \Leftrightarrow \sin \left[\frac{2\pi}{365}(t - 80) \right] = -\frac{200}{283} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2\pi}{365}(t - 80) \approx -0,78 + k2\pi \\ \frac{2\pi}{365}(t - 80) \approx 3,93 + k2\pi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t \approx 34,69 + 365k \\ t \approx 308,30 + 365k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vì $0 < t \leq 365$ nên $k = 0$, suy ra $t \approx 34,69$ hoặc $t \approx 308,30$.

Như vậy, vào ngày thứ 34 của năm, tức là khoảng ngày 3 tháng 2 và ngày thứ 308 của năm, tức là ngày 4 tháng 11 thì thành phố A sẽ có 10 giờ ánh sáng mặt trời.



BÀI 3. Chiều cao h (m) của một cabin trên vòng quay vào thời điểm t giây sau khi bắt đầu chuyển động được cho bởi công thức $h(t) = 30 + 20 \sin\left(\frac{\pi}{25}t + \frac{\pi}{3}\right)$.

- Cabin đạt độ cao tối đa là bao nhiêu?
- Sau bao nhiêu giây thì cabin đạt độ cao 40 m lần đầu tiên?

Lời giải.

a) Vì $\sin\left(\frac{\pi}{25}t + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1, \forall t$ nên $h(t) = 30 + 20 \sin\left(\frac{\pi}{25}t + \frac{\pi}{3}\right) \leq 50$ (m).

b) Để cabin đạt độ cao 40 m thì

$$h(t) = 40 \Leftrightarrow 20 \sin\left(\frac{\pi}{25}t + \frac{\pi}{3}\right) = 10 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{25}t + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{25}t + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ \frac{\pi}{25}t + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{25}{6} + 50k \\ t = \frac{25}{2} + 50k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Để thấy, giá trị $t > 0$ nhỏ nhất thoả mãn là $t = 12,5$ (giây).



Chương II.

DÃY SỐ, CẤP SỐ CỘNG, CẤP SỐ NHÂN

A. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1 Mức độ Nhận biết, Thông hiểu

Câu 1. Cho dãy số (u_n) có $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$. Tính u_8 .

A $u_8 = \frac{5}{3}$.

B. $u_8 = \frac{11}{9}$.

C. $u_8 = \frac{17}{9}$.

D. $u_8 = 1$.

Lời giải.

Ta có $u_8 = \frac{2 \cdot 8 - 1}{8 + 1} = \frac{5}{9}$.

Chọn đáp án **A**

Câu 2. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó là

A. $-3; 6; 9$.

B $3; 8; 13$.

C. $3; 5; 7$.

D. $3; -2; -7$.

Lời giải.

Ta có $u_1 = 3, u_2 = 3 + 5 = 8, u_3 = 8 + 5 = 13$.

Chọn đáp án **B**

Câu 3. Dãy nào sau đây là cấp số cộng?

A. $1; 5; 9; 5; 1$.

B. $1; 3; 5; 7; 11$.

C $2; 5; 8; 11$.

D. $3; 7; 3; 7$.

Lời giải.

Dãy số là cấp số cộng là $2; 5; 8; 11$.

Chọn đáp án **C**

Câu 4. Cho cấp số cộng $1, 8, 15, 22, 29, \dots$. Công sai của cấp số cộng này là

A. 9 .

B. 1 .

C. 8 .

D 7 .

Lời giải.

Công sai $d = u_2 - u_1 = 8 - 1 = 7$.

Chọn đáp án **D**

Câu 5. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 3$ và $d = 2$. Số hạng thứ 2 của cấp số cộng đã cho là

A. 3 .

B. 6 .

C. 1 .

D 5 .

Lời giải.

Ta có $u_2 = u_1 + d = 3 + 2 = 5$.

Chọn đáp án **D**

Câu 6. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 4$ và $d = 2$. Số hạng thứ 50 của cấp số cộng đó là

A. $u_{50} = 100$.

B $u_{50} = 102$.

C. $u_{50} = 104$.

D. $u_{50} = 198$.

Lời giải.

Ta có $u_{50} = u_1 + 49d = 4 + 49 \cdot 2 = 102$.

Chọn đáp án **B**

Câu 7. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 3$ và $d = -2$. Tổng của 20 số hạng đầu của cấp số cộng đó là

A. $S_{20} = -380$.

B. $S_{20} = -214$.

C. $S_{20} = -640$.

D $S_{20} = -320$.

Lời giải.

Ta có $u_{20} = u_1 + 19d = 3 + 19 \cdot (-2) = -35$.

Vậy $S_{20} = \frac{20(u_1 + u_{20})}{2} = \frac{20(3 - 35)}{2} = -320$.

Chọn đáp án **D**

Câu 8. Dãy số nào sau đây không phải là cấp số nhân?

A. $1, -1, 1, -1, 1$.

B $1, 2, 3, 4, 5$.

C. $1, -2, 4, -8, 16$.

D. $1, 2, 4, 8, 16$.

Lời giải.

Dãy $1, 2, 4, 8, 16$ là CSN với công bội $q = 2$.

Dãy $1, -1, 1, -1, 1$ là CSN với công bội $q = -1$.

Dãy $1, -2, 4, -8, 16$ là CSN với công bội $q = -2$.

Dãy $1, 2, 3, 4, 5$ là CSC với công sai $d = 1$.

Chọn đáp án **B**

Câu 9. Cho cấp số nhân (u_n) , biết $u_1 = -9, u_2 = 3$. Công bội q là

A. $q = \frac{1}{3}$.

B. $q = -3$.

C. $q = 3$.

D $q = -\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{3}{-9} = -\frac{1}{3}$.

Chọn đáp án **D**

Câu 10. Cho cấp số nhân (u_n) , biết $u_1 = 3$ và công bội $q = -2$. Tìm u_3 .

A. $u_3 = 16$.

B. $u_3 = 14$.

C $u_3 = 12$.

D. $u_3 = 11$.

Lời giải.

Ta có $u_3 = u_1 \cdot q^2 = 3 \cdot (-2)^2 = 12$.

Chọn đáp án **C**

Câu 11. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2$ và $q = -3$. Khi đó, số hạng u_6 bằng

A. $-3 \cdot 2^5$.

B $2 \cdot (-3)^5$.

C. $-3 \cdot 2^6$.D. $2 \cdot (-3)^6$.**Lời giải.**Ta có $u_6 = u_1 \cdot q^5 = 2 \cdot (-3)^5$.Chọn đáp án (B) ☐**Câu 12.** Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 3$ và công bội $q = 2$. Tổng $S_{10} = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{10}$ bằngA. $\frac{1023}{2}$. B. 1023. C. 1536. **D. 3069.****Lời giải.**

$$S_{10} = u_1 \cdot \frac{q^{10} - 1}{q - 1} = 3(2^{10} - 1) = 3069.$$

Chọn đáp án (D) ☐

2 Mức độ Vận dụng

Câu 13. Một người muốn chia 1000 · 000 đồng cho bốn người con, đứa lớn hơn đứa nhỏ kế tiếp 100 · 000 đồng. Hỏi đứa con lớn nhất được bao nhiêu tiền.A. 400 · 000 đồng. B. 200 · 000 đồng.
C. 100 · 000 đồng. D. 300 · 000 đồng.**Lời giải.**Số tiền của bốn người con theo thứ tự từ đứa lớn nhất đến đứa nhỏ nhất lập thành cấp số cộng với công sai $d = -100 \cdot 000$ đồng. Tổng số tiền 4 người con là 1000 · 000 đồng.Gọi số tiền của đứa con lớn nhất là x , ta có $\frac{4}{2}(2x + 3d) = 1000 \cdot 000 \Leftrightarrow 2(2x - 300 \cdot 000) = 1000 \cdot 000 \Leftrightarrow x = 400 \cdot 000$.

Vậy đứa con lớn nhất được 400 · 000 đồng.

Chọn đáp án (A) ☐**Câu 14.** Một du khách vào trường đua ngựa xem đua ngựa và đặt cược chọn con thắng cuộc. Nếu chọn đúng con thắng cuộc thì sẽ nhận được số tiền gấp đôi số tiền đặt cược, còn nếu chọn sai thì sẽ mất số tiền đặt cược. Người du khách đó lần đầu tiên đặt 20 000 đồng, mỗi lần sau tiền đặt gấp đôi tiền đặt lần trước. Người đó thua 9 lần liên tiếp và thắng ở lần thứ 10. Hỏi du khách đó thắng hay thua bao nhiêu?A. Thắng 20 000 đồng.
B. Hoà vốn.
C. Thua 20 000 đồng.
D. Thua 40 000 đồng.**Lời giải.**Du khách đó lần đầu đặt 20 000 đồng, mỗi lần sau tiền đặt gấp đôi tiền đặt lần trước. Vậy số tiền đặt cược của du khách ở các lần khác nhau tạo thành một cấp số nhân với số hạng đầu tiên là $u_1 = 20 000$ và công bội là $q = 2$.

Người đó thua 9 lần liên tiếp nên số tiền người

đó đã bỏ ra và mất trong 9 lần đầu là

$$S_9 = 20 000 \cdot \frac{1 - 2^9}{1 - 2} = 10 220 000 \text{ (đồng)}.$$

Số tiền người đó bỏ ra ở lần thứ 10 là

$$u_{10} = 20 000 \cdot 2^{10-1} = 10 240 000 \text{ (đồng)}.$$

Du khách thắng ở lần thứ 10. Người đó bỏ ra và nhận lại gấp đôi nghĩa là người đó lãi được 10 240 000 (đồng).

Vậy thì người đó đã thắng 20 000 đồng.

Chọn đáp án (A) ☐**Câu 15.** Một gia đình cần khoan một cái giếng để lấy nước. Họ thuê một đội khoan giếng nước đến để khoan giếng. Biết giá của mét khoan đầu tiên là 80 000 đồng, kể từ mét khoan thứ hai giá của mỗi mét khoan tăng thêm 5000 đồng so với giá của mét khoan trước đó. Biết cần phải khoan sâu xuống 50 m mới có nước. Hỏi phải trả bao nhiêu tiền để khoan cái giếng đó?A. 4 245 000 đồng. B. 5 250 000 đồng.
C. 4 000 000 đồng. **D. 10 125 000 đồng.****Lời giải.**Số tiền phải trả ở mỗi mét khoan tạo thành một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 80 000$ và công sai $d = 5000$.Như vậy, tổng số tiền khi khoan đến mét thứ n được tính theo công thức

$$S_n = \frac{n}{2} [2u_1 + (n - 1)d].$$

Vậy tổng số tiền phải trả là

$$S_{50} = 25 \cdot (2 \cdot 80 000 + 49 \cdot 5000) = 10 125 000.$$

Chọn đáp án (D) ☐**Câu 16.** Chu kỳ bán rã của nguyên tố phóng xạ Poloni 210 là 138 ngày (nghĩa là sau 138 ngày khối lượng của nguyên tố đó chỉ còn một nửa). Tính (chính xác đến hàng phần trăm) khối lượng còn lại của 20 gam Poloni 210 sau 7314 ngày (khoảng 20 năm).A. $3,22 \cdot 10^{-15}$. B. $3,52 \cdot 10^{-15}$.
C. $2,52 \cdot 10^{-15}$. **D. $2,22 \cdot 10^{-15}$.****Lời giải.**Kí hiệu u_n (gam) là khối lượng còn lại của 20 gam Poloni 210 sau n chu kỳ bán rã.Ta có 7314 ngày gồm 53 chu kỳ bán rã. Suy ra theo đề bài ta cần tính u_{53} .Từ giả thiết suy ra dãy (u_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu là $u_1 = \frac{20}{2} = 10$ và công bội $q = 0,5$.

$$\text{Khi đó } u_{53} = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{52} \approx 2,22 \cdot 10^{-15}.$$

Chọn đáp án (D) ☐

Câu 17. Tế bào E.Coli trong điều kiện nuôi cấy thích hợp cứ 20 phút lại nhân đôi một lần. Nếu lúc đầu có 10^{12} tế bào thì sau 3 giờ sẽ phân chia thành bao nhiêu tế bào?

- A. $256 \cdot 10^{12}$ tế bào. B. $1024 \cdot 10^{12}$ tế bào.
C. $512 \cdot 10^{13}$ tế bào. **D. $512 \cdot 10^{12}$ tế bào.**

Lời giải.

Lúc đầu có 10^{22} tế bào và mỗi lần phân chia thì một tế bào tách thành hai tế bào nên ta có cấp số nhân với $u_1 = 10^{22}$ và công bội $q = 2$.

Do cứ 20 phút phân đôi một lần nên sau 3 giờ sẽ có 9 lần phân chia tế bào. Ta có u_{10} là số tế bào nhận được sau 3 giờ.

Vậy số tế bào nhận được sau 3 giờ là $u_{10} = u_1 q^9 = 512 \cdot 10^{12}$.

Chọn đáp án **D** $\square$

Câu 18. Ông Trung có 100 triệu đồng gửi tiết kiệm vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn 6 tháng với lãi suất 8% cho một kì hạn. Giả sử lãi suất không thay đổi. Hỏi sau 3 năm số tiền trong tài khoản tiết kiệm của ông Trung **gần nhất** với số nào sau đây?

- A. 126532000 đồng. **B. 158687000 đồng.**
C. 125971000 đồng. D. 112486000 đồng.

Lời giải.

3 năm tương ứng với 6 kì lãi của ông Trung.

Vậy sau ba năm, số tiền trong tài khoản tiết kiệm của ông Trung khoảng

$$S = 100\,000\,000 \cdot \left(1 + \frac{8}{100}\right)^6 \approx 158\,687\,432.$$

Số tiền trong tài khoản tiết kiệm của ông Trung **gần nhất** với số 158687000 đồng.

Chọn đáp án **B** $\square$

Câu 19. Ba số phân biệt có tổng là 217 có thể coi là các số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, cũng có thể coi là số hạng thứ 2, thứ 9, thứ 44 của một cấp số cộng. Hỏi phải lấy bao nhiêu số hạng đầu của cấp số cộng này để tổng của chúng bằng 210?

- A. 40. B. 30. C. 20. **D. 10.**

Lời giải.

Gọi số hạng thứ 2, thứ 9, thứ 44 của cấp số cộng này là u_2, u_9, u_{44} .

Ta có

- $\checkmark u_2 = u_1 + d;$
 $\checkmark u_9 = u_1 + 8d = (u_1 + d) + 7d = u_2 + 7d;$
 $\checkmark u_{44} = u_1 + 43d = (u_1 + d) + 42d = u_2 + 42d.$

Vì ba số hạng này là các số hạng liên tiếp của một cấp số nhân nên ta có $u_2 \cdot u_{44} = u_9^2$.

Tổng của ba số hạng đó bằng 217 nên $u_2 + u_9 + u_{44} = 217$.

Do đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} u_2 + u_9 + u_{44} = 217 \\ u_2 \cdot u_{44} = u_9^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_2 + u_2 + 7d + u_2 + 42d = 217 \\ u_2 \cdot (u_2 + 42d) = (u_2 + 7d)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_2 = 7 \\ d = 4 \end{cases}$$

Do đó $u_1 = u_2 - d = 3$ và $S_n = \frac{n}{2} \cdot [2u_1 + (n-1) \cdot d] = n \cdot (2n+1)$.

Tổng của n số hạng đầu bằng 210 nên

$$210 = n \cdot (2n+1) \Leftrightarrow n = 10.$$

Vậy phải lấy 10 số hạng đầu của cấp số cộng này.

Chọn đáp án **D** $\square$

Câu 20. Một đa giác có n cạnh và có chu vi bằng 158 cm. Biết số đo các cạnh của đa giác lập thành một cấp số cộng và công sai $d = 3$ cm và cạnh lớn nhất có độ dài là 44 cm. Đa giác có số cạnh n bằng

- A. $n = 6$. B. $n = 7$. C. $n = 5$. **D. $n = 4$.**

Lời giải.

Gọi u_i ($1 \leq i \leq n$) là độ dài cạnh thứ i trong cấp số cộng tạo bởi độ dài các cạnh của đa giác.

Ta có $u_n = 44$, $d = 3$ nên $u_1 = u_n - (n-1)d = 44 - (n-1) \cdot 3 = 47 - 3n$.

Chu vi của đa giác là tổng các cạnh của đa giác và bằng

$$\frac{n(u_1 + u_n)}{2} = 158 \Leftrightarrow n(91 - 3n) = 316 \Leftrightarrow 3n^2 - 91n + 316 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 4 \\ n = 7 \end{cases}$$

Vậy $n = 4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **D** $\square$

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

BÀI 1. Tìm công sai của cấp số cộng (u_n) , biết

- a) $u_1 = -21$ và $u_{14} = 18;$
c) $u_1 = 2$ và $u_2 + u_3 = 5;$

- b) $u_5 = -15$ và $u_{20} = 60;$

- d) $u_2 + u_4 = 16$ và $u_3 + u_7 = -4.$

Lời giải.

☑ Gọi d là công sai của cấp số cộng u_n , ta có

$$u_n = u_1 + (n-1) \cdot d \Rightarrow u_{14} = u_1 + 13d \Leftrightarrow 18 = -21 + 13d \Leftrightarrow d = 3.$$

Vậy công sai của cấp số cộng là $d = 3$.

☑ Ta có : $\begin{cases} u_5 = u_1 + 4d \\ u_{20} = u_1 + 19d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = -15 \\ u_1 + 19d = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 5 \\ u_1 = -35. \end{cases}$

☑ Ta có $u_2 + u_3 = u_1 + d + u_1 + 2d = 2u_1 + 3d = 4 + 3d$.

Theo đề bài ta có $u_2 + u_3 = 5$ nên $4 + 3d = 5$, do đó $d = \frac{1}{3}$.

☑ Ta có $\begin{cases} u_2 + u_4 = 16 \\ u_3 + u_7 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 4d = 16 \\ 2u_1 + 8d = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 18 \\ d = -5. \end{cases}$

□

BÀI 2. Xác định công bội của một cấp số nhân (u_n) , biết

a) $u_1 = \frac{1}{2}$ và $u_6 = 16$;

b) $u_1 = -\frac{1}{2}$ và $u_7 = -32$;

c) $u_3 = 9$ và $u_6 = 243$;

d) $u_2 = \frac{1}{4}$ và $u_5 = 16$.

💬 **Lời giải.**

☑ Ta có $u_6 = u_1 \cdot q^5 \Rightarrow q^5 = \frac{u_6}{u_1} = \frac{16}{\frac{1}{2}} = 32$. Suy ra $q = 2$.

☑ Áp dụng công thức số hạng tổng quát cấp số nhân ta có $u_n = u_1 q^{n-1} \Rightarrow u_7 = u_1 \cdot q^6 \Rightarrow q^6 = 64 \Rightarrow \begin{cases} q = 2 \\ q = -2 \end{cases}$.

☑ Gọi q là công bội của cấp số nhân đã cho, ta có: $\begin{cases} u_3 = u_1 \cdot q^2 \\ u_6 = u_1 \cdot q^5 \end{cases} \Rightarrow q^3 = \frac{u_6}{u_3} = 27 \Rightarrow q = 3$.

☑ Ta có: $u_2 = u_1 \cdot q \Leftrightarrow \frac{1}{4} = u_1 \cdot q$; $u_5 = u_1 \cdot q^4 \Leftrightarrow 16 = u_1 \cdot q^4$.
Suy ra: $q^3 = 64 \Leftrightarrow q = 4$.

□

BÀI 3. Có bao nhiêu hàng ghế trong một góc khán đài của một sân vận động, biết rằng góc khán đài đó có 2040 chỗ ngồi, hàng ghế đầu tiên có 10 chỗ ngồi và mỗi hàng ghế sau có thêm 4 chỗ ngồi so với hàng ghế ngay trước nó?

💬 **Lời giải.**

Số ghế ở mỗi hàng của góc khán đài lập thành một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 10$ và công sai $d = 4$.

Áp dụng công thức tính tổng n số hạng đầu của cấp số cộng với $S_n = 2040$, $u_1 = 10$, $d = 4$ để tìm n , ta có

$$\begin{aligned} 2040 &= S_n = \frac{n}{2} [2 \cdot 10 + (n-1) \cdot 4] \\ \Leftrightarrow n(16 + 4n) &= 4080 \\ \Leftrightarrow 4n^2 + 16n - 4080 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} n = 30 \\ n = -34 \text{ (loại)}. \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra $n = 30$, tức là góc khán đài đó có 30 hàng ghế.

□

BÀI 4. Nếu anh Nam nhận được lời mời làm việc cho một công ty nước ngoài với mức lương khởi điểm là 35000 đô la mỗi năm và được tăng thêm 1400 đô la lương mỗi năm, thì sẽ mất bao nhiêu năm làm việc để tổng lương mà anh Nam nhận được là 319200 đô la?

💬 **Lời giải.**

Lương mỗi năm của anh Nam lập thành một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 35000$ và công sai $d = 1400$, ta có

$$\begin{aligned} 319200 &= S_n = \frac{n}{2}[2 \cdot 35000 + (n-1) \cdot 1400] \\ \Leftrightarrow n(68600 + 1400n) &= 638400 \\ \Leftrightarrow 1400n^2 + 68600n - 638400 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} n = 8 \\ n = -57 \text{ (loại).} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy sau 8 năm làm việc thì tổng lương mà anh Nam nhận được là 319200 đô la. □

Chương III.

CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

A. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1 Mức độ Nhận biết, Thông hiểu

Câu 21. Điều tra về chiều cao của 100 học sinh lớp 10 trường THPT A, ta được kết quả

Chiều cao (cm)	[150;152)	[152;154)	[154;156)	[156;158)	[158;160)	[160;162)	[162;168)
Số học sinh	5	18	40	25	8	3	1

a) Mẫu số liệu trên có bao nhiêu nhóm

A. 5.

B. 6.

C. 7.

D. 8.

Lời giải.

Chọn đáp án **(C)**



b) Số học sinh có chiều cao trong khoảng [154;156) là

A. 40.

B. 18.

C. 5.

D. 8.

Lời giải.

Chọn đáp án **(A)**



Câu 22. Khảo sát thời gian xem ti vi trong một ngày của một số học sinh khối 11 thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau

Thời gian (phút)	[0;20)	[20;40)	[40;60)	[60;80)	[80;100)
Số học sinh	5	9	12	10	6

a) Giá trị đại diện của nhóm [60;80) là

A. 40.

B. 70.

C. 60.

D. 30.

Lời giải.

Chọn đáp án **(B)**



b) Nhóm [20;40) có tần số là

A. 5.

B. 9.

C. 12.

D. 10.

Lời giải.

Chọn đáp án **(B)**



c) Nhóm chứa một của mẫu số liệu này là

A. [80;100).

B. [20;40).

C. [40;60).

D. [60;80).

Lời giải.

Chọn đáp án **C**

d) Nhóm chứa trung vị là

A. [0;20).

B. [20;40).

C. [40;60).

D. [60;80).

Lời giải.

Gọi $x_1, x_2, \dots, x_{42}$ là thời gian xem tivi của các học sinh được xếp theo thứ tự không giảm.

Khi đó trung vị là $\frac{x_{21} + x_{22}}{2}$, do hai giá trị x_{21}, x_{22} thuộc nhóm [40;60) nên nhóm này chứa trung vị.

Chọn đáp án **C**

e) Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là

A. [0;20).

B. [20;40).

C. [40;60).

D. [60;80).

Lời giải.

Cỡ mẫu là $n = 44$.

Tứ phân vị thứ nhất là x_{11} . Giá trị này thuộc nhóm [20;40).

Chọn đáp án **B**

2 Mức độ Vận dụng

Câu 23. Tìm hiểu thời gian hoàn thành một bài tập (đơn vị: phút) của một số học sinh thu được kết quả sau

Thời gian (phút)	[0;4)	[4;8)	[8;12)	[12;16)	[16;20)
Số học sinh	2	4	7	4	3

Thời gian trung bình (phút) để hoàn thành bài tập của các em học sinh là

A. 7.

B. 11,3.

C. 10,4.

D. 12,5.

Lời giải.

Ta có bảng chứa giá trị đại diện như sau:

Thời gian (phút)	2	6	10	14	18
Số học sinh	2	4	7	4	3

Thời gian trung bình để hoàn thành bài tập là

$$\bar{x} = \frac{2 \cdot 2 + 4 \cdot 6 + 7 \cdot 10 + 4 \cdot 14 + 3 \cdot 18}{20} = 10,4.$$

Chọn đáp án **C**

Câu 24. Cho mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao của 25 cây dừa giống như sau

Chiều cao (cm)	[0;10)	[10;20)	[20;30)	[30;40)	[40;50)
Số cây	4	6	7	5	3

a) Một của mẫu số liệu ghép nhóm này là

A $M_o = \frac{70}{3}$.

B. $M_o = \frac{50}{3}$.

C. $M_o = \frac{70}{2}$.

D. $M_o = \frac{80}{3}$.

💬 **Lời giải.**

Tần số lớn nhất là 7 nên nhóm chứa một là $[20; 30)$.

Do đó $M_o = 20 + \frac{7-6}{(7-6)+(7-5)} \cdot 10 = \frac{70}{3}$.

Chọn đáp án **(A)** □

b) Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm này là

A. $M_e = \frac{175}{7}$.

B. $M_e = \frac{165}{5}$.

C $M_e = \frac{165}{7}$.

D. $M_e = \frac{165}{3}$.

💬 **Lời giải.**

Cỡ mẫu là $n = 25$.

Gọi $x_1, x_2, \dots, x_{25}$ là chiều cao của 25 cây dừa giống xếp theo thứ tự không giảm.

Khi đó trung vị là x_{13} . Giá trị này thuộc nhóm $[20; 30)$.

Do đó $M_e = 20 + \frac{\frac{25}{2} - (4+6)}{7} \cdot (30 - 20) = \frac{165}{7}$.

Chọn đáp án **(C)** □

c) Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm này là

A. $Q_1 = 13,5$.

B. $Q_1 = 13,9$.

C. $Q_1 = 15,75$.

D $Q_1 = 13,75$.

💬 **Lời giải.**

Tứ phân vị thứ nhất là $\frac{x_6 + x_7}{2}$, hai giá trị này thuộc nhóm $[10; 20)$.

Do đó $Q_1 = 10 + \frac{\frac{25}{4} - 4}{6} \cdot (20 - 10) = 13,75$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 25. Cho mẫu số liệu ghép nhóm về khối lượng (đơn vị: gram) của 30 củ khoai tây như sau

Khối lượng	$[70; 80)$	$[80; 90)$	$[90; 100)$	$[100; 110)$	$[110; 120)$
Tần số	3	6	12	6	3

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm này là

A. $Q_3 = 133$.

B. $Q_3 = 134$.

C. $Q_3 = 132$.

D $Q_3 = 102,5$.

💬 **Lời giải.**

Cỡ mẫu $n = 30$.

Tứ phân vị thứ ba là x_{23} , giá trị này thuộc nhóm $[100; 110)$.

Do đó $Q_3 = 100 + \frac{\frac{3 \cdot 30}{4} - (3+6+12)}{6} \cdot (110 - 100) = 102,5$.

Chọn đáp án **(D)** □

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

BÀI 5. Người ta ghi lại tốc độ của 40 xe đạp đi qua một vị trí trên đường. Mẫu số liệu dưới đây ghi lại tốc độ của 40 xe đó (đơn vị: km/h)

10	10,4	11	16	12	13	15,8	12,7	16,8	19
17	15,1	14	12,3	17,2	10,5	13,2	18,1	19,6	17,4
11,8	13,6	12,7	15,9	14,2	12,6	11,6	10,4	14,1	15,1
12,3	15,2	11,9	16,3	18,4	17,1	14,2	12,1	13,7	13,2

- a) Lập bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả tần số tích lũy có năm nhóm ứng với sáu nửa khoảng $[10; 12)$, $[12; 14)$, $[14; 16)$, $[16; 18)$, $[18; 20)$.
- b) Hãy ước lượng số trung bình, một và các tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Lời giải.

- a) Bảng tần số ghép nhóm bao gồm cả tần số tích lũy được cho như ở bảng sau

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
$[10; 12)$	8	8
$[12; 14)$	12	20
$[14; 16)$	9	29
$[16; 18)$	7	36
$[18; 20)$	4	40
	$n = 40$	

- b) Ta có $\frac{n}{20} = 2$, $\frac{n}{4} = 10$, $\frac{3n}{4} = 30$. Vì $8 < 20 \leq 20$ nên nhóm 2 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 20.

Suy ra trung vị là $M_e = 12 + \left(\frac{20-8}{12}\right) \cdot 2 = 14$.

Tứ phân vị thứ hai là $Q_2 = M_2 = 14$.

Vì $8 < 10 < 20$ nên nhóm 2 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 10. Suy ra tứ phân vị thứ nhất là $Q_1 = 12 + \left(\frac{10-8}{12}\right) \cdot 2 \approx 12,3$.

Vì $29 < 30 < 36$ nên nhóm 4 là nhóm đầu tiên có tần số tích lũy lớn hơn hoặc bằng 30. Suy ra tứ phân vị thứ ba là $Q_3 = 16 + \left(\frac{30-29}{7}\right) \cdot 2 \approx 16,3$.

Trong các nhóm, nhóm 2 có tần số lớn nhất, suy ra một là $M_O = 12 + \left(\frac{12-8}{2 \cdot 12 - 8 - 9}\right) \cdot 2 \approx 13,1$.

□

BÀI 6. Một công ty bảo hiểm thống kê lại độ tuổi các khách hàng mua bảo hiểm xe ô tô ở bảng sau:

Độ tuổi	$[25; 30)$	$[30; 35)$	$[35; 40)$	$[40; 45)$	$[45; 50)$	$[50; 55)$
Số khách hàng	25	38	62	42	37	29

Hãy ước lượng số trung bình, một và các tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Lời giải.

Độ tuổi	$[25; 30)$	$[30; 35)$	$[35; 40)$	$[40; 45)$	$[45; 50)$	$[50; 55)$
Độ tuổi đại diện	27,5	32,5	37,5	42,5	47,5	52,5
Số khách hàng	25	38	62	42	37	29

Cỡ mẫu $n = 233$.

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

$$\bar{x} = \frac{27,5 \cdot 25 + 32,5 \cdot 38 + 37,5 \cdot 62 + 42,5 \cdot 42 + 47,5 \cdot 37 + 52,5 \cdot 29}{233} \approx 39,97.$$

Nhóm chứa một của mẫu số liệu trên là nhóm $[35; 40)$. Do đó: $u_m = 35$; $n_m = 62$, $n_{m-1} = 38$; $n_{m+1} = 42$; $u_{m+1} = 40$.

Vậy một của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$M_0 = 35 + \frac{62 - 38}{(62 - 38) + (62 - 42)} \cdot (40 - 35) = \frac{415}{11}.$$

Gọi $x_1; x_2; \dots; x_{233}$ là mẫu số liệu được xếp theo thứ tự không giảm.

Tứ phân vị thứ hai của dãy số liệu $x_1; x_2; \dots; x_{233}$ là x_{117} .

Do x_{117} thuộc nhóm $[35; 40)$ nên $Q_2 = 35 + \frac{\frac{233}{2} - 63}{62} \cdot (40 - 35) = \frac{4875}{124}$.

Tứ phân vị thứ nhất của dãy số liệu $x_1; x_2; \dots; x_{233}$ là $\frac{1}{2}(x_{58} + x_{59})$.

Do x_{58} và x_{59} thuộc nhóm $[30; 35)$ nên $Q_1 = 30 + \frac{\frac{1 \cdot 233}{4} - 25}{38} \cdot (35 - 30) = \frac{275}{8}$.

Tứ phân vị thứ ba của dãy số liệu $x_1; x_2; \dots; x_{233}$ là $\frac{1}{2}(x_{175} + x_{176})$.

Do x_{175} và x_{176} thuộc nhóm $[45; 50)$ nên $Q_3 = 45 + \frac{\frac{3 \cdot 233}{4} - 167}{37} \cdot (50 - 45) = \frac{6815}{148}$. □

BÀI 7. Các bạn học sinh một lớp thống kê số túi nhựa mà gia đình bạn đó sử dụng trong một tuần. Kết quả được tổng hợp lại ở bảng sau:

Số tuổi	[5; 9]	[10; 14]	[15; 19]	[20; 24]	[25; 29]
Số gia đình	8	15	12	7	2

- a) Hãy ước lượng số trung bình và một của mẫu số liệu trên.
- b) Cô giáo dự định trao danh hiệu “Gia đình xanh” cho 25% gia đình các bạn sử dụng ít túi nhựa nhất. Cô giáo nên trao danh hiệu cho các gia đình dùng không quá bao nhiêu túi nhựa?

🗨️ Lời giải.

Do số tuổi là số nguyên nên ta hiệu chỉnh lại như sau:

Số tuổi	[4,5; 9,5)	[9,5; 14,5)	[14,5; 19,5)	[19,5; 24,5)	[24,5; 29,5)
Số tuổi đại diện	7	12	17	22	27
Số gia đình	8	15	12	7	2

Cỡ mẫu $n = 44$.

- a) Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\bar{x} = \frac{7 \cdot 8 + 12 \cdot 15 + 17 \cdot 12 + 22 \cdot 7 + 27 \cdot 2}{44} \approx 14,73.$$

Nhóm chứa một của mẫu số liệu trên là nhóm $[9,5; 14,5)$. Do đó: $u_m = 9,5$; $n_m = 15$, $n_{m-1} = 8$; $n_{m+1} = 12$; $u_{m+1} = 14,5$.

Vậy một của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$M_0 = 9,5 + \frac{15 - 8}{(15 - 8) + (15 - 12)} \cdot (14,5 - 9,5) = 13.$$

- b) Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_1 = \frac{21}{2} = 10,5$.

Do đó, cô giáo nên trao danh hiệu cho gia đình các bạn dùng không quá 10 túi nhựa. □

BÀI 8. Bảng sau thống kê doanh số bán hàng của các nhân viên một trung tâm thương mại trong một ngày.

Doanh số (triệu đồng)	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50)	[50; 60)	[60; 70)
Số nhân viên	4	8	12	7	5

- a) Hãy ước lượng số trung bình, một và trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.
- b) Trung tâm thương mại dự định sẽ thưởng cho 25% số nhân viên có doanh số bán hàng cao nhất. Theo mẫu số liệu trên, trung tâm thương mại nên khen thưởng các nhân viên có doanh số bán hàng ít nhất là bao nhiêu?

🗨️ Lời giải.

Doanh số (triệu đồng)	[20;30)	[30;40)	[40;50)	[50;60)	[60;70)
Doanh số đại diện	25	35	45	55	65
Số nhân viên	4	8	12	7	5

a) $\bar{x} = \frac{815}{18}$; $M_0 = \frac{400}{9}$; $M_e = 45$.

b) Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_3 = \frac{380}{7} \approx 54,29$.

Do đó, trung tâm thương mại nên khen thưởng các nhân viên có doanh số bán hàng một ngày ít nhất là 54,29 triệu đồng.

□

—HẾT—

Chương IV.

QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN

A. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1 Mức độ Cơ bản

Câu 26. Các yếu tố nào sau đây xác định một mặt phẳng duy nhất?

- A. Bốn điểm phân biệt. B. Một điểm và một đường thẳng.
 C. Ba điểm phân biệt. **D. Hai đường thẳng cắt nhau.**

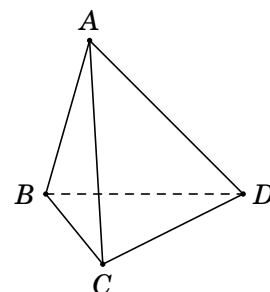
Lời giải.

- ☑ A sai. Trong trường hợp 3 điểm phân biệt thẳng hàng thì sẽ có vô số mặt phẳng chứa 3 điểm thẳng hàng đã cho.
 ☑ B sai. Trong trường hợp điểm thuộc đường thẳng đã cho, khi đó ta chỉ có 1 đường thẳng, có vô số mặt phẳng đi qua đường thẳng đó.
 ☑ D sai. Trong trường hợp 4 điểm phân biệt thẳng hàng thì có vô số mặt phẳng đi qua 4 điểm đó hoặc trong trường hợp 4 điểm mặt phẳng không đồng phẳng thì sẽ tạo không tạo được mặt phẳng nào đi qua cả 4 điểm.

Chọn đáp án **D**

Câu 27. Cho tứ diện $ABCD$ như hình bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. AB và CD cắt nhau. B. BD và AC cắt nhau.
C. BD và AC chéo nhau. D. BC và AD song song.



Lời giải.

Theo định nghĩa của tứ diện $ABCD$ thì mệnh đề đúng là BD và AC là hai đường thẳng chéo nhau.

Chọn đáp án **C**

Câu 28. Hình chóp tứ giác có tất cả bao nhiêu mặt là tam giác?

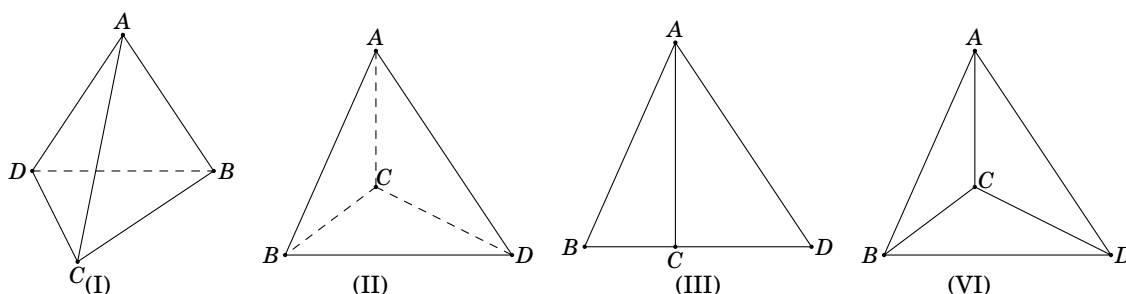
- A. 5. B. 3. C. 6. **D. 4.**

Lời giải.

Hình chóp tứ giác có tất cả 4 mặt là tam giác.

Chọn đáp án **D**

Câu 29. Trong các hình sau



Hình nào có thể là hình biểu diễn của một hình tứ diện?

A. (I).

B. (I), (II).

C. (I), (II), (IV).

D. (I), (II), (III), (IV).

Lời giải.

Chọn đáp án **D**



Câu 30. Trong không gian, hai đường thẳng không có điểm chung thì

A. cắt nhau.

B. chéo nhau hoặc song song.

C. chéo nhau.

D. song song.

Lời giải.

Chọn đáp án **B**



Câu 31. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Hai đường thẳng phân biệt không song song thì chéo nhau.

B. Hai đường thẳng lần lượt nằm trên hai mặt phẳng phân biệt thì chéo nhau.

C. Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau.

D. Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung.

Lời giải.

Hai đường thẳng chéo nhau không có điểm chung.

Chọn đáp án **D**



Câu 32. Trong không gian cho hai đường thẳng cắt nhau a và b . Nếu c là một đường thẳng song song với a thì

A. c và b song song với nhau.

B. c và b cắt nhau.

C. c và b chéo nhau.

D. c và b không song song với nhau.

Lời giải.

Chọn đáp án **D**



Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có điểm O là giao điểm của hai đường chéo. Giao điểm của đường thẳng AC với mặt phẳng (SBD) là điểm nào?

A. Điểm B .

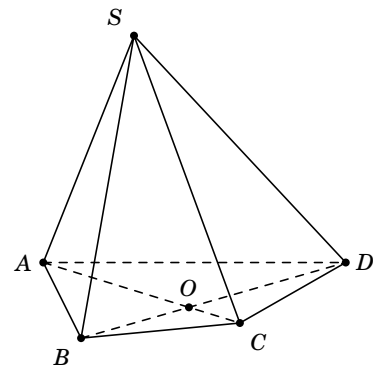
B. Điểm A .

C. Điểm O .

D. Điểm S .

Lời giải.

Ta thấy $A \notin (SBD)$ và $AC \cap BD = O$ nên $AC \cap (SBD) = \{O\}$.



Chọn đáp án **C**



Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là tứ giác lồi $ABCD$, giao tuyến của mặt (SAD) và (SBD) là

A. SB .

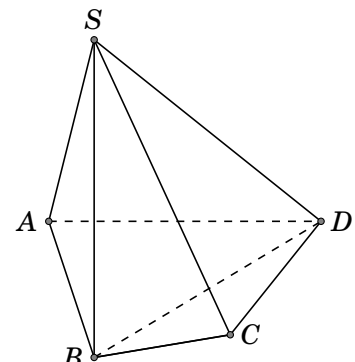
B. SA .

C. SD .

D. SC .

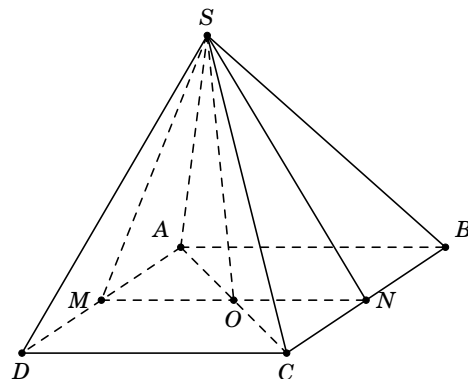
Lời giải.

Ta có $(SAD) \cap (SBD) = SD$.

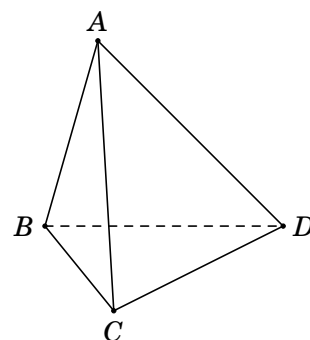


Chọn đáp án **C**

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và BC . Giao tuyến của hai mặt phẳng (SMN) và (SAC) là

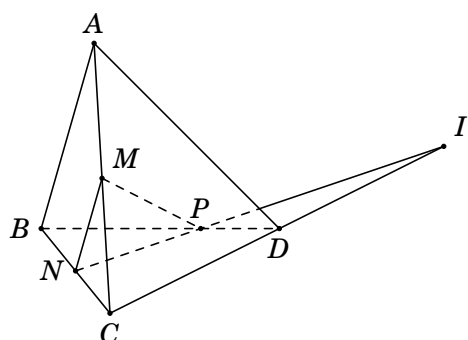
A. SF (F là trung điểm CD).**B** SO (O là tâm hình bình hành $ABCD$).C. SG (G là trung điểm AB).D. SD .**Lời giải.**Để thấy $S \in (SAC) \cap (SMN)$.Gọi O là tâm của hình bình hành.Khi đó, $O = AC \cap MN \Rightarrow O \in (SAC) \cap (SMN)$.Vậy $(SAC) \cap (SMN) = SO$.Chọn đáp án **B**

Câu 36. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC . Trên đoạn BD lấy P sao cho $BP = 2PD$. Khi đó giao điểm của đường thẳng CD với mặt phẳng (MNP) là

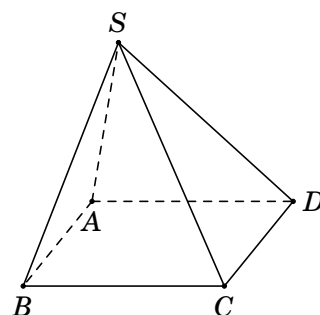
A giao điểm của NP và CD .B. giao điểm của MN và CD .C. trung điểm của CD .D. giao điểm của MP và CD .**Lời giải.**Trong mặt phẳng (BCD) kéo dài NP cắt CD tại I .

$$\text{Ta có } \begin{cases} I \in CD \\ I \in NP \\ NP \subset (MNP) \end{cases}$$

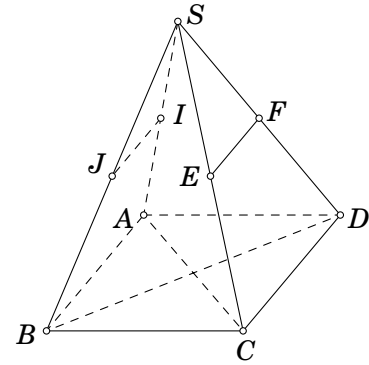
$$\Rightarrow \{I\} = CD \cap (MNP).$$

Chọn đáp án **A**

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm SA, SB, SC, SD . Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào không song song với IJ ?

A. EF .B. DC .C. AB .**D** AD .**Lời giải.**

Ta có $IJ \parallel AB$ (tính chất đường trung bình trong tam giác SAB) và $EF \parallel CD$ (tính chất đường trung bình trong tam giác SCD).
Mà $CD \parallel AB$ (đáy là hình bình hành) $\Rightarrow CD \parallel AB \parallel EF \parallel IJ$.



Chọn đáp án **(D)**

Câu 38. Cho hai đường thẳng song song a, b và mặt phẳng (P) . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Nếu $a \parallel (P)$ thì $b \parallel (P)$.
B. Nếu a cắt (P) thì b cắt (P) .
C. Nếu a nằm trên (P) thì $b \parallel (P)$.
D. Nếu a nằm trên (P) thì b nằm trên (P) .

Lời giải.

Chọn đáp án **(B)**

Câu 39. Cho hai mặt phẳng (P) và điểm A nằm ngoài mặt phẳng (P) . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Qua A có vô số mặt phẳng song song với (P) .
B. Qua A có đúng một mặt phẳng song song với (P) .
C. Qua A không có mặt phẳng nào song song với (P) .
D. Qua A có đúng hai mặt phẳng song song với (P) .

Lời giải.

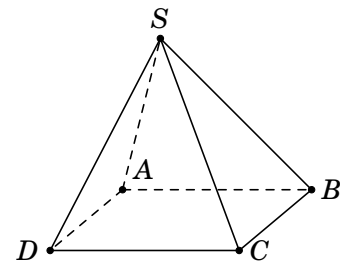
Chọn đáp án **(B)**

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đường thẳng AD song song với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng dưới đây?

- A. (SBC) .
B. $(ABCD)$.
C. (SAC) .
D. (SAB) .

Lời giải.

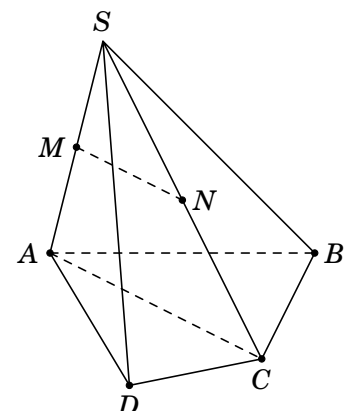
Do $AD \parallel BC$, $AD \notin (SBC)$ và $BC \subset (SBC)$ nên $AD \parallel (SBC)$.



Chọn đáp án **(A)**

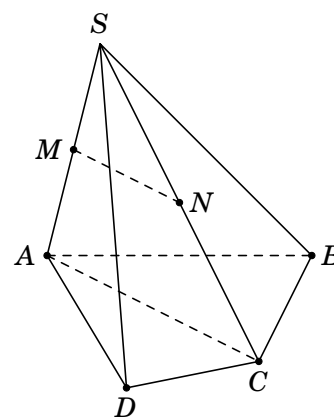
Câu 41. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SC . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $MN \parallel (ABCD)$.
B. $MN \parallel (SAB)$.
C. $MN \parallel (SBC)$.
D. $MN \parallel (SCD)$.



Lời giải.

Xét $\triangle SAC$ có M, N lần lượt là trung điểm SA, SC
 $\Rightarrow MN$ là đường trung bình của $\triangle SAC$
 $\Rightarrow MN \parallel AC$, mà $AC \subset (ABCD) \Rightarrow MN \parallel (ABCD)$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 42. Nếu mặt phẳng (R) cắt hai mặt phẳng song song (P) và (Q) lần lượt theo hai giao tuyến a và b thì vị trí tương đối giữa hai đường thẳng a và b là

- A** song song. B. chéo nhau. C. trùng nhau. D. cắt nhau.

🗨️ **Lời giải.**

Chọn đáp án (A) □

Câu 43. Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) và đường thẳng b nằm trong mặt phẳng (β) . Biết $(\alpha) \parallel (\beta)$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. $a \parallel (\beta)$.
 B. $b \parallel (\alpha)$.
C $a \parallel b$.
 D. Nếu có một mặt phẳng (γ) chứa a và b thì $a \parallel b$.

🗨️ **Lời giải.**

Chọn đáp án (C) □

Câu 44. Khẳng định nào sau đây là **sai** khi nói về hình lăng trụ?

- A. Hình lăng trụ có đáy là hình bình hành được gọi là hình hộp.
 B. Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình bình hành.
 C. Các cạnh bên của hình lăng trụ bằng nhau và song song với nhau.
D Hai đáy của hình lăng trụ là hai đa giác đều.

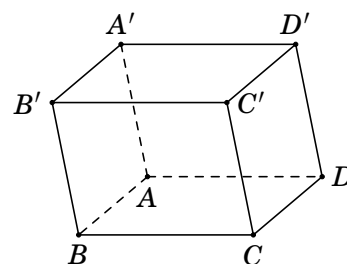
🗨️ **Lời giải.**

Hai đáy của hình lăng trụ là hai đa giác bằng nhau.

Chọn đáp án (D) □

Câu 45. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Hình chiếu song song của A trên mặt phẳng $(CDD'C')$ theo phương BC' là

- A** D' . B. D .
 C. B . **D** C' .

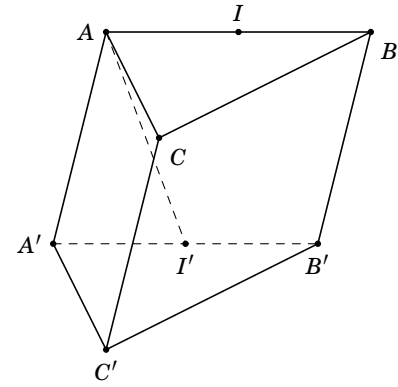


🗨️ **Lời giải.**

Chọn đáp án (D) □

Câu 46. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, gọi I, I' lần lượt là trung điểm của $AB, A'B'$. Qua phép chiếu song song đường thẳng AI' , hình chiếu của điểm I lên mặt phẳng chiếu ($A'B'C'$) là điểm nào sau đây?

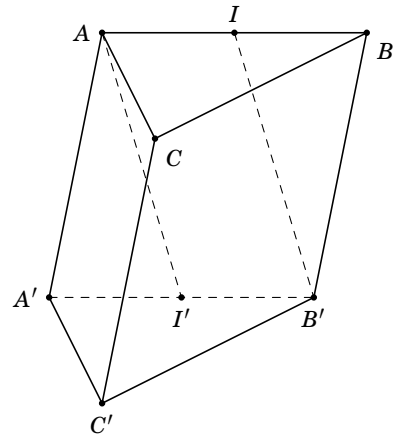
- A. A' . B. I' .
C. B' . D. C' .



Lời giải.

Ta có $\begin{cases} AI \parallel B'I' \\ AI = B'I' \end{cases} \Rightarrow AIB'I'$ là hình bình hành.

Suy ra qua phép chiếu song song đường thẳng AI' , mặt phẳng chiếu ($A'B'C'$) biến điểm I thành điểm B' .



Chọn đáp án **C**



Câu 47. Cho hình lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$. B. $AA_1 \parallel (BCC_1)$.
C. $AB \parallel (A_1B_1C_1)$. **D. AA_1B_1B là hình chữ nhật.**

Lời giải.

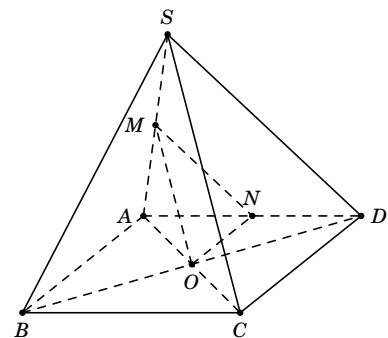
Vì mặt bên AA_1B_1B là hình bình hành, còn nó là hình chữ nhật nếu $ABC.A_1B_1C_1$ là hình lăng trụ đứng.

Chọn đáp án **D**



Câu 48. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, AD . Hỏi mặt phẳng (MNO) song song với mặt phẳng nào sau đây?

- A. (SAB) . B. (SBC) . **C. (SCD) .** D. (SAD) .



Lời giải.

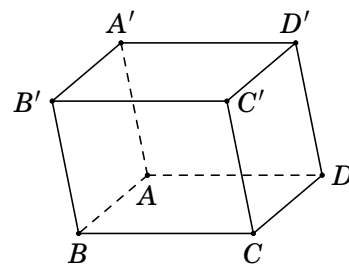
Áp dụng tính chất đường trung bình, suy ra $MN \parallel SD$ và $ON \parallel CD$.
 Mà $SD \in (SCD)$ và $CD \in (SCD)$, do đó $(MNO) \parallel (SCD)$.

Chọn đáp án **C**



Câu 49. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng $(AB'D')$ song song với mặt phẳng nào sau đây?

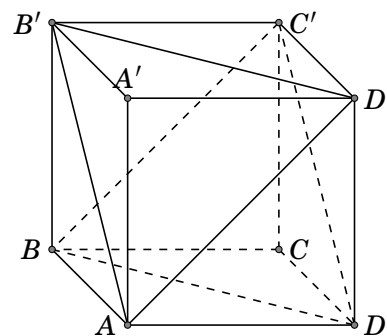
- A. (BCA') . B. (BDA') . C. $(A'C'C)$. **D. (BDC') .**



Lời giải.

Mặt phẳng $(AB'D')$ song song với mặt phẳng (BDC') .

Thật vậy, ta có $AB' \parallel DC'$ và $AD' \parallel BC'$, có điều cần chứng minh.



Chọn đáp án **D**

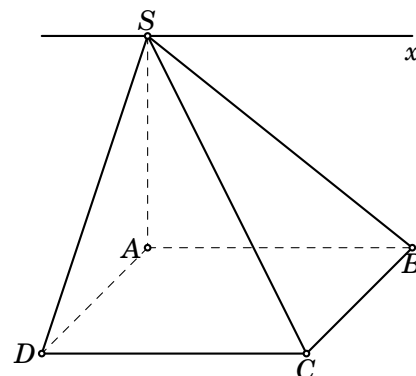


Câu 50. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng song song với đường thẳng nào sau đây?

- A. BD . B. SC . C. AC . **D. AB .**

Lời giải.

Ta có mặt phẳng (SAB) và (SCD) có chứa hai cạnh AB và CD song song nhau. Nên hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) có giao tuyến là đường thẳng qua S và song song với AB .

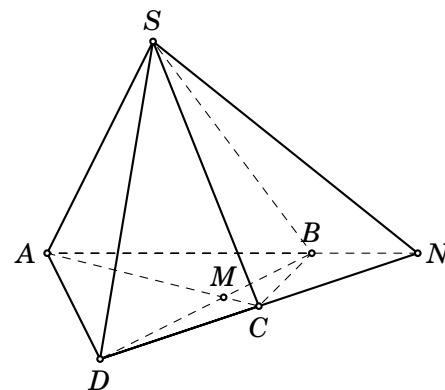


Chọn đáp án **D**



Câu 51. Cho hình chóp $S.ABCD$ có AC cắt BD tại M , AB cắt CD tại N . Trong các đường thẳng sau đây, đường thẳng nào là giao tuyến của (SAC) và (SBD) ?

- A. SM .** B. SN . C. SB . D. SC .

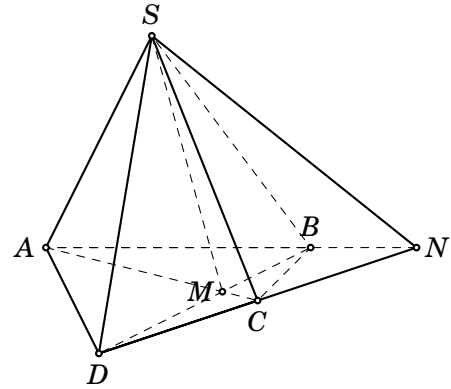


Lời giải.

Xét hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) Ta có S là điểm chung thứ nhất.

M là điểm chung thứ hai.

Nên giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là SM .



Chọn đáp án **A**



2 Mức độ Vận dụng

Câu 52. Cho ba mặt phẳng (P) , (Q) , (R) đôi một song song với nhau. Đường thẳng d cắt các mặt phẳng (P) , (Q) , (R) lần lượt tại A, B, C . Đường thẳng d' cắt các mặt phẳng (P) , (Q) , (R) lần lượt tại A', B', C' . Biết rằng $\frac{AB}{AC} = \frac{2}{3}$, tỷ số $\frac{A'B'}{A'C'}$ bằng

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{3}{2}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Chọn đáp án **B**



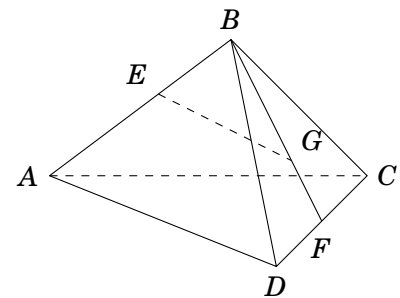
Câu 53. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AB và CD ; G là trọng tâm tam giác BCD . Giao điểm của đường thẳng EG và mặt phẳng (ACD) là

A. điểm F .

B. giao điểm của đường thẳng EG và CD .

C. giao điểm của đường thẳng EG và AF .

D. giao điểm của đường thẳng EG và AC .



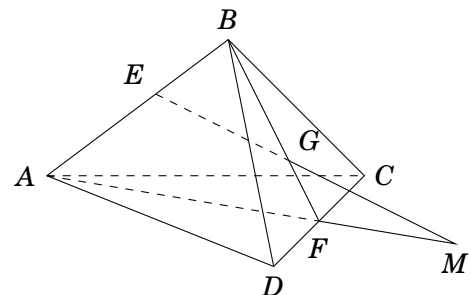
Lời giải.

• Chọn mặt phẳng phụ (ABF) chứa EG . • Ta có $(ABF) \cap (ACD) = AF$.

• Gọi $M = EG \cap AF \Rightarrow \begin{cases} M \in EG \\ M \in AF \subset (ACD) \end{cases}$

$\Rightarrow M = EG \cap (ACD)$.

Vậy giao điểm cần tìm giao điểm của đường thẳng EG và AF .



Chọn đáp án **C**



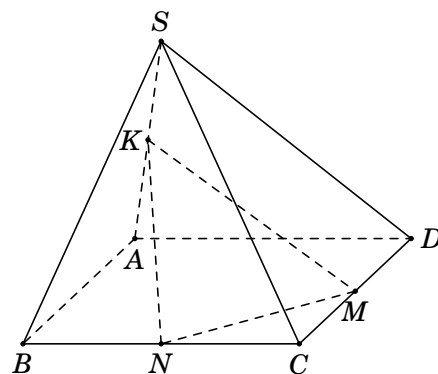
Câu 54. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm các cạnh DC, BC, SA . Giao tuyến của (MNK) với (SAB) là đường thẳng KT , với T được xác định theo một trong bốn phương án được liệt kê dưới đây. Khẳng định nào sau đây đúng.

A. T là giao điểm của MN với SB .

B. T là giao điểm của MN với AB .

C. T là giao điểm của KN với AB .

D. T là giao điểm của KN với SB .

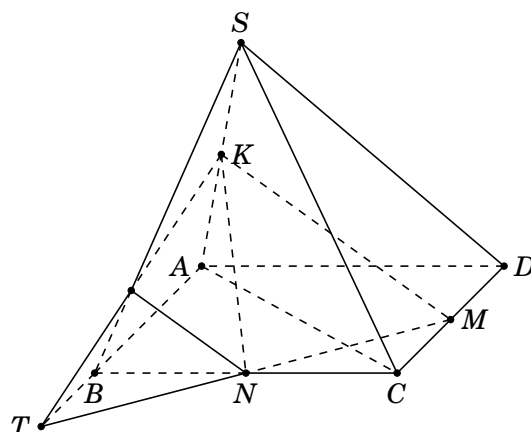


🗨️ Lời giải.

Ta có K là điểm chung thứ nhất của (SAB) và (KMN) .
Ta sẽ tìm điểm chung thứ hai T .

Nhận thấy, trong mặt phẳng (SAB) và (KMN) có đường thẳng AB và MN cùng nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$ nên nếu T là giao điểm của AB và MN thì T là điểm chung thứ hai của (SAB) và (KMN) .

Suy ra, KT là giao tuyến của (SAB) và (KMN) .



Chọn đáp án **(B)**



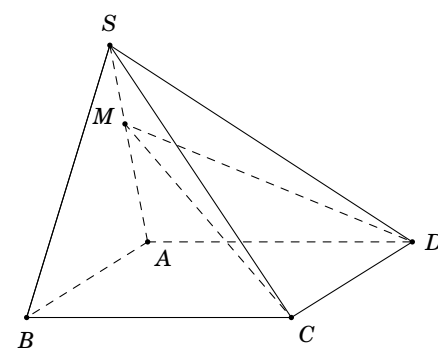
Câu 55. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Trên cạnh SA lấy điểm M sao cho $MA = 2MS$. Mặt phẳng (CDM) cắt SB tại N . Tỉ số $\frac{SN}{SB}$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{2}{3}$.

B. $\frac{1}{3}$.

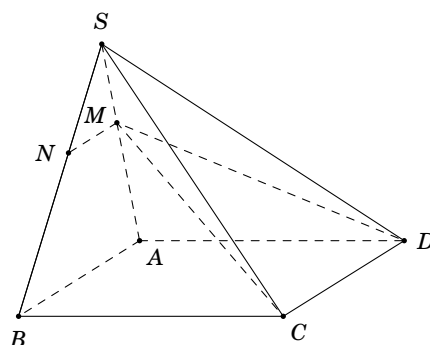
D. $\frac{3}{4}$.



🗨️ Lời giải.

Xét hai mặt phẳng (MCD) và (SAB) có M là điểm chung, $AB \parallel CD$. Do đó giao tuyến của hai mặt phẳng (MCD) và (SAB) là $MN \parallel AB$ (với N thuộc SB).

Do đó $\frac{SN}{SB} = \frac{SM}{SA} = \frac{1}{3}$.



Chọn đáp án **(B)**



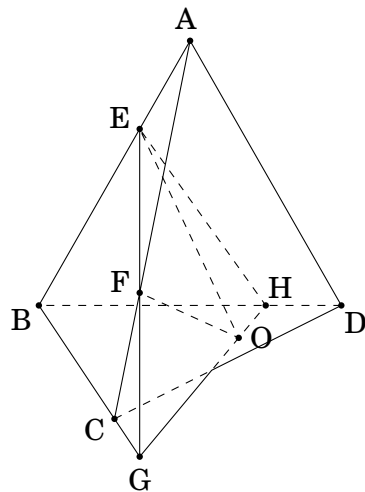
B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

BÀI 9. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E, F lần lượt là các điểm thuộc các cạnh AB, AC sao cho $AE = \frac{1}{2}BE$ và $AF = 2CF$. Gọi O là một điểm nằm trong tam giác BCD .

- Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (OEF) và (ABD) .
- Xác định giao điểm (nếu có) của đường thẳng AD và mặt phẳng (OEF) .

Lời giải.

- Trong mặt phẳng (ABC) , gọi G là giao điểm của EF và BC .
Trong mặt phẳng (BCD) , gọi H là giao điểm của OG và BD .
Khi đó H là điểm chung của hai mặt phẳng (OEF) và (ABD) ,
suy ra EH là giao tuyến của hai mặt phẳng đó.
- Trong mặt phẳng (ABD) , gọi I là giao điểm (nếu có) của EH và AD . Khi đó I là giao điểm của AD và mặt phẳng (OEF) .



□

BÀI 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, K lần lượt là các trung điểm của đoạn thẳng SC, SA và AB .

- Tìm giao tuyến hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) .
- Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng AM và mp (SBD) .
- Chứng minh MN song song với mặt phẳng $(ABCD)$.
- Chứng minh đường thẳng KN song song với mặt phẳng (SOD) .
- Chứng minh (KOM) song song với mặt phẳng (SAB) .
- Chứng minh KM song song với mặt phẳng (SAB) .

Lời giải.

□

BÀI 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Lấy điểm M trên cạnh AD sao cho $AD = 3AM$. Gọi G, N lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAB, ABC . Chứng minh

- Đường thẳng MN song song với mặt phẳng (SCD) .
- Đường thẳng GN song song với mặt phẳng (SAC) .
- Đường thẳng GM song song với mặt phẳng (SCD) .

Lời giải.

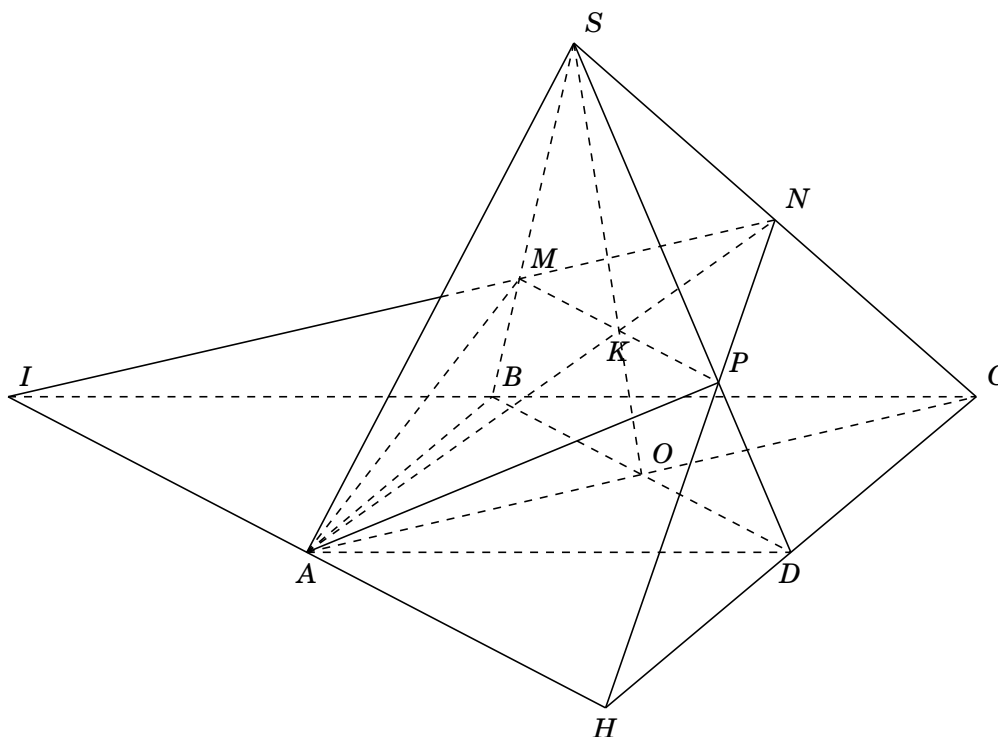
□

BÀI 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi hai điểm M, N lần lượt trên các cạnh SB, SC sao cho $\frac{SN}{SC} = \frac{1}{2}$ và $\frac{SM}{SB} = \frac{2}{3}$.

- Chứng minh rằng BC song song mặt phẳng (SAD) .
- Xác định giao tuyến Δ của hai mặt phẳng (AMN) và $(ABCD)$.

- c) Chứng minh rằng BD song song mặt phẳng (AMN) .
- d) Gọi P là giao điểm của SD và (AMN) . Tính tỷ số $\frac{SP}{SD}$.
- e) Chứng minh rằng ba đường thẳng Δ, PN và CD đồng quy.

💬 **Lời giải.**



- a) Ta có $BC \parallel AD, BC \not\subset (SAD)$ và $AD \subset (SAD)$ nên $BC \parallel (SAD)$ 1,0 điểm.
- b) Ta có $A \in (AMN) \cap (ABCD)$ 0,25 điểm.
 Trong mp(SBC), gọi I là giao điểm MN và BC .
 Ta có $I \in (AMN) \cap (ABCD)$ 0,5 điểm.
 Do đó AI là giao tuyến Δ của (AMN) và $(ABCD)$ 0,25 điểm.
- c) Tam giác SIC có IN là trung tuyến và $\frac{SM}{SB} = \frac{2}{3}$ nên M là trọng tâm tam giác. 0,5 điểm.
 Do đó B là trung điểm IC , suy ra $IBDA$ là hình bình hành, nên $BD \parallel IA \subset (AMN)$. Vậy $BD \parallel (AMN)$ 0,5 điểm.
- d) Trong mp(SAC), gọi $K = SO \cap AN$ 0,5 điểm.
 Trong mp(SBD), gọi $P = SD \cap MK$. Lúc đó $P = SD \cap (AMN)$ 0,5 điểm.
 Tam giác SAC có AN và SO là hai đường trung tuyến nên K là trọng tâm tam giác SAC . Suy ra $\frac{SK}{SO} = \frac{2}{3}$ 0,5 điểm.
 Mà $\frac{SM}{SB} = \frac{2}{3}$ nên KM song song BO 0,25 điểm.
 Do đó $\frac{SP}{SD} = \frac{2}{3}$ 0,25 điểm.
- e) Trong mặt phẳng (SCD) , vì $\frac{SP}{SD} \neq \frac{SN}{SC}$ nên PN và CD cắt nhau. 0,5 điểm.
 Gọi $H = PN \cap CD$.
 Ta có $(AMN) \cap (ABCD) = AI, (AMN) \cap (SCD) = PN$ và $(SCD) \cap (ABCD) = CD$ nên AI đi qua H , hay AI, PN, CD đồng quy tại H 0,5 điểm.

□

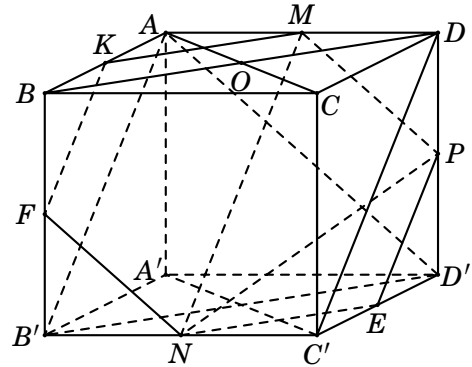
BÀI 13. Cho hình hộp $ABCD A'B'C'D'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của $AD, B'C', DD'$

- Chứng minh rằng $ADC'B$ là hình bình hành.
- Chứng minh rằng $BD \parallel (AB'D')$, $MN \parallel (AB'D')$.
- Chứng minh rằng $(MNP) \parallel (AB'D')$ và $BD \parallel (MNP)$.
- Xác định giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với các mặt của hình hộp.
- Lấy một đường thẳng cắt ba mặt phẳng $(AB'D')$, (MNP) , $(C'BD)$ lần lượt tại I, J, H . Tính tỉ số $\frac{IJ}{JH}$.

Lời giải.

a)

Vì $ABCD$ và $BCC'B'$ là các hình bình hành nên $AD \parallel BC$, $AD = BC$ và $BC \parallel B'C'$, $BC = B'C'$. Suy ra $AD \parallel B'C'$, $AD = B'C'$. Vậy $ADC'B'$ là hình bình hành.



- Vì $BB' \parallel DD'$, $BB' = DD'$ nên $BDD'B'$ là hình bình hành. Do đó, $BD \parallel B'D'$. Suy ra $BD \parallel (AB'D')$. Ta có $AMNB'$ là hình bình hành, suy ra $MN \parallel AB'$ nên $MN \parallel (AB'D')$.
- Vì $MP \parallel AD'$ nên $MP \parallel (AB'D')$, cùng với kết quả câu b ta có $(MNP) \parallel (AB'D')$. Vì $BD \parallel B'D'$ nên $BD \parallel (AB'D')$, suy ra $BD \parallel (MNP)$.
- Gọi E, F, K lần lượt là trung điểm của $C'D'$, $B'B$, BA . Khi đó, $PE \parallel MN$, $NF \parallel MP$, $KF \parallel MN$ nên các điểm E, F, K đều thuộc mặt phẳng (MNP) . Do đó giao tuyến của (MNP) với các mặt $(ADD'A')$, $(DCC'D')$, $(A'B'C'D')$, $(BCC'B')$, $(ABB'A')$ và $(ABCD)$ lần lượt là MP, PE, EN, NF, FK, KM .

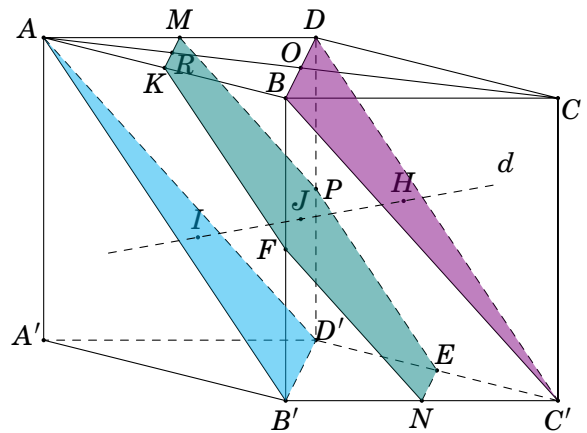
e)

Theo câu d, ta có (MNP) trùng với $(MKFNEP)$. Gọi R, O lần lượt là giao điểm của AC với MK , BD . Khi đó, ta có $\frac{AR}{RO} = 1$ và đường thẳng AC cắt ba mặt phẳng $(AB'D')$, (MNP) , $(C'BD)$ lần lượt tại A, R, O .

Áp dụng định lý Thalès trong không gian, ta có

$$\frac{AR}{IJ} = \frac{RO}{JH} = \frac{AO}{IH}.$$

Từ đó suy ra $\frac{IJ}{JH} = \frac{AR}{RO} = 1$.



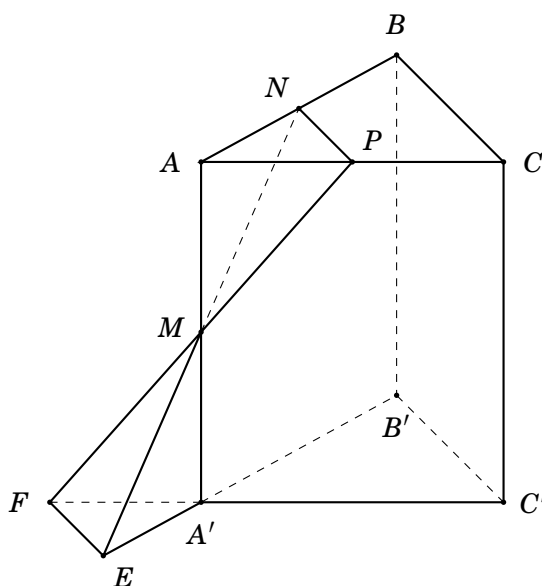
□

BÀI 14. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AA', AB, AC .

- Chứng minh rằng $BC \parallel (MNP)$.
- Xác định giao tuyến d của hai mặt phẳng (MNP) và $(A'B'C')$.

c) Chứng minh rằng $d \parallel NP$.

💬 **Lời giải.**



- a) Vì NP là đường trung bình của tam giác ABC nên $BC \parallel NP$, suy ra $BC \parallel (MNP)$
- b) Trong mặt phẳng $(ABB'A')$ gọi E là giao điểm của MN và $A'B'$. Trong mặt phẳng $(ACC'A')$ gọi F là giao điểm của MP và $A'C'$. Khi đó EF là giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và $(A'B'C')$.
- c) Vì $NP \parallel BC$ và $BC \parallel B'C'$ nên $NP \parallel B'C'$, suy ra $NP \parallel (A'B'C')$. Mặt phẳng (MNP) chứa đường thẳng NP song song với mặt phẳng $(A'B'C')$ nên giao tuyến d của hai mặt phẳng đó song song với $B'C'$, suy ra $d \parallel NP$.

□

—HẾT—

Chương V.

GIỚI HẠN. HÀM SỐ LIÊN TỤC

A. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1 Mức độ Nhận biết, Thông hiểu

Câu 56. Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) , biết $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$. Trong các kết luận sau, kết luận nào **sai**?

- A. $\lim(u_n + v_n) = a + b$.
B. $\lim(u_n - v_n) = a - b$.
C. $\lim(u_n v_n) = ab$.

D $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}$.

Câu 57. Cho các dãy số (u_n) , (v_n) và $\lim u_n = a$, $\lim v_n = +\infty$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n}$ bằng

- A. $+\infty$. **B** 0. C. 1. D. $-\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim u_n = a$, $\lim v_n = +\infty$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$.

Chọn đáp án **B**

Câu 58. $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n$ bằng

- A** $+\infty$. B. 0. C. $-\infty$. D. 2.

Lời giải.

Ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ nếu $q > 1$. Do đó, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$.

Chọn đáp án **A**

Câu 59. Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2020}{n}$.

- A. $+\infty$. B. $-\infty$. C. 2020. **D** 0.

Lời giải.

Theo định nghĩa suy ra $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2020}{n} = 2020 \cdot$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 2020 \cdot 0 = 0$.

Chọn đáp án **D**

Câu 60. Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n-3}{1-3n}$.

- A** $-\frac{2}{3}$. B. 2. C. $\frac{1}{3}$. D. 1.

Câu 61. Cho dãy số (u_n) có $\lim u_n = 2$. Tính giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3u_n - 1}{2u_n + 5}$.

- A. $+\infty$. B. $\frac{3}{2}$. C. $-\frac{1}{5}$. **D** $\frac{5}{9}$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3u_n - 1}{2u_n + 5} = \frac{3 \cdot 2 - 1}{2 \cdot 2 + 5} = \frac{5}{9}$.

Chọn đáp án **D**

Câu 62. Biết $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$ và $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -2$. Tính $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) + 2g(x)]$.

- A** -1. B. 1. C. 5. D. -6.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) + 2g(x)] = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + 2 \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 3 + 2(-2) = -1$.

Chọn đáp án **A**

Câu 63. Biết $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4$ và $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1$. Tính $\lim_{x \rightarrow 1} [4f(x) + 3g(x)]$.

- A. 11. **B** 19. C. 10. D. 9.

Câu 64. Cho $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$. Tìm khẳng định **sai**.

- A. $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) + 3] = 6$. B. $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{f(x) + 1} = 2$.
C. $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) - 2x] = -1$. **D** $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) - x^2] = 1$.

Lời giải.

Ta có

$\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) - x^2] = -1 = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 3 - 4 = -1$.

Vậy $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) - x^2] = 1$ sai.

Chọn đáp án **D**

Câu 65. $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 + 7x + 11)$ có kết quả là

- A** 37. B. 38. C. 39. D. 40.

Lời giải.

$\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 + 7x + 11) = 3 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2 + 11 = 37$.

Chọn đáp án **A**

Câu 66. Giá trị của $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3}{x^3 + 2}$ là

- A. 1. **B** -2. C. 2. D. $-\frac{3}{2}$.

Lời giải.

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3}{x^3 + 2} = \frac{(-1)^2 - 3}{(-1)^3 + 2} = -2$.

Chọn đáp án **B**

Câu 67. Cho c là hằng số, k là số nguyên dương. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$. B. $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$.
C. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{c}{x^k} = 0$. **D** $\lim_{x \rightarrow +\infty} c = +\infty$.

Lời giải.

Theo định lý về giới hạn, khẳng định sai là $\lim_{x \rightarrow +\infty} c = +\infty$.

Chọn đáp án (D)

Câu 68. Cho $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, kết quả của $\lim_{x \rightarrow a} (-3 \cdot f(x))$ bằng

- A. $-\infty$. B. 0. C. $+\infty$. D. 3.

Lời giải.

Có $\lim_{x \rightarrow a} (-3 \cdot f(x)) = -3 \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

Chọn đáp án (C)

Câu 69. Tính tổng $S = 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^{n-3}} + \dots$.

- A. $S = \frac{27}{2}$. B. $S = 14$.
C. $S = 16$. D. $S = 15$.

Lời giải.

Ta có $S = 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^{n-3}} + \dots = 9 \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}} + \dots \right)$
CSN: $u_1 = 1, q = \frac{1}{3}$
 $= 9 \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \right) = \frac{27}{2}$.

Chọn đáp án (A)

Câu 70. Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn bằng 2, tổng của ba số hạng đầu tiên của cấp số nhân bằng $\frac{9}{4}$. Số hạng đầu u_1 của cấp số nhân đó là

- A. $u_1 = 3$. B. $u_1 = 4$.
C. $u_1 = \frac{9}{2}$. D. $u_1 = 5$.

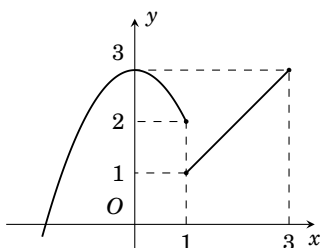
Lời giải.

Gọi q là công bội của cấp số nhân, ta có:

$$\begin{cases} \frac{u_1}{1-q} = 2 \\ S_3 = u_1 \cdot \frac{1-q^3}{1-q} = \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2(1-q) \\ 2(1-q^3) = \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = -\frac{1}{2} \\ u_1 = 2 \left(1 + \frac{1}{2} \right) = 3. \end{cases}$$

Chọn đáp án (A)

Câu 71. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Tính $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$.

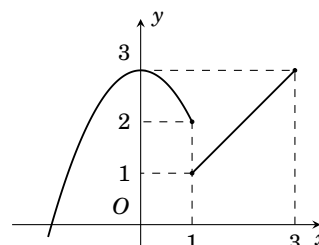
- A. 5. B. 4. C. 2. D. 0.

Lời giải.

Theo hình vẽ thì $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 3$.
Suy ra $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 4$.

Chọn đáp án (B)

Câu 72. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Tính $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.

- A. 5. B. 4. C. 2. D. 0.

Lời giải.

Theo hình vẽ thì $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$.
Suy ra $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 5$.

Chọn đáp án (A)

Câu 73. Tính $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^3 - 2x + 1)$.

- A. 1. B. 0. C. $+\infty$. D. $-\infty$.

Câu 74. Tính $\lim_{x \rightarrow 3^-} (\sqrt{x-3} - 3x + x^2)$.

- A. Không tồn tại. B. $-\infty$.
C. 0. D. $+\infty$.

Câu 75. Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng 0?

- A. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+2n^3}{2n^2-1}$. B. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-3}{-2n^3-4}$.
C. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-3n^3}{-2n^2-1}$. D. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-3n^4}{-2n^4+n^2}$.

Lời giải.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+2n^3}{2n^2-1} = +\infty$: « bậc tử » > « bậc mẫu » và $a_n b_k = 2 \cdot 2 = 4 > 0$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-3}{-2n^3-4} = 0$: « bậc tử » < « bậc mẫu ».

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-3n^3}{-2n^2-1} = +\infty$: « bậc tử » > « bậc mẫu » và $a_n b_k = (-3) \cdot (-2) > 0$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-3n^4}{-2n^4+n^2} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$: « bậc tử » = « bậc mẫu » và $\frac{a_m}{b_k} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$.

Chọn đáp án (B)

Câu 76. Dãy số nào sau đây có giới hạn là $+\infty$?

- A. $u_n = \frac{1+n^2}{5n+5}$. B. $u_n = \frac{n^2-2}{5n+5n^3}$.
C. $u_n = \frac{n^2-2n}{5n+5n^2}$. D. $\frac{1+2n}{5n+5n^2}$.

Lời giải.

$$\lim u_n = \lim \frac{1+n^2}{5n+5} = \lim n \cdot \frac{\frac{1}{n^2}+1}{5+\frac{1}{n}} = +\infty \text{ vì}$$

$$\begin{cases} \lim n = +\infty \\ \lim \frac{\frac{1}{n^2}+1}{5+\frac{1}{n}} = \frac{a_m}{b_k} = \frac{1}{5} > 0. \end{cases}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 77. Dãy số nào sau đây có giới hạn là $-\infty$?

A. $\frac{1+2n}{5n+5n^2}$. B. $u_n = \frac{n^3+2n-1}{-n+2n^3}$.
 C. $u_n = \frac{2n^2-3n^4}{n^2+2n^3}$. D. $u_n = \frac{n^2-2n}{5n+1}$.

Lời giải.

$$u_n = \frac{2n^2-3n^4}{n^2+2n^3} : \text{ « bậc tử » } > \text{ « bậc mẫu » và } a_m b_k = -3 \cdot 2 = -6 < 0 \Rightarrow \lim u_n = -\infty.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 78. Giá trị $\lim (n - \sqrt{n^2 - 4n})$ bằng

A. 3. B. 1. C. 2. D. 4.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim (n - \sqrt{n^2 - 4n}) = \lim \frac{4n}{n + \sqrt{n^2 - 4n}} = \lim \frac{4}{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{n}}} = 2.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 79. Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$.

A. 1. B. $-\infty$. C. -1. D. $+\infty$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} (x-2) = -1.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 80. Tìm $\lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^4 - 3x^2 + 2)$.

A. $+\infty$. B. $-\infty$. C. 4. D. 2.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^4 - 3x^2 + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \left(4 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^4} \right) = +\infty.$$

Chọn đáp án (A) □

2 Mức độ Vận dụng

Câu 81. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{an+4}{5n+3}$, với a là tham số thực. Để dãy số (u_n) có giới hạn bằng 2 thì giá trị của a là

A. $a = 10$. B. $a = 8$.
 C. $a = 6$. D. $a = 4$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim u_n = \lim \frac{an+4}{5n+3} = \lim \frac{a + \frac{4}{n}}{5 + \frac{3}{n}} = \frac{a}{5}. \text{ Khi đó}$$

$$\lim u_n = 2 \Leftrightarrow \frac{a}{5} = 2 \Leftrightarrow a = 10.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 82. Cho số thực a thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a\sqrt{2x^2+3}+2017}{2x+2018} = \frac{1}{2}$. Khi đó giá trị của a là

A. $a = \frac{-\sqrt{2}}{2}$. B. $a = \frac{1}{2}$.
 C. $a = \frac{-1}{2}$. D. $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a\sqrt{2x^2+3}+2017}{2x+2018} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}+2017}{x\left(2+\frac{2018}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a\sqrt{2} + \frac{2017}{x}}{2 + \frac{2018}{x}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Khi đó: } \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 83. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{1-x} & \text{với } x < 1 \\ \sqrt{2x-2} & \text{với } x \geq 1 \end{cases}$.

Khi đó $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ là

A. $+\infty$. B. -1. C. 0. D. 1.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2+1}{1-x} = +\infty \text{ vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2+1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) = 0 \text{ \& } 1-x > 0 (\forall x < 1) \end{cases}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 84. Cho $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+6} - x\sqrt{3}}{x\sqrt{2} - \sqrt{x^2+3}} = a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{6} + d$, ($a, b, c, d \in \mathbb{Q}$). Tính $ab + cd$.

A. 1. B. 0. C. -2. D. 2.

Câu 85. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-12}{x+4} & \text{khi } x \neq -4 \\ mx+1 & \text{khi } x = -4 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = -4$.

A. $m = 4$. B. $m = 2$. C. $m = 3$. D. $m = 5$.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2+x-12}{x+4} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{(x-3)(x+4)}{x+4} = -7.$$

Hàm số đã cho liên tục khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = f(-4) \Leftrightarrow -4m + 1 = -7 \Leftrightarrow m = 2.$$

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm.

Chọn đáp án (B) □

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN**BÀI 15.** Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 1}{2n^2 + n + 2}.$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n + 3}{1 + 3^n}.$

c) $\lim (\sqrt{n^2 + 2n} - n).$

d) $\lim (2n^3 + 2n - 1).$

🗨️ Lời giải.**BÀI 16.** Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x - 3}.$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 4}.$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 1}{2x}.$

d) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 2}{x - 1}.$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x).$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 - x^2 + 4x + 2).$

🗨️ Lời giải.**BÀI 17.** Xét tính liên tục của mỗi hàm số sau tại điểm $x = 2$.

a) $f(x) = \begin{cases} 6 - 2x & \text{khi } x \geq 2 \\ 2x^2 - 6 & \text{khi } x < 2; \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 0 & \text{khi } x = 2. \end{cases}$

🗨️ Lời giải.a) Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, chứa điểm 2. Ta có

☑ $f(2) = 6 - 2 \cdot 2 = 2;$

☑ $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (6 - 2x) = 6 - 2 \cdot 2 = 2;$

☑ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x^2 - 6) = 2 \cdot 2^2 - 6 = 2.$

Do $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2$ nên $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2.$

Khi đó $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 2$.b) Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, chứa điểm 2.

Ta có $f(2) = 0$ và $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4.$

Vì $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$ nên hàm số không liên tục tại $x = 2$.**BÀI 18.** Chứng minh rằng phương trình

a) $x^3 + 2x - 1 = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(-1; 1).$

b) $\sqrt{x^2 + x} + x^2 = 1$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; 1).$

🗨️ Lời giải.a) Xét hàm số $f(x) = x^3 + 2x - 1$ là hàm số liên tục trên đoạn $[-1; 1].$ Ta có $f(-1) \cdot f(1) = (-4) \cdot 2 = -8 < 0$ suy ra tồn tại $c \in (-1; 1)$ để $f(c) = 0.$ Từ đó suy ra phương trình $x^3 + 2x - 1 = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(-1; 1)$ (đcpcm).

b) Ta có $\sqrt{x^2 + x} + x^2 = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + x} + x^2 - 1 = 0$.

Xét hàm số $g(x) = \sqrt{x^2 + x} + x^2 - 1$ là hàm số liên tục trên đoạn $[0; 1]$.

Ta có $g(0) \cdot g(1) = (-1) \cdot \sqrt{2} = -\sqrt{2} < 0$ suy ra tồn tại $c \in (0; 1)$ để $g(c) = 0$.

Từ đó suy ra phương trình $\sqrt{x^2 + x} + x^2 = 1$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$ có nghiệm trên khoảng $(0; 1)$ (đpcm).

□

BÀI 19. Trong hồ có chứa 6000 lít nước ngọt. Người ta bơm nước biển có nồng độ muối là 30 gam/lít vào hồ với tốc độ 15 lít/phút.

a) Chứng tỏ rằng nồng độ muối của nước trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm là

$$C(t) = \frac{30t}{400 + t} \text{ (gam/lít)}.$$

b) Nồng độ muối trong hồ như thế nào nếu $t \rightarrow +\infty$.

Lời giải.

a) Sau thời gian t phút, số lít nước trong hồ là $6000 + 15t$ (lít).

Số gam muối trong số lít nước bơm vào là $30 \cdot 15t = 450t$ (gam).

Nồng độ muối của nước trong hồ sau t phút khi bắt đầu bơm là

$$C(t) = \frac{450t}{6000 + 15t} = \frac{30t}{400 + t} \text{ (gam/lít)}.$$

b) Khi $t \rightarrow +\infty$, ta xét giới hạn

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30t}{400 + t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30}{\frac{400}{t} + 1} = 30.$$

Vậy khi bơm nước biển vào hồ chứa, không giới hạn thời gian thì nồng độ muối trong hồ chứa chính là nồng độ muối của nước biển.

□

BÀI 20. Từ độ cao 100 m, người ta thả một quả bóng cao su xuống đất. Giả sử cứ sau mỗi lần chạm đất, quả bóng nảy lên một độ cao bằng $\frac{1}{4}$ độ cao mà quả bóng đạt được trước đó. Gọi h_n là độ cao quả bóng đạt được ở lần nảy thứ n .

a) Tìm số hạng tổng quát của dãy số (h_n) .

b) Tính giới hạn của dãy số (h_n) và nêu ý nghĩa giới hạn của dãy số (h_n) .

c) Gọi S_n là tổng độ dài quãng đường đi được của quả bóng từ lúc bắt đầu thả quả bóng đến khi quả bóng chạm đất lần thứ n . Tính S_n , nếu quá trình này cứ tiếp tục diễn ra mãi thì tổng quãng đường quả bóng di chuyển được là bao nhiêu?

Lời giải.

a) Vì sau mỗi lần chạm đất, quả bóng nảy lên một độ cao bằng $\frac{1}{4}$ độ cao mà quả bóng đạt được trước đó nên độ cao của quả bóng nảy lên lần thứ n là một cấp số nhân (h_n) có $u_1 = 100$, công bội $q = \frac{1}{4}$. Khi đó số hạng tổng quát của dãy số (h_n) là $h_n = 100 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

b) Ta có $\lim h_n = \lim \left[100 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \right] = 100 \lim \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$.

Ý nghĩa của giới hạn là khi n tiến dần ra vô cực thì độ nảy của quả bóng càng dần về 0, có nghĩa là sau khoảng thời gian đủ dài thì độ nảy của quả bóng không đáng kể.

c) Ta thấy tổng S_n là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1 = 100$, công bội $q = \frac{1}{4}$.

$$\text{Ta có } S_n = 100 + 100 \cdot \frac{1}{4} + 100 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots + 100 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n + \dots = 100 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{400}{3} \text{ m.}$$

□

—HẾT—

ĐÁP ÁN CÁC TRẮC NGHIỆM

1 Trắc nghiệm chương I

1. A	2. D	3. B	4. B	5. A	6. C	7. B	8. D	9. B	10. C
11. B	12. D	13. B	14. A	15. D	16. B	17. C	18. B	19. D	20. C

2 Trắc nghiệm chương II

1. A	2. B	3. C	4. D	5. D	6. B	7. D	8. B	9. D	10. C
11. B	12. D	13. A	14. A	15. D	16. D	17. D	18. B	19. D	20. D

3 Trắc nghiệm chương III

21. A	22. B	23. C	24. D	25. D
-------	-------	-------	-------	-------

4 Trắc nghiệm chương IV

26. D	27. C	28. D	29. D	30. B	31. D	32. D	33. C	34. C	35. B
36. A	37. D	38. B	39. B	40. A	41. A	42. A	43. C	44. D	45. D
46. C	47. D	48. C	49. D	50. D	51. A	52. B	53. C	54. B	55. B

5 Trắc nghiệm chương V

56. D	57. B	58. A	59. D	60. A	61. D	62. A	63. B	64. D	65. A
66. B	67. D	68. C	69. A	70. A	71. B	72. A	73. B	74. A	75. B
76. A	77. C	78. C	79. C	80. A	81. A	82. D	83. A	84. C	85. B