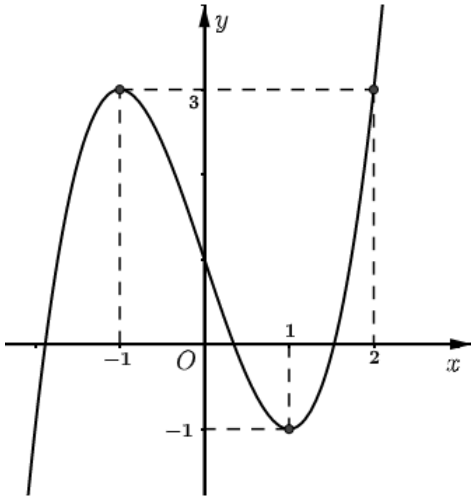
Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ là hàm đa thức bậc 3 và có đồ thị như hình vẽ. Xét hàm số $g(x) = f\left(2x^3 + x - 1\right) + m$. Với giá trị nào của m thì giá trị nhỏ nhất của $g(x)$ trên đoạn $[0;1]$ bằng 2022.



A. 2023. **B**. 2000. **C**. 2021. **D**. 2022.

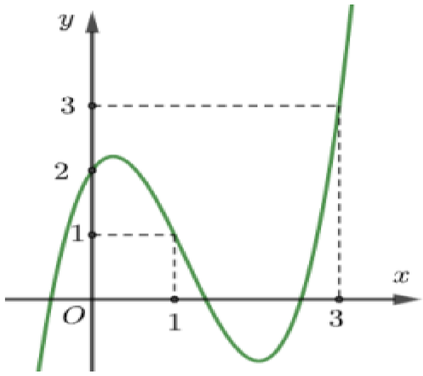
Câu 2. Cho a là số thực dương sao cho $3^x + a^x \geq 6^x + 9^x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a \in (14;16]$. **B**. $a \in (12;14]$. **C**. $a \in (16;18]$. **D**. $a \in (10;12]$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $2f(x) + xf\left(\frac{1}{x}\right) = x$ với mọi $x > 0$. Tính $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{7}{4}$. **B**. $\frac{7}{12}$. **C**. $\frac{9}{4}$. **D**. $\frac{3}{4}$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Trên $[-2;4]$, gọi x_0 là điểm mà tại đó hàm số $g(x) = f\left(\frac{x}{2} + 1\right) - \ln\left(x^2 + 8x + 16\right)$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó x_0 thuộc khoảng nào?



A. $\left(\frac{1}{2};2\right)$. **B**. $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$. **C**. $\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$. **D**. $\left(2;\frac{5}{2}\right)$.

Câu 5. Trong không gian cho hai điểm $I(2;3;3)$ và $J(4;-1;1)$. Xét khối trụ (T) có hai đường tròn đáy nằm trên mặt cầu đường kính IJ và có hai tâm nằm trên đường thẳng IJ. Khi có thể tích (T) lớn nhất thì hai mặt phẳng chứa hai đường tròn đáy của (T) có phương trình dạng $x+by+cz+d_1=0$ và $x+by+cz+d_2=0$. Giá trị của $d_1^2+d_2^2$ bằng:

A. 61. **B**. 25. **C**. 14. **D**. 26.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$. Biết $f(0)=1$ và $f(x)f(2-x)=\mathrm{e}^{2x^2-4x}$ với mọi $x\in[0;2]$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^2 \frac{\left(x^3-3x^2\right)f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$.

A. $I=-\frac{14}{3}$. **B**. $I=-\frac{32}{5}$. **C**. $I=-\frac{16}{5}$. **D**. $I=-\frac{16}{3}$.

Câu 7. Cho phương trình $\ln(x+m)-\mathrm{e}^x+m=0$, với mọi m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in[-2022;2022]$ để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 2022. **B**. 2021. **C**. 2019. **D**. 4042.

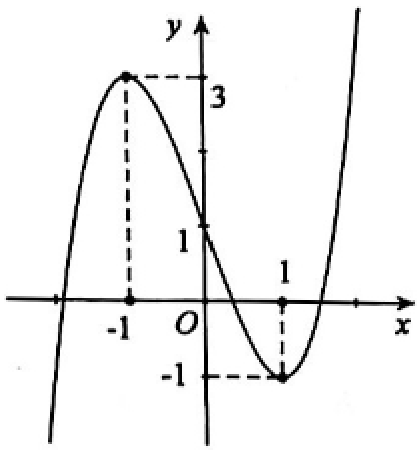
Câu 8. Cho các số thực x,y thỏa mãn $2^{x^2+y^2-2}+2^{2xy-1}\log_3(x-y)=2^{1-xy}+2^{2xy-2}\left[1+\log_3(1-xy)\right]$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=4\left(x^3+y^3\right)-6xy$ bằng

A. $\sqrt{40}$. **B**. 40. **C**. $\frac{22}{9}$. **D**. $\frac{9}{22}$.

Câu 9. Có bao nhiêu số nguyên $y\geq 3$ sao cho tồn tại đúng 2 số thực x lớn hơn $\frac{1}{2021}$ thỏa mãn $\left(\mathrm{e}^{y^x-xy+x}\right)^{\ln y}=xy$?

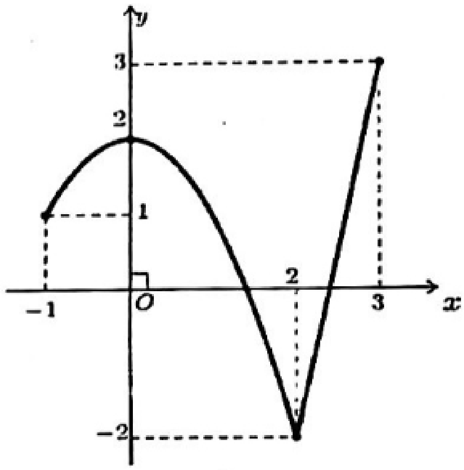
A. 2028. **B**. 2026. **C**. 2027. **D**. 2025.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(\sin x)+(m-5)f(\sin x)+4=\left[f(\sin x)+m-1\right]\left|f(\sin x)-2\right|$ có 5 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $[0;2\pi]$.



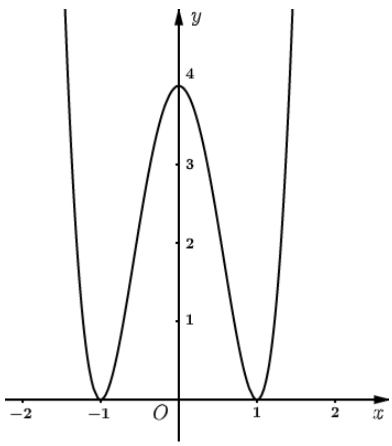
A. 0. **B**. 3. **C**. 1. **D**. 2.

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(3|\cos x| - 1) + m$ bằng 4.



A. $m = 4$. **B.** $m = 6$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = 3$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi số tự nhiên n là số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f^2\left[f^2(x) - 2022m\right]$. Khi đó với mọi m ta luôn có $a \le n \le b$; a, $b \in \mathbb{N}$. Giá trị của $a + b$ bằng?



A. 25. **B.** 21. **C.** 15. **D.** 18.

Câu 13. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng $\sqrt{2}a$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N là hai điểm cùng nằm trong một nửa mặt phẳng (SAC) có bờ là AC sao cho $\widehat{BMD} = \widehat{BND} = 90^\circ$. Thể tích khối đa diện $ABCDMN$ lớn nhất bằng.

A. $\dfrac{4a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{2a^3}{3}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{3}a^3}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{2}$.

Câu 14. Xét các số thực x, y thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1} \le \left(x^2 + y^2 - 2x + 2\right) 4^x$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{3x - 4y}{2x + y + 1}$ bằng $a\sqrt{113} + b$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Khi đó $a + b$ bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

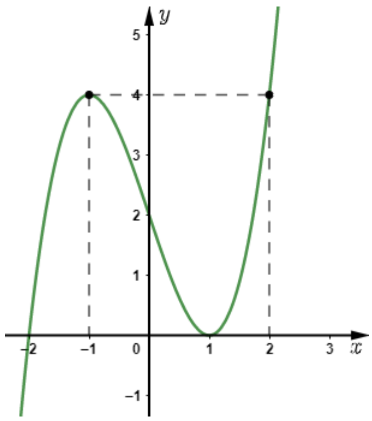
Câu 15. Cho hàm số $y = \left|\dfrac{x^2 - 2mx + 1}{x^2 - x + 2}\right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để giá trị lớn nhất của hàm số lớn hơn hoặc bằng 4.

A. 18. **B.** 10. **C.** 20. **D.** 14.

Câu 16. Cho đường cong $(C_m): y = x^3 - 3(m-1)x^2 - 3(m+1)x + 3$. Gọi S là tập các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho O, A, B thẳng hàng. Tổng các phần tử của S bằng

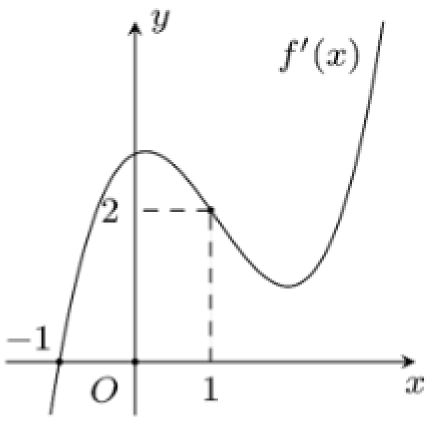
A. 0. **B**. 1. **C**. 2. **D**. 3.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3f\left(|x|^3 - 3|x| + 2\right) - m + 1 = 0$ có 8 nghiệm phân biệt.



A. 5. **B**. 6. **C**. 7. **D**. 8.

Câu 18. Cho $f(x)$ là hàm đa thực bậc bốn và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi hàm số $g(x) = f(\sin x - 1) + \dfrac{\cos 2x}{4}$ có bao nhiêu điểm cực trị thuộc khoảng $(0; 2\pi)$?



A. 2. **B**. 4. **C**. 3. **D**. 5.

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25$ và hai điểm $A(7;9;0); B(0;8;0)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = MA + 2MB$, với M là điểm bất kì thuộc mặt cầu (S).

A. $\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$. **B**. $5\sqrt{5}$. **C**. 10. **D**. $5\sqrt{2}$.

Câu 20. Cho hàm số $f(x) = \log_3\left(\sqrt{4x^2+1} + 2x\right) + 3x^{2021}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2021; 2021]$ để bất phương trình $f\left(x^2+1\right) + f(-2mx) \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; +\infty)$.

A. 2023. **B**. 4020. **C**. 4022. **D**. 2021.

Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^2-2x+1-|x-1|\right)$ là

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

A. 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 7.

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Biết $SB=2AB$ và $\widehat{SBA}=120^\circ$. Gọi E là chân đường phân giác trong góc $\widehat{SBA}$, biết $BE=a$. Góc giữa cạnh bên SA với mặt đáy bằng 45°. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

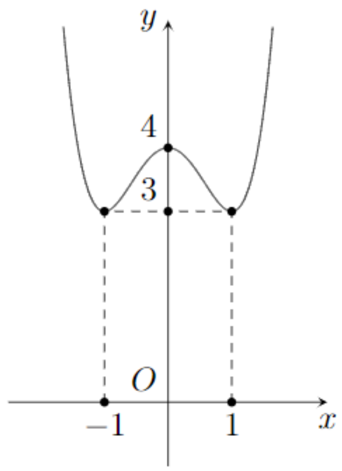
A. $\dfrac{7\sqrt{14}a^3}{16}$. **B.** $\dfrac{9\sqrt{14}a^3}{16}$. **C.** $\dfrac{5\sqrt{14}a^3}{16}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{14}a^3}{16}$.

Câu 23. Tìm tất cả các giá trị nguyên $m\in(-2021;2021)$ thỏa mãn

$$\left(\sqrt{m^2-2m+4}+1-m\right)\left(\sqrt{4^m+3}-2^m\right)\geq 3$$

A. 2021. **B.** 2020. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 24. Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2021;2021]$ để phương trình $\log\dfrac{f(x)}{mx^2}+x[f(x)-mx]=mx^3-f(x)$ có hai nghiệm dương phân biệt?



A. 2019. **B.** 2020. **C.** 2022. **D.** 2021.

Câu 25. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{3f(h)-1}{6h}=\dfrac{2}{3}$ và $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)+2x_1x_2(x_1+x_2)-\dfrac{1}{3}$ $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}$. Tính $f(2)$.

A. 8. **B.** $\dfrac{17}{3}$. **C.** $\dfrac{95}{3}$. **D.** $\dfrac{25}{3}$.

Câu 26. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên n có 4 chữ số thỏa mãn $(2^n+3^n)^{2020}<\left(2^{2020}+3^{2020}\right)^n$. Số phần tử của S là

A. 8999. **B.** 2019. **C.** 1010. **D.** 7979.

Câu 27. Tính $a+b$ biết $[a;b]$ là tập tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình

$$\log_2\sqrt{x^2-2x+m}+4\sqrt{\log_4\left(x^2-2x+m\right)}\leq 5$$

thỏa mãn với mọi $x\in[0;2]$

A. $a+b=4$. **B.** $a+b=2$. **C.** $a+b=0$. **D.** $a+b=6$.

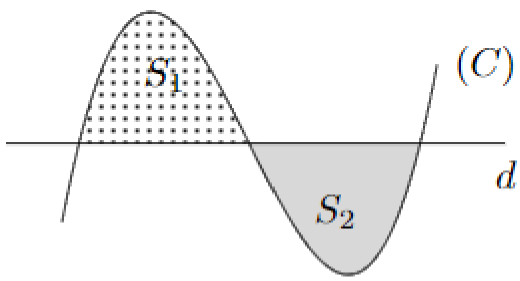
Câu 28. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ sao cho $f\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)=\dfrac{f\left(x_1\right)}{f\left(x_2\right)}$ với mọi $x_1,x_2\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $f\left(x_2\right)\neq 0$. Biết $f'(1)=2$, khi đó $f'(x)$ bằng

A. $2f(x)$. **B.** $\dfrac{f(x)}{x}$. **C.** $2xf(x)$. **D.** $\dfrac{2f(x)}{x}$.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)-f(x)=\mathrm{e}^x$ và $f(0)=1$. Tính $f(1)$.

A. $f(1)=\mathrm{e}$. **B.** $f(1)=2\mathrm{e}$. **C.** $f(1)=\mathrm{e}+1$. **D.** $f(1)=\mathrm{e}-1$.

Câu 30. Gọi X là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y=-45m-2$ cùng với đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-2mx^2+x+1$ tạo thành hai miền kín có diện tích lần lượt là S_1,S_2 thỏa mãn $S_1=S_2$ (xem hình vẽ). Số phần tử của tập X là



A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 9.

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, có thể tích là V. Gọi M là trung điểm của cạnh SA, N là điểm trên cạnh SB sao cho $SN=3NB$. Mặt phẳng (P) thay đổi đi qua các điểm M,N và cắt các cạnh SC,SD lần lượt tại hai điểm phân biệt P,Q. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $S.MNPQ$.

A. $\dfrac{V}{3}$. **B.** $\dfrac{27V}{80}$. **C.** $\dfrac{27V}{40}$. **D.** $\dfrac{V}{6}$.

Câu 32. Cho các số thực a,b thỏa mãn $1<a<b\leq 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=3\log_a\left(b^2+16b-16\right)+\dfrac{16}{27}\log^3_{\frac{b}{a}}a$.

A. 8. **B.** 18. **C.** 9. **D.** 17.

Câu 33. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, một mặt cầu (J) (J và S cùng phía với $(ABCD)$) tiếp xúc với $(ABCD)$ tại A, đồng thời tiếp xúc với mặt cầu nội tiếp hình chóp. Một mặt phẳng (P) đi qua J và BC. Gọi φ là góc giữa (P) và $(ABCD)$. Tính $\tan\varphi$ biết các đường chéo của thiết diện của hình chóp cắt bởi (P) lần lượt cắt và vuông góc với SA,SD.

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 34. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm m để phương trình $|f(x-1)+2|=m$ có 4 nghiệm thỏa mãn $x_1<x_2<x_3<1<x_4$.

A. $4<m<6$. **B.** $3<m<6$. **C.** $2<m<6$. **D.** $2<m<4$.

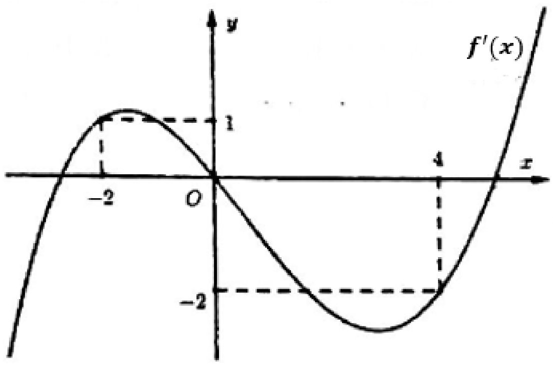
Câu 35. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(1)=\mathrm{e}$, $f(x)=f'(x)\sqrt{3x+1}$ với mọi $x>0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $3<f(5)<4$. **B.** $11<f(5)<12$. **C.** $10<f(5)<11$. **D.** $4<f(5)<5$.

Câu 36. Biết rằng tập tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $m(x+4)\sqrt{x^2+2}=5x^2+8x+24$ có 4 nghiệm thực phân biệt là khoảng $(a;b)$. Giá trị $a+b$ bằng.

A. $\dfrac{28}{3}$. **B.** $\dfrac{25}{3}$. **C.** 4. **D.** 9.

Câu 37. Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x)=4f\left(x^2-4\right)+x^4-8x^2$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?



A. 4. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;3;5)$, $B(-1;3;2)$, $C(-2;1;3)$, $D(5;7;4)$. Điểm $M(a;b;c)$ di động trên mặt phẳng (Oxy). Khi biểu thức $T=4MA^2+5MB^2-6MC^2+MD^4$ đạt giá trị nhỏ nhất thì tổng $a+b+c$ bằng

A. 11. **B.** -11. **C.** 12. **D.** 9.

Câu 39. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $2f(x)+xf'(x)=3x+10$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=6$. Biết $\displaystyle\int_{-1}^{4}\frac{\ln\left(2+\sqrt{f(x)}\right)}{f^2(x)-6f(x)+9}\mathrm{d}x=a\ln5+b\ln6+\sqrt{c}\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$ với a,b,c là số hữu tỉ. Giá trị của biểu thức $T=a+b+c$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(1;2)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-1;0)$.

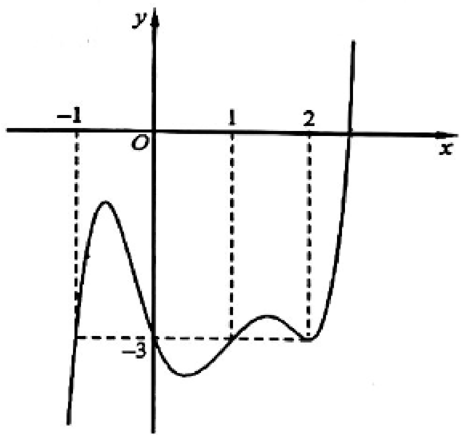
Câu 40. Gọi S là tập các số nguyên y sao cho với mỗi $y \in S$ có đúng 10 số nguyên x thỏa mãn $2^{y-x} \geq \log_3\left(x+y^2\right)$. Tính tổng các phần tử thuộc S

A. 7. **B.** -4. **C.** 1. **D.** -1.

Câu 41. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ và $f(x) \neq 0$ với mọi $x > 0$. Tính tổng $f(1)+f(2)+...+f(2022)$ biết rằng $f'(x) = (2x+1)f^2(x)$ và $f(1) = \dfrac{-1}{2}$

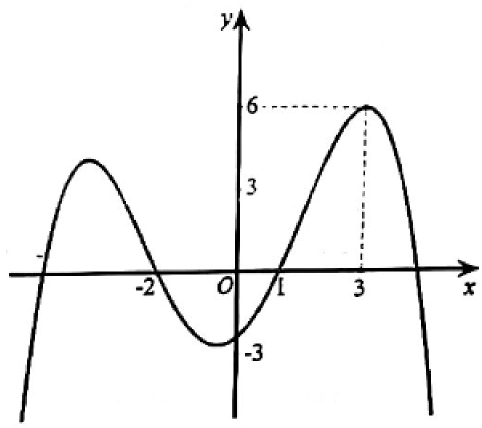
A. $\dfrac{2022}{2023}$. **B.** $\dfrac{2021}{2022}$. **C.** $-\dfrac{2021}{2022}$. **D.** $-\dfrac{2022}{2023}$.

Câu 42. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(0) < 0$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi m,n lần lượt là số điểm cực đại, số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = |f(|x|)+3|x||$. Giá trị của m^n là



A. 4. **B.** 8. **C.** 27. **D.** 16.

Câu 43. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Đặt $T = 103f\left(a^2+a+1\right)+234f\left(af(b)+bf(a)\right)$ với $a,b \in \mathbb{R}$. Gọi m là số cặp $(a;b)$ mà tại đó biểu thức T đạt giá trị lớn nhất, gọi giá trị lớn nhất của T là M. Giá trị biểu thức $\dfrac{M}{m}$ bằng

A. $\dfrac{1011}{4}$. **B.** $\dfrac{1011}{8}$. **C.** $\dfrac{337}{2}$. **D.** $\dfrac{674}{3}$.

Câu 44. Cho hàm số $f(x) = 2^x - 2^{-x} + 2022x^3$. Biết rằng tồn tại số thực m sao cho bất phương trình $f\left(4^x - mx + 37m\right) + f\left((x-m-37)\,2^x\right) \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hỏi m thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(30;50)$. **B.** $(10;30)$. **C.** $(50;70)$. **D.** $(-10;10)$.

Câu 45. Cho khối chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình bình hành, có thể tích bằng $84a^3$. Gọi M là trung điểm của AB, J thuộc cạnh SC sao cho $JC = 2JS$, H thuộc cạnh SD sao cho $HD = 6HS$. Mặt phẳng (MHJ) chia khối chóp thành 2 phần. Thể tích khối đa diện của phần chứa đỉnh S bằng

A. $17a^3$. **B.** $19a^3$. **C.** $24a^3$. **D.** $21a^3$.

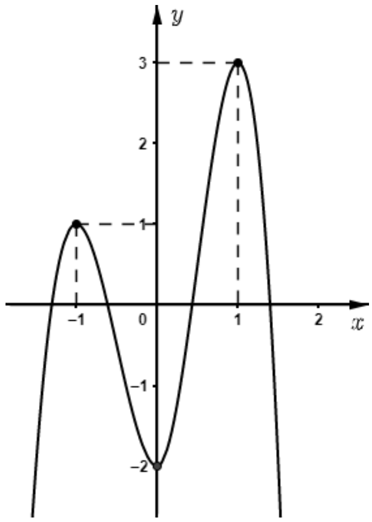
Câu 46. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AA' = 2$, đáy $ABCD$ là hình thoi với ABC là tam giác đều cạnh bằng 4. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của $B'C', C'D', DD'$ và Q thuộc BC sao cho $QC = 3QB$. Tính thể tích tứ diện $MNPQ$.

A. $3\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 47. Cho $f(x)$ là hàm đa thức và cho hàm đa thức bậc ba $g(x) = f(x+1)$ thỏa mãn $(x-1)g'(x+3) = (x+1)g'(x+2)$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f\left(2x^2 - 4x + 5\right)$

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Câu 48. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f(1-x)$ được cho trong hình vẽ có đúng 3 điểm cực trị là $A(-1;1)$, $B(0;-2)$, $C(1;3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\dfrac{1-x}{x+2}\right) - \dfrac{2x+1}{x+2} + m = 0$ có đúng 4 nghiệm phân biệt?



A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 5.

Câu 49. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1) : x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 16$, $(S_2) : (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 1$ và điểm $A\left(\dfrac{4}{3}; \dfrac{7}{3}; -\dfrac{14}{3}\right)$. Gọi I là tâm mặt cầu (S_1) và (P) là mặt phẳng tiếp xúc với cả hai mặt cầu (S_1) và (S_2). Xét các điểm M thay đổi và thuộc mặt phẳng (P) sao cho đường thẳng IM tiếp xúc với mặt cầu (S_2). Khi đoạn AM ngắn nhất thì $M = (a;b;c)$. Tính giá trị của $T = a + b + c$.

A. $T = 1$. **B.** $T = -1$. **C.** $T = \dfrac{7}{3}$. **D.** $T = -\dfrac{7}{3}$.

Câu 50. Xét các số nguyên dương x, y thỏa mãn $(y+z)\left(3^x - 81^{\frac{1}{y+z}}\right) = xy + xz - 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\log_{\sqrt{2}} x + \log_2\left(2y^2 + z^2\right)$.

A. $2 + \log_2 3$. **B.** $5 - \log_2 3$. **C.** $\log_2 11$. **D.** $4 - \log_3 2$.

Câu 51. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10;10]$ để phương trình

$$2^{3^m}.7^{x^2-2x}+7^{3^m}.2^{x^2-2x}=14^{3^m}\left(7x^2-14x+2-7.3^m\right)$$

có bốn nghiệm phân biệt trong đó có đúng hai nghiệm lớn hơn -1.

A. 10. **B**. 9. **C**. 11. **D**. 8.

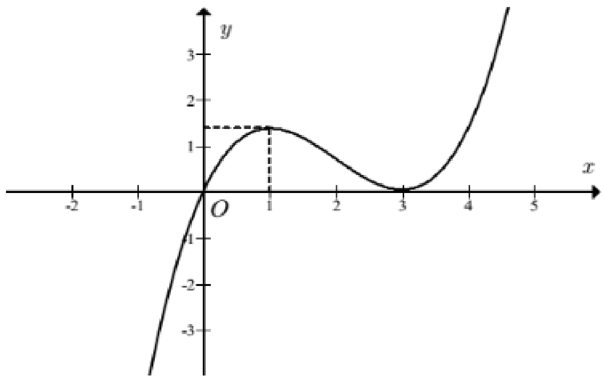
Câu 52. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		3		8		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f\left(x^2+2|x|\right)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(2;+\infty)$. **B**. $(-2;0)$. **C**. $(-1;1)$. **D**. $(1;2)$.

Câu 53. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc 3 có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số $m \in [-100;100]$ để hàm số $h(x)=\left|f^2(x)+4f(x)+3m\right|$ có đúng 3 điểm cực trị. Tổng tất cả các phần tử của S bằng



A. 5047. **B**. 5049. **C**. 5050. **D**. 5043.

Câu 54. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SB=a\sqrt{2}$, hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) vuông góc với nhau. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng 45°, góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy (ABC) bằng α, $(0^\circ<\alpha<90^\circ)$. Thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **B**. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **C**. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **D**. $a^3\sqrt{2}$.

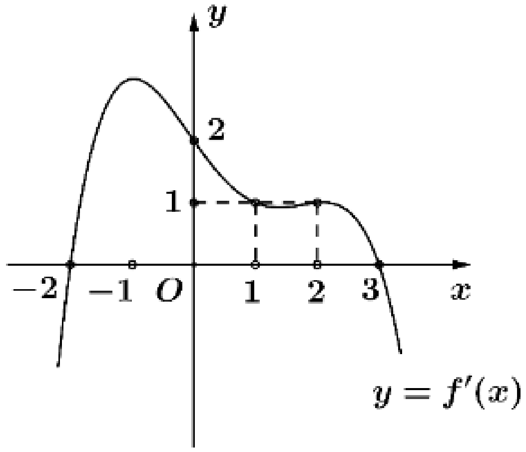
Câu 55. Cho hình trụ (T) chiều cao bằng $2a$, hai đường tròn đáy của (T) có tâm lần lượt là O và O_1, bán kính bằng a. Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A, trên đường tròn đáy tâm O_1 lấy điểm B sao cho $AB=\sqrt{5}a$. Thể tích khối tứ diện OO_1AB bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **B**. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **C**. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{6}$. **D**. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

Câu 56. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x)+f(x)=3x^2\sqrt{x}$, $\forall x \in (0;+\infty)$. Biết $f(1)=\dfrac{1}{2}$, tính $f(4)$

A. 16. **B**. 4. **C**. 24. **D**. 14.

Câu 57. Cho hàm số $f(x)$, đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ là đường cong như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $f(2x)+\dfrac{8x^3}{3}-4x-m<0$ đúng với mọi $x\in\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$.



A. $m>f(1)-\dfrac{5}{3}$. **B**. $m\geq f(0)$. **C**. $m>f(0)$. **D**. $m>f(3)$.

Câu 58. Cho $f(x)=2023.\ln\left(e^{\frac{x}{2023}}+e^{\frac{1}{2}}\right)$. Tính giá trị biểu thức $H=f'(1)+f'(2)+...+f'(2022)$.

A. 2022. **B**. e^{2022}. **C**. e^{1011}. **D**. 1011.

Câu 59. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$$9^{1+\sqrt{1-x^2}}-(m+3).3^{1+\sqrt{1-x^2}}+2m+1=0$$

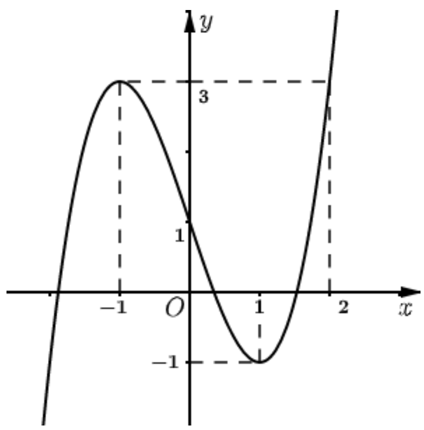
có nghiệm thực?

A. 5. **B**. 3. **C**. 4. **D**. 7.

Câu 60. Cho x,y là các số thực dương và thỏa mãn $\dfrac{x^2+1}{\sqrt{y}}=\dfrac{y+1}{x}$. Giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $P=\dfrac{y+4}{x}$ là

A. $m=4$. **B**. $m=8$. **C**. $m=3$. **D**. $m=2\sqrt{2}$.

Câu 61. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm của phương trình $\log_2^3(f(x)+1)-\log_{\sqrt{2}}^2(f(x)+1)-2\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{f(x)+1}+6=0$ là

A. 7. **B**. 5. **C**. 6. **D**. 8.

Câu 62. Cho hàm số $f(x)=\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$. Biết rằng $f'(2)+f'(3)+...+f'(2020)=\frac{a}{b}$ với a,b là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Giá trị $2a-b$ là

A. 2. **B**. 4. **C**. -2. **D**. -4.

Câu 63. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'(x)\sqrt{x^2+1}=2x\sqrt{f(x)+1}$ $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(x)>-1$. Biết rằng $f(0)=0$, khi đó $f(2)$ có giá trị bằng

A. 0. **B**. 4. **C**. 8. **D**. 6.

Câu 64. Cho một hình nón đỉnh S có đáy là đường tròn tâm O, bán kính $R=\sqrt{5}$ và góc ở đỉnh là 2α với $\sin\alpha=\frac{2}{3}$. Một mặt phẳng (P) vuông góc với SO tại H và cắt hình nón theo một đường tròn tâm H. Gọi V là thể tích của khối nón đỉnh O và đáy là đường tròn tâm H. Biết $V=\frac{50\pi}{81}$ khi $SH=\frac{a}{b}$ với $a,b\in\mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $T=3a^2-2b^3$

A. 12. **B**. 23. **C**. 21. **D**. 32.

Câu 65. Xét các số thực x,y thỏa mãn $x^2+y^2>1$ và $\log_{x^2+y^2}(2x+4y)\geq 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=3x+y$ bằng

A. $5+2\sqrt{10}$. **B**. $5+4\sqrt{5}$. **C**. $5+5\sqrt{2}$. **D**. $10+2\sqrt{5}$.

Câu 66. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn

$$3^{4x^2-1}\log\left(4x^2+4x+2\right)=3^{y-2x-4}\log(2x+y-1)$$

đồng thời $x,y\leq 2021$?

A. 15. **B**. 28. **C**. 22. **D**. 35.

Câu 67. Cho hàm số $f(x)=\frac{2x-m^2}{x+1}$, với m là tham số. Gọi m_1,m_2 (với $m_1<m_2$) là các giá trị của tham số m thỏa mãn $2\max\limits_{[0;2]}f(x)-\min\limits_{[0;2]}f(x)=8$. Tổng $2m_1+3m_2$ bằng

A. 1. **B**. -2. **C**. 4. **D**. -1.

Câu 68. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1)=2$ và $\left(x^2+1\right)^2f'(x)=f^2(x)\left(x^2-1\right)$ với mọi $x\in(0;+\infty)$. Tính giá trị $f(3)$.

A. $\frac{10}{3}$. **B**. $\frac{8}{3}$. **C**. 4. **D**. 5.

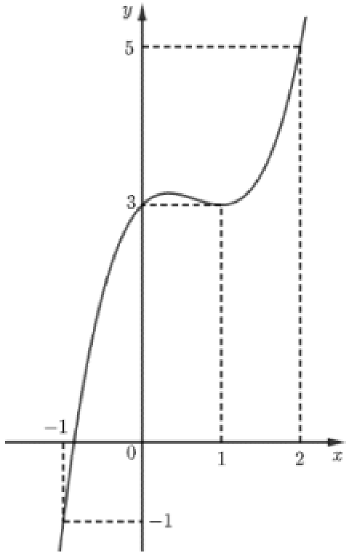
Câu 69. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, có đáy là tam giác đều và thể tích bằng V. Gọi E,F,I là các điểm lần lượt di động trên các cạnh AB,BC,CA sao cho $AE=BF=CI$. Thể tích khối chóp $A'EFI$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng

A. $\frac{V}{9}$. **B**. $\frac{V}{6}$. **C**. $\frac{V}{4}$. **D**. $\frac{V}{12}$.

Câu 70. Cho hai số thực x,y thay đổi và thỏa mãn $(x+y)^3+4xy\geq 2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=5\left(x^4+y^4+x^2y^2\right)-4\left(x^2+y^2\right)+2$ bằng

A. -14. **B**. 14. **C**. $\frac{14}{15}$. **D**. $\frac{25}{16}$.

Câu 71. Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt hàm số $g(x)=f(x)-x^2-x$. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $g(-1)>g(1)$. B. $g(1)>g(2)$. C. $g(1)=g(2)$. D. $g(-1)=g(1)$.

Câu 72. Cho hai số thực x,y thỏa mãn $0\le x\le 2020$ và $\log_2(2x+2)+x-3y=8^y$. Có tất cả bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn các điều đã cho?

A. 2018. B. 1. C. 2019. D. 4.

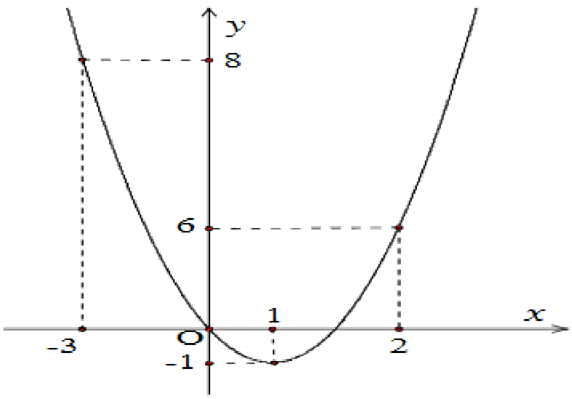
Câu 73. Với a,b là các số thực thỏa mãn $2a^3-6a^2+7a=(3-2b)\sqrt{1-b}+3$ và biểu thức $P=2a+b$ đạt giá trị lớn nhất. Tổng $a+b$ bằng

A. 2. B. 4. C. 6. D. 8.

Câu 74. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1)=-\dfrac{1}{2}$ và đạo hàm $f'(x)=\dfrac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2}$. Tính giá trị của biểu thức $P=f(1)+f(2)+...+f(2022)$.

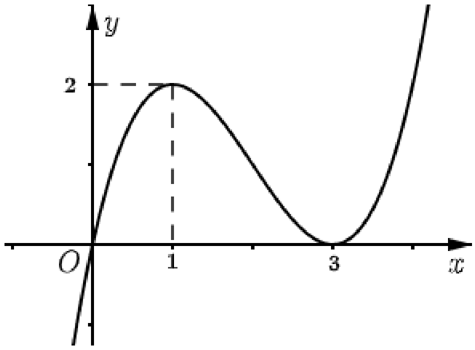
A. $-\dfrac{2021}{2022}$. B. $-\dfrac{2022}{2023}$. C. $\dfrac{2022}{2023}$. D. $\dfrac{1}{2022.2023}$.

Câu 75. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tổng tất cả các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=|f(x)+2m|$ trên đoạn $[-3;2]$ bằng 5 là



A. $\dfrac{1}{2}$. B. $-\dfrac{3}{2}$. C. $-\dfrac{7}{2}$. D. -2.

Câu 76. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $g(x) = \left|f^2(x) + 4f(x) - 2m\right|$ có đúng 5 điểm cực trị là



A. $(-2;0)$. **B.** $(6;8)$. **C.** $(0;6)$. **D.** $(-2;0] \cup [6;+\infty)$.

Câu 77. Khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng a. Các điểm M, N lần lượt di động trên các tia AC và $B'D'$ sao cho $AM + B'N = a\sqrt{2}$. Thể tích khối tứ diện $AMNB'$ có giá trị lớn nhất bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **B.** $\dfrac{a^3}{6}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{6}$. **D.** $\dfrac{a^3}{12}$.

Câu 78. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn

$$(y+1)^2 \ln\left(x^2 - \frac{x^2}{y+2}\right) + \left[x^2 + \left(x^2 - 1\right)y - 2\right]\left[3x^2 + \left(3x^2 + 5\right)y + 10\right] = 0$$

Biết rằng giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + \dfrac{y}{2}$ có dạng $a + b\sqrt{2}$ với a và b là các số hữu tỉ. Giá trị của biểu thức $S = a^2 + b^2$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(3;5)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;2)$.

Câu 79. Cho số phức z thỏa mãn $|z + 2 - i| + |z - 4 - 7i| = 6\sqrt{2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z + 2i|$. Khi đó $P = M^2 + m^2$ bằng

A. 85. **B.** 110. **C.** $\dfrac{171}{2}$. **D.** $\dfrac{167}{2}$.

Câu 80. Cho hàm số $f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn và có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = 2^{-\frac{1}{x^4}}\left[f(2x+1)\right]^3$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

A. 4. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 5.

Câu 81. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;3;10)$, $B(4;6;5)$ và điểm M thay đổi trên mặt phẳng (Oxy) sao cho đường thẳng MA, MB cùng tạo với mặt phẳng (Oxy) các góc bằng nhau. Tìm giá trị nhỏ nhất của AM.

A. 10. **B**. $2\sqrt{41}$. **C**. $2\sqrt{2}$. **D**. $6\sqrt{3}$.

Câu 82. Cho số phức $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z+\overline{z}-2| + 3|z-\overline{z}+4i| \leq 6$ và $|z-1-i| \leq |z+3+i|$. Gọi M, m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2x+3y+5$. Khi đó $M+m$ bằng

A. $\frac{22}{5}$. **B**. $-\frac{13}{5}$. **C**. $\frac{33}{5}$. **D**. $\frac{33}{5}$.

Câu 83. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-3;-5)$, $I(2;0;-1)$ và mặt phẳng $(P): 2x-y-2z+5=0$. Điểm $M(a;b;c)$ thay đổi thuộc mặt phẳng (P) sao cho $IM = 5$ và độ dài đoạn AM lớn nhất. Khi đó giá trị của biểu thức $T = a+b+2c$ bằng

A. 11. **B**. 6. **C**. -1. **D**. $-\frac{1}{3}$.

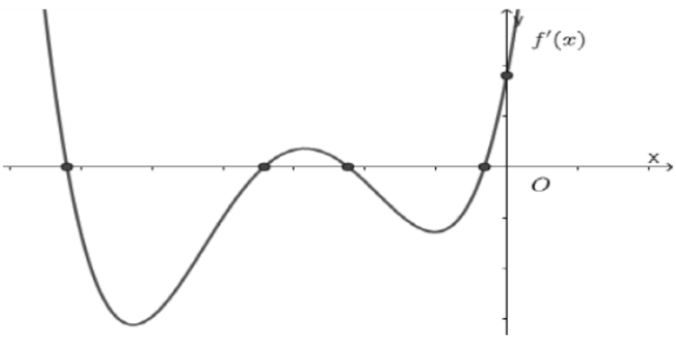
Câu 84. Có bao nhiêu cặp số $(x;y)$, trong đó x, y nguyên dương thuộc đoạn $[0;2022]$, thỏa mãn điều kiện $2^x - \log_2\left(y^2+615\right) = y^2 - x + 615$?

A. 3. **B**. 2. **C**. 4. **D**. 1.

Câu 85. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} e^x + m & x \geq 0 \\ x^2\left(x^3+1\right)^3 & x < 0 \end{cases}$ (với m là tham số). Biết hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = ae - \frac{b}{c}$ với $a, b, c \in \mathbb{N}^*$; $\frac{b}{c}$ tối giản $(e = 2{,}718281828...)$. Biểu thức $a+b+c+m$ có giá trị bằng

A. -11. **B**. 35. **C**. 13. **D**. 36.

Câu 86. Cho hàm đa thức $y = f(x)$, biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ, biết rằng $f(0) = 0$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt trục hoành tại đúng 4 điểm phân biệt. Hỏi hàm $g(x) = \left|f\left(x^6\right) - x^3\right|$ có bao nhiêu điểm cực đại?



A. 4. **B**. 2. **C**. 3. **D**. 1.

Câu 87. Có bao nhiêu số nguyên dương x sao cho ứng với mỗi x có đúng 9 số nguyên y thỏa mãn $\left(2^{y+1}-x^2\right)\left(3^y-x\right) < 0$?

A. 67. **B**. 64. **C**. 128. **D**. 53.

Câu 88. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm xác định trên $[0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(1) = \mathrm{e}+1$; $x\left[f'(x)+x\right] = (x+1)f(x)$. Biết rằng $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{a}{b}$; trong đó a,b là các số nguyên dương và phân số $\frac{a}{b}$ tối giản. Khi đó giá trị của $2a+b$ tương ứng bằng

A. 5. **B**. 8. **C**. 4. **D**. 7.

Câu 89. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn

$$2\log_3(x+y+1) = \log_2\left(x^2+2x+2y^2+1\right)$$

A. 2. **B**. 1. **C**. 3. **D**. 4.

Câu 90. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $\left(z^2-2z+7\right)\left[z-2(\overline{z})^2\right] = 0$?

A. 4. **B**. 5. **C**. 6. **D**. 3.

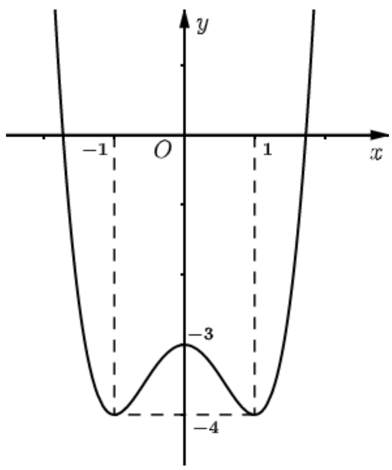
Câu 91. Giả sử z_1, z_2 là hai trong các số phức z thỏa mãn $(z-6)(8-i\overline{z})$ là số thực. Biết rằng $|z_1-z_2| = 6$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1+3z_2|$ bằng

A. $5-\sqrt{21}$. **B**. $20-4\sqrt{21}$. **C**. $-5+\sqrt{73}$. **D**. $20-2\sqrt{73}$.

Câu 92. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $AB = 2AC$ và điểm $M(2;0;4)$. Biết điểm B thuộc đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$, điểm C thuộc mặt phẳng $(P): 2x+y-z-2 = 0$ và AM là phân giác trong của tam giác ABC kẻ từ A $(M \in BC)$. Phương trình đường thẳng BC là

A. $\begin{cases} x = 2-t \\ y = t \\ z = 4+t \end{cases}$. **B**. $\begin{cases} x = 2 \\ y = t \\ z = 4-t \end{cases}$. **C**. $\begin{cases} x = -2+2t \\ y = -2+t \\ z = -2+3t \end{cases}$. **D**. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2-t \\ z = 2+t \end{cases}$.

Câu 93. Cho hàm số $f(x) = ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ.



Đặt $g(x) = f\left(\sqrt{x^2-4x+6}\right) - 2\left(x^2-4x\right)\sqrt{x^2-4x+6} - 12\sqrt{x^2-4x+6}+1$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ trên đoạn $[1;4]$ bằng

A. $-12-12\sqrt{6}$. **B**. $12-12\sqrt{6}$. **C**. $12-2\sqrt{12}$. **D**. $-12-2\sqrt{6}$.

Câu 94. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn đường thẳng $d_1 : \dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z}{1}$, $d_2 : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{-1}$, $d_3 : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z+1}{-1}$, $d_4 : \begin{cases} x = 6+t \\ y = a+3t \\ z = b+t \end{cases}$ (với tham số t và $a, b \in \mathbb{R}$). Biết rằng không có đường thẳng nào cắt đồng thời cả 4 đường thẳng đã cho. Giá trị của biểu thức $2b - a$ bằng

A. -2. **B.** 3. **C.** 2. **D.** -3.

Câu 95. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $27^x - (2m-1)9^x + \left(m^2 + 2m - 53\right)3^x - m^2 + 51 = 0$ có ba nghiệm không âm phân biệt. Số phần tử của S là

A. 17. **B.** 23. **C.** 19. **D.** 18.

Câu 96. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-10; 10)$ để hàm số $y = \dfrac{\sqrt{3-x}+2}{\sqrt{3-x}+m}$ đồng biến trên khoảng $(-6; 2)$?

A. 11. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 7.

Câu 97. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x^2 \ln(x+1) & \text{khi } x \geq 0 \\ 2x\sqrt{x^2+3}+1 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Biết $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{f(\ln x)}{x} \mathrm{d}x = a\sqrt{3} + b \ln 2 + c$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$. Giá trị của $a + b + 6c$ bằng

A. 35. **B.** -14. **C.** -27. **D.** 18.

Câu 98. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \backslash \{-2; 0\}$ thỏa mãn $x(x+2) f'(x) + 2f(x) = x^2 + 2x$ và $f(1) = -6 \ln 3$. Biết $f(3) = a + b \ln 5$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Giá trị $a - b$ bằng

A. 20. **B.** 10. **C.** $\dfrac{10}{3}$. **D.** $\dfrac{20}{3}$.

Câu 99. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : (x+2)^2 + y^2 + (z+5)^2 = 24$ cắt mặt phẳng $(\alpha) : x + y + 4 = 0$ theo giao tuyến là đường tròn (C). Điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ M đến $A(4; -12; 1)$ nhỏ nhất có tung độ bằng

A. -6. **B.** -4. **C.** 0. **D.** 2.

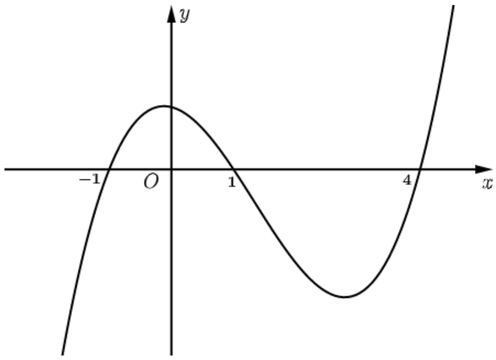
Câu 100. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 2 số nguyên y thỏa mãn $4^{x^2-5y+16} + 2^{-x-y} \geq 512$ và $x + y > 0$?

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 101. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $2\left(x^2 + y^2 + 4\right) + \log_{2022}\left(\dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{y}\right) = \dfrac{1}{2}(xy-4)^2$. Khi biểu thức $P = x + 4y$ đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị của $\dfrac{y}{x}$ bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Câu 102. Cho hàm bậc bốn $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f(|4-2x|+m-6)$ có đúng 3 điểm cực tiểu. Tổng các phần tử của S bằng



A. 18. **B**. 11. **C**. 2. **D**. 13.

Câu 103. Gọi x,y là các số thực dương thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}=x(x-3)+y(y-3)+xy$ sao cho biểu thức $P=\dfrac{4x+5y-3}{x+2y+1}$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó $2021x+2022y$ bằng

A. 6064. **B**. 4043. **C**. 6065. **D**. 8085.

Câu 104. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;1)$, $B(3;-2;-2)$. Điểm M thuộc mặt phẳng (Oxz) sao cho các đường thẳng MA, MB luôn tạo với mặt phẳng (Oxz) các góc bằng nhau. Biết rằng điểm M luôn thuộc đường tròn (C) cố định. Bán kính R của đường tròn (C) là

A. $R=1$. **B**. $R=2\sqrt{2}$. **C**. $R=8$. **D**. $R=2$.

Câu 105. Cho phương trình $\left(x^2-2x+m\right)^2-2x^2+3x-m=0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2022;2022]$ để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt?

A. 2022. **B**. 4045. **C**. 2024. **D**. 2023.

Câu 106. Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC=a$, $\widehat{ASB}=60^\circ$, $\widehat{BSC}=90^\circ$, $\widehat{CSA}=120^\circ$. Gọi M,N lần lượt là các điểm trên cạnh AB và SC sao cho $\dfrac{CN}{SC}=\dfrac{AM}{AB}$. Khi khoảng cách giữa M và N nhỏ nhất, thể tích của khối chóp $S.AMN$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{432}$. **B**. $\dfrac{5\sqrt{2}a^3}{72}$. **C**. $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{72}$. **D**. $\dfrac{5\sqrt{2}a^3}{432}$.

Câu 107. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(x)=x^2+12\displaystyle\int_0^1 x^2 f\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$. Giá trị của $I=\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{2}{3}$. **B**. $-\dfrac{2}{3}$. **C**. $\dfrac{3}{2}$. **D**. $-\dfrac{3}{2}$.

Câu 108. Có bao nhiêu số nguyên $x\in[-2022;2022]$ thỏa mãn

$$\left[\log_2^2(2x)-3\log_2 x-7\right].\sqrt{27-3^{x-6}}\le 0$$

A. 9. **B**. 8. **C**. 2021. **D**. 2022.

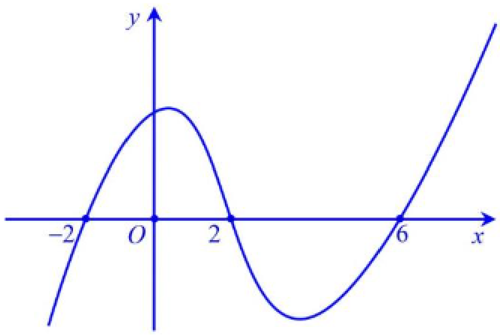
Câu 109. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2(m+1)z+m+3=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm phức z_0 thỏa mãn $|z_0+2|=6$?

A. 2. **B**. 1. **C**. 4. **D**. 3.

Câu 110. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích V. M,N,P là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh AA',BB',CC' sao cho $\frac{AM}{AA'}=\frac{1}{3}$, $\frac{BN}{BB'}=x$, $\frac{CP}{CC'}=y$. Biết thể tích khối đa diện $ABC.MNP$ bằng $\frac{2V}{3}$. Giá trị lớn nhất của $x.y$ bằng

A. $\frac{25}{36}$. **B**. $\frac{17}{21}$. **C**. $\frac{5}{24}$. **D**. $\frac{9}{16}$.

Câu 111. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'(x)$ là hàm bậc ba có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(\left|2x^3+3x\right|-m+1\right)$ có đúng 5 điểm cực trị?

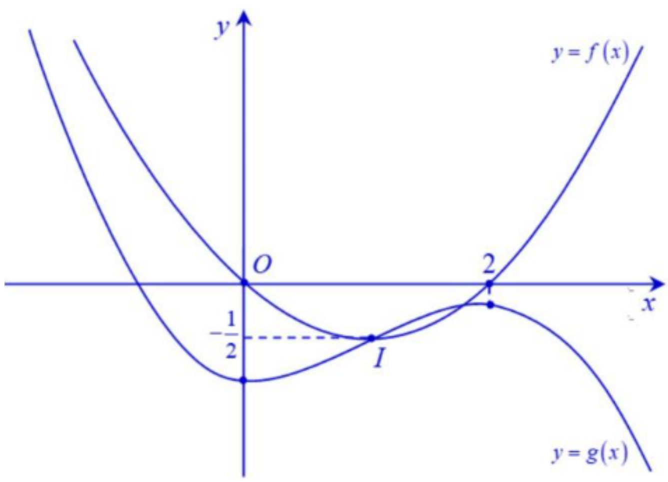


A. 4. **B**. 7. **C**. 5. **D**. 6.

Câu 112. Có bao nhiêu số nguyên y thuộc đoạn $[-2022;2022]$ sao cho tồn tại $x\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $12\sqrt[3]{3y+12.2^x}=2^{3x}-3y$

A. 2027. **B**. 2028. **C**. 2021. **D**. 2022.

Câu 113. Cho đồ thị hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ như hình vẽ. Biết đồ thị của hàm số $y=f(x)$ là một parabol đỉnh I có tung độ bằng $-\frac{1}{2}$ và $y=g(x)$ là một hàm số bậc ba. Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là x_1,x_2,x_3 thỏa mãn $x_1.x_2.x_3=-6$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ gần nhất với giá trị nào dưới đây?



A. 6. **B**. 7. **C**. 5. **D**. 8.

Câu 114. Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z+2+2i| = 1$ và $|w+2-i| = |w-3i|$. Khi $|z-w|+|w-3+3i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $|z+2w|$

A. 7. **B.** $\sqrt{61}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $2\sqrt{13}$.

Câu 115. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;-3)$ và $B(-2;3;1)$. Xét hai điểm M, N thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxz) sao cho $MN = 2$. Giá trị nhỏ nhất của $AM + BN$ bằng

A. 4. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 5.

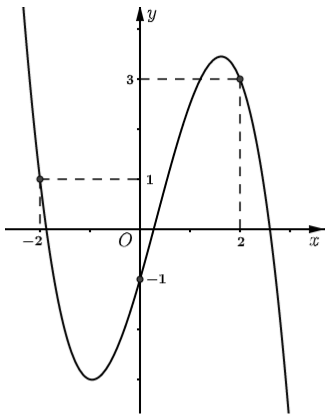
Câu 116. Cho 2 số phức z, w phân biệt thỏa mãn $|z| = |w| = 4$ và $(z-i)(\overline{w}+i)$ là số thực. Giá trị nhỏ nhất của $|z-w|$ bằng

A. $2\sqrt{14}$. **B.** $2\sqrt{15}$. **C.** 8. **D.** $2\sqrt{3}$.

Câu 117. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(1;2;2)$, $I(0;0;4)$. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc mặt phẳng (Oxy) tại C. Giá trị lớn nhất của độ dài đoạn IC bằng

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 118. Cho hàm số $f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho trong hình vẽ dưới đây.



Đặt hàm số $g(x) = f(x) - \dfrac{x^3}{4} - \dfrac{x^2}{4} + x$. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $g(x+m)$ nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$ là

A. $(-\infty;-5]$. **B.** $[-1;+\infty)$. **C.** $(-5;-1)$. **D.** $(-1;+\infty)$.

Câu 119. Cho bất phương trình $8^x + 3x.4^x + \left(3x^2+2\right)2^x \le \left(m^3-1\right)x^3 + 2(m-1)x$. Số các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình trên có đúng năm nghiệm nguyên dương phân biệt là

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 120. Cho hàm số $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $\min\limits_{\mathbb{R}} f''(x) = f''\left(\dfrac{1}{4}\right)$ và hàm số $g(x) = \dfrac{f(x)}{x^2+1}$. Biết đồ thị hàm số $y = g(x)$ có ba điểm cực trị là $A(m; g(m))$, $B(0; g(0))$, $C(1; g(1))$. Gọi $y = h(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị đi qua ba điểm A, C và $D(2; b+5)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = \left(x^2+1\right)(h(x)+x-1)$ bằng

A. $\dfrac{46}{15}$. **B.** $\dfrac{64}{15}$. **C.** $\dfrac{56}{15}$. **D.** $\dfrac{44}{15}$.

Câu 121. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f(x)$		1		$+\infty$
	$-\infty$		0	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ để hàm số $h(x) = |f(x) - m|$ có đúng 3 điểm cực trị?

A. 21. **B**. 19. **C**. 18. **D**. 20.

Câu 122. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$				3				$+\infty$
			0				0		

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2022;2022]$ để phương trình $\left(f^2(x)+x^2\right)^2 - \left(m^2+2m+14\right)\left(f^2(x)+x^2\right) + 4(m+1)^2 + 36 = 0$ có đúng 5 nghiệm thực phân biệt?

A. 0. **B**. 4043. **C**. 4044. **D**. 1.

Câu 123. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y-2z+10=0$ và hai điểm $A(1;-1;2)$, $B(2;0;-4)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc đoạn thẳng AB sao cho luôn tồn tại hai mặt cầu có bán kính $R=\sqrt{6}$ tiếp xúc với mặt phẳng (P), đồng thời tiếp xúc với đoạn thẳng AB tại M. Gọi $T=[m;n)$ là tập giá trị của biểu thức $25a^2+b^2+2c^2$. Tổng $m+n$ bằng

A. $\dfrac{12371}{76}$. **B**. 86. **C**. 140. **D**. $\dfrac{1340}{19}$.

Câu 124. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^3-3x-2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-30;30]$ để hàm số $y=f\left(\left|x^4-8x^2\right|+m\right)$ có đúng 7 điểm cực trị.

A. 2. **B**. 16. **C**. 17. **D**. 1.

Câu 125. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2z-m+2=0$ (m là tham số thực). Gọi T là tập hợp các giá trị của m để phương trình trên có hai nghiệm phân biệt được biểu diễn hình học bởi hai điểm A và B trên mặt phẳng tọa độ sao cho diện tích tam giác ABC bằng $2\sqrt{2}$, với $C(-1;1)$. Tổng các phần tử trong T bằng

A. 4. **B**. 9. **C**. 8. **D**. -1.

Câu 126. Xét các số phức z, z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 4 - 5i| = |z_2 - 1| = 1$ và $|\overline{z} + 4i| = |z - 8 + 4i|$. Tính $M = |z_1 + z_2|$ khi biểu thức $P = |z - z_1| + |z - z_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất

A. $M = \sqrt{41}$. **B.** $M = 6$. **C.** $M = 2\sqrt{5}$. **D.** $M = 2\sqrt{13}$.

Câu 127. Có tất cả bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ với $y \leq 20$ thỏa mãn

$$\log_{2022} \frac{x+1}{y+1} \leq y^4 + 2y^3 - x^2y^2 - 2y^2x$$

A. 380. **B.** 200. **C.** 420. **D.** 210.

Câu 128. Cho các số phức z_1 và z_2 thỏa mãn các điều kiện $|z_1 - i| = |z_1 - 1 + i|$ và $|z_2 - 1| = |z_2 + 2i|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z_1 - z_2| + |z_1 - 5| + |z_2 - 5|$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(5; 6)$. **B.** $(7; 8)$. **C.** $(8; 9)$. **D.** $(4; 5)$.

Câu 129. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, thỏa mãn $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x) \cos^2 x \, dx = 2$ và $f(0) = 1$. Khi đó $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin 2x \, dx$ bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** -3. **D.** 2.

Câu 130. Số giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2022; 2022]$ để hàm số $f(x) = |x|^3 - 3mx^2 + 24(m-2)|x| + 2021m$ có đúng năm điểm cực trị là

A. 2025. **B.** 2021. **C.** 2019. **D.** 2020.

Câu 131. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $5^{x^2-2x-3} - \left(2x - x^2\right).25^x \leq 1 + 3.25^x$ là

A. 5. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 3.

Câu 132. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) - (2x+3) f^2(x) = 0$ với mọi $x > 0$ và $f(1) = -\frac{1}{6}$. Giá trị của biểu thức $T = f(1) + f(2) + ... + f(2022)$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(0; 1)$. **B.** $(-2; -1)$. **C.** $(-3; -2)$. **D.** $(-1; 0)$.

Câu 133. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 4\sqrt{3}$ và $AA' = 4$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $A'B', A'C'$ và BC. Cosin của góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (MNP) bằng

A. $\frac{\sqrt{11}}{35}$. **B.** $\frac{\sqrt{15}}{60}$. **C.** $\frac{\sqrt{13}}{65}$. **D.** $\frac{\sqrt{17}}{45}$.

Câu 134. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AC = 3$. Đường thẳng BC' tạo với mặt phẳng $(AA'C'C)$ một góc 45° và tạo với mặt phẳng đáy góc α sao cho $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BB', $A'C'$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC' bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 135. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 1, $SA=2$ và đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M,N lần lượt là các điểm thay đổi trên hai cạnh AB, AD sao cho mặt phẳng (SMC) vuông góc với mặt phẳng (SNC). Khi thể tích khối chóp $S.AMCN$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị của biểu thức $T=\dfrac{1}{AM^2}+\dfrac{1}{AN^2}$ bằng

A. $\dfrac{8}{3}$. **B**. $\dfrac{41}{16}$. **C**. $\dfrac{23}{16}$. **D**. $\dfrac{5}{4}$.

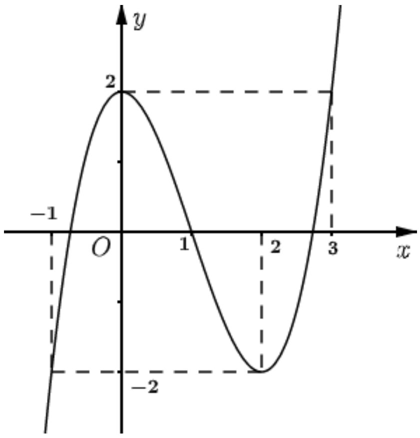
Câu 136. Cho các số thực a dương và b không âm thỏa mãn $2^{a+\frac{1}{a}}\le\log_2\left[(8-b)\sqrt{b+4}\right]$. Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $a\sin 2x+b\cos 2x=2m-1$ có nghiệm là

A. 2. **B**. 1. **C**. 4. **D**. 0.

Câu 137. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-m}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z+m^2}{3}$ và hai điểm $M(-1;-2;3)$, $N(2;-1;2)$. Gọi M',N' lần lượt là hình chiếu vuông góc của M,N trên Δ. Khi m thay đổi, thể tích khối tứ diện $MNN'M'$ có giá trị nhỏ nhất bằng

A. $\dfrac{335}{1176}$. **B**. $7\sqrt{13}$. **C**. $\dfrac{125\sqrt{3}}{4}$. **D**. $\dfrac{79}{471}$.

Câu 138. Cho hàm số đa thức bậc bốn $y=f(x)$ thỏa mãn $f(0)=\dfrac{1}{2}$, hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|18f\left(1-\dfrac{x}{3}\right)-x^2\right|$ là

A. 4. **B**. 3. **C**. 6. **D**. 7.

Câu 139. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x-2y+2z+1=0$ và ba điểm $A(1;2;0)$, $B(1;-2;4)$, $C(3;-10;12)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc (P) sao cho $MA^2+MB^2+2MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị $2a+3b+c$ bằng

A. 1. **B**. 2. **C**. -2. **D**. 5.

Câu 140. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}\backslash\{0;1\}$ thỏa mãn $f(2)=\dfrac{1}{2}$, $f(x)\ne 0$ và $x\left[f'(x)-2f^2(x)\right]=f(x)\left[1-3x^2f(x)\right]$ $\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{0;1\}$. Giá trị của biểu thức $P=f(2)+f(3)+...+f(2021)$ bằng

A. $\dfrac{2021}{2022}$. **B**. $\dfrac{2020}{2021}$. **C**. $\dfrac{2019}{2020}$. **D**. $\dfrac{2021}{2020}$.

Câu 141. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(x^3+3x+1\right)=x+3$. Tính $\int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. 192. **B.** $\dfrac{4}{57}$. **C.** $\dfrac{57}{4}$. **D.** 196.

Câu 142. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): mx-3y-(2m-3)z-9=0$ (m là tham số thực) và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=16$. Biết rằng (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất, khi đó khoảng cách từ điểm $A(-1;2;3)$ đến (P) bằng

A. $\sqrt{11}$. **B.** $\dfrac{13\sqrt{11}}{11}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{11}}{11}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{11}}{11}$.

Câu 143. Cho hai hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+3x$ và $g(x)=mx^3+nx^2-x$ với $a,b,c,m,n\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f(x)-g(x)$ có ba điểm cực trị là -1, 3 và 4. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ bằng

A. $\dfrac{32}{3}$. **B.** $\dfrac{64}{9}$. **C.** $\dfrac{125}{12}$. **D.** $\dfrac{131}{12}$.

Câu 144. Cho hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1+3+2i|=1$ và $|z_2+2-i|=1$. Xét các số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $2a-b=0$. Khi biểu thức $T=|z-z_1|+|z-2z_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị biểu thức $P=a^2+b^2$ bằng

A. 4. **B.** 9. **C.** 5. **D.** 10.

Câu 145. Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ $(a\neq 0)$ có đồ thị (C). Biết rằng (C) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt là $A(x_1;0)$, $B(x_2;0)$, $C(x_3;0)$, $D(x_4;0)$, với x_1, x_2, x_3, x_4 theo thứ tự lập thành cấp số cộng và hai tiếp tuyến của (C) tại A,B vuông góc với nhau. Khi đó, giá trị của biểu thức $P=\left[f'(x_3)+f'(x_4)\right]^{2022}$ bằng

A. $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{1011}$. **B.** $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{2022}$. **C.** $\left(\dfrac{4a}{3}\right)^{1011}$. **D.** $\left(\dfrac{4a}{3}\right)^{2022}$.

Câu 146. Một đề thi trắc nghiệm gồm 50 câu hỏi độc lập. Mỗi câu hỏi có 4 đáp án trả lời, trong đó chỉ có một đáp án đúng. Mỗi câu trả lời đúng được 0,2 điểm, câu trả lời sai được 0 điểm. Học sinh A làm bài bằng cách chọn ngẫu nhiên câu trả lời cho tất cả 50 câu hỏi. Biết xác suất làm đúng k câu hỏi của học sinh A đạt giá trị lớn nhất, khi đó giá trị của k bằng

A. 11. **B.** 10. **C.** 13. **D.** 12.

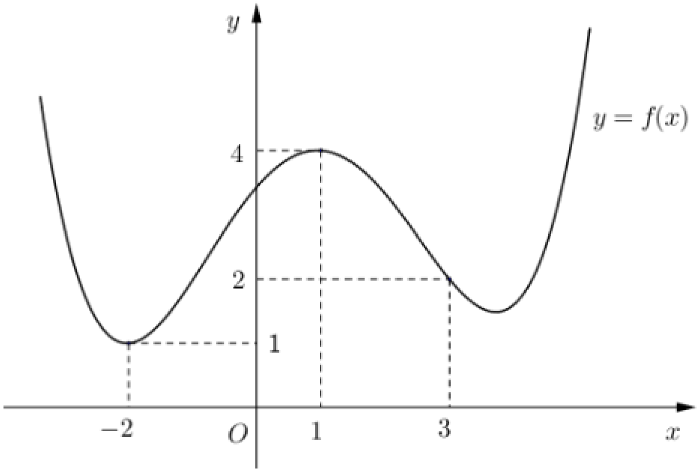
Câu 147. Cho số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z-4=(1+i)|z|-(4+3z)i$. Giá trị của biểu thức $P=a-3b$ bằng

A. $P=-6$. **B.** $P=-2$. **C.** $P=6$. **D.** $P=2$.

Câu 148. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f(2-x)=x\mathrm{e}^{x^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$

A. $I=\mathrm{e}^4-1$. **B.** $I=\mathrm{e}^4-2$. **C.** $I=\dfrac{\mathrm{e}^4-1}{4}$. **D.** $I=\dfrac{2\mathrm{e}-1}{2}$.

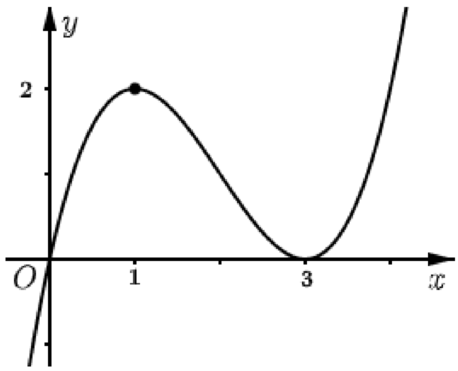
Câu 149. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m không vượt quá 2022 để bất phương trình $\frac{m}{f(x)}-\sqrt{mf(x)}-1\geq\frac{3}{4}f^2(x)$ đúng với mọi $x\in[-2;3]$?

A. 1875. **B.** 1872. **C.** 1874. **D.** 1873.

Câu 150. Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ $(a\neq 0)$. Hàm số $f'(1-x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)-x^2$ là



A. 6. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 10.

Câu 151. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-3)$, $B(-2;-2;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x+2y-z+9=0$. Gọi M là điểm thay đổi trên (P) sao cho $\widehat{AMB}=90^\circ$. Khi khoảng cách MB lớn nhất, phương trình đường thẳng MB là

A. $\begin{cases}x=-2+t\\y=-2\\z=1+2t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=-2-t\\y=-2+2t\\z=1+2t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=-2+2t\\y=-2-t\\z=1+2t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=-2+t\\y=-2-t\\z=1\end{cases}$.

Câu 152. Gọi M,N,P lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức z_1,z_2,z_3 thỏa mãn điều kiện $|5z_1+9-3i|=|5z_1|$, $|z_2-2|=|z_2-3-i|$, $|z_3+1|+|z_3-3|=4$. Khi M,N,P là ba đỉnh của tam giác thì giá trị nhỏ nhất của chu vi tam giác MNP bằng

A. $\frac{6\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{12\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{9\sqrt{10}}{10}$. **D.** $13\sqrt{5}$.

Câu 153. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi số nguyên x có đúng 5 số nguyên y thỏa mãn $3^{y^2-|x-2y|} \le \log_{y^2+3}(|x-2y|+3)$?

A. 13. **B**. 11. **C**. 12. **D**. 10.

Câu 154. Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất số phức z thỏa mãn $(z+i)(\overline{z}-i)=16$ và $|z-4-2i|=m$. Tính tổng các phần tử của tập S.

A. 9. **B**. 8. **C**. 14. **D**. 10.

Câu 155. Cho số phức w và hai số thực a,b. Biết $z_1=w+2i$ và $z_2=2w-3$ là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+az+b=0$. Tính giá trị của $T=|z_1|+|z_2|$.

A. $2\sqrt{13}$. **B**. $4\sqrt{13}$. **C**. $\dfrac{2\sqrt{97}}{3}$. **D**. $\dfrac{2\sqrt{85}}{3}$.

Câu 156. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$ và điểm $A(2;-1;2)$. Từ A kẻ ba tiếp tuyến bất kì AM, AN, AP đến (S). Gọi T là điểm thay đổi trên mặt phẳng (MNP) sao cho từ T kẻ được hai tiếp tuyến vuông góc với nhau đến (S) và cả hai tiếp tuyến này đều nằm trong (MNP). Khoảng cách từ T đến giao điểm của đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=-1+t \\ y=2-t \\ z=1+3t \end{cases}$ với mặt phẳng (MNP) có giá trị nhỏ nhất là

A. $\dfrac{27\sqrt{3}}{16}+\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$. **B**. $-\dfrac{27\sqrt{3}}{16}+\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$. **C**. $\dfrac{27\sqrt{3}}{8}-\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$. **D**. $\dfrac{27\sqrt{3}}{16}$.

Câu 157. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm bậc bốn thỏa mãn $f(1)<0$ và có bảng biến thiên của $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $g(x)=\left|f\left(\sqrt{x^2+1}\right)+x^2\right|$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-1)$. **B**. $(1;2)$. **C**. $(0;1)$. **D**. $(-1;0)$.

Câu 158. Cho số phức z thỏa mãn $|(2+i)(z-4)+5i|=3\sqrt{5}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z+1-2i|+|z-7+6i|$ bằng

A. $4+2\sqrt{13}$. **B**. $8\sqrt{52}$. **C**. $2\sqrt{53}$. **D**. $2\sqrt{41}$.

Câu 159. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1)$, $B(5;6;1)$. Xét khối nón đỉnh A và có đường tròn đáy nằm trên mặt cầu đường kính AB. Khi khối nón có thể tích lớn nhất thì mặt phẳng (P) chứa đường tròn đáy của khối nón đi qua điểm nào dưới đây?

A. $N(4;-1;5)$. **B**. $Q(-3;-4;3)$. **C**. $P(1;-7;-5)$. **D**. $M(6;3;-1)$.

Câu 160. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-y-2z+4=0$ và đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-4}{1}$. Đường thẳng d đi qua điểm $A(2;-1;3)$, cắt mặt phẳng (P) và đường thẳng Δ lần lượt tại M, N sao cho N là trung điểm của AM có phương trình là

A. $\begin{cases} x=2+t \\ y=-1-2t \\ z=3+2t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=2+t \\ y=-1-t \\ z=3-2t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-1-t \\ z=3+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=2-t \\ y=-1+2t \\ z=3+2t \end{cases}$.

Câu 161. Cho số phức z thỏa mãn $|z-3-4i|=\sqrt{5}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+2|^2-|z-i|^2$. Tính môđun của số phức $w=M+mi$.

A. $|w|=2\sqrt{314}$. **B.** $|w|=2\sqrt{309}$. **C.** $|w|=\sqrt{1258}$. **D.** $|w|=3\sqrt{137}$.

Câu 162. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=(x-2)^2\left(x^2-x\right)$, $x\in\mathbb{R}$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f\left(\dfrac{1}{2}x^2-6x+m\right)$ có 5 điểm cực trị. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 154. **B.** 17. **C.** 213. **D.** 153.

Câu 163. Trên parabol $(P): y=x^2$ lấy hai điểm $A(-1;1)$, $B(2;4)$. Gọi M là điểm trên cung AB của (P) sao cho diện tích của tam giác AMB lớn nhất. Biết chu vi tam giác MAB là $a\sqrt{2}+b\sqrt{5}+c\sqrt{29}$, khi đó giá trị $a+b+c$ bằng

A. $\dfrac{29}{6}$. **B.** $\dfrac{41}{9}$. **C.** $\dfrac{9}{2}$. **D.** $\dfrac{13}{3}$.

Câu 164. Có bao nhiêu số nguyên dương b sao cho ứng với mỗi b, có đúng 3 giá trị nguyên dương của a thỏa mãn $\log_2\dfrac{2^a+a}{ab}+2^a\le a(b-1)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 165. Cho hàm số $f(x)=x+3^x$ và $g(x)=x^3-mx^2+\left(m^2+1\right)x-3$ với m là tham số thực. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y=g\left(2x+f(x)\right)$ trên đoạn $[0;1]$. Khi M đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị của m bằng

A. 3. **B.** $\dfrac{7}{2}$. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** 2.

Câu 166. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=35$ và hai điểm $M(6;-14;7)$, $N(10;8;9)$. Với A là điểm thuộc mặt cầu (S) sao cho $AM+AN$ đạt giá trị lớn nhất, khi đó tiếp diện của mặt cầu (S) tại A có phương trình là

A. $3x+y+5z-35=0$. **B.** $3x-y+5z+38=0$.
C. $3x-y-5z+42=0$. **D.** $3x-y+5z-45=0$.

Câu 167. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$ và $f'(x)=\cos x\left(6\sin^2 x-1\right)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=\dfrac{2}{3}$, khi đó $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $-\dfrac{2}{3}$. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 168. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\sqrt{2\log_3(x+2)}-\sqrt{\log_3\left(2x^2-1\right)}\geq(x+1)(x-5)$?

A. 8. **B**. 7. **C**. 6. **D**. 5.

Câu 169. Với các số thực không âm a,b thỏa mãn $16b+3a.2^{3a+4b}\geq 8$, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=3a^2+3b^2+12a+18b+6$ bằng

A. 15. **B**. 18. **C**. 25. **D**. 21.

Câu 170. Trên tập hợp các số phức, cho phương trình $z^2+az+b=0$ $(a,b\in\mathbb{R})$. Biết phương trình đã cho có hai nghiệm là $z_1=2-i$ và z_2, khi đó giá trị của $|az_1-bz_2|$ bằng

A. $6\sqrt{10}$. **B**. 18. **C**. $15\sqrt{3}$. **D**. $5\sqrt{13}$.

Câu 171. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-4$ và $g(x)=dx^2+ex+2$, $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là -3; -1; 2. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số đã cho có diện tích bằng

A. $\dfrac{316}{15}$. **B**. $\dfrac{191}{9}$. **C**. $\dfrac{253}{12}$. **D**. $\dfrac{97}{6}$.

Câu 172. Cho hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1|z_1=4|z_2|z_2$. Biết rằng M, N lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z_1, $\overline{z_2}$ trên mặt phẳng tọa độ thỏa mãn MON có diện tích bằng 32, khi đó giá trị nhỏ nhất của $|z_1+z_2|$ bằng

A. $8\sqrt{2}$. **B**. $12\sqrt{2}$. **C**. 12. **D**. 16.

Câu 173. Cho hình chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng 2 và đáy $ABCD$ là hình bình hành. Lấy các điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh SB, SD thỏa mãn $\dfrac{SM}{SB}=\dfrac{SN}{SD}=k$ $(0<k<1)$. Mặt phẳng (AMN) cắt cạnh SC tại điểm P. Biết khối chóp $S.AMPN$ có thể tích bằng $\dfrac{1}{3}$, khi đó giá trị của k bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B**. $\dfrac{1}{3}$. **C**. $\dfrac{2}{3}$. **D**. $\dfrac{1}{4}$.

Câu 174. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và thỏa mãn $f(x)>0$, $\forall x\in(1;3)$. Biết rằng $f(2)=\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}$ và $\mathrm{e}^{2x}f^3(x)+1=-3\mathrm{e}^{x}f'(x)\sqrt{f(x)}$, $\forall x\in(1;3)$, khi đó giá trị của $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2}\right)$. **B**. $\left(0;\dfrac{1}{3}\right)$. **C**. $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{2}{3}\right)$. **D**. $\left(\dfrac{2}{3};1\right)$.

Câu 175. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-mz+m+8=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2, thỏa mãn $\left|z_1\left(z_1^2+mz_2\right)\right|=\left(m^2-m-8\right)|z_2|$?

A. 5. **B**. 6. **C**. 11. **D**. 12.

Câu 176. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2\left(x^2-7x+12\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(x^3-3x+m\right)$ có đúng 6 điểm cực trị?

A. 1. **B**. 3. **C**. 2. **D**. 0.

Câu 177. Biết nửa khoảng $S=[p^m;p^n)$ $(p,m,n\in\mathbb{N}^*)$ là tập tất cả các số thực y sao cho ứng với mỗi y tồn tại đúng 6 số nguyên x thỏa mãn $\left(3^{x^2-2x}-27\right)\left(5^{x^2}-y\right)\le 0$. Tổng $m+n+p$ bằng

A. $m+n+p=46$. **B.** $m+n+p=66$. **C.** $m+n+p=14$. **D.** $m+n+p=30$.

Câu 178. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AC'=\sqrt{3}$. Biết rằng các khoảng cách từ các điểm A',B,D đến đường thẳng AC' là độ dài ba cạnh của một tam giác có diện tích $S=\dfrac{\sqrt{6}}{12}$, thể tích của khối hộp đã cho là

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{12}$. **D.** 1.

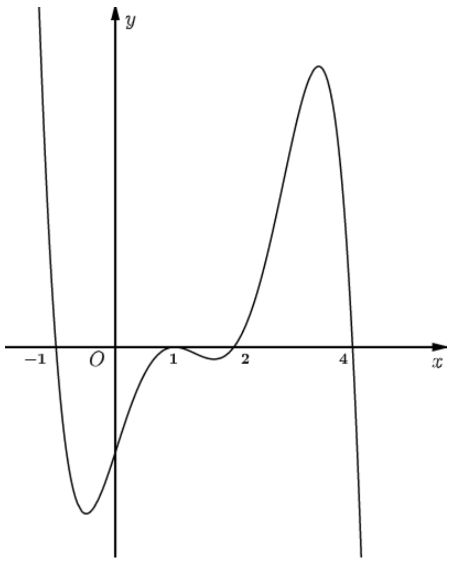
Câu 179. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{1}{6}x^3+ax^2+bx+c$ có đồ thị cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt. Biết hàm số $g(x)=\left[f'(x)\right]^2-2f''(x)f(x)+\left[f'''(x)\right]^2$ có ba điểm cực trị $x_1<x_2<x_3$ và $g(x_1)=2$, $g(x_2)=5$, $g(x_3)=1$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)+1}$ và trục Ox bằng

A. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{\ln 6}{2}$. **C.** $\ln 6$. **D.** $2\ln 6$.

Câu 180. Xét các số phức z có phần thực âm thỏa mãn $|z-1|=2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+3-i|+\left|z-\sqrt{3}i\right|+\left|z+\sqrt{3}i\right|$ bằng

A. 6. **B.** $\sqrt{37}$. **C.** $4+\sqrt{17}$. **D.** $3+\sqrt{17}$.

Câu 181. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm nhiều nhất của phương trình $f\left(x^2\right)=2022m-2021$ (với m là tham số) là

A. 5. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 6.

Câu 182. Cho phương trình $\log_a 4+\log_{\frac{1}{5}}\left(\sqrt{x^2+ax+2}+4\right).\log_a\left(x^2+ax+5\right)=0$. Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số a để phương trình có nghiệm duy nhất. Tổng các phần tử của S bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 0.

Câu 183. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình

$$\log_8\left(x^2+4mx+12m\right)<\log_8\left(x^2+4x+12\right).\log_8\left(x^2+8x+24\right)$$

nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$?

A. 2. **B**. 3. **C**. 1. **D**. 0.

Câu 184. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;6)$, $B(3;3;-9)$ và mặt phẳng $(P): 2x+2y-z-12=0$. Điểm M di động trên (P) sao cho MA, MB luôn tạo với (P) các góc bằng nhau. Biết M luôn thuộc một đường tròn cố định. Tung độ của tâm đường tròn đó bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B**. $-\frac{2}{3}$. **C**. 0. **D**. -12.

Câu 185. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-2-2i|=\frac{1}{8}$ và $|z_2-1|+|z_2+1|=2\sqrt{5}$. Số phức z thỏa mãn $|2z+2-5i|=|2z+3-6i|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z-2z_1|+|z-z_2|$ bằng

A. $\frac{23}{4}$. **B**. $\frac{13}{2}$. **C**. $\frac{11}{2}$. **D**. 5.

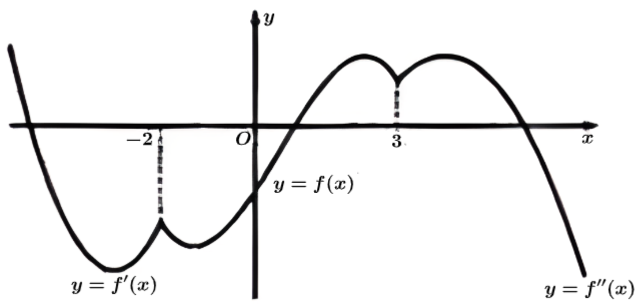
Câu 186. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-1;3)$, đường thẳng $d: \frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 3x+y-2z+6=0$. Gọi B là điểm thuộc (P) sao cho đường thẳng AB cắt và vuông góc với d. Hoành độ của B bằng

A. -5. **B**. 8. **C**. 3. **D**. 1.

Câu 187. Trên tập số phức, xét phương trình $z^2-2az+b^2-20=0$ với a,b là các tham số nguyên dương. Khi phương trình có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $z_1+3iz_2=7+5i$ thì giá trị biểu thức $7a+5b$ bằng

A. 19. **B**. 17. **C**. 32. **D**. 40.

Câu 188. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp hai liên tục trên $\mathbb{R}$. Hình vẽ bên dưới là đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ trên $(-\infty;2]$, đồ thị $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;3]$ và đồ thị $y=f''(x)$ trên $[3;+\infty)$.



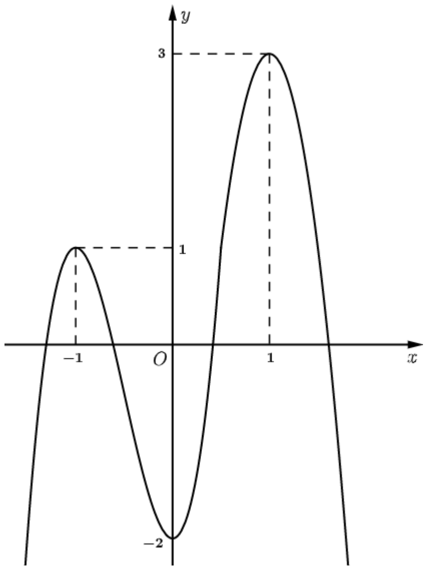
Số điểm cực trị tối đa của hàm số $y=f(x)$ là

A. 5. **B**. 6. **C**. 3. **D**. 7.

Câu 189. Cho phương trình $z^2-2mz+6m-8=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có hai nghiệm phức phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $z_1\overline{z_1}=z_2\overline{z_2}$?

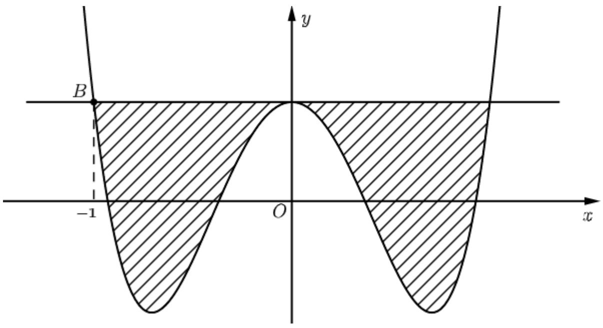
A. 4. **B**. 1. **C**. 3. **D**. 2.

Câu 190. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Tích phân $\int\limits_0^1 \left|f'(2x-1)\right|\mathrm{d}x$ bằng



A. 8. **B**. 4. **C**. 2. **D**. 1.

Câu 191. Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ. Biết miền tô đậm có diện tích bằng $\dfrac{4}{15}$ và điểm B có hoành độ bằng -1. Số giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-3;3]$ để hàm số $y=f\left(m-3^x\right)$ có đúng một điểm cực trị là



A. 1. **B**. 6. **C**. 2. **D**. 0.

Câu 192. Biết đồ thị (C) của hàm số $f(x)=x^4+bx^2+c$ $(b,c\in\mathbb{R})$ có điểm cực trị là $A(1;0)$. Gọi (P) là parabol có đỉnh $I(0;-1)$ và đi qua điểm $B(2;3)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và (P) thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(0;1)$. **B**. $(2;3)$. **C**. $(3;4)$. **D**. $(1;2)$.

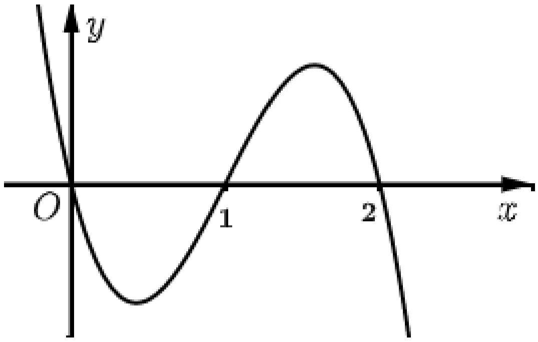
Câu 193. Cho hàm số $f(x)=-x^3+3x$ và $g(x)=|f(2+\sin x)+m|$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để $\max\limits_{\mathbb{R}} g(x)+\min\limits_{\mathbb{R}} g(x)=50$?

A. 0. **B**. 1. **C**. 2. **D**. 3.

Câu 194. Có bao nhiêu số nguyên a sao cho ứng với mỗi a, tồn tại số thực $b\geq a$ thỏa mãn $4^a=2^b+b$ và đoạn $[a;b]$ chứa không quá 5 số nguyên?

A. 5. **B**. 10. **C**. 6. **D**. 11.

Câu 195. Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$. Biết hàm số $y=f'(1+x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu số nguyên dương m sao cho $g(x)=f\left(-x^2+2x-2022+m\right)$ đồng biến trên $(0;1)$?



A. 2023. **B**. 2021. **C**. 2022. **D**. 2024.

Câu 196. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết $AB=\sqrt{2}a$, $AD=2a$, $\widehat{ABC}=45^\circ$ và góc giữa hai mặt phẳng (SBC), (SCD) bằng 30°. Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. $3a^3$. **B**. a^3. **C**. $\frac{2}{3}a^3$. **D**. $\frac{3}{4}a^3$.

Câu 197. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)-f(x)=(x+1)\mathrm{e}^{3x}$, với mọi $x\in\mathbb{R}$. Biết $f(0)=\frac{5}{4}$, giá trị $f(1)$ bằng

A. $\frac{5}{4}\mathrm{e}^3+\mathrm{e}$. **B**. $\frac{3}{4}\mathrm{e}^3+\mathrm{e}$. **C**. $\frac{3}{4}\mathrm{e}^3-\mathrm{e}$. **D**. $\frac{5}{4}\mathrm{e}^3-\mathrm{e}$.

Câu 198. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=\left(x^2+9x\right)\left(x^2-9\right)$, với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(\left|x^3+3x\right|+2m-m^2\right)$ có không quá 6 điểm cực trị?

A. 2. **B**. 5. **C**. 4. **D**. 7.

Câu 199. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-y+2z+16=0$ và mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=21$. Một khối hộp chữ nhật (H) có bốn đỉnh nằm trên mặt phẳng (P) và bốn đỉnh còn lại nằm trên mặt cầu (S). Khi (H) có thể tích lớn nhất, thì mặt phẳng chứa bốn đỉnh (H) nằm trên mặt cầu (S) là $(Q):2x+by+cz+d=0$. Giá trị $b+c+d$ bằng

A. -15. **B**. -13. **C**. -14. **D**. -7.

Câu 200. Xét các số phức z và w thỏa mãn $|z|=|w|=1$, $|z+w|=\sqrt{2}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|zw+2i(z+w)-4|$ bằng

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **B**. $\frac{1+5\sqrt{2}}{4}$. **C**. $5-2\sqrt{2}$. **D**. $\sqrt{5}$.

—— **HẾT** ——

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

1. A	2. C	3. D	4. B	5. D	6. C	7. A	8. B	9. B	10. D
11. C	12. D	13. D	14. C	15. D	16. A	17. A	18. C	19. B	20. A
21. D	22. B	23. A	24. A	25. D	26. D	27. D	28. D	29. B	30. B
31. B	32. D	33. C	34. A	35. C	36. B	37. A	38. C	39. C	40. D
41. D	42. B	43. A	44. A	45. A	46. D	47. B	48. A	49. B	50. B
51. A	52. D	53. B	54. B	55. C	56. A	57. C	58. D	59. D	60. A
61. C	62. C	63. B	64. C	65. C	66. C	67. C	68. A	69. D	70. C
71. B	72. D	73. A	74. B	75. C	76. D	77. D	78. D	79. B	80. A
81. D	82. A	83. A	84. D	85. B	86. D	87. A	88. B	89. A	90. C
91. D	92. C	93. B	94. D	95. A	96. B	97. C	98. D	99. B	100. C
101. C	102. B	103. A	104. D	105. C	106. D	107. B	108. A	109. A	110. A
111. A	112. B	113. A	114. B	115. D	116. B	117. C	118. B	119. C	120. D
121. A	122. A	123. D	124. C	125. C	126. D	127. D	128. C	129. A	130. C
131. A	132. D	133. C	134. C	135. B	136. A	137. A	138. D	139. B	140. B
141. C	142. B	143. D	144. C	145. A	146. D	147. C	148. C	149. D	150. A
151. A	152. B	153. B	154. D	155. C	156. B	157. C	158. D	159. D	160. C
161. C	162. D	163. C	164. A	165. A	166. B	167. C	168. C	169. A	170. D
171. C	172. B	173. A	174. D	175. A	176. C	177. A	178. A	179. B	180. B
181. D	182. A	183. D	184. A	185. A	186. C	187. C	188. A	189. B	190. B
191. A	192. B	193. C	194. D	195. A	196. C	197. B	198. B	199. B	200. A

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1:

Ta có: $g(x)=f\left(2x^3+x-1\right)+m\geq \min\limits_{[0;1]} g(x)=2022\ \ \forall x\in[0;1]$

$\Leftrightarrow m\geq 2022-f\left(2x^3+x-1\right)\ \ \forall x\in[0;1]$

$\Leftrightarrow m\geq \max\limits_{[0;1]}\left(2022-f\left(2x^3+x-1\right)\right)$

Cách 1:

Xét hàm số $h(x)=2022-f\left(2x^3+x-1\right)$, có $h'(x)=-\left(6x^2+1\right)f'\left(2x^3+x-1\right)$

$$\Rightarrow h'(x)=0\Leftrightarrow f'\left(2x^3+x-1\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x^3+x-1=-1\\ 2x^3+x-1=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\dfrac{\sqrt[3]{\left(108+6\sqrt{330}\right)^2}-6}{6\sqrt[3]{108+6\sqrt{330}}}=x_0\end{array}\right.$$

x	$-\infty$		0		x_0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2019	$\nearrow$	2023	$\searrow$	2019	$\searrow$	$-\infty$

Suy ra $m\geq 2023$. Để $\min\limits_{[0;1]} g(x)=2022$ thì $m=2023$.

Cách 2: Phương pháp "ghép trục": NHẤN VÀO ĐÂY.

Để $\left(2022-f\left(2x^3+x-1\right)\right)$ đạt max thì $f\left(2x^3+x-1\right)$ đạt min

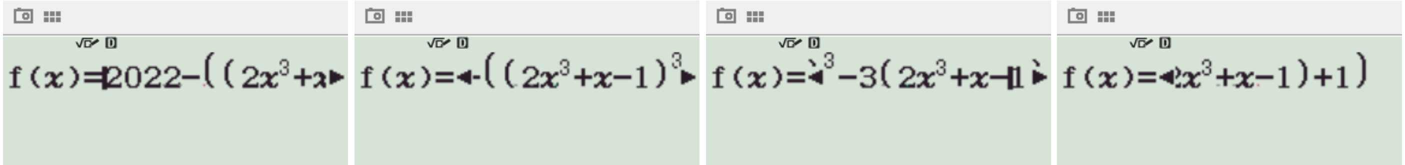
Đặt $u=2x^3+x-1\Rightarrow u'=6x^2+1>0$

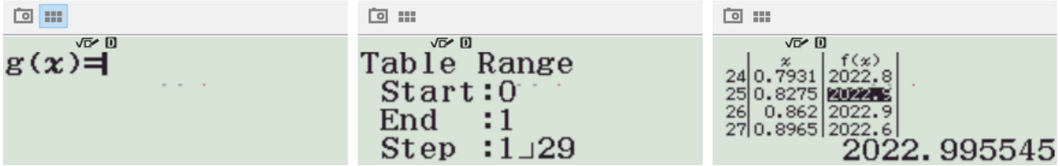
x	$-\infty$		0				1		$+\infty$
u	$-\infty$	$\longrightarrow$	-1	$\longrightarrow$	1	$\longrightarrow$	2	$\longrightarrow$	$+\infty$
$f(u)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

$\min\limits_{[0;1]} f\left(2x^3+x-1\right)=\min\limits_{[-1;2]} f(u)=f(1)=-1\Rightarrow m\geq 2023$. Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $m=2023$.

Cách 3:
Dựa vào đồ thị, suy ra: $f(x) = x^3 - 3x + 1$

Sử dụng chức năng Table (MODE 8):

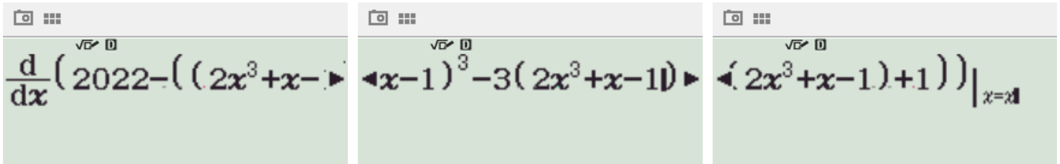




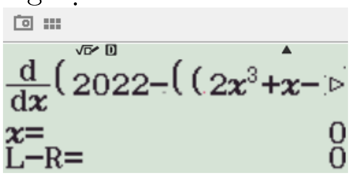
$\Rightarrow m \geq 2023$. Dấu $" = "$ xảy ra khi và chỉ khi $m = 2023$.

Cách 4:
Dựa vào đồ thị, suy ra: $f(x) = x^3 - 3x + 1$

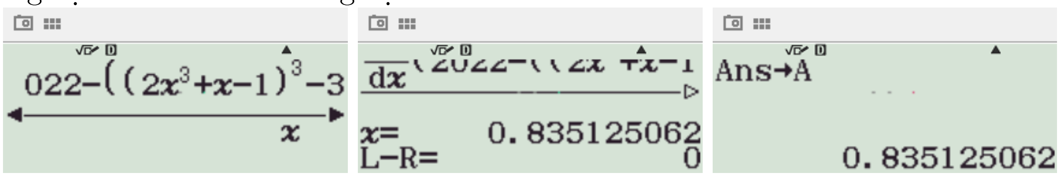
Sử dụng tính năng đạo hàm, kết hợp kĩ thuật tìm các nghiệm để tìm các nghiệm của $h'(x) = 0$:



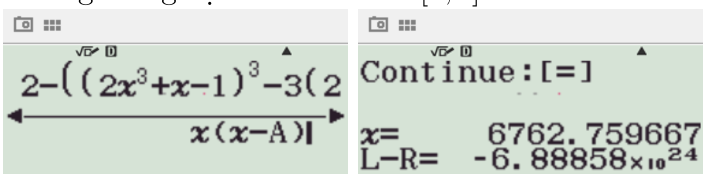
Nghiệm thứ nhất:



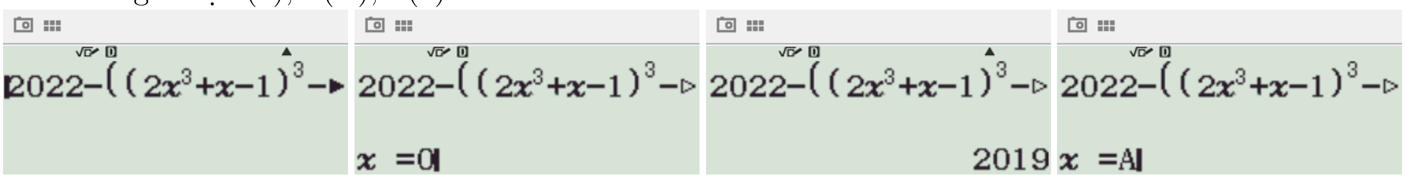
Nghiệm thứ hai và lưu nghiệm vào A

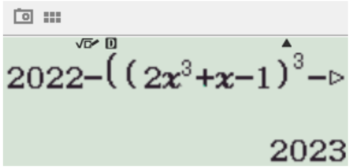


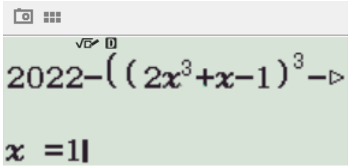
Không có nghiệm thứ ba trên $[0;1]$

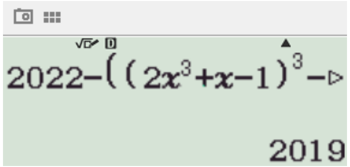


Tính các giá trị $h(0)$, $h(A)$, $h(1)$









Suy ra $m \geq \max\limits_{[0;1]} h(x) = 2023$. Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $m = 2023$.

Chọn đáp án A

Câu 2:

Cách 1:

$3^x + a^x \geq 6^x + 9^x$

$\Leftrightarrow a^x - 18^x \geq 6^x + 9^x - 3^x - 18^x$

$\Leftrightarrow a^x - 18^x \geq -3^x (3^x - 1)(2^x - 1) \quad (*)$

Ta có: $(3^x - 1)(2^x - 1) \geq 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow -3^x (3^x - 1)(2^x - 1) \leq 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$

Để $(*)$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $a^x - 18^x \geq 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left(\dfrac{a}{18}\right)^x \geq 1 \;\; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a = 18$

Cách 2:

Xét hàm số $f(x) = 3^x + a^x - 6^x - 9^x \geq 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$

Dễ thấy $f(0) = 0$, để $f(x) \geq 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$ thì $\min\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f(0) = 0$

Tức là, $f'(0) = 0 \Leftrightarrow a = 18$

Chọn đáp án C

Câu 3:

Ta có: $2f(x) + xf\left(\dfrac{1}{x}\right) = x \;\; (1)$

Cách 1:

Thay x bởi $\dfrac{1}{x}$, ta được: $2f\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{1}{x}f(x) = \dfrac{1}{x}$. Hay $xf\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{1}{2}f(x) = \dfrac{1}{2} \;\; (2)$

Lấy (1) trừ (2), ta được: $\dfrac{3}{2}f(x) = x - \dfrac{1}{2}$ hay $f(x) = \dfrac{2x}{3} - \dfrac{1}{3} \Rightarrow \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{3}{4}$

Cách 2: Kĩ thuật "chọn hàm": NHẤN VÀO ĐÂY.

Đặt $f(x) = ax + b$, thay vào ta được: $2(ax+b) + x\left(\dfrac{a}{x} + b\right) = x \Leftrightarrow (2a + b - 1)x + (a + 2b) = 0$

Đồng nhất hệ số hai vế, suy ra: $\begin{cases} 2a + b - 1 & = 0 \\ a + 2b & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a & = \dfrac{2}{3} \\ b & = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow f(x) = \dfrac{2x}{3} - \dfrac{1}{3}$.

Thử lại, thỏa. Suy ra $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{3}{4}$.

Chọn đáp án D

Câu 4:

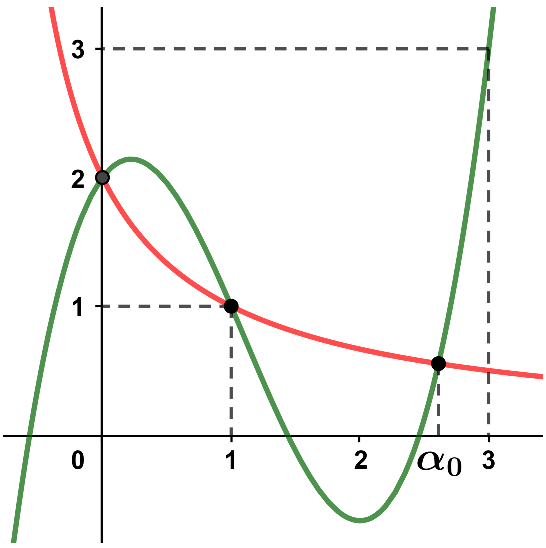
Phương pháp "ghép trục": NHẤN VÀO ĐÂY.

Đặt $u=\dfrac{x}{2}+1$, suy ra $x=2u-2$, thay vào ta được: $g(2u-2)=f(u)-2\ln(2u+2)=h(u)$

$$h'(u)=f'(u)-\frac{2}{u+1}\Rightarrow h'(u)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=0\\u=1\\u=\alpha_0\ \ (1<\alpha_0<3)\end{array}\right.$$

x	$-\infty$	-2					4	$+\infty$
u		0	$\longrightarrow$	1	$\longrightarrow$	α_0	$\longrightarrow$ 3	
$h'(u)$		0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(u)$		$h(0)$	$\nearrow$	$h(1)$	$\searrow$	$h(\alpha_0)$	$\nearrow$ $h(3)$	

Dựa vào đồ thị,



Ta có: $\displaystyle\int_1^{\alpha_0}\left(\frac{2}{u+1}-f'(u)\right)\mathrm{d}u>\int_{\alpha_0}^{3}\left(f'(u)-\frac{2}{u+1}\right)\mathrm{d}u$

$\Leftrightarrow (2\ln(u+1)-f(u))\Big|_1^{\alpha_0}>(f(u)-2\ln(u+1))\Big|_{\alpha_0}^{3}$

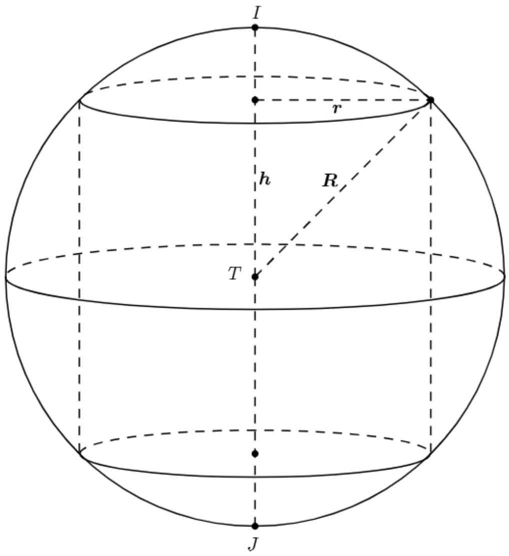
$\Leftrightarrow f(1)-f(3)+2\ln2>0$

Lại có: $h(1)-h(3)=f(1)-f(3)+2\ln2>0$ hay $h(1)>h(3)$

Vậy, hàm số $h(u)$ đạt GTLN tại $u=1$, khi đó $x=0$.

Chọn đáp án B

Câu 5:



Theo hình vẽ, ta có: $R = \dfrac{IJ}{2} = \sqrt{6}$, $r = \sqrt{R^2 - h^2}$ $(0 < h < R)$ và $V_{(T)} = 2h\pi r^2 = 2h\pi\left(R^2 - h^2\right)$

$\Rightarrow V'_{(T)} = 2\pi\left(R^2 - h^2\right) - 4\pi h^2 = 0 \Leftrightarrow h = \dfrac{R\sqrt{3}}{3} = \sqrt{2}$

h	0		$\sqrt{2}$		$\sqrt{6}$
V'		$+$	0	$-$	
V		$\nearrow$	$8\pi\sqrt{2}$	$\searrow$	

Vậy $\max V_{(T)} = 8\pi\sqrt{2} \Leftrightarrow h = \sqrt{2}$

Lại có: $\overrightarrow{n}_{mp} = \overrightarrow{IJ} = (2;-4;-2) = 2(1;-2;-1)$, $T(3;1;2)$

Suy ra, phương trình hai mặt phẳng có dạng: $x - 2y - z + d = 0$

Khi đó, $d(T,(mp)) = \dfrac{|3-2-2+d|}{\sqrt{6}} = h = \sqrt{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} d_1 = 1 + 2\sqrt{3} \\ d_2 = 1 - 2\sqrt{3} \end{array}\right. \Rightarrow d_1^2 + d_2^2 = 26$

Chọn đáp án D

Câu 6:

Cách 1: Kĩ thuật "chọn hàm": NHẤN VÀO ĐÂY.

Vì có ba điều kiện: $f(0) = f(2) = 1$ và $f(x)f(2-x) = \mathrm{e}^{2x^2-4x}$. Đặt $f(x) = \mathrm{e}^{ax^2+bx+c}$

$\Rightarrow f(0) = \mathrm{e}^c = 1 \Rightarrow c = 0$

$\Rightarrow f(x)f(2-x) = \mathrm{e}^{2ax^2-4ax+4a+2b} = \mathrm{e}^{2x^2-4x}$. Đồng nhất hệ số, suy ra: $\begin{cases} 2a = 2 \\ -4a = -4 \\ 4a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$

$\Rightarrow f(x) = \mathrm{e}^{x^2-2x} \Rightarrow f'(x) = (2x-2)\,\mathrm{e}^{x^2-2x} \Rightarrow I = -\dfrac{16}{5}$

Cách 2:

Ta có: $f(x)f(2-x)=\mathrm{e}^{2x^2-4x}$ và $f(0)=1$. Suy ra $f(2)=1$

Đặt $\begin{cases} u=x^3-3x^2 \\ \mathrm{d}v=\dfrac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=3x^2-6x\,\mathrm{d}x \\ v=\ln f(x) \end{cases}$

$$\Rightarrow I=\left(x^3-3x^2\right)\ln f(x)\Big|_0^2-\int_0^2\left(3x^2-6x\right)\ln f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_0^2\left(3x^2-6x\right)\ln f(x)\,\mathrm{d}x$$

Lại có: $\displaystyle\int_0^2\left(3x^2-6x\right)\ln f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^2\left(3x^2-6x\right)\ln f(2-x)\,\mathrm{d}x$

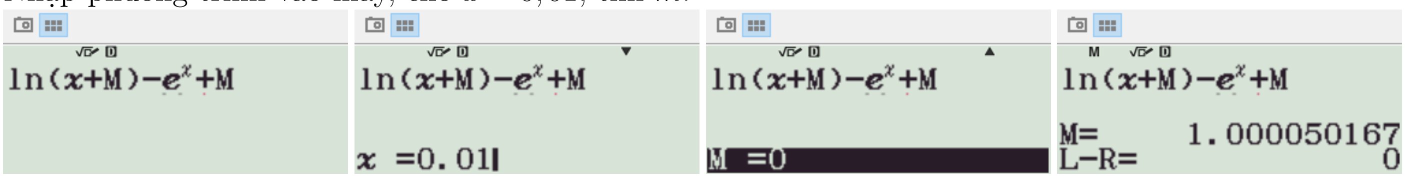
$$\Rightarrow 2I=-\int_0^2\left(3x^2-6x\right)\ln\left(f(x)f(2-x)\right)\mathrm{d}x=-\int_0^2\left(3x^2-6x\right)\left(2x^2-4x\right)\mathrm{d}x=-\frac{32}{5}\Rightarrow I=-\frac{16}{5}$$

Chọn đáp án C

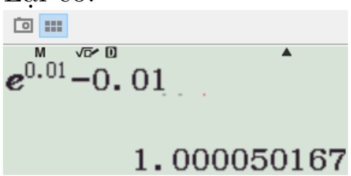
Câu 7:

Cách 1: Kĩ thuật "hàm đặc trưng": NHẤN VÀO ĐÂY.

Nhập phương trình vào máy, cho $x=0{,}01$, tìm m:



Lại có:



Suy ra $\mathrm{e}^x-x=m$.

Khảo sát hàm số $f(x)=\mathrm{e}^x-x$ bằng chức năng TABLE (MODE 8).

Suy ra, để phương trình có nghiệm thì $m\geq 1$.

Cách 2:

ĐK: $x+m>0$.

Đặt $t=\ln(x+m)\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{e}^x=t+m\\ \mathrm{e}^t=x+m\end{cases}\Rightarrow \mathrm{e}^x+x=\mathrm{e}^t+t$

Xét hàm số $f(x)=\mathrm{e}^x+x$. Ta có: $f'(x)=\mathrm{e}^x+1>0\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x)=f(t)\Leftrightarrow x=t\Leftrightarrow \mathrm{e}^x-x=m.$

Lại có:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x - x$	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

Suy ra, phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m \geq 1$.

Vậy, có 2022 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Chọn đáp án Ⓐ

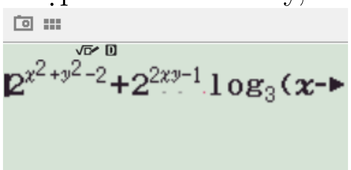
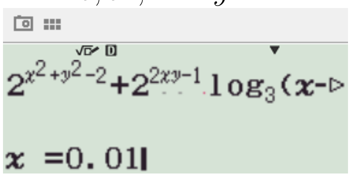
Câu 8:

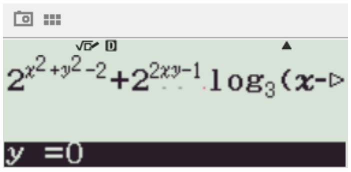
Hướng 1: **Kĩ thuật "hàm đặc trưng": NHẤN VÀO ĐÂY.**

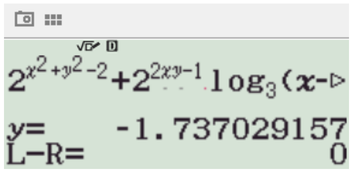
$$2^{x^2+y^2-2} + 2^{2xy-1}\log_3(x-y) = 2^{1-xy} + 2^{2xy-2}\left[1+\log_3(1-xy)\right]$$

$$\Leftrightarrow 2^{x^2+y^2-2} + 2^{2xy-1}\log_3(x-y) - 2^{1-xy} - 2^{2xy-2}\left[1+\log_3(1-xy)\right] = 0$$

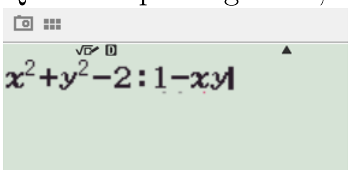
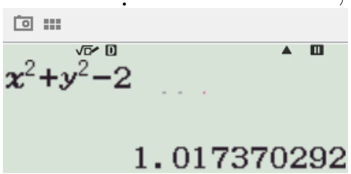
Nhập vế trái vào máy, cho $x = 0,01$, tìm y:

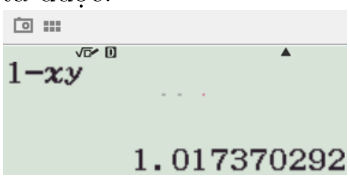







Quan sát phương trình, thử lần lượt các biểu thức, ta được:



Suy ra $x^2+y^2-2 = 1-xy$

Hướng 2:

ĐK: $\begin{cases} x-y>0 \\ 1-xy>0 \end{cases}$

$$2^{x^2+y^2-2} + 2^{2xy-1}\log_3(x-y) = 2^{1-xy} + 2^{2xy-2}\left[1+\log_3(1-xy)\right]$$

$$\Leftrightarrow 2^{x^2+y^2-2xy} + 2\log_3(x-y) = 2^{3-3xy} + \log_3(3-3xy)$$

$$\Leftrightarrow 2^{(x-y)^2} + \log_3(x-y)^2 = 2^{3-3xy} + \log_3(3-3xy)$$

Xét hàm số $f(x) = 2^x + \log_3 x \quad (x>0)$. Ta có: $f'(x) = 2^x \ln 2 + \dfrac{1}{x\ln 3} > 0 \ \forall x > 0$

$\Rightarrow f\left((x-y)^2\right) = f(3-3xy) \Leftrightarrow (x-y)^2 = 3-3xy \Leftrightarrow xy = (x+y)^2 - 3 \Leftrightarrow 4-(x+y)^2 = 1-xy > 0$

Suy ra $-2 < x+y < 2$

$P = 4\left(x^3+y^3\right) - 6xy = 4(x+y)^3 - 12xy(x+y) - 6xy$

$\quad = 4(x+y)^3 - 12\left((x+y)^2-3\right)(x+y) - 6\left((x+y)^2-3\right)$

Đặt $t = x+y$, suy ra $t \in (-2;2)$

Suy ra $P = -8t^3 - 6t^2 + 36t + 18 \leq 40$. Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $t = 1$.

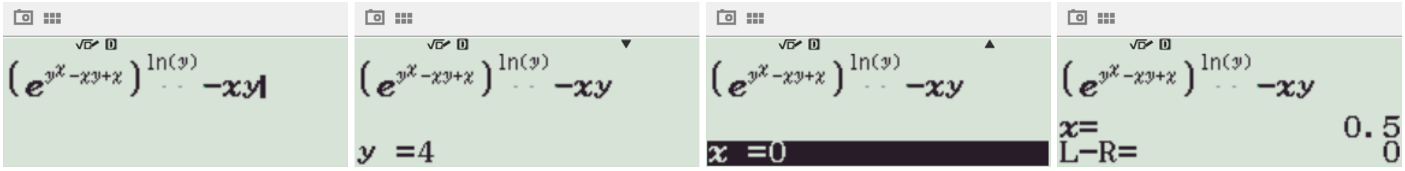
Chọn đáp án B

Câu 9:

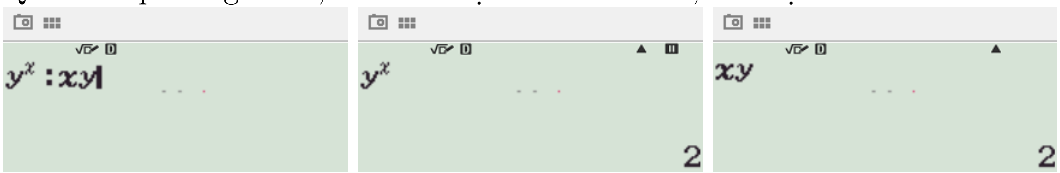
Hướng 1: **Kĩ thuật "hàm đặc trưng":** NHẤN VÀO ĐÂY.

Biến đổi giả thiết, ta được: $\left(\mathrm{e}^{y^x-xy+x}\right)^{\ln y} - xy = 0$

Bấm tương tự câu 7, cho $y = 4$, tìm x, ta được:



Quan sát phương trình, thử lần lượt các biểu thức, ta được:



Suy ra $y^x = xy$.

Hướng 2:

$$\left(\mathrm{e}^{y^x-xy+x}\right)^{\ln y} = xy \quad (\text{Vì } y \geq 3 \text{ nên } x > 0)$$

$\Leftrightarrow y^{y^x-xy+x} = xy$

$\Leftrightarrow y^x + x = \log_y(xy) + xy$

$\Leftrightarrow y^x + \log_y y^x = \log_y(xy) + xy$

Xét hàm số $f(t) = t + \log_y t$ với $y \geq 3, t > 0$. Có $f'(t) = 1 + \dfrac{1}{t\ln y} > 0 \ \forall t > 0$

$\Rightarrow f\left(y^x\right) = f(xy) \Leftrightarrow y^x = xy \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln x}{\ln y} + 1 \Leftrightarrow (x-1)\ln y = \ln x$. Dễ thấy, $x = 1$ là nghiệm.

TH: $x \neq 1$

Phương trình tương đương: $\ln y = \dfrac{\ln x}{x-1}$

Xét hàm số $g(x) = \dfrac{\ln x}{x-1}$ với $x > 0, x \neq 1$. Có $g'(x) = \dfrac{1 - \frac{1}{x} - \ln x}{(x-1)^2}$

Xét hàm số $h(x) = 1 - \dfrac{1}{x} - \ln x$, với $x > 0$. Có $h'(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{1-x}{x^2}$.

x	0		1		$+\infty$
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Suy ra $g'(x) < 0\ \ \forall x \in (0;1) \cup (1;+\infty)$. Kéo theo,

x	0		$\frac{1}{2021}$		1		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$		$-$	||	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g\left(\frac{1}{2021}\right)$	$\searrow$	1 || 1	$\searrow$	0

Để phương trình có đúng hai số thực $x > \dfrac{1}{2021}$ thì $\begin{cases} 0 < \ln y < g\left(\dfrac{1}{2021}\right) \\ \ln y \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < y < \mathrm{e}^{g\left(\frac{1}{2021}\right)} \\ y \neq \mathrm{e} \end{cases}$.

Kết hợp điều kiện, suy ra: $m \in \{3;4;...;2028\}$

Vậy, có 2026 số nguyên y thỏa mãn.

Chọn đáp án B

Câu 10:

Hướng 1: Kĩ thuật "hàm đặc trưng" và giải phương trình: NHẤN VÀO ĐÂY.

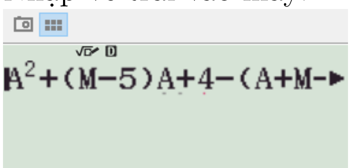
$$f^2(\sin x) + (m-5) f(\sin x) + 4 = [f(\sin x) + m - 1] \left| f(\sin x) - 2 \right|$$

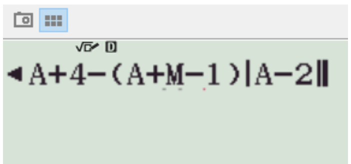
$$\Leftrightarrow f^2(\sin x) + (m-5) f(\sin x) + 4 - [f(\sin x) + m - 1] \left| f(\sin x) - 2 \right| = 0$$

Đặt $A = f(\sin x)$, suy ra $A^2 + (m-5)A + 4 - (A+m-1)|A-2| = 0$

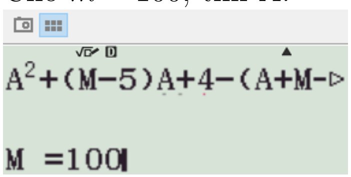
Ta sẽ tìm mối quan hệ giữa A và m bằng CASIO (FX580VNX) như sau:

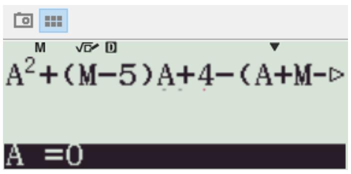
Nhập vế trái vào máy:

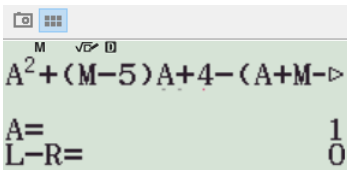




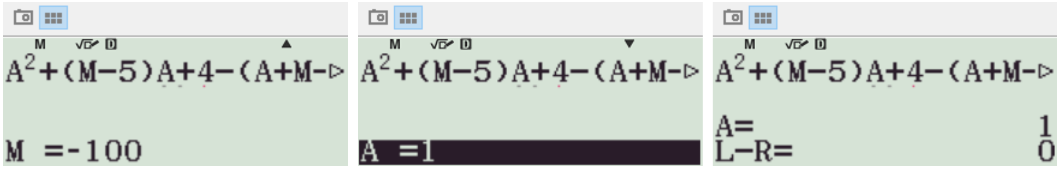
Cho $m = 100$, tìm A:



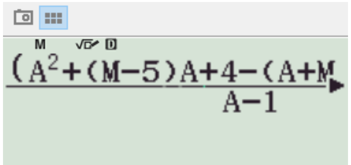




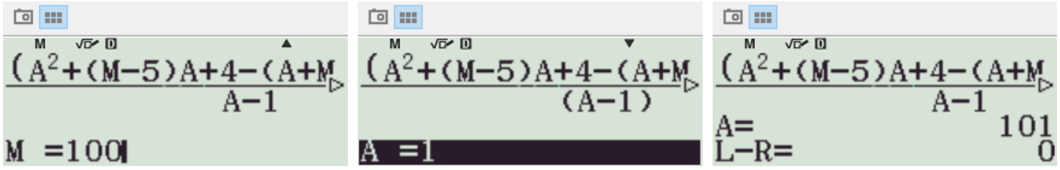
Khoảng cách giữa 100 và 1 quá lớn, ta sẽ kiểm tra xem $A=1$ có phải luôn là nghiệm với mọi m bằng cách cho $m=-100$ và cho $A=1$ để tìm nghiệm A xung quanh 1:



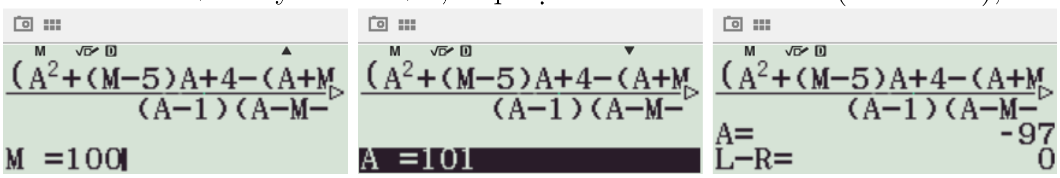
Suy ra, $A=1$ luôn là nghiệm, để tìm nghiệm $A\neq 1$, ta chia cả biểu thức cho $(A-1)$:



Tiếp tục, cho $m=100$, tìm A:



Có $101=100+1$ hay $A=m+1$, tiếp tục chia biểu thức cho $(A-m-1)$, cho $m=100$, tìm A:



Có $-97=3-100$ hay $A=3-m$, tiếp tục quá trình trên, máy tính báo vô nghiệm.

Vậy $\left[\begin{array}{l} f(\sin x)=1 \\ f(\sin x)=m+1 \\ f(\sin x)=3-m \end{array}\right.$

Hàm trị tuyệt đối nên có hai trường hợp $A\geq 2$ hoặc $A<2$. Khi cho $m=100$, chỉ có một nghiệm duy nhất $A=1$, suy ra $m+1\geq 2$ hoặc $3-m<2$.

> Trong trường hợp cho $m=100$, không tìm ra A, có nghĩa là nghiệm A không gần giá trị A ban đầu hoặc vô nghiệm, ta sẽ cho $A=100$ hoặc $A=-100$ để tìm A xung quanh 100 và -100 và để dễ thiết lập mối quan hệ với m. Trong trường hợp không có nghiệm, ta cũng có thể linh hoạt cho $m=-100$ và tìm nghiệm A xung quanh 100 và -100.

Hướng 2:

$$f^2(\sin x)+(m-5)f(\sin x)+4=[f(\sin x)+m-1]\,|f(\sin x)-2|$$

TH1: $f(\sin x)\geq 2$

$$f^2(\sin x)+(m-5)f(\sin x)+4=[f(\sin x)+m-1]\,(f(\sin x)-2)$$

$\Leftrightarrow f(\sin x)=m+1\geq 2$

TH2: $f(\sin x)<2$

$$f^2(\sin x)+(m-5)f(\sin x)+4=[f(\sin x)+m-1]\,(2-f(\sin x))$$

$\Leftrightarrow 2f^2(\sin x)+(2m-8)f(\sin x)+6-2m=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(\sin x)=1 \\ f(\sin x)=3-m<2 \end{array}\right.$

Phương pháp "ghép trục", tịnh tiến đồ thị: NHẤN VÀO ĐÂY.

Đặt $u=\sin x$,

x	0								2π
u	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0
$f(u)$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	1

Để phương trình có 5 nghiệm phân biệt thì $\begin{cases} f(u)=m+1\geq 2 \\ f(u)=3-m<2 \end{cases}$ có 2 nghiệm phân biệt.

Hay $|f(u)-2|=m-1$ có 2 nghiệm phân biệt. Ta có:

x	0										2π
$f(u)-2$	-1	$\searrow$	-3	$\nearrow$		$\nearrow$	1	$\searrow$		$\searrow$	-1
$\lvert f(u)-2\rvert$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

Suy ra $\left[\begin{array}{l} 1<m-1<3 \\ m-1=0 \end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện, suy ra: $m\in\{1;3\}$

Chọn đáp án D

Câu 11:

Ta có: $g(x)\leq \max g(x)=4$

$\Leftrightarrow m\leq 4-f(3|\cos x|-1)$

$\Leftrightarrow m\leq \min(4-f(3|\cos x|-1))$

Để $(4-f(3|\cos x|-1))$ đạt GTNN thì $f(3|\cos x|-1)$ đạt GTLN.

Đặt $t=3|\cos x|-1$, suy ra $t\in[-1;2]$

Dựa vào đồ thị, ta có: $\max\limits_{[-1;2]} f(t)=2$, kéo theo $m\leq 2$.

Vậy, để $\max g(x)=4$ thì $m=2$.

Chọn đáp án C

Câu 12:

Xét hàm số $h(x) = f^2(x)$, ta có: $h'(x) = 2f(x)f'(x)$

$$\Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = 0 \end{array}\right.$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	16	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Cách 1:

Ta có: $g'(x) = 2f\left[f^2(x) - 2022m\right]f'\left[f^2(x) - 2022m\right].2f(x)f'(x)$

Vì $f\left[f^2(x) - 2022m\right] \geq 0$ và $f(x) \geq 0$ nên dấu của $g'(x)$ phụ thuộc vào dấu của $f'\left[f^2(x) - 2022m\right]$ và $f'(x)$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right. ;\ f'\left[f^2(x) - 2022m\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f^2(x) - 2022m = -1 \\ f^2(x) - 2022m = 0 \\ f^2(x) - 2022m = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f^2(x) = -1 + 2022m \\ f^2(x) = 2022m \\ f^2(x) = 1 + 2022m \end{array}\right.$$

Dựa vào BBT, ta có: $3 \leq n \leq 15$

Dấu $" = "$ xảy ra: $n = 3 \Leftrightarrow 1 + 2022m \leq 0$ và $n = 15 \Leftrightarrow 0 < -1 + 2022m < 2022m < 1 + 2022m < 16$

Suy ra $a + b = 18$

Cách 2: Phương pháp "ghép trục": NHẤN VÀO ĐÂY.

Vì $m \in \mathbb{R}$, đặt $t = -2022m \Rightarrow t \in \mathbb{R}$. Khi đó, $g(x) = h(h(x) + t)$, ta có:

x	$-\infty$								$+\infty$
$h(x) + t$	$+\infty$	$\searrow$	t	$\nearrow$	$16 + t$	$\searrow$	t	$\nearrow$	$+\infty$

Để SĐCT của $g(x)$ đạt GTNN thì $t \geq 1$

x	$-\infty$								$+\infty$
$h(x) + t$	$+\infty$	$\rightarrow$	t	$\rightarrow$	$16 + t$	$\rightarrow$	t	$\rightarrow$	$+\infty$
$h(h(x) + t)$	$+\infty$	$\searrow$	$h(t)$	$\nearrow$	$h(16 + t)$	$\searrow$	$h(t)$	$\nearrow$	$+\infty$

Để SĐCT của $g(x)$ đạt GTLN thì $-15 < t < -1$

x	$-\infty$				$+\infty$
$h(x)+t$	$+\infty$ $\longrightarrow$	t $\longrightarrow$	$16+t$ $\longrightarrow$	t $\longrightarrow$	$+\infty$
$h\left(h(x)+t\right)$	$+\infty$ $\searrow$ $\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$	$\searrow$ $\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$	$\searrow$ $\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$	$\searrow$ $\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$	$+\infty$

Suy ra $a+b=18$

Chọn đáp án D

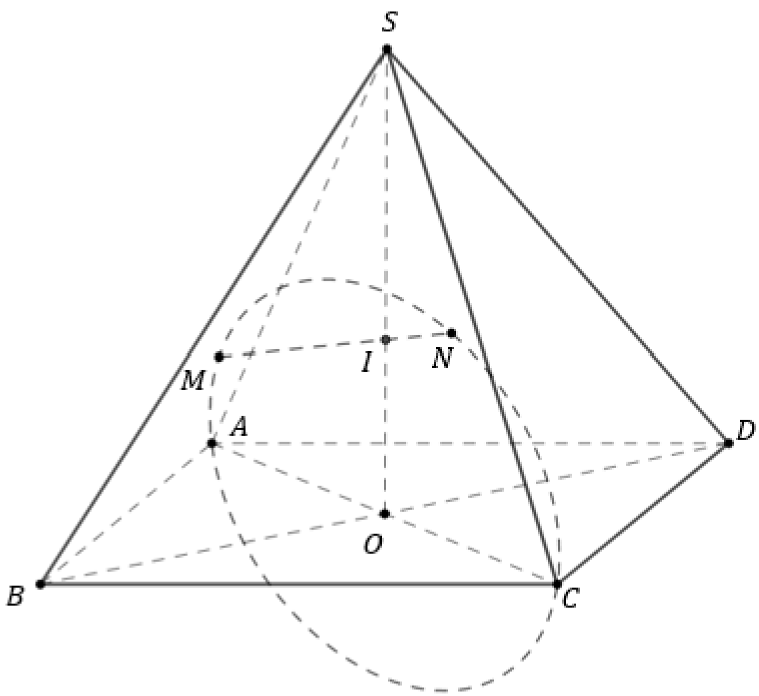
Câu 13:

Theo giả thiết: $S.ABCD$ là hình chóp đều, $M,N \in (SAC)$ và $\widehat{BMD} = \widehat{BND} = 90^\circ$

Suy ra $M,N \in \left(O;\dfrac{AC}{2}\right)$.

Lại có: M,N cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ AC. Suy ra M,N cùng thuộc nửa đường tròn trên hoặc nửa đường tròn dưới bờ là đường kính AC.

Gọi I là giao điểm của SO và MN.



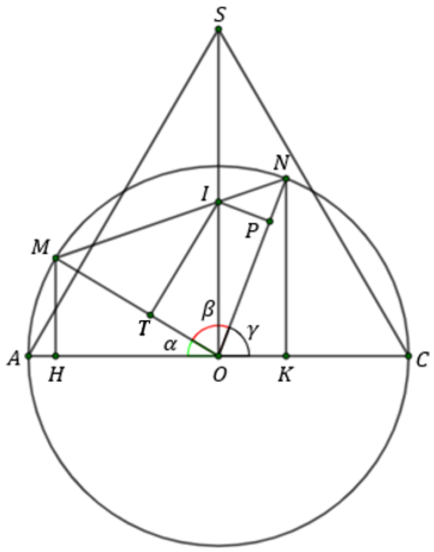
Dựa vào hình vẽ, suy ra:

$$V = V_{MABD} + V_{NBCD} + V_{IMBD} + V_{INBD}$$
$$= \frac{d\left(M;(ABD)\right).S_{ABD}}{3} + \frac{d\left(N;(BCD)\right).S_{BCD}}{3} + \frac{d\left(I;(MBD)\right).S_{MBD}}{3} + \frac{d\left(I;(NBD)\right).S_{NBD}}{3}$$

Lại có: $S_{ABD} = S_{BCD} = S_{MBD} = S_{NBD} = a^2$

$$\Rightarrow V=\frac{a^2}{3}.\left[d\left(M;(ABD)\right)+d\left(N;(BCD)\right)+d\left(I;(MBD)\right)+d\left(I;(NBD)\right)\right]$$
$$=\frac{a^2}{3}.\left[d\left(M;AC\right)+d\left(N;AC\right)+d\left(I;MO\right)+d\left(I;NO\right)\right]$$

Xét mặt phẳng (SAC), ta có:



$$\Rightarrow V=\frac{a^2}{3}(MH+NK+IT+IP)=\frac{a^2}{3}\left(MO\sin\alpha+ON\sin\gamma+\frac{2S_{IMO}}{MO}+\frac{2S_{INO}}{NO}\right)$$
$$=\frac{a^2}{3}\left(a\sin\alpha+a\sin\gamma+\frac{2S_{MON}}{a}\right)=\frac{a^3}{3}(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)$$

Để V đạt GTLN thì $(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)$ đạt GTLN. Lại có: $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$.

$\Rightarrow \sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\le\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi: $\alpha=\beta=\gamma=60^\circ$.

Vậy, $\max V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án D

Câu 14:

Biến đổi tương đương, ta được: $2^{x^2+y^2-2x+1}\le x^2+y^2-2x+2$

Đặt $t=x^2+y^2-2x+1\ge 0$. Suy ra $t+1-2^t\ge 0$.

Xét hàm số $f(x)=x+1-2^x$

x	$-\infty$		0		$\log_2\frac{1}{\ln 2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f\left(\log_2\frac{1}{\ln 2}\right)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

$\Rightarrow f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$ hay $0 \leq (x-1)^2 + y^2 \leq 1$

Là tập hợp các điểm $(x;y)$ nằm trong và nằm trên đường tròn tâm $I(1;0)$, bán kính $R = 1$.

Lại có: $P = \dfrac{3x-4y}{2x+y+1} \Rightarrow (2P-3)x + (P+4)y + P = 0 \;\; (M)$

Để tồn tại x, y thỏa mãn bài toán thì $(M) \cap (I;1) \neq \varnothing$. Tức là:

$$d(I,(M)) \leq R \Leftrightarrow \frac{|2P-3+P|}{\sqrt{(2P-3)^2+(P+4)^2}} \leq 1 \Leftrightarrow 4P^2 - 14P - 16 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{7-\sqrt{113}}{4} \leq P \leq \frac{7+\sqrt{113}}{4}$$

Suy ra $a + b = 2$.

Chọn đáp án C

Câu 15:

Ta có: $x^2 - x + 2 > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2-2mx+1}{x^2-x+2} = 1 \neq \pm\infty$, nên tồn tại $\max \left| \dfrac{x^2-2mx+1}{x^2-x+2} \right|$.

Giả sử ngược lại, $\max \left| \dfrac{x^2-2mx+1}{x^2-x+2} \right| < 4$. Khi đó,

$$\left| \frac{x^2-2mx+1}{x^2-x+2} \right| \leq \max \left| \frac{x^2-2mx+1}{x^2-x+2} \right| < 4 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Leftrightarrow \left| x^2 - 2mx + 1 \right| < 4\left(x^2 - x + 2\right) \;\; \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow -4\left(x^2 - x + 2\right) < x^2 - 2mx + 1 < 4\left(x^2 - x + 2\right) \;\; \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 - 2(m+2)x + 9 > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R} \\ 3x^2 + 2(m-2)x + 7 > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1 = 4(m+2)^2 - 180 < 0 \\ \Delta_2 = 4(m-2)^2 - 84 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 - 3\sqrt{5} < m < -2 + 3\sqrt{5} \\ 2 - \sqrt{21} < m < 2 + \sqrt{21} \end{cases} \Leftrightarrow 2 - \sqrt{21} < m < -2 + 3\sqrt{5}$$

Vì thế, để $\max \left| \dfrac{x^2-2mx+1}{x^2-x+2} \right| \geq 4$ thì $\left[\begin{array}{l} m \leq 2 - \sqrt{21} \\ m \geq -2 + 3\sqrt{5} \end{array} \right.$

Kết hợp điều kiện, suy ra $m \in \{-10; -9; \ldots; -3; 5; 6; \ldots; 10\}$.

Vậy, có 14 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Chọn đáp án D

Câu 16:

Ta có: $y' = 3x^2 - 6(m-1)x + 3(m+1)$.

Để (C_m) có hai điểm cực trị thì $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow x^2 - 2(m-1)x - (m+1) = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow \Delta = 4(m-1)^2 + 4(m+1) > 0 \Leftrightarrow m^2 - m + 2 > 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}$

Lại có: $y = \left(\dfrac{x-m+1}{3} \right) y' - 2\left(m^2 - m + 2\right)x + 4 - m^2$

Suy ra phương trình đường thẳng (d) đi qua A,B có dạng: $y=-2\left(m^2-m+2\right)x+4-m^2$

Để O,A,B thẳng hàng thì $O\in(d)$

Suy ra $4-m^2=0\Leftrightarrow m=\pm2$, kéo theo $S=\{-2;2\}$.

Vậy, tổng các phần tử của S bằng 0.

Chọn đáp án A

Câu 17:

Phương pháp "ghép trục": NHẤN VÀO ĐÂY.

Đặt $t=|x|^3-3|x|+2$,

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
t	$+\infty$	$\xrightarrow{1}$	0	$\xrightarrow{1}$	2	$\xrightarrow{1}$	0	$\xrightarrow{1}$	$+\infty$
$f(t)$	$+\infty$ $\searrow$	0	$\nearrow$ 2 $\searrow$	0	$\nearrow$ 4 $\searrow$	0	$\nearrow$ 2 $\searrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$

Ta có: $3f\left(|x|^3-3|x|+2\right)-m+1=0\Leftrightarrow f\left(|x|^3-3|x|+2\right)=\dfrac{m-1}{3}$

Để phương trình có 8 nghiệm phân biệt thì $0<\dfrac{m-1}{3}<2\Leftrightarrow 1<m<7$.

Vậy, có 5 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Chọn đáp án A

Câu 18:

Cách 1:

Ta có: $g'(x)=\cos x.f'(\sin x-1)-\dfrac{\sin 2x}{2}=\cos x\left(f'(\sin x-1)-\sin x\right)$

$$\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ f'(\sin x-1)=\sin x\end{array}\right.$$

TH: $\cos x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$. Có $x\in(0;2\pi)$, suy ra $k\in\{0;1\}$

TH: $f'(\sin x-1)=\sin x$

Đặt $\sin x-1=t\Rightarrow \sin x=t+1\Rightarrow f'(t)=t+1$

Dựa vào đồ thị, suy ra: $\left[\begin{array}{l}t=-1\\ t=1\\ t=\alpha>1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin x=2\\ \sin x=\alpha+1>2\end{array}\right.\Leftrightarrow x=h\pi$. Có $x\in(0;2\pi)$, suy ra $h=1$

Vì các nghiệm $g'(x)=0$ đều là nghiệm bội lẻ nên $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Cách 2: Phương pháp "ghép trục": NHẤN VÀO ĐÂY.

Đặt $\sin x - 1 = t \Rightarrow \sin x = t + 1$, khi đó, $f(\sin x - 1) + \dfrac{\cos 2x}{4} = f(t) - \dfrac{2t^2 + 4t + 1}{4}$

Xét hàm số $h(x) = f(x) - \dfrac{2x^2 + 4x + 1}{4}$

Suy ra $h'(x) = f'(x) - x - 1 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x + 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \\ x = \alpha > 1 \end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị, ta có BBT:

x	$-\infty$		-1		1		α		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

$x \in (0; 2\pi) \Rightarrow t \in (-2; 0)$

x	0								2π
t	-1	$\longrightarrow$	0	$\longrightarrow$	-1	$\longrightarrow$	-2	$\longrightarrow$	-1
$h(t)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Chọn đáp án C

Câu 19:

Cách 1:

Ta có: $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 - 25 = 0$

$$\Rightarrow P = \sqrt{(x-7)^2 + (y-9)^2 + z^2} + 2\sqrt{x^2 + (y-8)^2 + z^2}$$

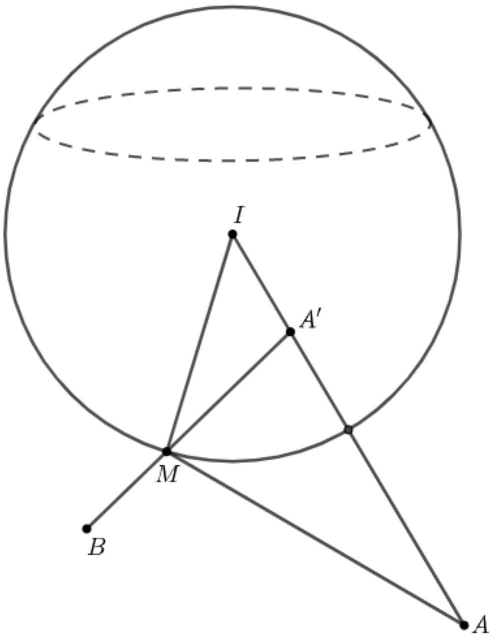
$$= \sqrt{(x-7)^2 + (y-9)^2 + z^2 + 3\left[(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 - 25\right]} + 2\sqrt{x^2 + (y-8)^2 + z^2}$$

$$= 2\sqrt{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y-3)^2 + z^2} + 2\sqrt{x^2 + (y-8)^2 + z^2}$$

$$= 2MA' + 2MB = 2\left(MA' + MB\right) \geq 2A'B = 5\sqrt{5} \text{ với } A'\left(\frac{5}{2}; 3; 0\right).$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $M(1; 6; 0)$

Cách 2:



Ta có: $IA = 10 = 2R$, $IB = 5\sqrt{2}$. Suy ra A, B nằm bên ngoài mặt cầu.

Gọi A' là điểm thuộc IA sao cho: $\overrightarrow{IA'} = \dfrac{\overrightarrow{IA}}{4}$ $\left(IA' = \dfrac{R}{2}\right)$. Suy ra $A'\left(\dfrac{5}{2};3;0\right)$

Xét hai tam giác $\Delta IMA'$ và ΔIAM có chung góc $\widehat{I}$:

$\dfrac{IM}{IA} = \dfrac{IA'}{IM} = \dfrac{1}{2}$, suy ra $\Delta IMA' \backsim \Delta IAM$. Kéo theo $MA = 2MA'$.

Khi đó, $P = MA + 2MB = 2MA' + 2MB \geq 2A'B = 5\sqrt{5}$.

Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi M nằm giữa A' và B.

Chọn đáp án B

Câu 20:

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right) = 1$

$\Rightarrow f(-x) = \log_3\left(\sqrt{4(-x)^2+1}+2(-x)\right) + 3(-x)^{2021} = \log_3\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)^{-1} - 3x^{2021} = -f(x)$

Lại có: $f'(x) = \dfrac{2\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)}{\sqrt{4x^2+1}\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)\ln 3} + 6063x^{2020} > 0$, suy ra $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow f\left(x^2+1\right) + f(-2mx) \geq 0 \Leftrightarrow f\left(x^2+1\right) \geq -f(-2mx) \Leftrightarrow f\left(x^2+1\right) \geq f(2mx) \Leftrightarrow x^2+1 \geq 2mx$

Để bất phương trình đúng với mọi $x \in (0;+\infty)$ thì $m \leq \min\limits_{(0;+\infty)}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2x}\right) = 1$.

Kết hợp điều kiện đề bài, suy ra $m \in \{-2021;-2020;\ldots;1\}$

Vậy, có 2023 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Chọn đáp án A

Câu 21:

Cách 1: Tịnh tiến đồ thị: NHẤN VÀO ĐÂY.

Ta có: $g(x) = f\left(|x-1|^2 - |x-1|\right)$

Xét hàm số $h(x) = f\left(x^2 - x\right)$, có $h'(x) = (2x-1)\,f'\left(x^2 - x\right)$

$$\Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1=0 \\ x^2-x=-1 \\ x^2-x=0 \\ x^2-x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2} \\ x=0 \\ x=1 \\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Dựa vào bảng xét dấu, ta có BBT sau:

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Suy ra

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$h(\lvert x\rvert)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Suy ra

x	$-\infty$		$\frac{-\sqrt{5}}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$		2		$\frac{2+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$h(\lvert x-1\rvert)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Vậy, hàm số $g(x)$ có 7 điểm cực trị.

Cách 2: Phương pháp "ghép trục": NHẤN VÀO ĐÂY.

Theo đề, ta có:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

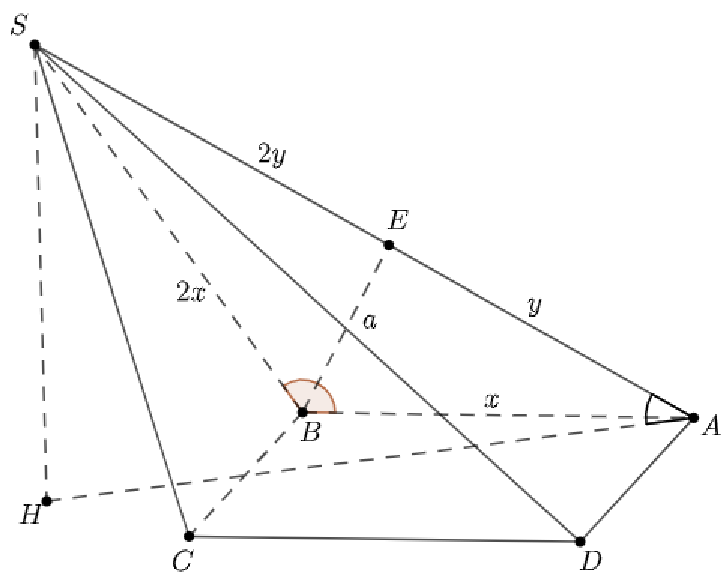
Đặt $t = |x-1|^2 - |x-1|$,

x	$-\infty$								$+\infty$
t	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{-1}{4}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\frac{-1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$
$f(t)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Vậy, hàm số $g(x)$ có 7 điểm cực trị.

Chọn đáp án D

Câu 22:



Đặt $AB = x > 0$, $AE = y > 0$, suy ra $SB = 2AB = 2x$.

SE là phân giác $\widehat{SBA}$, suy ra $\dfrac{AB}{SB} = \dfrac{AE}{SE} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow SE = 2y$.

Áp dụng định lý cos, ta có: $\begin{cases} y^2 &= x^2 + a^2 - ax \\ 4y^2 &= 4x^2 + a^2 - 2ax \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= \dfrac{3a}{2} \\ y &= \dfrac{a\sqrt{7}}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow SA = 3y = \dfrac{3a\sqrt{7}}{2} \Rightarrow SH = SA.\sin 45^\circ = \dfrac{3a\sqrt{14}}{4} \Rightarrow V = \dfrac{1}{3} SH.S_{ABCD} = \dfrac{9\sqrt{14}a^3}{16}$

Chọn đáp án B

Câu 23:

Cách 1:

Ta có: $\sqrt{4^m+3} - 2^m > \sqrt{4^m} - 2^m = 0$ và $\left(\sqrt{4^m+3} - 2^m\right)\left(\sqrt{4^m+3} + 2^m\right) = 3$.

Bất phương trình tương đương: $\sqrt{m^2 - 2m + 4} + 1 - m \geq \sqrt{4^m+3} + 2^m$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(1-m)^2 + 3} + 1 - m \geq \sqrt{4^m+3} + 2^m$$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x^2+3} + x$. Ta có: $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}} + 1 > 0 \ \forall x$

Do đó, $f(1-m) \geq f(2^m) \Leftrightarrow 1 - m \geq 2^m \Leftrightarrow 2^m + m - 1 \leq 0$

Xét hàm số $g(x) = 2^x + x - 1$. Ta có: $g'(x) = 2^x \ln 2 + 1 > 0 \ \forall x$

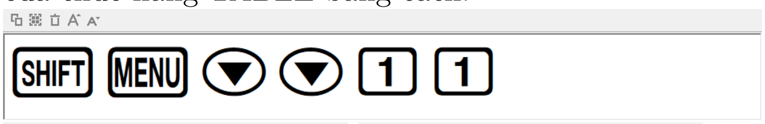
Mà $2^m + m - 1 = g(m) \leq g(0) = 0$ nên $m \leq 0$. Kết hợp điều kiện, suy ra $m \in \{-2020; -2019; ...; 0\}$.

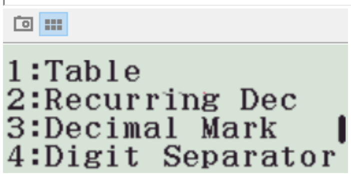
Vậy, có 2021 giá trị nguyên m thỏa mãn.

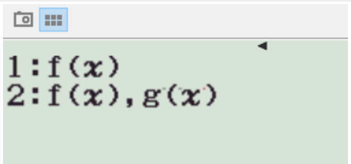
Cách 2:

Chuyển hết về vế trái, ta được: $f(x) = \left(\sqrt{x^2 - 2x + 4} + 1 - x\right)\left(\sqrt{4^x+3} - 2^x\right) - 3 \geq 0$

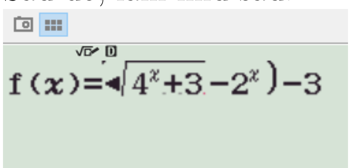
Ta sẽ sử dụng chức năng TABLE (MODE 8) (CASIOFX580VNX), trước tiên, ta tăng khoảng xét của chức năng TABLE bằng cách:

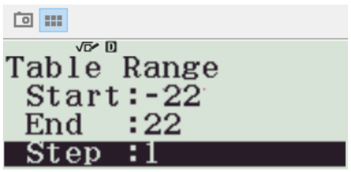


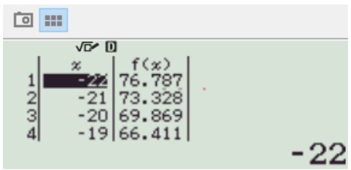


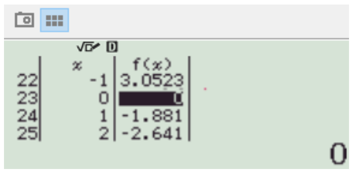


Sau đó, làm như sau:









Quan sát, thấy $f(x)$ đang giảm dần (nghịch biến) và $f(x)=0 \Leftrightarrow x=0$. Suy ra $f(m)\geq 0 \Leftrightarrow m\leq 0$.

Kết hợp điều kiện, suy ra $m\in\{-2020;-2019;...;0\}$.

Vậy, có 2021 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Chọn đáp án A

Câu 24:

Dựa vào đồ thị, suy ra $f(x)=x^4-2x^2+4>0\ \forall x$.

Điều kiện: $\dfrac{f(x)}{mx^2}>0 \Rightarrow m>0$

Cách 1:

Vì nghiệm x dương nên xét trường hợp $x>0$:

$$\log\frac{f(x)}{mx^2}+x\left[f(x)-mx\right]=mx^3-f(x)$$

$$\Leftrightarrow \log\frac{(x+1)f(x)}{(x+1)mx^2}+x\left[f(x)-mx\right]=mx^3-f(x)$$

$$\Leftrightarrow \log(x+1)f(x)+(x+1)f(x)=\log(x+1)mx^2+(x+1)mx^2$$

Xét hàm số $g(x)=\log x+x$ với $x>0$. Ta có: $g'(x)=\dfrac{1}{x\ln 10}+1>0\ \forall x>0$

$$\Rightarrow g\left((x+1)f(x)\right)=g\left((x+1)mx^2\right)\Leftrightarrow (x+1)f(x)=(x+1)mx^2\Leftrightarrow x^4-(m+2)x^2+4=0\ \ (*)$$

Đặt $t=x^2$, suy ra $t^2-(m+2)t+4=0\ \ (**)$

Để $(*)$ có hai nghiệm dương phân biệt thì $(**)$ có hai nghiệm dương phân biệt.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=(m+2)^2-16>0\\ S=m+2>0\\ P=4>0\end{cases}\Leftrightarrow m>2$$

Vậy, có 2019 giá trị nguyên m thỏa mãn.

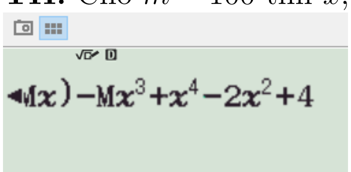
Cách 2: Kĩ thuật "hàm đặc trưng", tìm nghiệm phương trình: NHẤN VÀO ĐÂY.

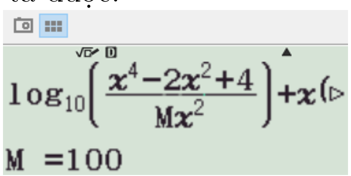
Làm tương tự như các câu trên, ta có:

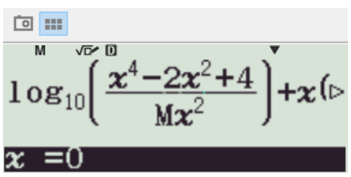
$$\log\frac{x^4-2x^2+4}{mx^2}+x\left[x^4-2x^2+4-mx\right]-mx^3+x^4-2x^2+4=0$$

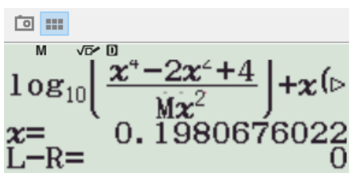
Nhập phương trình vào máy, để thỏa mãn điều kiện bài toán thì $x>0$ và $m>0$, cho $m=100$, tìm x hoặc cho $x=100$, tìm m.

TH: Cho $m=100$ tìm x, ta được:

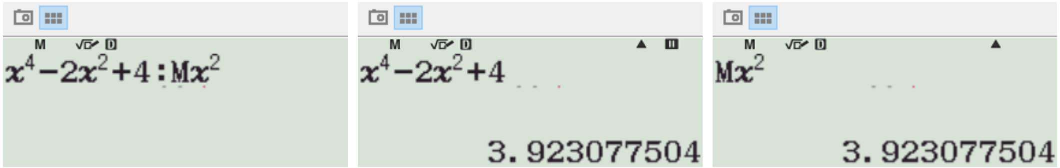








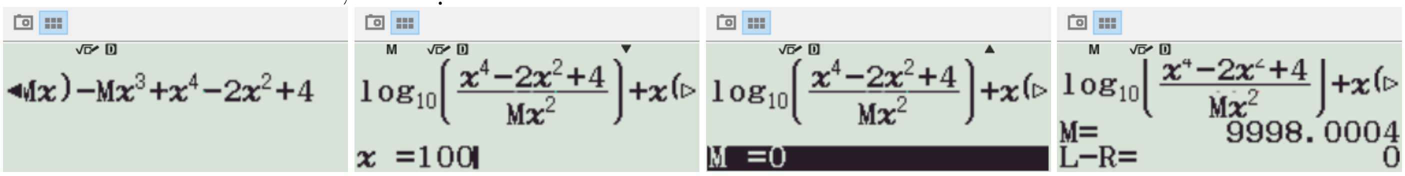
Tiếp tục tìm nghiệm khác thì máy báo vô nghiệm. Sau đó, thử lần lượt các biểu thức của phương trình, ta được:



Suy ra $x^4 - 2x^2 + 4 = mx^2$. Với $x > 0$, suy ra $m = x^2 - 2 + \dfrac{4}{x^2}$.

Hoặc có thể bấm như sau:

TH: Cho $x = 100$ tìm m, ta được:



Ta có: $m = 100^2 - 2 + \dfrac{4}{100^2} = x^2 - 2 + \dfrac{4}{x^2}$. Kết quả tương tự trường hợp trên.

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$x^2 - 2 + \dfrac{4}{x^2}$	$+\infty$ ↘	2	↗ $+\infty$ ‖ $+\infty$ ↘	2	↗ $+\infty$

Suy ra, để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt thì $m > 2$.

Chọn đáp án A

Câu 25:

Cho $x_1 = x_2 = 0$, ta được: $f(0) = \dfrac{1}{3}$.

$$\lim_{h \to 0} \frac{3f(h) - 1}{6h} = \frac{2}{3} \Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h - 0} = \frac{4}{3} \Rightarrow f'(0) = \frac{4}{3}.$$

Cách 1:

Đạo hàm hai vế theo x_1, ta được: $f'(x_1 + x_2) = f'(x_1) + 2x_2(x_1 + x_2) + 2x_1x_2$

Cho $x_1 = 0$, ta được: $f'(x_2) = \dfrac{4}{3} + 2x_2^2$

Đạo hàm hai vế theo x_2 và cho $x_2 = 0$, ta được: $f'(x_1) = \dfrac{4}{3} + 2x_1^2$

Suy ra, $f'(x_1) - 2x_1^2 = f'(x_2) - 2x_2^2 \ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Do đó, $f'(x) - 2x^2 = a = const \Rightarrow f(x) = \dfrac{2x^3}{3} + ax + b$

Có $f(0) = b = \dfrac{1}{3}, f'(0) = a = \dfrac{4}{3}$, suy ra $f(2) = \dfrac{25}{3}$

Cách 2:

Đặt $f(x) = 2g(x) + \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{1}{3}$, ta được: $g(x_1 + x_2) = g(x_1) + g(x_2)\ \ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

Vì f liên tục nên g liên tục, suy ra $g(x) = cx \Rightarrow f(x) = 2cx + \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{1}{3}$

Có $f'(0) = 2c = \dfrac{4}{3}$, suy ra $f(x) = \dfrac{4x}{3} + \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{1}{3}$, kéo theo $f(2) = \dfrac{25}{3}$

Cách 3:

Quan sát vế phải, bậc cao nhất là bậc 3, chọn $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Suy ra $f(0) = d = \dfrac{1}{3}$, $f'(0) = c = \dfrac{4}{3}$.

$VT = a(x_1 + x_2)^3 + b(x_1 + x_2)^2 + \dfrac{4(x_1 + x_2)}{3} + \dfrac{1}{3}$

$VP = ax_1^3 + bx_1^2 + \dfrac{4x_1}{3} + \dfrac{1}{3} + ax_2^3 + bx_2^2 + \dfrac{4x_2}{3} + \dfrac{1}{3} + 2x_1x_2(x_1 + x_2) - \dfrac{1}{3}$

$VT = VP \Leftrightarrow 3ax_1^2x_2 + 3ax_1x_2^2 + 2bx_1x_2 = 2x_1^2x_2 + 2x_1x_2^2$

Đồng nhất hệ số hai vế, ta được $\begin{cases} a = \dfrac{2}{3} \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{4x}{3} + \dfrac{1}{3}$.

Thử lại, thỏa. Suy ra $f(2) = \dfrac{25}{3}$.

Chọn đáp án D

Câu 26:

Cách 1:

Bất phương trình tương đương: $2020\ln(2^n + 3^n) - n\ln\left(2^{2020} + 3^{2020}\right) < 0$

Xét hàm số $f(x) = 2020\ln(2^x + 3^x) - x\ln\left(2^{2020} + 3^{2020}\right)$

Ta có: $f'(x) = \dfrac{2020(2^x\ln 2 + 3^x\ln 3)}{2^x + 3^x} - \ln\left(2^{2020} + 3^{2020}\right) = \dfrac{2^x\ln\dfrac{2^{2020}}{2^{2020} + 3^{2020}} + 3^x\ln\dfrac{3^{2020}}{2^{2020} + 3^{2020}}}{2^x + 3^x}$

Vì $\dfrac{2^{2020}}{2^{2020} + 3^{2020}} < \dfrac{3^{2020}}{2^{2020} + 3^{2020}} < 1$ nên $f'(x) < 0\ \ \forall x \Rightarrow f(n) < 0 = f(2020) \Leftrightarrow n > 2020$

Vậy, có 7979 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Cách 2:

Bất phương trình tương đương: $\dfrac{\ln(2^n + 3^n)}{n} < \dfrac{\ln\left(2^{2020} + 3^{2020}\right)}{2020}$

Xét hàm số $f(n) = \dfrac{\ln(2^n + 3^n)}{n}$ với $n > 0$. Ta có: $f'(n) = \dfrac{2^n\ln\dfrac{2^n}{2^n + 3^n} + 3^n\ln\dfrac{3^n}{2^n + 3^n}}{n^2} < 0\ \ \forall n > 0$

$\Rightarrow f(n) < f(2020) \Leftrightarrow n > 2020.$

Vậy, có 7979 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Chọn đáp án D

Câu 27:

Bất phương trình tương đương: $\log_2\sqrt{x^2-2x+m}+4\sqrt{\log_2\sqrt{x^2-2x+m}}-5\le 0$

Điều kiện: $\begin{cases} x^2-2x+m>0 \\ \log_2\sqrt{x^2-2x+m}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2-2x+m\ge 1$

Đặt $t=\sqrt{\log_2\sqrt{x^2-2x+m}}\ge 0$, bất phương trình trở thành: $t^2+4t-5\le 0 \Leftrightarrow -5\le t\le 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\log_2\sqrt{x^2-2x+m}}\ge 0 \\ \sqrt{\log_2\sqrt{x^2-2x+m}}\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+m\ge 1 \\ 0<x^2-2x+m\le 4 \end{cases} \Leftrightarrow 1\le x^2-2x+m\le 4$$

Để bất phương trình đúng với mọi $x\in[0;2]$ thì

$$\max_{[0;2]}\left(1-x^2+2x\right)\le m\le \min_{[0;2]}\left(4-x^2+2x\right)\Leftrightarrow 2\le m\le 4$$

Suy ra $a+b=6$.

Chọn đáp án D

Câu 28:

Cách 1:

Cho $x_1=x_2$, ta được: $f(1)=1$. Ta có:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f(x).\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x+h)}{f(x)}-1}{h}=f(x).\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\dfrac{x+h}{x}\right)-f(1)}{h}$$

$$=\frac{f(x)}{x}.\lim_{h\to 0}\frac{f\left(1+\dfrac{h}{x}\right)-f(1)}{\dfrac{h}{x}}=\frac{f(x)}{x}.f'(1)=\frac{2f(x)}{x}$$

Cách 2:

Đặt $t=\dfrac{x}{y}$, ta được: $f(ty)=f(t)f(y)\ \ \forall t,y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Vì f có đạo hàm trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ nên f liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và $f(x)\ne 0\ \ \forall x\ne 0$. Suy ra $f(x)=|x|^\alpha$

Có $f'(1)=2\Rightarrow \alpha=2\Rightarrow f(x)=x^2\Rightarrow f'(x)=\dfrac{2f(x)}{x}$

Chọn đáp án D

Câu 29:

Cách 1:

Ta có: $f'(x)-f(x)=\mathrm{e}^x\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x}f'(x)-\mathrm{e}^{-x}f(x)=1\Leftrightarrow \left(\mathrm{e}^{-x}f(x)\right)'=1$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được: $\mathrm{e}^{-x}f(x)=\displaystyle\int \mathrm{d}x=x+C$

Có $f(0)=1\Rightarrow C=1\Rightarrow f(x)=(x+1)\mathrm{e}^x\Rightarrow f(1)=2\mathrm{e}$

Cách 2:

Vì có 2 điều kiện và vế phải là hàm e^x nên chọn $f(x) = (ax+b)e^x$.

Ta có: $f(0) = 1 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow f(x) = (ax+1)e^x \Rightarrow f'(x) = (ax+1+a)e^x$.

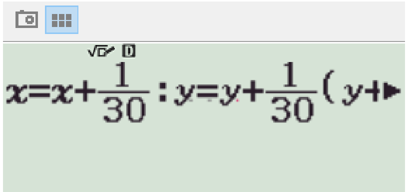
Thay vào, ta được: $(ax+1+a)e^x - (ax+1)e^x = e^x \Leftrightarrow ae^x = e^x$.

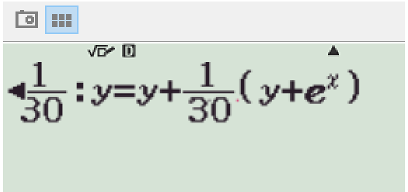
Đồng nhất hệ số hai vế, ta được: $a = 1$. Suy ra $f(x) = (x+1)e^x$.

Thử lại, thỏa. Suy ra $f(1) = 2e$

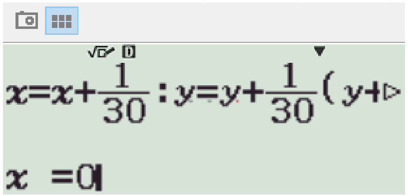
Cách 3: CASIO tích phân hàm ẩn: NHẤN VÀO ĐÂY.

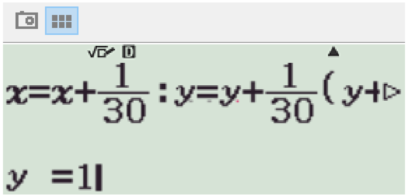
Ta nhập vào máy như sau: (các bạn nhấn vào xem để hiểu cách bấm)



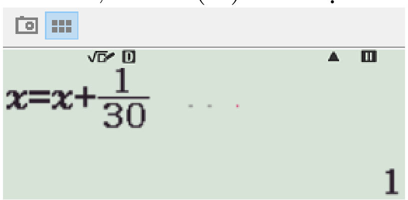


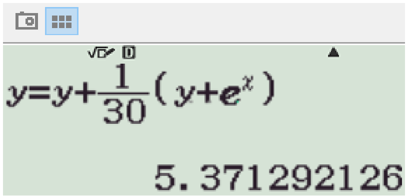
Sau đó, nhấn (CALC), vì $f(0) = 1$ nên cho $x = 0$, $y = 1$:





Sau đó, nhấn (=) liên tục cho đến khi:





Ta được khi $x = 1$ thì $y \approx 5.371$, gần với đáp án **B** nhất.

Chọn đáp án B

Câu 30:

Dựa vào hình vẽ, suy ra: (C) có hai điểm cực trị.

Suy ra, $y' = x^2 - 4mx + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

$$\Delta = 16m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > \frac{1}{2} \\ m < -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Lại có: đường thẳng $d: y = -45m - 2$ song song với Ox.

Do đó, để $S_1 = S_2$ thì d đi qua tâm đối xứng (điểm uốn) của đồ thị (C).

Có $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 2m$

Suy ra, d đi qua điểm $\left(2m; \frac{-16}{3}m^3 + 2m + 1\right)$.

Suy ra $\dfrac{-16}{3}m^3+2m+1=-45m-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=\dfrac{-6\pm\sqrt{33}}{4} \end{array}\right.$.

Kết hợp điều kiện, suy ra $X=\left\{3;\dfrac{-6-\sqrt{33}}{4}\right\}$.

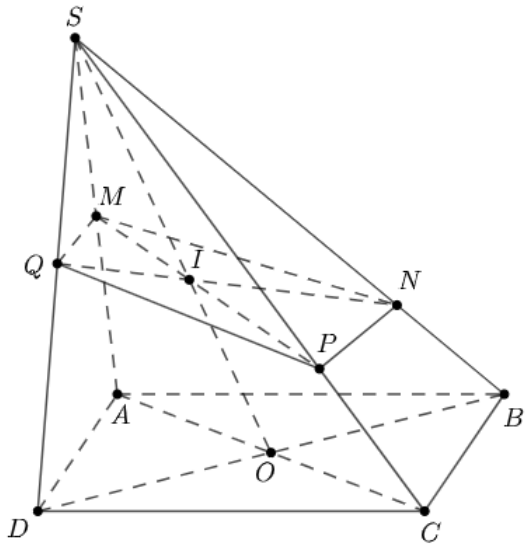
Chọn đáp án B

Câu 31:

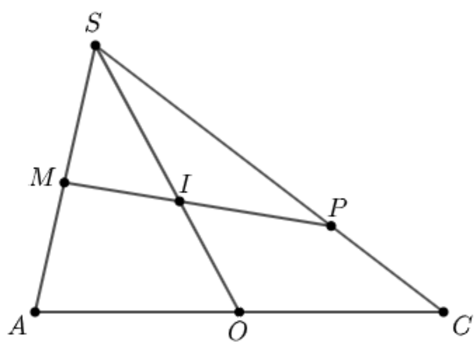
Bài toán tổng quát

Mặt phẳng (α) cắt các cạnh SA,SB,SC,SD, của khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, lần lượt tại M,N,P,Q, đặt $\dfrac{SA}{SM}=a,\dfrac{SB}{SN}=b,\dfrac{SC}{SP}=c,\dfrac{SD}{SQ}=d$. Chứng minh $a+c=b+d$ và $\dfrac{V_{SMNPQ}}{V}=\dfrac{a+b+c+d}{4abcd}$.

Chứng minh công thức $\boxed{a+c=b+d}$



Ta có: $(SAC)\cap(SBD)=SO$, $(SAC)\cap(MNPQ)=MP$ và $(SBD)\cap(MNPQ)=NQ$.
Suy ra S,I,O thẳng hàng.
Xét mặt phẳng (SAC):



$\dfrac{S_{SMI}}{S_{SAO}}=\dfrac{\frac{1}{2}.d(I,SM).SM}{\frac{1}{2}.d(O,SA).SA}=\dfrac{IS}{OS}.\dfrac{SM}{SA}=\dfrac{1}{ao}$ với $\dfrac{SA}{SM}=a,\dfrac{SO}{SI}=o$

Chứng minh tương tự, ta có: $\dfrac{S_{SIP}}{S_{SOC}} = \dfrac{1}{co}$ và $\dfrac{S_{SMP}}{S_{SAC}} = \dfrac{1}{ac}$

Lại có: $\dfrac{S_{SMI}}{S_{SAO}} + \dfrac{S_{SIP}}{S_{SOC}} = 2\left(\dfrac{S_{SMI}}{S_{SAC}} + \dfrac{S_{SIP}}{S_{SAC}}\right) = 2\dfrac{S_{SMP}}{S_{SAC}} \Rightarrow \dfrac{1}{ao} + \dfrac{1}{co} = \dfrac{2}{ac} \Leftrightarrow a + c = 2o.$

Chứng minh tương tự trong mặt phẳng (SBD), ta được: $b + d = 2o$.

Vậy, $\boxed{a + c = b + d}$

Chứng minh công thức $\boxed{\dfrac{V_{SMNPQ}}{V} = \dfrac{a+b+c+d}{4abcd}}$

Từ cách 1, suy ra: $\dfrac{V_{SMNPQ}}{V} = \dfrac{b+d}{2abcd} \Rightarrow \dfrac{2V_{SMNPQ}}{V} = \dfrac{a+b+c+d}{2abcd} \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{V_{SMNPQ}}{V} = \dfrac{a+b+c+d}{4abcd}}$

Cách 1:

Vì đáy là hình bình hành nên ta có: $a + c = b + d \Leftrightarrow 2 + c = \dfrac{4}{3} + d \Leftrightarrow d = c + \dfrac{2}{3}$

$$\frac{V_{SMNPQ}}{V} = \frac{V_{SMPQ}}{2V_{SACD}} + \frac{V_{SMNP}}{2V_{SABC}} = \frac{1}{2}\left(\frac{SM}{SA}\cdot\frac{SP}{SC}\cdot\frac{SQ}{SD} + \frac{SM}{SA}\cdot\frac{SN}{SB}\cdot\frac{SP}{SC}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2cd} + \frac{3}{8c}\right) = \frac{1}{4c}\left(\frac{1}{d} + \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4c}\left(\frac{1}{c+\frac{2}{3}} + \frac{3}{4}\right) = \frac{9(2+c)}{16\left(3c^2+2c\right)}$$

Xét hàm số $f(c) = \dfrac{9(2+c)}{16\left(3c^2+2c\right)}$ với $c \geq 1$. Ta có: $f'(c) = -\dfrac{9\left(3c^2+12c+4\right)}{16\left(3c^2+2c\right)^2} < 0 \;\; \forall c \geq 1$

Suy ra, $f(c) \leq f(1) = \dfrac{27}{80}$. Kéo theo, $V_{SMNPQ} \leq \dfrac{27V}{80}$.

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $P \equiv C$.

Cách 2: Áp dụng cả 2 công thức.

Chọn đáp án B

Câu 32:

Cách 1:

Với mọi $b \in (1;4]$, ta có:

$(b-1)\left(b^2-16\right) \leq 0 \Leftrightarrow b^3 - b^2 - 16b + 16 \leq 0 \Leftrightarrow b^3 \leq b^2 + 16b - 16 \Leftrightarrow 3\log_a b \leq \log_a\left(b^2+16b-16\right)$

$\Rightarrow P \geq 9\log_a b + \dfrac{16}{27}\dfrac{1}{(\log_a b - 1)^3}$

Đặt $t = \log_a b$, ta được:

$$P \geq 9t + \frac{16}{27}\frac{1}{(t-1)^3} = 3(t-1) + 3(t-1) + 3(t-1) + \frac{16}{27}\frac{1}{(t-1)^3} + 9$$

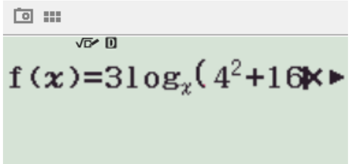
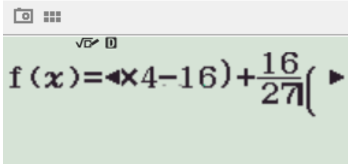
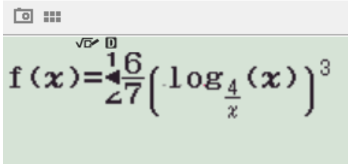
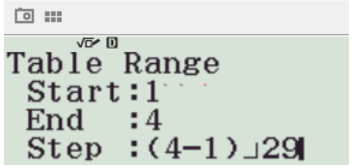
$$\geq 4\sqrt[4]{27(t-1)^3\frac{16}{27}\frac{1}{(t-1)^3}} + 9 = 17$$

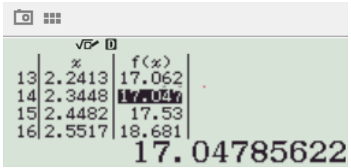
Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} b = 4 \\ 3(t-1) = \dfrac{16}{27}\dfrac{1}{(t-1)^3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4^{\frac{3}{5}} \\ b = 4 \end{cases}$

Cách 2:

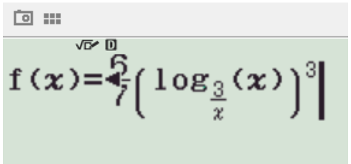
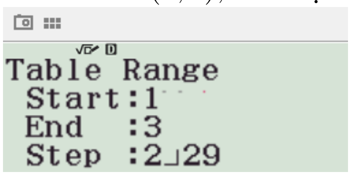
Sử dụng chức năng TABLE (MODE 8) (CASIOFX580VNX):

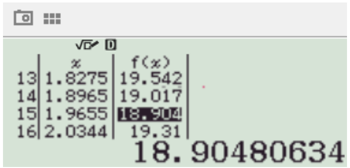
Cho $b = 4 \Rightarrow a \in (1;4)$, ta được:

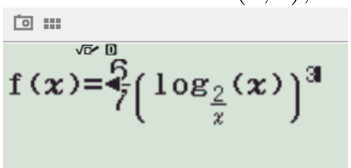
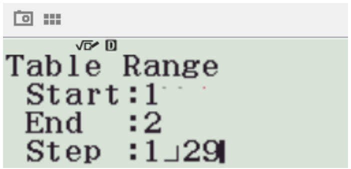


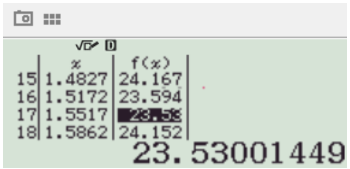
Suy ra $\min P \approx 17$. Cho $b = 3 \Rightarrow a \in (1;3)$, ta được:



Cho $b = 2 \Rightarrow a \in (1;2)$, ta được:

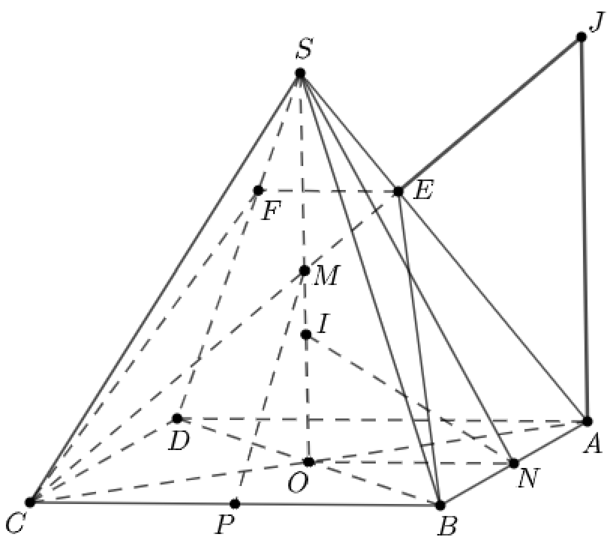



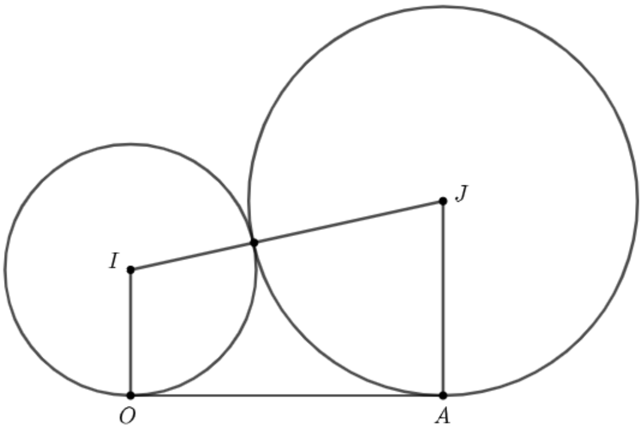


Suy ra, không có giá trị $\min P < 17$.

Chọn đáp án D

Câu 33:





Gọi I, J lần lượt là tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện $S.ABCD$ và mặt cầu (J).

Đặt $AB = a$, $SO = h$, $IO = r$, $JA = R$, khi đó: $OA = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr} \Rightarrow a^2 = 8Rr$

Gọi E, M lần lượt là giao điểm của CJ với SA và SO.

Suy ra CE là đường chéo của thiết diện, kéo theo, $CE \perp SA$

Xét ΔMOC và ΔAOS có: $\begin{cases} \widehat{MOC} = \widehat{AOS} = 90^\circ \\ \widehat{CMO} = \widehat{SAO} \end{cases}$, suy ra $\Delta MOC \backsim \Delta AOS$.

Suy ra $\dfrac{MO}{AO} = \dfrac{OC}{OS}$, kéo theo $OM = \dfrac{OA.OC}{OS} = \dfrac{4Rr}{h}$

Lại có: OM đường trung bình ΔCAJ, suy ra $OM = \dfrac{AJ}{2} = \dfrac{R}{2} = \dfrac{4Rr}{h} \Rightarrow h = 8r$.

Gọi N, P lần lượt là trung điểm AB, BC.

Có NI là phân giác $\widehat{ONS}$, suy ra $\dfrac{OI}{IS} = \dfrac{ON}{NS} \Rightarrow \dfrac{OI}{ON} = \dfrac{IS}{NS} = \dfrac{OI+IS}{ON+NS} = \dfrac{OS}{ON+NS}$

$$\Rightarrow \frac{2r}{a} = \frac{h}{\dfrac{a}{2} + \sqrt{h^2 + \dfrac{a^2}{4}}} \Leftrightarrow \frac{2r}{a} = \frac{8r}{\dfrac{a}{2} + \sqrt{64r^2 + \dfrac{a^2}{4}}} \Rightarrow \frac{a}{r} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Lại có: $BC \perp (MOP)$, suy ra $\tan\varphi = \dfrac{OM}{OP} = \dfrac{8Rr}{ha} = \dfrac{R}{a} = \dfrac{a}{8r} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Chọn đáp án C

Câu 34:

Tịnh tiến đồ thị: NHẤN VÀO ĐÂY.

Dựa vào BBT, suy ra:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x-1)+2$	$-\infty$	$\nearrow$	6	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Từ giả thiết, suy ra $f(x)=x^3-3x+2 \Rightarrow |f(0)+2|=4$

x	$-\infty$		0	1	2	$+\infty$
$\lvert f(x-1)+2\rvert$	$+\infty$ ↘	0 ↗	6 ↘	4 ↘	2 ↗	$+\infty$

Để phương trình có 4 nghiệm thỏa mãn $x_1<x_2<x_3<1<x_4$ thì $4<m<6$

Chọn đáp án A

Câu 35:

Cách 1:

Vì $f(x)>0\ \forall x>0$, ta có:

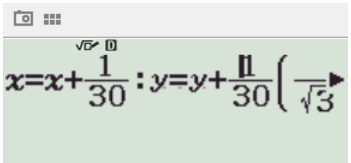
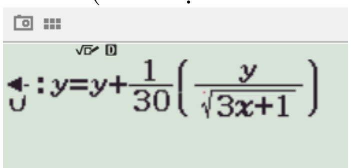
$$f(x)=f'(x)\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{3x+1}} \Leftrightarrow (\ln f(x))'=\frac{1}{\sqrt{3x+1}}$$

Nguyên hàm hai vế, ta được: $\ln f(x)=\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x=\frac{2\sqrt{3x+1}}{3}+C$

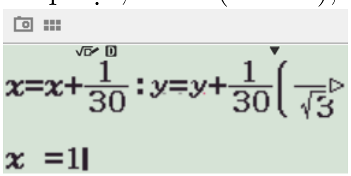
Lại có: $f(1)=\mathrm{e}$, suy ra $C=-\dfrac{1}{3}$, kéo theo $f(5)=\sqrt[3]{\mathrm{e}^7}$

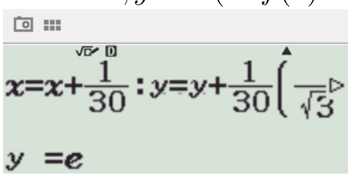
Cách 2: CASIO tích phân hàm ẩn: NHẤN VÀO ĐÂY.

Ta nhập vào máy tính như sau: (Các bạn nhấn vào link xem để hiểu cách bấm)

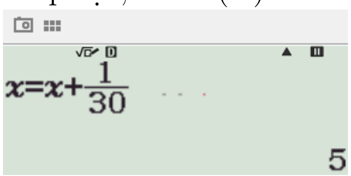



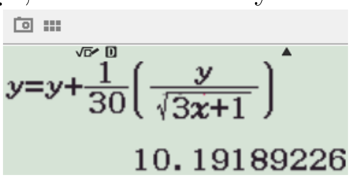
Tiếp tục, nhấn (CALC), cho $x=1, y=\mathrm{e}$ (vì $f(1)=\mathrm{e}$):





Tiếp tục, nhấn (=) liên tục, cho đến khi thấy:





Chọn đáp án C

Câu 36:

Dễ thấy $x=-4$ không phải nghiệm của phương trình, khi đó:

$$m(x+4)\sqrt{x^2+2}=5x^2+8x+24 \Leftrightarrow m=\frac{5x^2+8x+24}{(x+4)\sqrt{x^2+2}}=\frac{4\sqrt{x^2+2}}{x+4}+\frac{x+4}{\sqrt{x^2+2}}$$

Cách 1:

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{5x^2+8x+24}{(x+4)\sqrt{x^2+2}}$ với $x\neq -4$. Ta có: $f'(x)=\dfrac{2\left(6x^3-19x^2-8x+8\right)}{(x+4)^2\sqrt{(x^2+2)^3}}$

x	$-\infty$		-4		$\frac{4-2\sqrt{10}}{3}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{4+2\sqrt{10}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-5	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	$\frac{13}{3}$	↘	4	↗	5

Để phương trình có 4 nghiệm phân biệt thì $4<m<\dfrac{13}{3}$

Vậy, $a+b=\dfrac{25}{3}$.

Cách 2: Phương pháp "ghép trục": NHẤN VÀO ĐÂY.

Đặt $t=\dfrac{\sqrt{x^2+2}}{x+4}\Rightarrow m=4t+\dfrac{1}{t}$. Ta có: $t'=\dfrac{2(2x-1)}{(x+4)^2\sqrt{x^2+2}}$.

x	$-\infty$		-4		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
t'		$-$	‖	$-$	0	$+$	
t	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{1}{3}$	↗	1

Xét hàm số $g(x)=4x+\dfrac{1}{x}$. Ta có:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	↗	-4	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

x									
t	-1 ↘	$-\infty$	‖ $+\infty$ ↘	$\frac{1}{2}$	↘	$\frac{1}{3}$	↗	$\frac{1}{2}$	↗ 1
$g(t)$	-5 ↘	$-\infty$	‖ $+\infty$ ↘	4	↗	$\frac{13}{3}$	↘	4	↗ 5

Để phương trình có 4 nghiệm phân biệt thì $4 < m < \dfrac{13}{3}$

Vậy, $a + b = \dfrac{25}{3}$.

Chọn đáp án Ⓑ

Câu 37:

Cách 1:

Ta có: $g'(x) = 4x\left(2f'\left(x^2-4\right) + x^2 - 4\right) \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'\left(x^2-4\right) = -\dfrac{x^2-4}{2} \end{array}\right.$

Đặt $t = x^2 - 4 \Rightarrow f'(t) = -\dfrac{t}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = 0 \\ t = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\sqrt{2} \\ x = \pm 2 \\ x = \pm 2\sqrt{2} \end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị, ta có: $f'(t) + \dfrac{t}{2} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < t < 0 \\ t > 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < x < -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} < x < 2 \\ x < -2\sqrt{2} \\ x > 2\sqrt{2} \end{array}\right.$

x	$-\infty$		$-2\sqrt{2}$		-2		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		2		$2\sqrt{2}$		$+\infty$
x		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$f'\left(x^2-4\right) + \dfrac{x^2-4}{2}$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Vậy, hàm số $g(x)$ có 4 điểm cực tiểu.

Cách 2: Phương pháp "ghép trục": NHẤN VÀO ĐÂY.

Đặt $t = x^2 - 4$, ta có: $4f\left(x^2-4\right) + x^4 - 8x^2 = 4f(t) + t^2 - 16 = h(t)$

Xét hàm số $h(x) = 4f(x) + x^2 - 16$. Ta có: $h'(x) = 4f'(x) + 2x = \left(f'(x) + \dfrac{x}{2}\right)$

x	$-\infty$		-2		0		4		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Suy ra

x	$-\infty$									$+\infty$
t	$+\infty$			$\longrightarrow$		-4		$\longrightarrow$		$+\infty$
$h(t)$		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$ $\nearrow$	

Vậy, hàm số $g(x)$ có 4 điểm cực tiểu.

Chọn đáp án A

Câu 38:

Tìm tọa độ điểm I sao cho: $4\overrightarrow{IA} + 5\overrightarrow{IB} - 6\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = \dfrac{4\overrightarrow{OA} + 5\overrightarrow{OB} - 6\overrightarrow{OC}}{4+5-6} \Rightarrow I(5;7;4) \equiv D$

$$\begin{aligned}\text{Khi đó, } T &= 4\left|\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA}\right|^2 + 5\left|\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB}\right|^2 - 6\left|\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}\right|^2 + MD^4 \\ &= 3MD^2 + 2\overrightarrow{MD}\left(4\overrightarrow{DA} + 5\overrightarrow{DB} - 6\overrightarrow{DC}\right) + 4DA^2 + 5DB^2 - 6DC^2 + MD^4 \\ &= 3MD^2 + MD^4 + 4DA^2 + 5DB^2 - 6DC^2\end{aligned}$$

Ta có: $4DA^2 + 5DB^2 - 6DC^2 = const$, do đó, để T đạt GTNN thì $3MD^2 + MD^4$ đạt GTNN.

Khi và chỉ khi, MD đạt GTNN. Lại có: $MD \geq d(D,(Oxy))$.

Do đó, MD nhỏ nhất, khi và chỉ khi, M là hình chiếu của D trên (Oxy).

Suy ra $M(5;7;0)$.

Chọn đáp án C

Câu 39:

Ta có: $2f(x)+xf'(x)=3x+10 \Leftrightarrow 2xf(x)+x^2f'(x)=3x^2+10x \Leftrightarrow (x^2f(x))'=3x^2+10x$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được: $x^2f(x)=\int\left(3x^2+10x\right)\mathrm{d}x=x^3+5x^2+C$

Có $f(1)=6 \Rightarrow C=0 \Rightarrow f(x)=x+5$

$$\Rightarrow \int\limits_{-1}^{4}\frac{\ln\left(2+\sqrt{f(x)}\right)}{f^2(x)-6f(x)+9}\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{4}\frac{\ln\left(2+\sqrt{x+5}\right)}{(x+2)^2}\mathrm{d}x=I$$

Đặt $\begin{cases} u=\ln\left(2+\sqrt{x+5}\right) \\ \mathrm{d}v=\dfrac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x+5}\left(2+\sqrt{x+5}\right)} \\ v=-\dfrac{1}{x+2}+1=\dfrac{x+1}{x+2} \end{cases}$

$$\Rightarrow I=\frac{x+1}{x+2}\ln\left(2+\sqrt{x+5}\right)\Bigg|_{-1}^{4}-\int\limits_{-1}^{4}\frac{x+1}{x+2}.\frac{1}{2\sqrt{x+5}\left(2+\sqrt{x+5}\right)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{5}{6}\ln 5-\int\limits_{-1}^{4}\frac{\sqrt{x+5}-2}{x+2}.\frac{1}{2\sqrt{x+5}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{5}{6}\ln 5-\int\limits_{-1}^{4}\frac{\sqrt{x+5}-2}{x+5-3}\mathrm{d}\left(\sqrt{x+5}\right)$$

$$=\frac{5}{6}\ln 5-\int\limits_{2}^{3}\frac{t-2}{t^2-3}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{5}{6}\ln 5-\frac{1}{2}\ln\left|t^2-3\right|\Bigg|_{2}^{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right|\Bigg|_{2}^{3}=\frac{5}{6}\ln 5-\frac{1}{2}\ln 6+\sqrt{\frac{1}{3}}\ln\left(2+\sqrt{3}\right)\Rightarrow a+b+c=\frac{2}{3}$$

Chọn đáp án C

Câu 40:

Điều kiện: $x+y^2>0 \Rightarrow x>-y^2 \Rightarrow x\in\left(-y^2;+\infty\right)$

Xét hàm số $f(x)=2^{y-x}-\log_3\left(x+y^2\right)\geq 0$.

Ta có: $f'(x)=-2^{y-x}\ln 2-\dfrac{1}{(x+y^2)\ln 3}<0\ \ \forall x\in\left(-y^2;+\infty\right)$

Để với mỗi $y\in S$ có đúng 10 số nguyên x thỏa mãn thì:

$$f\left(-y^2+1\right)>f\left(-y^2+2\right)>...>f\left(-y^2+10\right)\geq 0>f\left(-y^2+11\right)$$

Tức là: $\begin{cases} f\left(-y^2+10\right)\geq 0 \\ f\left(-y^2+11\right)<0 \\ y\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2+y-10-\log_2\left(\log_3 10\right)\geq 0 \\ y^2+y-11-\log_2\left(\log_3 11\right)<0 \\ y\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-4 \\ y=3 \end{array}\right.$

Suy ra, $S=\{-4;3\}$. Kéo theo, tổng các phần tử của S bằng -1.

Chọn đáp án D

Câu 41:

Với mọi $x>0,\ f(x)\neq 0$, ta có:

$$f'(x)=(2x+1)f^2(x)\Leftrightarrow -\frac{f'(x)}{f^2(x)}=-2x-1\Leftrightarrow \left(\frac{1}{f(x)}\right)'=-2x-1.$$

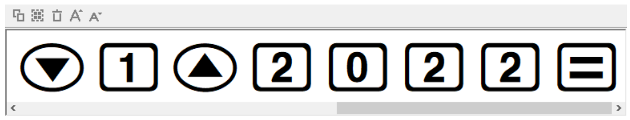
Lấy nguyên hàm hai vế, ta được: $\dfrac{1}{f(x)}=\displaystyle\int(-2x-1)\,\mathrm{d}x=-x^2-x+C$

Có $f(1)=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x)=-\dfrac{1}{x^2+x}\quad \forall x>0$

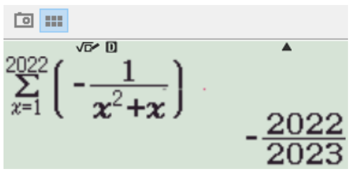
Hay $f(x)=-\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)$. Do đó,

$$f(1)+f(2)+\ldots+f(2022)=-\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2022}-\frac{1}{2023}\right)=-\left(1-\frac{1}{2023}\right)=-\frac{2022}{2023}$$

Hoặc có thể bấm như sau:



Ta được:



Chọn đáp án D

Câu 42:

Tịnh tiến đồ thị: NHẤN VÀO ĐÂY.

Xét hàm số $h(x)=f(x)+3x$, có $h'(x)=f'(x)+3=f'(x)-(-3)$.

Dựa vào hình vẽ, ta có BBT sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	

Suy ra

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$h(\lvert x\rvert)$		$\searrow$		$\nearrow$	$h(0)$	$\searrow$		$\nearrow$	

Lại có: $h(0) = f(0) < 0$, suy ra:

x	$-\infty$				0				$+\infty$
$\lvert h(\lvert x\rvert)\rvert$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\searrow$	$\lvert h(0)\rvert$	$\nearrow$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Suy ra $m = 2, n = 3 \Rightarrow m^n = 8$

Chọn đáp án B

Câu 43:

Ta có: $f(x) \le 6 \ \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow T \le 103.6 + 234.6 = 2022 = M$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} a^2 + a + 1 = 3 \\ af(b) + bf(a) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 1 \\ f(b) = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} a = -2 \\ f(b) = -\dfrac{3}{2} \end{cases} \end{array}\right.$

TH1: $a = 1$ và $f(b) = 3$, quan sát đồ thị, ta có $f(b) = 3$ có 4 nghiệm b phân biệt.

TH2: $a = -2$ và $f(b) = -\dfrac{3}{2}$, quan sát đồ thị, ta có $f(b) = -\dfrac{3}{2}$ có 4 nghiệm b phân biệt.

Do đó, có 8 cặp $(a;b)$ thỏa mãn, suy ra $m = 8$.

Vậy, $\dfrac{M}{m} = \dfrac{1011}{4}$.

Chọn đáp án A

Câu 44:

Tập xác định $D = \mathbb{R}$

Ta có: $f(-x) = 2^{-x} - 2^x - 2022x^3 = -f(x) \ \ \forall x \in D$

Lại có: $f'(x) = 2^x \ln 2 + 2^{-x} \ln 2 + 6066x^2 > 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$

Khi đó, $f\left(4^x - mx + 37m\right) + f\left((x - m - 37)2^x\right) \ge 0 \Leftrightarrow f\left(4^x - mx + 37m\right) \ge -f\left((x - m - 37)2^x\right)$

$$\Leftrightarrow f\left(4^x - mx + 37m\right) \ge f\left((-x + m + 37)2^x\right)$$

$$\Leftrightarrow 4^x - mx + 37m \ge (-x + m + 37)2^x$$

$$\Leftrightarrow (2^x - m)(2^x + x - 37) \ge 0$$

Ta có:

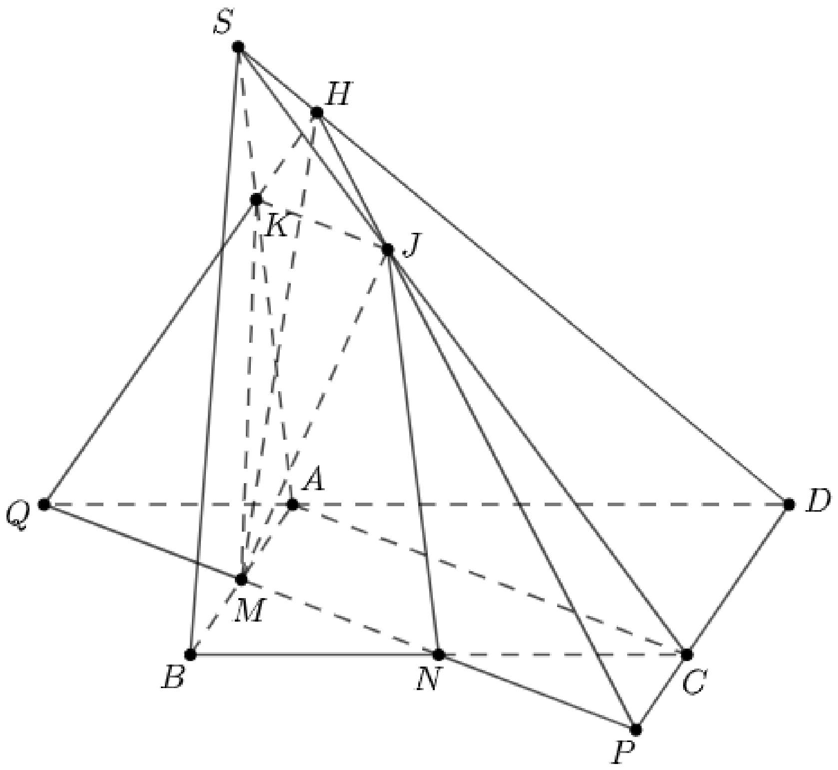
x	$-\infty$		5		$+\infty$
$2^x + x - 37$		$-$	0	$+$	

Lại có: $(2^x - m)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $(2^x - m)$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua $x = 5$.

Tức là $x = 5$ là nghiệm của phương trình $2^x - m = 0$ hay $m = 2^5 = 32$.

Chọn đáp án A

Câu 45:



Gọi $P = HJ \cap CD$, $N = MP \cap BC$, $Q = MP \cap AD$, $K = HQ \cap SA$.

Ta sẽ chứng minh N là trung điểm BC.

Hướng 1: Vẽ $JF \parallel CD$, $F \in SD$. Khi đó: $\dfrac{JF}{PD} = \dfrac{2}{9}$ và $\dfrac{JF}{CD} = \dfrac{1}{3}$. Suy ra $PC = \dfrac{CD}{2}$.

Hướng 2: Áp dụng định lí Menelaus (SBT Hình 10 Nâng cao), ta có:

H, J, P thẳng hàng khi và chỉ khi $\dfrac{HD}{HS} \cdot \dfrac{JS}{JC} \cdot \dfrac{PC}{PD} = 1 \Rightarrow PC = \dfrac{PD}{3} \Rightarrow PC = \dfrac{CD}{2}$

Do đó, N là trung điểm BC, kéo theo, $MN \parallel AC$.

Lại có: $(PHQ) \cap (SAC) = KJ$, $(PHQ) \cap (ABCD) = MN$, $(SAC) \cap (ABCD) = AC$

Mà $MN \parallel AC$, suy ra $MN \parallel AC \parallel KJ$.

Suy ra, $\dfrac{SK}{SA} = \dfrac{SJ}{SC} = \dfrac{1}{3}$

Ta có: $V_{SHKMNJ} = V_{SHKJ} + V_{SKMJ} + V_{SJMB} + V_{JMNB}$

$$\frac{V_{SHKJ}}{V_{SDAC}} = \frac{SH}{SD} \cdot \frac{SK}{SA} \cdot \frac{SJ}{SC} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{63} \Rightarrow V_{SHKJ} = \frac{1}{63} . V_{SDAC} = \frac{1}{63} \cdot \frac{V}{2} = \frac{V}{126}$$

$$\frac{V_{SKMJ}}{V_{SAMC}} = \frac{SK}{SA} \cdot \frac{SM}{SM} \cdot \frac{SJ}{SC} = \frac{1}{3} . 1 . \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \Rightarrow V_{SKMJ} = \frac{1}{9} . V_{SAMC} = \frac{1}{9} \cdot \frac{V}{4} = \frac{V}{36}$$

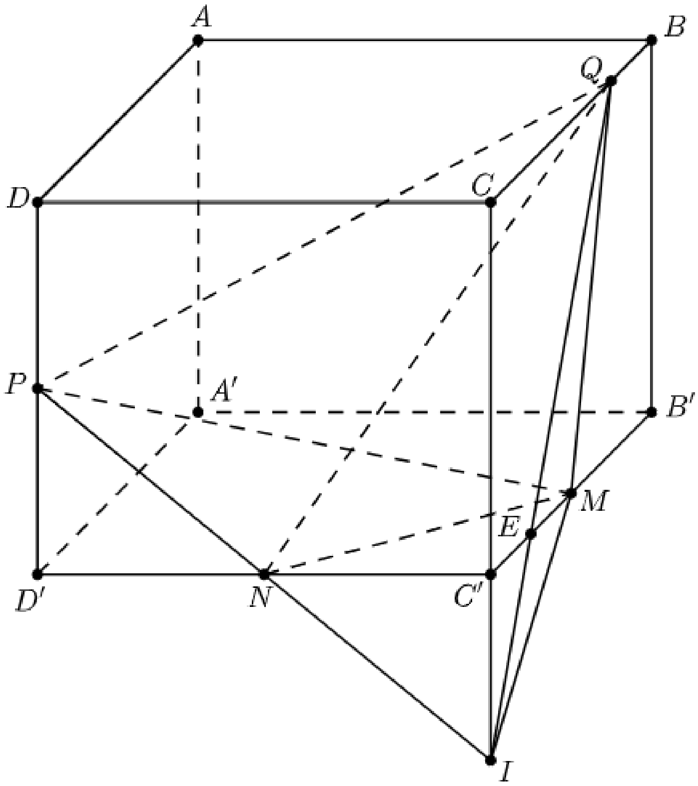
$\dfrac{V_{SJMB}}{V_{SCMB}} = \dfrac{SJ}{SC}.\dfrac{SM}{SM}.\dfrac{SB}{SB} = \dfrac{1}{3}.1.1 = \dfrac{1}{3} \Rightarrow V_{SJMB} = \dfrac{1}{3}.V_{SCMB} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{V}{4} = \dfrac{V}{12}$

$V_{JMNB} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{2h}{3}.\dfrac{S}{8} = \dfrac{V}{12}$

$\Rightarrow V_{SHKMNJ} = \dfrac{17V}{84} = 17a^3$

Chọn đáp án A

Câu 46:



Cách 1:

Gọi $I = PN \cap CC'$, $E = IQ \cap B'C'$.

Vì N, P lần lượt là trung điểm của $C'D'$, DD' nên N là trung điểm của IP, kéo theo, $IN = NP$ và $IC' = D'P = \dfrac{CC'}{2}$.

Suy ra $S_{MNP} = S_{MNI} \Rightarrow V_{QMNP} = V_{QMNI} = \dfrac{1}{3}.d(N,(IMQ)).S_{IMQ}$.

Ta có: $\Delta A'B'C'$ đều nên $d\left(D',(BCC'B')\right) = d\left(A',(BCC'B')\right) = A'M$.

Có $NC' = \dfrac{D'C'}{2}$, suy ra $d(N,(IMQ)) = d\left(N,(BCC'B')\right) = \dfrac{d(D',(BCC'B'))}{2} = \dfrac{A'M}{2}$.

Có $C'E \parallel CQ$, suy ra $\dfrac{C'E}{CQ} = \dfrac{IE}{IQ} = \dfrac{IC'}{IC} = \dfrac{1}{3}$.

Suy ra $IE = \dfrac{QE}{2}$ và $C'E = \dfrac{CQ}{3} = \dfrac{\frac{3CB}{4}}{3} = \dfrac{\frac{3.2C'M}{4}}{3} = \dfrac{C'M}{2}$. Do đó, $EM = \dfrac{C'M}{2} = \dfrac{C'B'}{4}$

Lại có: $S_{IMQ} = S_{IME} + S_{EMQ} = \dfrac{S_{EMQ}}{2} + S_{EMQ} = \dfrac{3}{2}S_{EMQ} = \dfrac{3}{2}.\dfrac{1}{2}.BB'.EM = \dfrac{3}{2}.\dfrac{1}{2}.BB'.\dfrac{C'B'}{4}$

$\Rightarrow V_{QMNP} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{A'M}{2}.\dfrac{3}{2}.\dfrac{1}{2}.BB'.\dfrac{C'B'}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

Cách 2:

Ta có: $A'M \perp B'C'$. Cho $A'(0;0;0)$, suy ra: $M\left(2\sqrt{3};0;0\right)$, $N\left(\sqrt{3};3;0\right)$, $P(0;4;1)$, $Q\left(2\sqrt{3};-1;2\right)$.

Suy ra $V_{MNPQ} = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right].\overrightarrow{MQ}\right| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

Chọn đáp án D

Câu 47:

Ta có: $g'(x) = f'(x+1)$ và $(x-1)g'(x+3) = (x+1)g'(x+2)$

Suy ra: $(x-1)f'(x+4) = (x+1)f'(x+3)$

Cho $x = 1$, ta được: $f'(4) = 0$

Cho $x = -1$, ta được: $f'(3) = 0$

Suy ra $f'(x) = k(x-3)(x-4)$

Lại có: $y' = (4x-4)f'\left(2x^2-4x+5\right) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x-4=0 \\ 2x^2-4x+5=3 \\ 2x^2-4x+5=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=1 \text{ (nghiệm kép)} \\ x=\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$.

Vậy, hàm số $y = f\left(2x^2-4x+5\right)$ có 3 điểm cực trị.

Chọn đáp án B

Câu 48:

Đặt $1-t = \dfrac{1-x}{x+2} \Rightarrow x = \dfrac{2t-1}{2-t}$, $t \neq 2 \Rightarrow f(1-t) = t-m$.

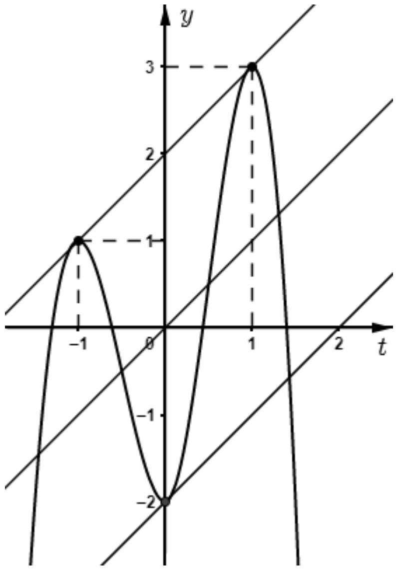
Xét hàm số $t = 1 - \dfrac{1-x}{x+2}$, $\forall x \neq -2$, ta có:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$h(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	2

Suy ra với mỗi $t \neq 2$, phương trình $t = 1 - \dfrac{1-x}{x+2}$ có một nghiệm x tương ứng.

Do đó, để phương trình $f\left(\dfrac{1-x}{x+2}\right) - \dfrac{2x+1}{x+2} + m = 0$ có đúng 4 nghiệm phân biệt thì phương trình $f(1-t) = t-m$ có đúng 4 nghiệm $t \neq 2$ phân biệt.

Lại có: Đường thẳng $y = t - m$ song song với đường thẳng $y = t$ và cắt trục tung tại điểm $(0; -m)$



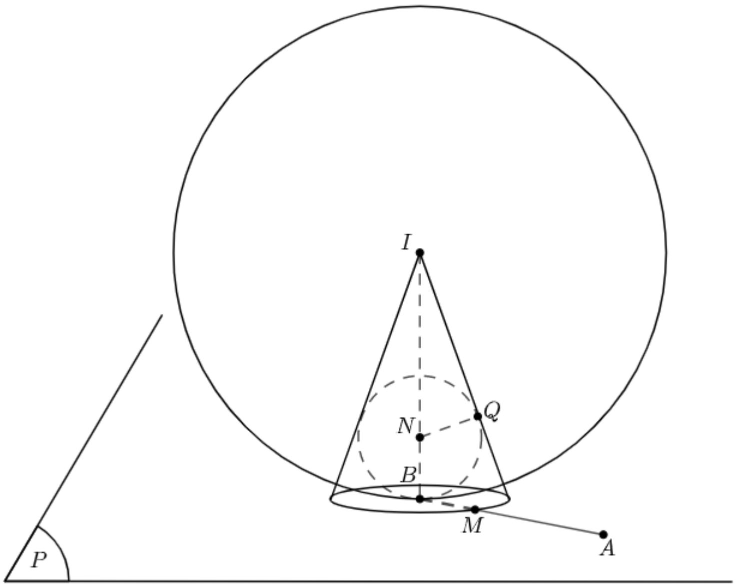
Suy ra, để phương trình $f(1-t) = t - m$ có đúng 4 nghiệm $t \neq 2$ phân biệt thì $-2 < -m < 2$.

Hay $-2 < m < 2$. Kết hợp điều kiện, suy ra $m \in \{-1; 0; 1\}$.

Vậy, có 3 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Chọn đáp án A

Câu 49:



Gọi N là tâm đường tròn (S_2).

Ta có: $\overrightarrow{IN} = (1; -2; -2) \Rightarrow IN = 3 = R_1 - R_2$ với R_1, R_2 lần lượt là bán kính của (S_1), (S_2).

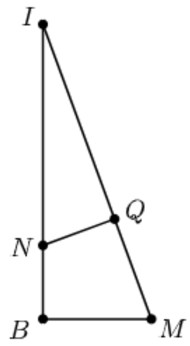
Suy ra, (S_2) tiếp xúc trong với (S_1) tại B. Khi đó, $\overrightarrow{NI} = -3\overrightarrow{NB} \Rightarrow B\left(\frac{4}{3}; -\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

Ta có: (P) tiếp xúc với cả hai mặt cầu (S_1), (S_2). Suy ra, (P) đi qua B và nhận $\overrightarrow{IN}$ làm VTPT.

Suy ra, $(P): x - 2y - 2z - 6 = 0$.

Để $M \in (P)$ và MI tiếp xúc với (S_2) thì M nằm trên đường tròn đáy của hình nón ngoại tiếp mặt cầu (S_2).

Xét ΔIBM:



Xét ΔNQI và ΔMBI có $\widehat{I}$ chung, $\widehat{NQI} = \widehat{MBI} = 90^\circ$

Suy ra $\Delta NQI \backsim \Delta MBI \Rightarrow \dfrac{IQ}{IB} = \dfrac{NQ}{BM} \Rightarrow BM = \sqrt{2}$. Suy ra $M \in \left(B; \sqrt{2}\right)$.

Lại có: $x_A - 2y_A - 2z_A - 6 = 0 \Rightarrow A \in (P)$.

Mà $BA = 4\sqrt{2} > BM$, vì vậy, để AM ngắn nhất thì M nằm giữa B và A.

Khi đó, $\overrightarrow{MA} = -3\overrightarrow{MB} \Rightarrow M\left(\dfrac{4}{3}; -\dfrac{2}{3}; -\dfrac{5}{3}\right) \Rightarrow T = a + b + c = -1$.

Chọn đáp án (B)

Câu 50:

Điều kiện: $y + z \neq 0 \Rightarrow y \neq -z \Rightarrow -z \leq 0 \Rightarrow z \geq 0$

$(y+z)\left(3^x - 81^{\frac{1}{y+z}}\right) = xy + xz - 4 \Leftrightarrow 3^x - 3^{\frac{4}{y+z}} = x - \dfrac{4}{y+z} \Leftrightarrow 3^x - x = 3^{\frac{4}{y+z}} - \dfrac{4}{y+z}$

> Ta cũng có thể áp dụng Casio bằng cách đặt $A = y + z$ rồi bấm như những câu trên, nhưng phải cho A và x phù hợp điều kiện thì mới dịch kết quả dễ dàng được. Đối với những bài biến đổi ngắn, dễ thấy dạng thì làm tay vẫn hiệu quả hơn.

Xét hàm số $f(t) = 3^t - t$ với $t > 0$. Ta có: $f'(t) = 3^t \ln 3 - 1 > 0, \ \forall t > 0$.

$\Rightarrow f(x) = f\left(\dfrac{4}{y+z}\right) \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{y+z}$

Hướng 1:

Áp dụng BĐT CBS, ta có: $(y+z)^2 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{2}y + z\right)^2 \leq \dfrac{3}{2}\left(2y^2 + z^2\right) \Leftrightarrow \left(2y^2 + z^2\right) \geq \dfrac{2}{3}(y+z)^2$

$$\Rightarrow \log_{\sqrt{2}} x + \log_2\left(2y^2 + z^2\right) = 2\log_2 \dfrac{4}{y+z} + \log_2\left(2y^2 + z^2\right)$$

$$\geq 4 - 2\log_2(y+z) + \log_2 \dfrac{2}{3}(y+z)^2 \geq 5 - \log_2 3$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $y = \dfrac{z}{2} = 1$

Hướng 2:

$$\Rightarrow \log_{\sqrt{2}} x+\log_2\left(2y^2+z^2\right)=2\log_2\frac{4}{y+z}+\log_2\left(2y^2+z^2\right)=\log_2\left(\frac{16\left(2y^2+z^2\right)}{y^2+2yz+z^2}\right)$$

Vì $y\in\mathbb{N}^*$ nên ta có: $\dfrac{16\left(2y^2+z^2\right)}{y^2+2yz+z^2}=\dfrac{16\left(2+\left(\dfrac{z}{y}\right)^2\right)}{1+2\left(\dfrac{z}{y}\right)+\left(\dfrac{z}{y}\right)^2}=\dfrac{32+16u^2}{1+2u+u^2}$, với $u=\dfrac{z}{y}\geq 0$

> Ở đây, dùng Table xét thì nhanh hơn làm tay. Hoặc tìm nghiệm $g'(u)=0$ rồi thay vào như **Câu 1**.

Xét hàm số $g(u)=\dfrac{32+16u^2}{1+2u+u^2}$ với $u\geq 0$. Ta có: $g(u)\geq g(2)=\dfrac{32}{3}$

$\Rightarrow \log_{\sqrt{2}} x+\log_2\left(2y^2+z^2\right)\geq \log_2\dfrac{32}{3}=5-\log_2 3$

Chọn đáp án B

Câu 51:

Ta có: $2^{3^m}.7^{x^2-2x}+7^{3^m}.2^{x^2-2x}=14^{3^m}\left(7x^2-14x+2-7.3^m\right)$.

$$\Leftrightarrow 7^{x^2-2x-3^m}+2^{x^2-2x-3^m}=7\left(x^2-2x-3^m\right)+2$$

Đặt $a=x^2-2x-3^m$, phương trình trở thành: $7^a+2^a-7a-2=0$

Xét hàm số $f(a)=7^a+2^a-7a-2$. Ta có: $f'(a)=7^a\ln 7+2^a\ln 2-7\Rightarrow f''(a)=7^a\ln^2 7+2^a\ln^2 2$

Có $f''(a)>0\ \forall a\in\mathbb{R}$, suy ra $f'(a)=0$ có tối đa 1 nghiệm, suy ra $f(a)=0$ có tối đa 2 nghiệm.

Lại có: $f'(0).f'(1)<0\Rightarrow \exists a_0\in(0;1): f'\left(a_0\right)=0$.

Do đó, ta có bảng biến thiên sau:

a	$-\infty$		0		a_0		1		$+\infty$
$f'(a)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(a)$	$+\infty$		0		$f\left(a_0\right)$		0		$+\infty$

Từ BBT, ta có $f(a)=0$ có đúng hai nghiệm là $a=0$ và $a=1$. Khi đó,

$$a=x^2-2x-3^m\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2x=3^m\\x^2-2x=3^m+1\end{array}\right.$$

Lại có:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-2x	$+\infty$	$\searrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Do đó, để phương trình có bốn nghiệm phân biệt trong đó có đúng hai nghiệm lớn hơn -1 thì

$$3^m+1>3^m\geq 3\Leftrightarrow m\geq 1$$

Kết hợp điều kiện, suy ra $m\in\{1;2;...;10\}$.
Vậy, có 10 giá trị nguyên m thỏa mãn.
Chọn đáp án A

Câu 52:

Cách 1: Tịnh tiến đồ thị: NHẤN VÀO ĐÂY.

Xét hàm số $g(x)=f\left(x^2+2x\right)$. Ta có: $g'(x)=(2x+2)\,f'\left(x^2+2x\right)$.

$$\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+2=0\\x^2+2x=-2\\x^2+2x=3\\x^2+2x=8\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\\x=-3\\x=2\\x=-4\end{array}\right.$$

Dựa vào bảng xét dấu, ta có: $f'\left(x^2+2x\right)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+2x<-2\\x^2+2x>8\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-4\\x>2\end{array}\right.$

x	$-\infty$		-4		-3		-1		1		2		$+\infty$
$2x+2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'\left(x^2+2x\right)$		$+$	0	$-$	0	$-$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Đồ thị hàm số $y=g(|x|)$ xác định bằng cách, bỏ phần đồ thị bên trái Oy và lấy đối xứng phần đồ thị bên phải trục Oy qua Oy.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$g(\|x\|)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Suy ra $f\left(x^2+2|x|\right)$ nghịch biến trên $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

Cách 2: Phương pháp "ghép trục": NHẤN VÀO ĐÂY.

Từ bảng xét dấu, ta có:

x	$-\infty$		-2		3		8		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$			$\searrow$			$\nearrow$	

Đặt $t=x^2+|x|$, ta có:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
t	$+\infty$	$\longrightarrow$	8	$\longrightarrow$	0	$\longrightarrow$	8	$\longrightarrow$	$+\infty$
$f(t)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Suy ra $f\left(x^2+2|x|\right)$ nghịch biến trên $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.
Chọn đáp án D

Câu 53:
Cách 1: Tịnh tiến đồ thị: NHẤN VÀO ĐÂY.

Xét hàm số $g(x)=f^2(x)+4f(x)+3m$. Ta có: $g'(x)=2f'(x)\left(f(x)+2\right)$

$$\Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f(x)=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \\ x=\alpha<0 \end{array}\right.$$

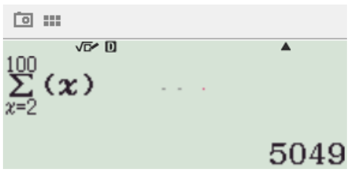
Có $f(\alpha)=-2,\ f(3)=0$ nên có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		α		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$3m-4$	$\nearrow$		$\searrow$	$3m$	$\nearrow$	

Dựa vào BBT, ta có đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 3 điểm cực trị, do đó, để đồ thị hàm số $y=h(x)=|g(x)|$ có đúng 3 điểm cực trị thì $3m-4\geq 0 \Rightarrow m\geq \dfrac{4}{3}$.

Kết hợp điều kiện, ta được: $S=\{2;3;...;100\}$

> Đến đây có thể dùng công thức tính tổng của cấp số cộng hoặc nếu không nhớ công thức thì có thể bấm như sau:



Cách 2: Phương pháp "ghép trục": NHẤN VÀO ĐÂY.

Đặt $t=f(x)$, $k(x)=x^2+4x+3m$, ta có:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$k(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$3m-4$	$\nearrow$	$+\infty$

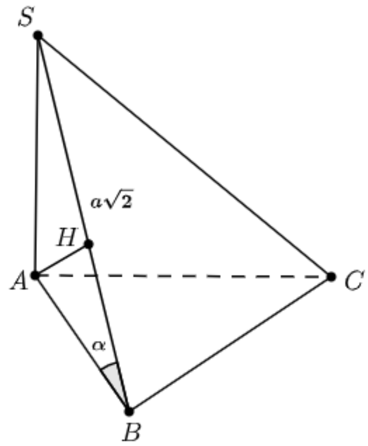
Suy ra

x	$-\infty$								$+\infty$
t	$-\infty$	$\longrightarrow$	-2	$\longrightarrow$	(≈ 1.3)	$\longrightarrow$	0	$\longrightarrow$	$+\infty$
$k(t)$		$\searrow$	$3m-4$	$\nearrow$		$\searrow$	$3m$	$\nearrow$	

Để đồ thị hàm số $y=|k(t)|$ có đúng 3 điểm cực trị thì $3m-4\geq 0 \Rightarrow m\geq \dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án B

Câu 54:



Vẽ $AH \perp SB$ $(H \in SB)$.

Vì $(SAB) \perp (SBC)$ và $(SAB) \cap (SBC) = SB$ nên $AH \perp (SBC)$.

Suy ra $AH \perp BC$, mà $SA \perp BC$ nên $BC \perp (SAB)$.

Suy ra $BC \perp SB$ và $(\widehat{SC, (SAB)}) = \widehat{CSB} = 45^\circ$, kéo theo $BC = SB = a\sqrt{2}$.

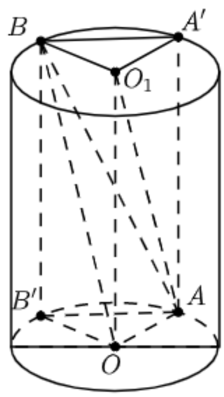
Ta có: $SA = SB.\sin\alpha = a\sqrt{2}.\sin\alpha$, $AB = SB.\cos\alpha = a\sqrt{2}.\cos\alpha$.

$\Rightarrow V_{SABC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{SA.AB}{2}.BC = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}.\sin 2\alpha \leq \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi: $\sin 2\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 45^\circ$.

Chọn đáp án B

Câu 55:



Trên (O), (O_1) lần lượt lấy điểm B' và A' sao cho $AA' \parallel BB' \parallel OO'$.

Ta có: $V_{AB'O.A'BO_1} = V_{BB'OA} + V_{OO_1AB} + V_{AA'O_1B}$.

Lại có: $V_{BB'OA} = V_{AA'O_1B} = \dfrac{V_{AB'O.A'BO_1}}{3}$, suy ra $V_{OO_1AB} = \dfrac{V_{AB'O.A'BO_1}}{3}$.

Có $AB' = \sqrt{AB^2 - BB'^2} = a$, suy ra $AB' = OA = OB' = a$, kéo theo $\Delta AOB'$ đều.

$\Rightarrow S_{AOB'} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow V_{OO_1AB} = \dfrac{V_{AB'O.A'BO_1}}{3} = \dfrac{S_{AOB'}.OO_1}{3} = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{6}$.

Chọn đáp án C

Câu 56:

Cách 1:

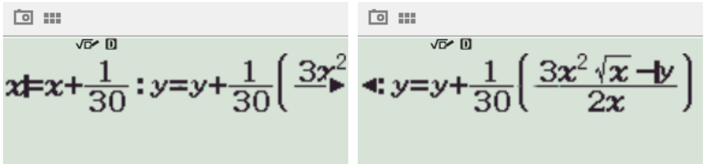
Với mọi $x>0$, ta có: $2xf'(x)+f(x)=3x^2\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x}f'(x)+\dfrac{f(x)}{2\sqrt{x}}=\dfrac{3x^2}{2} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}f(x)\right)'=\dfrac{3x^2}{2}$.

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được: $\sqrt{x}f(x)=\displaystyle\int \dfrac{3x^2}{2}\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{2}+C$.

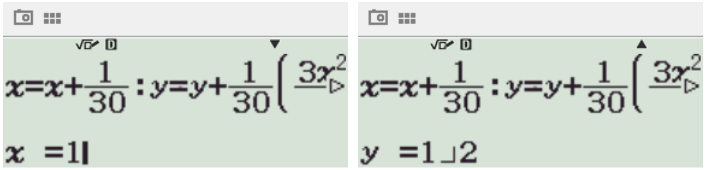
Có $f(1)=\dfrac{1}{2} \Rightarrow C=0 \Rightarrow f(4)=16$

Cách 2: CASIO tích phân hàm ẩn: NHẤN VÀO ĐÂY.

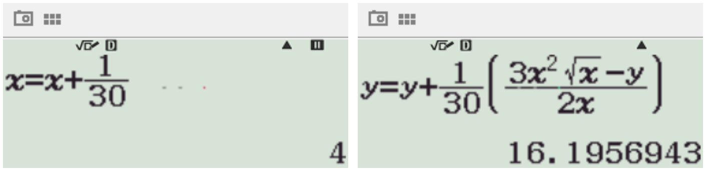
Nhập vào máy tính như sau: (các bạn nhấn vào link xem để hiểu ý nghĩa cách bấm)



Sau đó, nhấn (CALC), cho $x=1$, $y=\dfrac{1}{2}$



Tiếp tục, nhấn (=), cho đến khi thấy:



Suy ra $f(4)=16$.

Chọn đáp án (A)

Câu 57:

Bất phương trình tương đương: $m>f(2x)+\dfrac{8x^3}{3}-4x$.

Để bất phương trình đúng với mọi $x\in\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$ thì $m>\max\limits_{\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]}\left(f(2x)+\dfrac{8x^3}{3}-4x\right)$.

Đặt $t=2x \Rightarrow t\in[-1;1]$, xét hàm số $g(t)=f(t)+\dfrac{t^3}{3}-2t$. Ta có: $g'(t)=f'(t)+t^2-2$.

$$\Rightarrow g'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\alpha<-1 \\ t=0 \\ t=1 \\ t=\beta>1 \end{array}\right.$$

t	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$g'(t)$			$+$	0	$-$	0	
$g(t)$		$g(-1)$	$\nearrow$	$g(0)$	$\searrow$	$g(1)$	

Suy ra $m > \max\limits_{[-1;1]} g(t) = g(0) = f(0)$

Chọn đáp án C

Câu 58:

Cách 1:

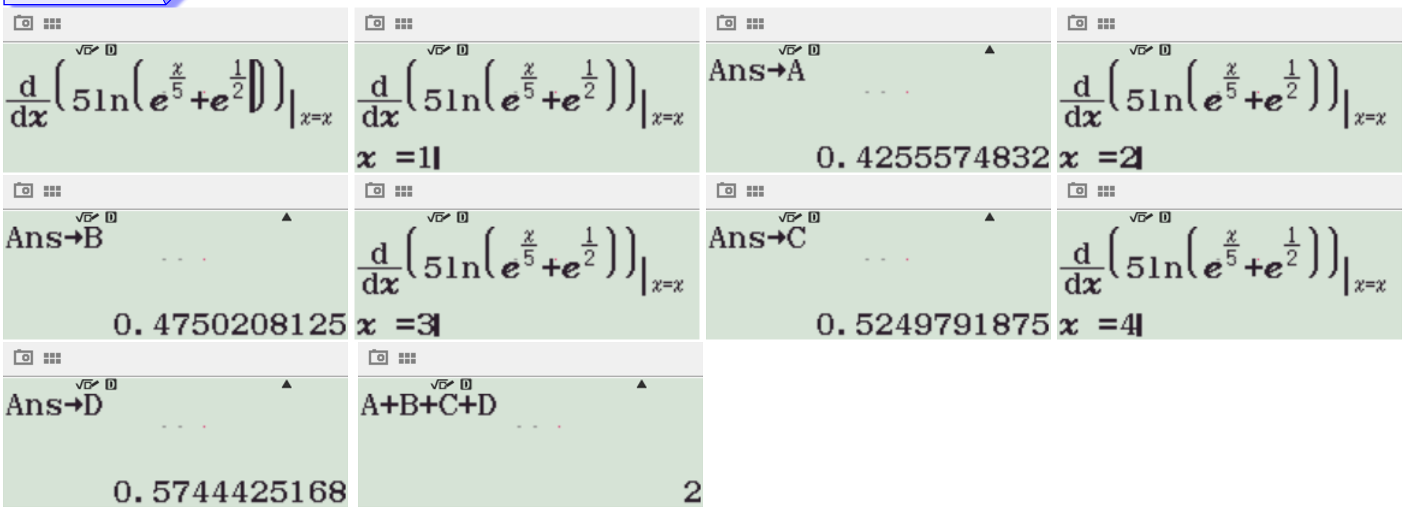
Ta có: $f'(x) = \dfrac{e^{\frac{x}{2023}}}{e^{\frac{x}{2023}} + e^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow f'(2023 - x) = \dfrac{e^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{x}{2023}} + e^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow f'(x) + f'(2023 - x) = 1.$

$\Rightarrow H = \left[f'(1) + f'(2022)\right] + \left[f'(2) + f'(2021)\right] + \ldots + \left[f'(1011) + f'(1012)\right] = 1011$

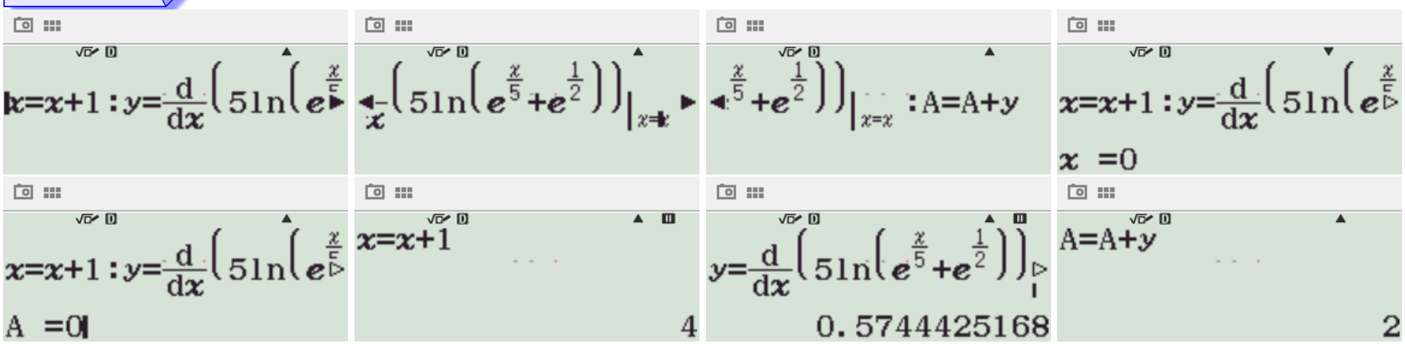
Cách 2: Đơn giản hóa bài toán:

Cho $f(x) = 5.\ln\left(e^{\frac{x}{5}} + e^{\frac{1}{2}}\right)$. Tính giá trị biểu thức $H = f'(1) + f'(2) + \ldots + f'(4)$.

Hướng 1:



Hướng 2:



Từ kết quả bài toán đơn giản, suy ra kết quả đề bài $H = 1011$

Chọn đáp án D

Câu 59:

Đặt $t = 3^{1+\sqrt{1-x^2}}$, ta có: $1 \le 1+\sqrt{1-x^2} \le 2 \Rightarrow 3 \le t \le 9$.

Phương trình trở thành: $t^2-(m+3)t+2m+1=0 \Leftrightarrow m = \dfrac{t^2-3t+1}{t-2}$, $\forall t \in [3;9]$

Để phương trình có nghiệm thực thì $\min\limits_{[3;9]} \dfrac{t^2-3t+1}{t-2} \le m \le \max\limits_{[3;9]} \dfrac{t^2-3t+1}{t-2}$.

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2-3t+1}{t-2}$, với $t \in [3;9]$. Ta có: $f'(t) = \dfrac{t^2-4t+5}{(t-2)^2} > 0$, $\forall t \in [3;9]$.

Suy ra, $f(3) \le m \le f(9) \Leftrightarrow 1 \le m \le \dfrac{55}{7}$. Kết hợp điều kiện, suy ra $m \in \{1;2;...;7\}$.

Vậy, có 7 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Chọn đáp án D

Câu 60:

Phương trình tương đương: $x\left(x^2+1\right) = \sqrt{y}\,(y+1)$

Xét hàm số $f(t) = t^3+t$, với $t>0$. Ta có: $f'(t) = 3t^2+1>0$, $\forall t>0$.

$\Rightarrow f(x) = f\left(\sqrt{y}\right) \Leftrightarrow x = \sqrt{y} \Leftrightarrow y = x^2$.

$\Rightarrow P = \dfrac{y+4}{x} = \dfrac{x^2+4}{x} = x+\dfrac{4}{x} \ge 4$. Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $x=y=1$.

Chọn đáp án A

Câu 61:

Điều kiện $f(x) > -1$.

Phương trình tương đương: $\log_2^3(f(x)+1) - 4\log_2^2(f(x)+1) + \log_2(f(x)+1) + 6 = 0$.

Đặt $t = \log_2(f(x)+1)$. Phương trình trở thành: $t^3-4t^2+t+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=2 \\ t=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = -\dfrac{1}{2} \\ f(x)=3 \\ f(x)=7 \end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị, suy ra phương trình có 6 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án C

Câu 62:

Ta có: $f'(x) = \dfrac{2}{(x-1)\,x\,(x+1)} = \dfrac{1}{(x-1)\,x} - \dfrac{1}{x\,(x+1)}$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow f'(2)+f'(3)+...+f'(2020) &= \frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{2019.2020}-\frac{1}{2020.2021} \\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{2020.2021} = \frac{1010.2021-1}{2.1010.2021} = \frac{a}{b} \end{aligned}$$

$\Rightarrow 2a-b = 2\,(1010.2021-1)-2.1010.2021 = -2$

Chọn đáp án C

Câu 63:

Cách 1:

Vì $f(x) > -1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nên:

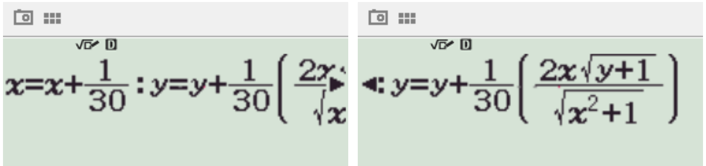
$$f'(x)\sqrt{x^2+1} = 2x\sqrt{f(x)+1} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow \left(\sqrt{f(x)+1}\right)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được: $\sqrt{f(x)+1} = \int \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x = \sqrt{x^2+1}+C$

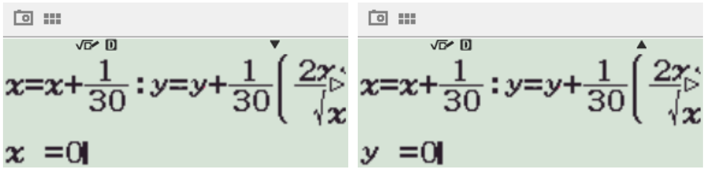
Có $f(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(2) = 4$

Cách 2: CASIO tích phân hàm ẩn: NHẤN VÀO ĐÂY.

Nhập vào máy như sau: (các bạn nhấn vào link xem để hiểu ý nghĩa)



Sau đó, nhấn (CALC), cho $x = 0$, $y = 0$:

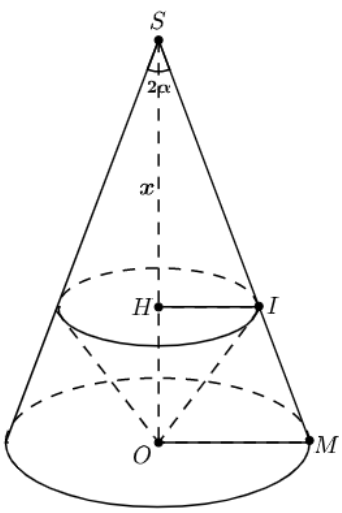


Tiếp tục, nhấn (=) liên tục, cho đến khi thấy:

Suy ra $f(2) = 4$.

Chọn đáp án B

Câu 64:



Ta có: $\sin\alpha = \dfrac{OM}{SM} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow SM = \dfrac{3.OM}{2} = \dfrac{3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow SO = \sqrt{SM^2 - OM^2} = \dfrac{5}{2} \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{OM}{OS} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Đặt $SH = x \Rightarrow HI = SH.\tan\alpha = \dfrac{2x\sqrt{5}}{5}$ và $OH = SO - SH = \dfrac{5}{2} - x$

Lại có: $V = \dfrac{1}{3}.OH.SI^2.\pi = \dfrac{1}{3}.\left(\dfrac{5}{2} - x\right).\dfrac{4x^2}{5}\pi = \dfrac{50\pi}{81} \Rightarrow SH = x = \dfrac{5}{3} \Rightarrow 3a^2 - 2b^3 = 21$

Chọn đáp án C

Câu 65:

Cách 1:

Vì $x^2 + y^2 > 1$ nên $\log_{x^2+y^2}(2x+4y) \geq 1 \Leftrightarrow 2x + 4y \geq x^2 + y^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 5$

Áp dụng bất đẳng thức CBS, ta có:

$P = 3x + y = 3(x-1) + (y-2) + 5 \leq \sqrt{(3^2+1^2)\left[(x-1)^2 + (y-2)^2\right]} + 5 \leq \sqrt{10.5} + 5 = 5 + 5\sqrt{2}$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} \dfrac{x-1}{3} = y - 2 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5 \end{cases}$

Cách 2:

Làm tương tự như **Câu 14**, ta được: $5 - 5\sqrt{2} \leq P \leq 5 + 5\sqrt{2}$.

Chọn đáp án C

Câu 66:

Cách 1:

Với $1 \leq x, y \leq 2021$, suy ra $4x^2 + 4x + 2 > 1$ và $2x + y - 1 > 1$, ta có:

$3^{4x^2-1}\log\left(4x^2+4x+2\right) = 3^{y-2x-4}\log(2x+y-1) \Leftrightarrow 3^{4x^2+4x+2}\log\left(4x^2+4x+2\right) = 3^{2x+y-1}\log(2x+y-1)$

Xét hàm số $f(t) = 3^t \log t$, với $t > 1$. Ta có: $f'(t) = 3^t \ln 3 \log t + \dfrac{3^t}{t\ln 10} > 0,\ \forall t > 1$

$\Rightarrow f\left(4x^2+4x+2\right) = f(2x+y-1) \Leftrightarrow 4x^2+4x+2 = 2x+y-1 \Leftrightarrow 4x^2+2x+3 = y$

Lại có: $1 \leq y \leq 2021 \Leftrightarrow 1 \leq 4x^2+2x+3 \leq 2021 \Leftrightarrow \dfrac{-1-3\sqrt{897}}{4} \leq x \leq \dfrac{-1+3\sqrt{897}}{4}$.

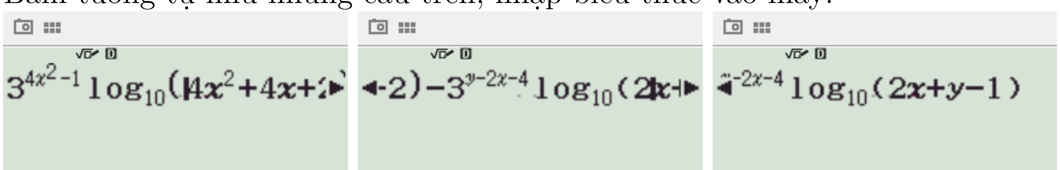
Kết hợp điều kiện $1 \leq x \leq 2021$, ta được: $x \in \{1; 2; ...; 22\} = S$.

Với mỗi $x \in S$, ta được một giá trị y tương ứng.

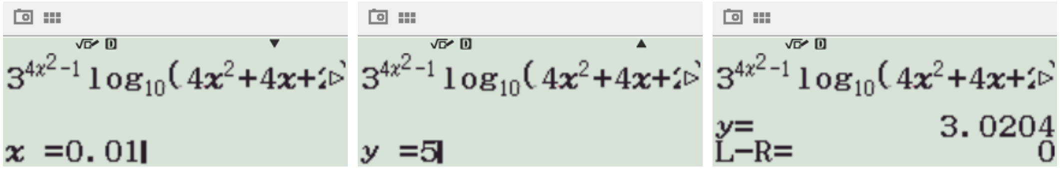
Do đó, có 22 cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn.

Cách 2:

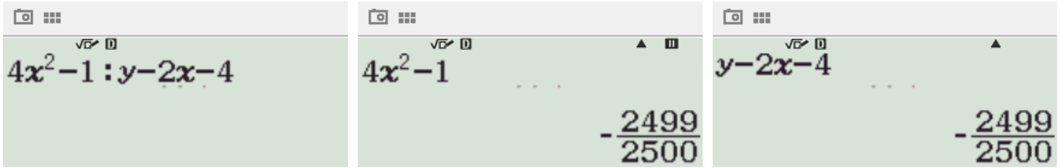
Bấm tương tự như những câu trên, nhập biểu thức vào máy:



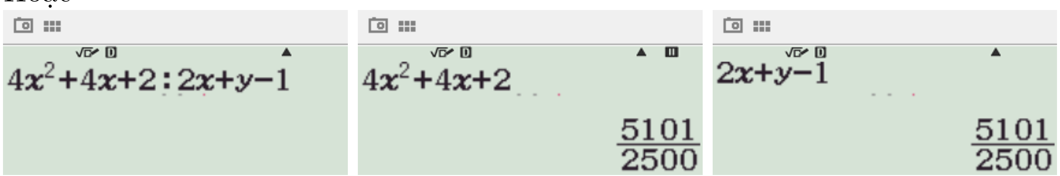
Nhấn (SHIFT) (CALC) (=), cho $x = 0,01$, tìm y:



Tốt nhất thì cũng cho y bằng số dương luôn để máy tìm nghiệm y xung quanh số dương đó, vì nếu không máy tìm số y âm nhỏ quá thì không thỏa điều kiện logarit, thì báo vô nghiệm.
Ta được kết quả: $y = 3,0204$ là số đẹp, có thể dịch được.
Ví dụ $y = 3,0204 = 3 + 2.0,01 + 4.0,01^2 = 3 + 2x + 4x^2$.
Hoặc thử lần lượt các biểu thức trong phương trình. Ví dụ:



Hoặc



Từ đấy, ta rút được $y = 4x^2 + 2x + 3$, rồi làm tiếp như cách 1.
Chọn đáp án C

Câu 67:

Với $x \neq -1$, ta có: $f'(x) = \dfrac{m^2+2}{(x+1)^2} > 0,\ \forall x \neq -1$.

$$\Rightarrow 2\max_{[0;2]} f(x) - \min_{[0;2]} f(x) = 2f(2) - f(0) = \frac{2\left(4-m^2\right)}{3} + m^2 = 8 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m_1 = -4 \\ m_2 = 4 \end{array}\right. .$$

Suy ra $2m_1 + 3m_2 = 4$.
Chọn đáp án C

Câu 68:

Cách 1:
TH1: $f(x) = 0,\ \forall x > 0$ vô lí (loại), vì $f(1) = 2$.
TH2: $\exists\, x > 0 : f(x) \neq 0$, ta có:

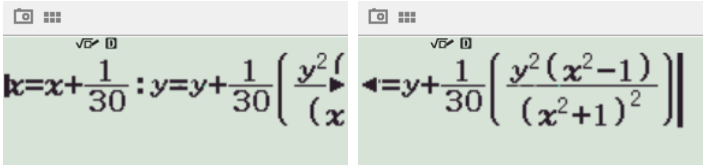
$$\left(x^2+1\right)^2 f'(x) = f^2(x)\left(x^2-1\right) \Leftrightarrow -\frac{f'(x)}{f^2(x)} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được: $\dfrac{1}{f(x)} = \displaystyle\int \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = \frac{x}{x^2+1} + C$

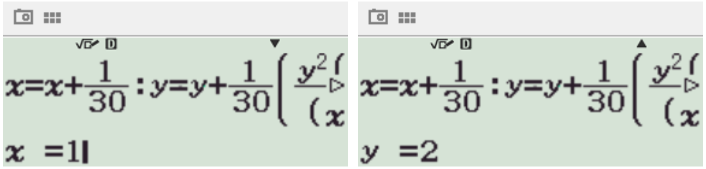
Có $f(1) = 2 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{x^2+1}{x} \neq 0\ \forall x > 0$. Suy ra $f(3) = \dfrac{10}{3}$

Cách 2: CASIO tích phân hàm ẩn: NHẤN VÀO ĐÂY.

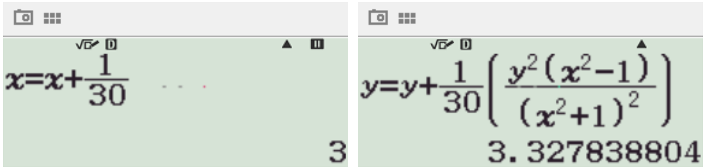
Nhập vào máy như sau: (các bạn nhấn vào link xem để hiểu ý nghĩa)



Sau đó, nhấn (CALC), cho $x = 1$, $y = 2$:



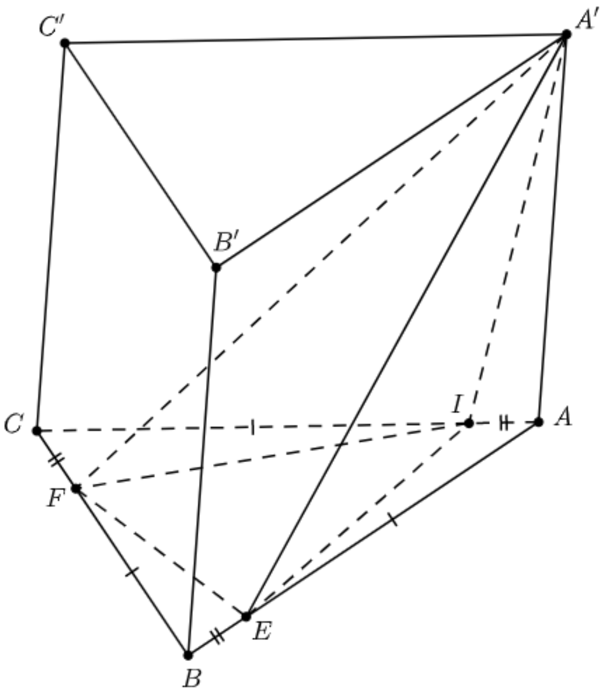
Tiếp tục, nhấn (=) liên tục, cho đến khi thấy:



Suy ra $f(3) = \dfrac{10}{3}$.

Chọn đáp án A

Câu 69:



Ta có: $\dfrac{S_{ICF}}{S_{ABC}} = \dfrac{CI}{CA} \cdot \dfrac{CF}{CB} = \dfrac{CI}{CA} \cdot \dfrac{CB - FB}{CB} = \dfrac{CI}{CA} - \left(\dfrac{CI}{CA}\right)^2 = t - t^2$, với $t = \dfrac{CI}{CA}$

Suy ra $S_{ICF} = \left(t - t^2\right) S_{ABC}$

Dễ dàng chứng minh $\Delta ICF = \Delta FBE = \Delta EAI$. Suy ra $S_{ICF} = S_{FBE} = S_{EAI}$.

Suy ra $S_{EFI} = S_{ABC} - 3S_{ICF} = \left(1 - 3t + 3t^2\right) S_{ABC}$.

Suy ra $V_{A'EFI}=\frac{1}{3}.h.\left(1-3t+3t^2\right)S_{ABC}=\frac{V}{3}\left(1-3t+3t^2\right)\le\frac{V}{12}$.

Dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi $t=\frac{1}{2}$. Hay E,F,I lần lượt là trung điểm của AB,BC,CA.

Chọn đáp án D

Câu 70:

Vì $(x+y)^2\ge 4xy$ nên $(x+y)^3+(x+y)^2\ge(x+y)^3+4xy\ge 2$. Suy ra $x+y\ge 1$.

$A=5\left(x^4+y^4+x^2y^2\right)-4\left(x^2+y^2\right)+2=5\left(x^2+y^2\right)^2-4\left(x^2+y^2\right)-5x^2y^2+2$

Lại có: $\left(x^2+y^2\right)^2\ge 4x^2y^2\Leftrightarrow -5x^2y^2\ge-\frac{5}{4}\left(x^2+y^2\right)^2$.

Suy ra $A\ge\frac{15}{4}\left(x^2+y^2\right)^2-4\left(x^2+y^2\right)+2$.

Đặt $t=x^2+y^2\ge\frac{(x+y)^2}{2}\ge\frac{1}{2}$. Suy ra $A\ge\frac{15t^2}{4}-4t+2\ge\frac{14}{15}$

Dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases}t=x^2+y^2=\frac{8}{15}\\x^2=y^2\end{cases}$

Chọn đáp án C

Câu 71:

Ta có: $g'(x)=f'(x)-2x-1\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=2x+1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\\x=2\end{array}\right.$.

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\searrow$		$g(-1)$	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	$g(2)$	$\nearrow$	

Suy ra $g(1)>g(2)$.

Chọn đáp án B

Câu 72:

Với $0\le x\le 2020$, ta có: $\log_2(2x+2)+x-3y=8^y\Leftrightarrow\log_2(x+1)+x+1=3y+2^{3y}$.

Xét hàm số $f(t)=t+2^t$, ta có: $f'(t)=1+2^t\ln 2>0,\ \forall t$

$\Rightarrow f\left(\log_2(x+1)\right)=f(3y)\Leftrightarrow\log_2(x+1)=3y\Leftrightarrow x=2^{3y}-1$.

Lại có: $0 \leq x \leq 2020 \Leftrightarrow 0 \leq 2^{3y} - 1 \leq 2020 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq \log_8 2021$.

Kết hợp điều kiện, suy ra $y \in \{0;1;2;3\}$.

Với mỗi giá trị của y, có một giá trị của x tương ứng.

Vậy, có 4 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn.

Chọn đáp án D

Câu 73:

Điều kiện: $b \leq 1$. Ta có:

$$2a^3 - 6a^2 + 7a = (3-2b)\sqrt{1-b} + 3$$

$$\Leftrightarrow 2\left(a^3 - 3a^2 + 3a - 1\right) + a + 2 = [2(1-b)+1]\sqrt{1-b} + 3.$$

$$\Leftrightarrow 2(a-1)^3 + a - 1 = 2\left(\sqrt{1-b}\right)^3 + \sqrt{1-b}$$

TH: $a < 1$, $VT < 0 \leq VP$, loại.

TH: $a \geq 1$

Xét hàm số $f(x) = 2x^3 + x$ với $x \geq 0$. Ta có: $f'(x) = 6x^2 + 1 > 0$, $\forall x \geq 0$.

$$\Rightarrow f(a-1) = f\left(\sqrt{1-b}\right) \Leftrightarrow a - 1 = \sqrt{1-b} \Leftrightarrow b = 1 - (a-1)^2$$

$$\Rightarrow P = 2a + b = 2a + 1 - (a-1)^2 \leq P(2) = 4.$$

Dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi $a = 2 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow a + b = 2$.

Chọn đáp án A

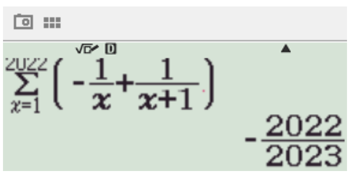
Câu 74:

Ta có: $f(x) = \int f'(x)\mathrm{d}x = \int \dfrac{2x+1}{x^4 + 2x^3 + x^2}\mathrm{d}x = \int \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} + C$.

Có $f(1) = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = -\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}\right)$.

$$P = f(1) + f(2) + \ldots + f(2022) = -\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2022} - \frac{1}{2023}\right)$$
$$= -\left(1 - \frac{1}{2023}\right) = -\frac{2022}{2023}$$

Hoặc có thể bấm:



Chọn đáp án B

Câu 75:

Ta có: $g(x) \leq \max\limits_{[-3;2]} g(x) = 5,\ \forall x \in [-3;2]$

$\Leftrightarrow |f(x) + 2m| \leq 5,\ \forall x \in [-3;2].$

$\Leftrightarrow -5 - 2m \leq f(x) \leq 5 - 2m,\ \forall x \in [-3;2].$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5 - 2m \leq \min\limits_{[-3;2]} f(x) = -1 \\ 5 - 2m \geq \max\limits_{[-3;2]} f(x) = 8 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow -2 \leq m \leq -\dfrac{3}{2}$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$. Suy ra $-2 + \left(-\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{7}{2}$

Chọn đáp án C

Câu 76:

Cách 1: Tịnh tiến đồ thị: NHẤN VÀO ĐÂY.

Xét hàm số $g(x) = f^2(x) + 4f(x) - 2m$. Ta có: $g'(x) = 2f'(x)\left(f(x) + 2\right)$

$$\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f(x) = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \\ x = \alpha < 0 \end{array}\right.$$

Có $f(\alpha) = -2,\ f(3) = 0$ nên có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		α		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$-2m-4$	$\nearrow$	$-2m+12$	$\searrow$	$-2m$	$\nearrow$	

Dựa vào BBT, ta có đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 3 điểm cực trị, do đó, để đồ thị hàm số $y = h(x) = |g(x)|$ có đúng 5 điểm cực trị thì đường thẳng $y = 0$ cắt đồ thị hàm số $y = g(x)$ tại hai điểm phân biệt.

Do đó,

$$\left[\begin{array}{l} -2m - 4 < 0 \leq -2m \\ -2m + 12 \leq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < m \leq 0 \\ m \geq 6 \end{array}\right.$$

Cách 2: Phương pháp "ghép trục": NHẤN VÀO ĐÂY.
Đặt $t = f(x)$, $k(x) = x^2 + 4x - 2m$, ta có:

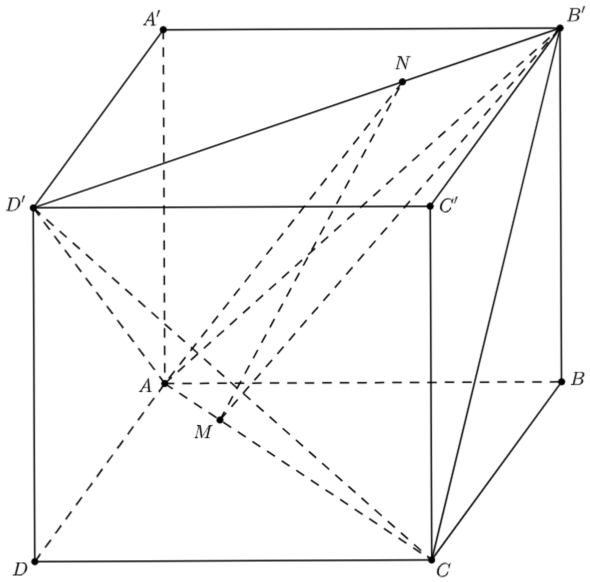
x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$k(x)$	$+\infty$ ↘	$-4-2m$	↗ $+\infty$

Suy ra

x	$-\infty$							$+\infty$
t	$-\infty$	→	-2	→	2	→	0	→ $+\infty$
$k(t)$	↘		$-2m-4$	↗	$-2m+12$	↘	$-2m$	↗

Sau đó, suy luận tương tự cách 1
Chọn đáp án D

Câu 77:



Ta có: $ACB'D'$ là tứ diện đều, cạnh $a\sqrt{2}$, suy ra $d\left(D';(ACB')\right) = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$ và $S_{ACB'} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Lại có:
$$\frac{d(N;(AMB'))}{d(D';(ACB'))} = \frac{NB'}{D'B'} \Rightarrow d\left(N;(AMB')\right) = \frac{NB'.d(D';(ACB'))}{D'B'}$$

$\dfrac{S_{AMB'}}{S_{ACB'}} = \dfrac{AM}{AC} \Rightarrow S_{AMB'} = \dfrac{AM.S_{ACB'}}{AC}$

$$\Rightarrow V_{AMNB'} = \frac{1}{3}.S_{AMB'}.d\left(N;(AMB')\right) = \frac{1}{3}.\frac{AM.S_{ACB'}}{AC}.\frac{NB'.d(D';(ACB'))}{D'B'}$$

$$= \frac{a^2}{6}.AM.B'N \leq \frac{a^2}{6}.\frac{(AM+B'N)^2}{4} = \frac{a^3}{12}.$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $AM = B'N = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Chọn đáp án D

Câu 78:

Cách 1:

Với $x, y > 0$, ta có:

$$(y+1)^2\ln\left(x^2 - \frac{x^2}{y+2}\right) + \left[x^2 + \left(x^2-1\right)y - 2\right]\left[3x^2 + \left(3x^2+5\right)y + 10\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x^2(y+1)}{y+2}\right) + \left(\frac{x^2(y+1)-(y+2)}{y+1}\right)\left(\frac{3x^2(y+1)+5(y+2)}{y+1}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln x^2 - \ln\frac{y+2}{y+1} + \left(x^2 - \frac{y+2}{y+1}\right)\left(3x^2 + \frac{5(y+2)}{y+1}\right) = 0$$

$\Leftrightarrow \ln u - \ln v + (u-v)(3u+5v) = 0$, với $u = x^2 > 0$, $v = \dfrac{y+2}{y+1} > 0$

TH1: $u = v$, phương trình đã cho thỏa mãn.

TH2: $u \neq v$, phương trình đã cho tương đương: $\dfrac{\ln u - \ln v}{u-v} + 3u + 5v = 0$.

TH2.1: $u - v < 0 \Leftrightarrow 0 < u < v \Leftrightarrow \ln u < \ln v \Leftrightarrow \ln u - \ln v < 0 \Rightarrow \dfrac{\ln u - \ln v}{u-v} > 0$.

TH2.2: $u - v > 0 \Leftrightarrow u > v > 0 \Leftrightarrow \ln u > \ln v \Leftrightarrow \ln u - \ln v > 0 \Rightarrow \dfrac{\ln u - \ln v}{u-v} > 0$.

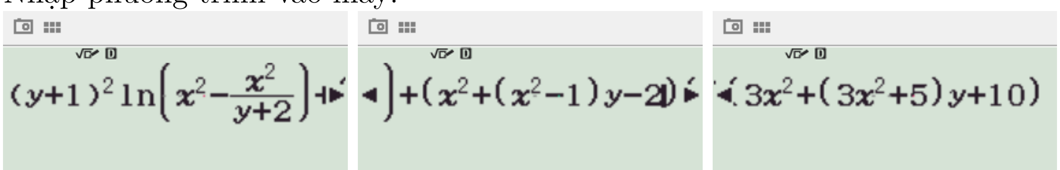
Lại có: $3u + 5v > 0, \forall u, v > 0$. Do đó, phương trình $\dfrac{\ln u - \ln v}{u-v} + 3u + 5v = 0$ vô nghiệm với mọi $u, v > 0$.

Có $u = v \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{y+2}{y+1}$. Suy ra $P = x^2 + \dfrac{y}{2} = \dfrac{y+2}{y+1} + \dfrac{y}{2} \geq P\left(-1+\sqrt{2}\right) = \dfrac{1}{2} + \sqrt{2}$

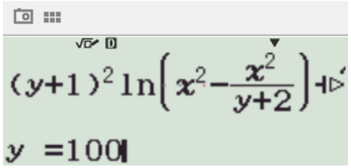
Suy ra $a^2 + b^2 = \dfrac{5}{4}$

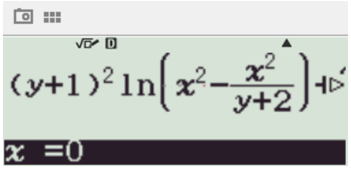
Cách 2:

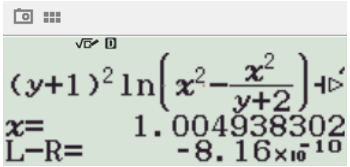
Nhập phương trình vào máy:



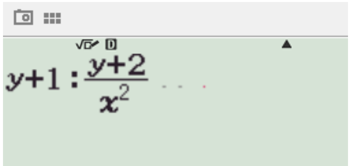
Nhấn (SHIFT)(CALC)(=), cho $y = 100$, tìm x, ta được:

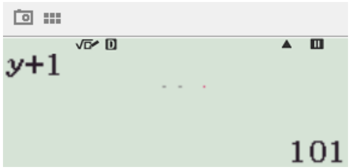


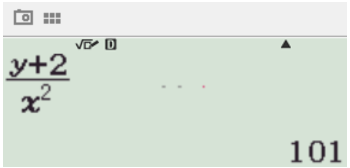




L-R có nghĩa là vế trái trừ vế phải, xấp xỉ 0, nên vẫn nhận nghiệm x này.







Suy ra $x^2 = \dfrac{y+2}{y+1}$. Đến đây thì xử lí bài toán như cách 1.

Chọn đáp án D

Câu 79:

Gọi $A(x,y)$ là điểm biểu diễn số phức z và các điểm $B(-2;1)$, $C(4;7)$, $D(0;-2)$.

Ta có: $|z+2-i|+|z-4-7i| = AB+AC = 6\sqrt{2} = BC$.

Suy ra A thuộc đoạn thẳng $BC: y = x+3$, với $x \in [-2;4]$

Cách 1:

Có $|z+2i| = \sqrt{x^2+(y+2)^2} = \sqrt{x^2+(x+5)^2}$

Xét hàm số $f(x) = x^2+(x+5)^2$, với $x \in [-2;4]$. Ta có: $f'(x) = 4x+10 > 0$, $\forall x \in [-2;4]$.

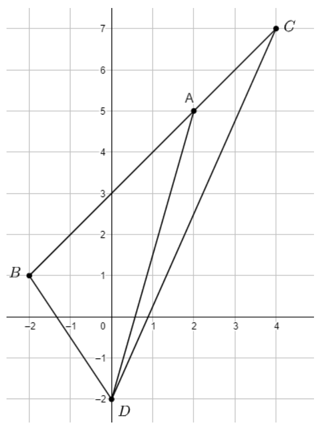
Suy ra $\max\limits_{[-2;4]} f(x) = f(4) = 97$ và $\min\limits_{[-2;4]} f(x) = f(-2) = 13$.

Suy ra $\sqrt{13} = m \leq |z+2i| \leq M = \sqrt{97}$.

Suy ra $M^2+m^2 = 110$

Cách 2: CASIO số phức: NHẤN VÀO ĐÂY.

Cách 3:



Ta có: $\widehat{BDC} > 90^\circ$. Suy ra $DB \leq DA \leq DC \Leftrightarrow \sqrt{13} = m \leq DA \leq M = \sqrt{97}$

Chọn đáp án B

Câu 80:

Ta có: $g'(x) = 2.2^{-\frac{1}{x^4}}.f^2(2x+1)\left(\dfrac{2\ln 2}{x^5}f(2x+1)+3f'(2x+1)\right)$

$$\Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f^2(2x+1)=0 \ \ (*) \\ \dfrac{2\ln 2}{x^5}f(2x+1)+3f'(2x+1)=0 \ \ (**) \end{array}\right.$$

Dễ thấy, các nghiệm của $(*)$ là nghiệm bội chẵn, nên khi qua các nghiệm đó $g'(x)$ không đổi dấu.

Xét phương trình $(**)$, đặt $t=2x+1$, ta được: $\dfrac{64}{(t-1)^5}f(t)+3f'(t)=0$.

Vì $f(t)$ và $f'(t)$ không đồng thời bằng không nên $\dfrac{64}{(t-1)^5}+\dfrac{3f'(t)}{f(t)}=0$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $f(t)=a(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)(t-t_4)$

Tính đạo hàm của $f(t)$ rồi thay vào, ta được: $\dfrac{64}{(t-1)^5}+\dfrac{3}{t-t_1}+\dfrac{3}{t-t_2}+\dfrac{3}{t-t_3}+\dfrac{3}{t-t_4}=0$

Xét hàm số $h(t)=\dfrac{64}{(t-1)^5}+\dfrac{3}{t-t_1}+\dfrac{3}{t-t_2}+\dfrac{3}{t-t_3}+\dfrac{3}{t-t_4}$.

Suy ra $h'(t)=-\dfrac{320}{(t-1)^6}-\dfrac{3}{(t-t_1)^2}-\dfrac{3}{(t-t_2)^2}-\dfrac{3}{(t-t_3)^2}-\dfrac{3}{(t-t_4)^2}$.

Ta có bảng biến thiên sau:

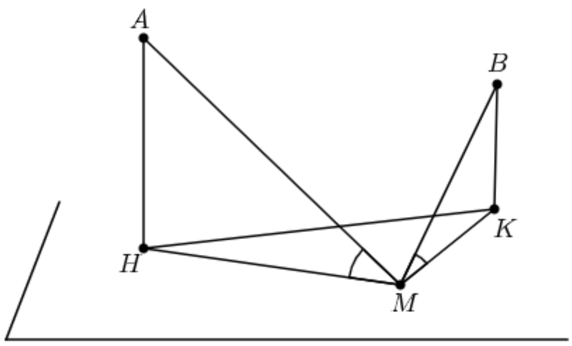
t	$-\infty$		t_1		t_2		t_3		1		t_4		$+\infty$
$h'(t)$		$-$	||	$-$	||	$-$	||	$-$	||	$-$	||	$-$	
$h(t)$	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0

Dựa vào bảng thiên, ta thấy $h(t)=0$ có 4 nghiệm đơn phân biệt.

Do đó, hàm số $g(x)$ có 4 điểm cực trị.

Chọn đáp án A

Câu 81:



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A, B trên mặt phẳng (Oxy).
Suy ra $H(1;3;0)$, $K(4;6;0)$. Kéo theo, $AH = 10$, $BK = 5$.

Ta có: $MH = AH.\cot\alpha$, $MK = BK.\cot\alpha$. Suy ra $MH = 2MK$.

Cách 1:
Lại có: AH không đổi, do đó, để AM nhỏ nhất thì MH nhỏ nhất.

Mà M, H, K cùng thuộc mặt phẳng (Oxy) và $MH = 2MK$ nên:

Để MH nhỏ nhất thì M thuộc đoạn HK.

Khi đó, $\overrightarrow{HM} = -2\overrightarrow{KM}$. Suy ra $M(3;5;0)$, kéo theo, $AM = 6\sqrt{3}$

Cách 2:
Ta có: $M \in (Oxy)$, suy ra $M(x;y;0)$.

Lại có $MH = 2MK$, suy ra $(x-5)^2 + (y-7)^2 = 8$.

Có $AM^2 = (x-1)^2 + (y-3)^2 + 100$.

Hướng 1:

$AM^2 = (x-5)^2 + (y-7)^2 + 8(x-5) + 8(y-7) + 132 = 8(x-5) + 8(y-7) + 140$

Áp dụng bất đẳng thức CBS, ta có: $(x-5+y-7)^2 \le 2\left((x-5)^2 + (y-7)^2\right) = 16$

Suy ra $-4 \le (x-5) + (y-7) \le 4 \Leftrightarrow -32 \le 8(x-5) + 8(y-7) \le 32$.

Suy ra $AM^2 \ge 140 - 32 = 108$. Hay $AM \ge 6\sqrt{3}$.

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} x-5 = y-7 \\ x-5+y-7 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$.

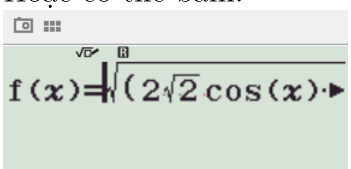
Hướng 2:

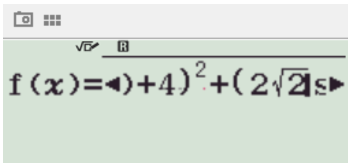
Có $(x-5)^2 + (y-7)^2 = 8$, đặt $\begin{cases} x-5 = 2\sqrt{2}\cos t \\ y-7 = 2\sqrt{2}\sin t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t + 5 \\ y = 2\sqrt{2}\sin t + 7 \end{cases}$

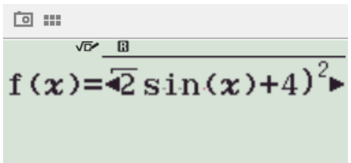
Thay vào, ta được: $AM^2 = \left(2\sqrt{2}\cos t + 4\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\sin t + 4\right)^2 + 100 = 140 + 32\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \ge 108$.

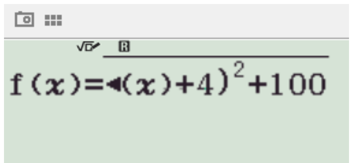
Hay $AM \ge 6\sqrt{3}$. Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi: $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow t = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$

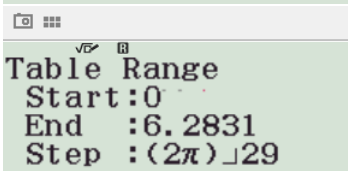
Hoặc có thể bấm:

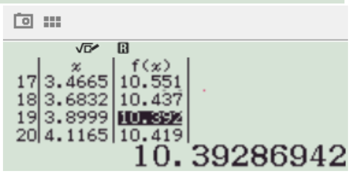










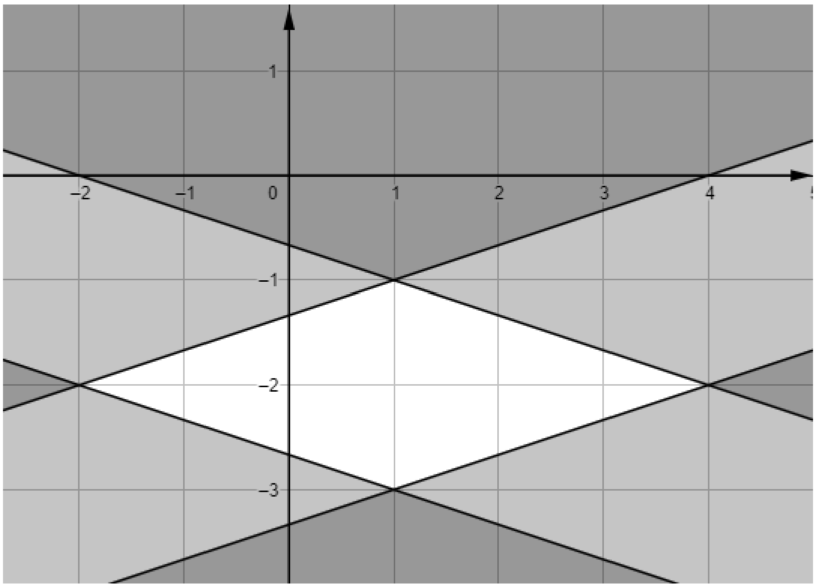


Chọn đáp án D

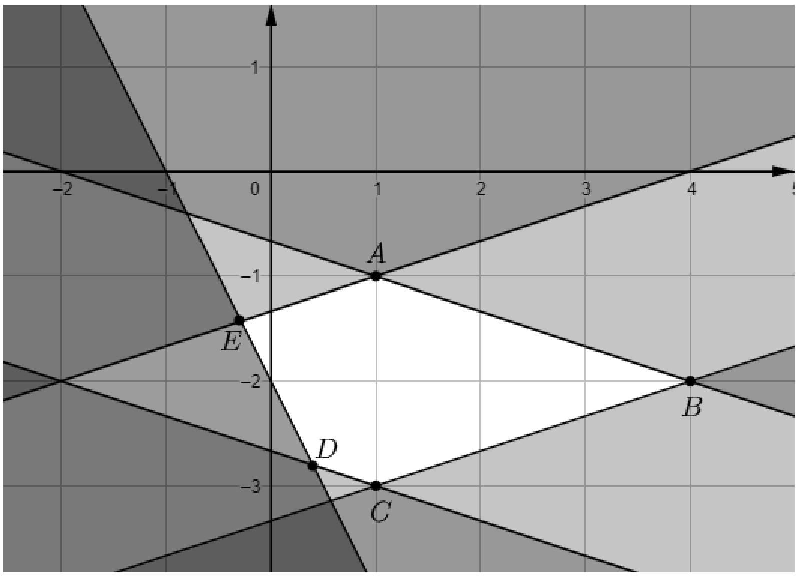
Câu 82:

Có $|z+\overline{z}-2|+3|z-\overline{z}+4i| \le 6 \Leftrightarrow |x-1|+3|y+2| \le 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+3y+2 \le 0 \\ x-3y-10 \le 0 \\ -x+3y+4 \le 0 \\ -x-3y-8 \le 0 \end{array}\right.$

Là tập hợp các điểm của hình thoi như hình vẽ.



Lại có: $|z-1-i| \le |z+3+i| \Leftrightarrow 2x+y+2 \ge 0$. Suy ra



Với $A(1;-1)$, $B(4;-2)$, $C(1;-3)$, $D\left(\frac{2}{5};-\frac{14}{5}\right)$, $E\left(-\frac{2}{7};-\frac{10}{7}\right)$, trong đó D, E lần lượt là giao điểm của đường thẳng $2x+y+2=0$ với hai đường thẳng $-x-3y-8=0$ và $-x+3y+4=0$.

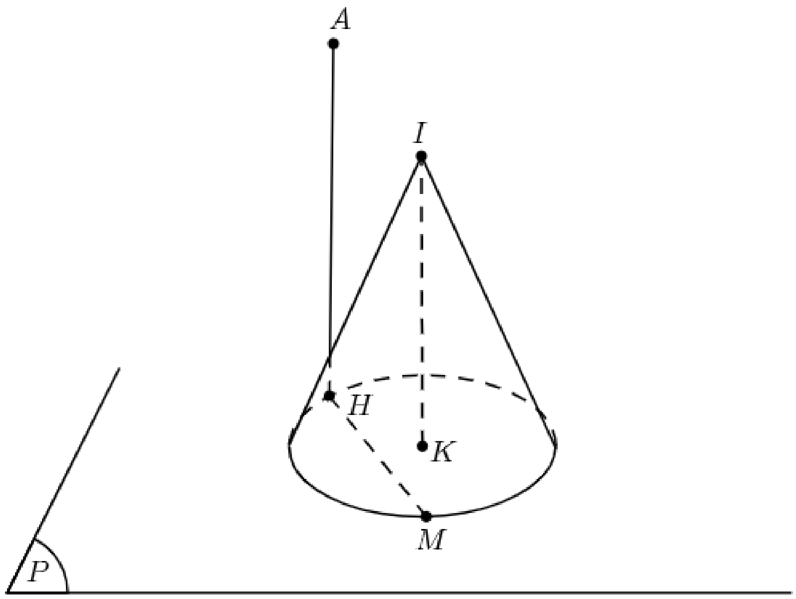
Ta có: $P(x;y) = 2x+3y+5$ đạt GTLN (GTNN) tại một trong các đỉnh của ngũ giác $ABCDEF$.

(Phương pháp tìm cực trị trong miền đa giác, sgk đại 10)

Suy ra $M = P(4;-2) = 7$ và $m = P\left(\frac{2}{5};-\frac{14}{5}\right) = -\frac{13}{5}$. Kéo theo, $M+m = \frac{22}{5}$

Chọn đáp án A

Câu 83:



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A, I trên mặt phẳng (P). Suy ra $H\left(-\frac{26}{9};-\frac{5}{9};-\frac{1}{9}\right)$, $K\left(-\frac{4}{9};\frac{11}{9};\frac{13}{9}\right)$.

Suy ra $HK = \frac{2\sqrt{26}}{3}$, $IK = \frac{11}{3}$.

Ta có: $M \in (P)$ và $IM = 5$, suy ra M nằm trên đường tròn $(K; KM)$, đáy của hình nón.

Khi đó, $KM = \sqrt{IM^2 - IK^2} = \frac{2\sqrt{26}}{3} = HK$.

Lại có: AH không đổi, do đó, để AM lớn nhất thì HM lớn nhất.

HM lớn nhất khi và chỉ khi HM là đường kính của đường tròn tâm K, bán kính KM.

Hay K là trung điểm của HM. Suy ra $M(2;3;3)$. Kéo theo, $a+b+2c = 11$.

Chọn đáp án A

Câu 84:

Ta có: $2^x - \log_2\left(y^2+615\right) = y^2 - x + 615 \Leftrightarrow 2^x + x = y^2 + 615 + \log_2\left(y^2+615\right)$.

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t$, có: $f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0$, $\forall t$

$\Rightarrow f(x) = f\left(\log_2\left(y^2+615\right)\right) \Leftrightarrow x = \log_2\left(y^2+615\right) \Leftrightarrow y = \sqrt{2^x - 615}$

Lại có: $0 \le y \le 2022$

Suy ra $0 \le \sqrt{2^x - 615} \le 2022 \Leftrightarrow 0 \le 2^x - 615 \le 2022^2 \Leftrightarrow \log_2 615 \le x \le \log_2\left(2022^2 - 615\right)$.

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{10; 11; ...21\}$

Hướng 1: Giải phương trình nghiệm nguyên $2^x - 615 = y^2$, với $x, y \ge 0$

TH1: $x = 2k+1$ $(k \in \mathbb{Z})$ là số lẻ, ta có:

$2^{2k+1} - 615 = 4^k.2 - 615 = (1+3)^k.2 - 3.615 = (1+BS3).2 - 3.615 = 2 + BS3 - 3.615.$

(BS3 nghĩa là bội số của 3)

Khi đó, vế trái chia cho 3, dư 2, vế phải là số chính phương nên chia cho 3, không dư 2, loại.

TH2: $x=2k$ $(k\in\mathbb{Z})$ là số chẵn, phương trình đã cho tương đương:

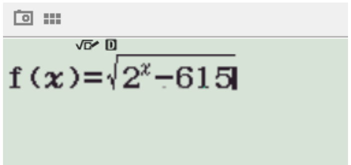
$$2^{2k}-y^2=615 \Leftrightarrow \left(2^k-y\right)\left(2^k+y\right)=3.5.41$$

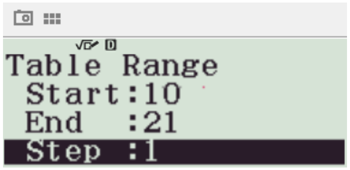
Vì $y>0$ (dễ thấy trường hợp $y=0$, không có k thỏa mãn) nên $2^k+y>2^k-y$.

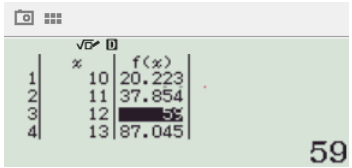
2^k+y	3.5.41	5.41	3.41	41
2^k-y	1	3	5	3.5
y	307	101	59	13
2^k	308 (loại)	104 (loại)	64	28 (loại)
k			6	
$x=2k$			12	

Vậy, có 1 cặp $(x;y)$ thỏa mãn

Hướng 2: Casio







Chọn đáp án D

Câu 85:

Vì $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục tại $x=0$: $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$.

Do đó, $1+m=0\Leftrightarrow m=-1$.

Ta có: $\int\limits_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{0}x^2\left(x^3+1\right)^3\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1}\left(\mathrm{e}^x-1\right)\mathrm{d}x=\mathrm{e}-\dfrac{23}{12}$

Suy ra $a+b+c+m=35$

Chọn đáp án B

Câu 86:

Xét hàm số $h(x)=f\left(x^6\right)-x^3$, ta có: $h'(x)=3x^2\left(2x^3f'\left(x^6\right)-1\right)$.

Xét hàm số $u(x)=2x^3f'\left(x^6\right)-1$, có $u'(x)=6x^2f'\left(x^6\right)+12x^8f''\left(x^6\right)$.

Dựa vào đồ thị, vì $x^6\geq 0$ nên $f'\left(x^6\right)>0$ và $f'\left(x^6\right)$ đang tăng (đồng biến) nên $f''\left(x^6\right)>0$.

Do đó, $u'(x)\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, suy ra $u(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lại có: $\lim\limits_{x\to-\infty}u(x)=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=+\infty$, suy ra $u(x)=0$ có nghiệm duy nhất.

Giả sử $u\left(x_0\right)=2x_0^3f'\left(x_0^6\right)-1=0$. Tương đương: $x_0^3f'\left(x_0^6\right)=\dfrac{1}{2}>0$. Có $f'\left(x_0^6\right)>0$ suy ra $x_0>0$.

Vì $f(x)$ là hàm đa thức nên $\lim\limits_{x\to\pm\infty}h(x)=+\infty$, suy ra

x	$-\infty$		0		x_0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	$\vdots$	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$h(x_0)$	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra

x	$-\infty$		0		x_0			$+\infty$
$\lvert h(x)\rvert$		$\searrow$	0	$\nearrow$	$h(x_0)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Vậy, hàm số $g(x)$ có một điểm cực đại.

Chọn đáp án D

Câu 87:

TH1: $\begin{cases} 2^{y+1}-x^2>0 \\ 3^y-x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \log_2 x^2-1<y<\log_3 x.$

Điều kiện để tồn tại y là: $\log_2 x^2-1<\log_3 x \Leftrightarrow x<3^{\log_{4,5}2}$.

Vì $x\in\mathbb{N}^*$, suy ra $x=1$. Thử lại, loại.

TH2: $\begin{cases} 2^{y+1}-x^2<0 \\ 3^y-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \log_3 x<y<\log_2 x^2-1.$

Cách 1:

Để có đúng 9 số nguyên y thì $8<\log_2 x^2-1-\log_3 x\le 10 \Leftrightarrow 9\log_{4,5}2<\log_3 x\le 11\log_{4,5}2$

TH: $4<\log_3 x<5 \Leftrightarrow 81<x<243$, suy ra $y\in\{5;6;...;13\}$.

Khi đó, $13<\log_2 x^2-1\le 14 \Leftrightarrow 2^7<x\le 2^{7,5}$. Kết hợp điều kiện, ta được: $2^7<x\le 2^{7,5}$.

Vì $x\in\mathbb{N}^*$ nên $x\in\{129;130;...181\}$

TH: $5\le\log_3 x<6 \Leftrightarrow 243\le x<729$, suy ra $y\in\{6;7;...;14\}$.

Khi đó, $14<\log_2 x^2-1\le 15 \Leftrightarrow 2^{7,5}<x\le 256$. Kết hợp điều kiện, ta được: $243\le x\le 256$.

Vì $x\in\mathbb{N}^*$ nên $x\in\{243;244;...;256\}$

Vậy, có 67 số nguyên x thỏa mãn.

Cách 2:

Để có đúng 9 số nguyên y thì $y-1\le \log_3 x<y<y+1<...<y+8<\log_2 x^2-1\le y+9$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3^{y-1}\le x<3^y\\ 2^{\frac{y+9}{2}}<x\le 2^{\frac{y+10}{2}}\end{cases}.\ \text{Hệ vô nghiệm khi và chỉ khi}\ \left[\begin{array}{l}2^{\frac{y+10}{2}}<3^{y-1}\\ 3^y\le 2^{\frac{y+9}{2}}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y>\log_{4,5}\left(9.2^{10}\right)\\ y\le \log_{4,5}2^9\end{array}\right..$$

Suy ra, để hệ có nghiệm thì $9\log_{4,5}2<y\le \log_{4,5}\left(9.2^{10}\right)$

Vì $y\in\mathbb{Z}$ nên $y=5$ hoặc $y=6$.

TH: $y=5$ thì $\begin{cases}3^4\le x<3^5\\ 2^7<x\le 2^{7,5}\end{cases}$, suy ra $x\in\{129;...;181\}$

TH: $y=6$ thì $\begin{cases}3^5\le x<3^6\\ 2^{7,5}<x\le 2^8\end{cases}$, suy ra $x\in\{243;...;256\}$

Vậy, có 67 số nguyên x thỏa mãn.

Chọn đáp án A

Câu 88:

Cách 1:

TH1: $x=0$, thay vào ta được $f(0)=0$

TH2: $x\ne 0$, nhân cả hai vế với $\frac{1}{x^2e^x}$, ta được: $\frac{f'(x)}{xe^x}-\frac{(x+1)f(x)}{x^2e^x}=-e^{-x}\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{xe^x}\right)'=-e^{-x}$.

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được: $\frac{f(x)}{xe^x}=-\int e^{-x}dx=e^{-x}+C$

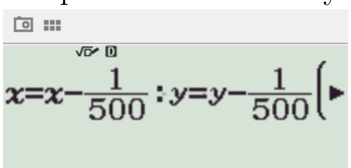
Suy ra $f(x)=x+Cxe^x$. Có $f(1)=e+1\Rightarrow C=1\Rightarrow f(x)=x+xe^x$

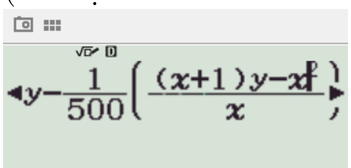
$$\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(x+xe^x\right)dx=\frac{3}{2}\Rightarrow 2a+b=8$$

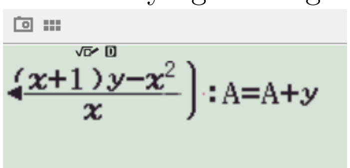
Cách 2: CASIO tích phân hàm ẩn: NHẤN VÀO ĐÂY.

> Ở đây là mình sử dụng, tool auto click để nhấn dấu (=) để chứng minh công thức không sai thôi, còn nhấn bằng tay thì thứ nhất là không kịp giờ, thứ hai là hư máy :))).

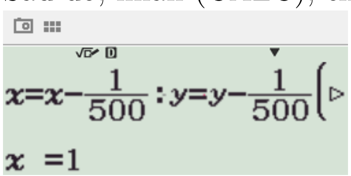
Nhấp biểu thức vào máy: (các bạn nhấn vào link xem để hiểu ý nghĩa công thức)

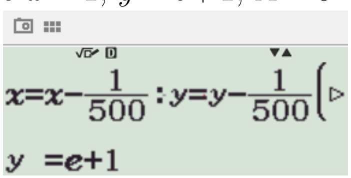


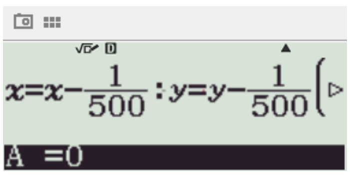




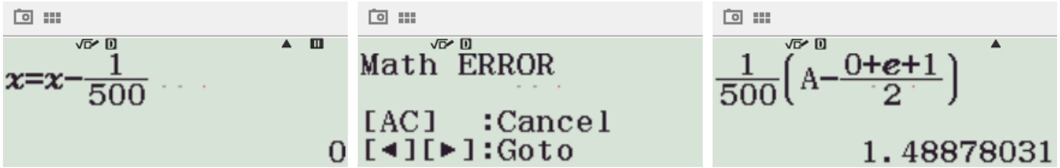
Sau đó, nhấn (CALC), cho $x=1,\ y=e+1,\ A=0$







Rồi nhấn (=) cho đến khi thấy:



Thì ở đây, khi $x=0$ thì trong biểu thức y thì x nằm dưới mẫu nên máy báo lỗi. Nhưng ta cũng không thật sự cần $y(0)$ vì đã tính được $y(0)=0$ ở trên. Kết quả xấp xỉ 1,5. Điều đấy chứng tỏ công thức đúng, máy vẫn làm được, nhưng tay thì không có khả năng bấm thôi :)). Vì thế, áp dụng công thức vào bài khác...

Chọn đáp án B

Câu 89:

Đặt $2\log_3(x+y+1)=\log_2\left(x^2+2x+2y^2+1\right)=t$, ta được: $x+y+1=\sqrt{3^t}$ và $(x+1)^2+2y^2=2^t$

Đặt $y=\dfrac{y'}{\sqrt{2}}$, thay vào ta được: $x+\dfrac{y'}{\sqrt{2}}+1=\sqrt{3^t}$ và $(x+1)^2+y'^2=2^t$

Bài toán trở thành sự tương giao giữa đường thẳng và đường tròn:

$d: x+\dfrac{y'}{\sqrt{2}}+1-\sqrt{3^t}=0$ và $(C):(x+1)^2+y'^2=2^t$ với tâm $I(-1;0)$, bán kính $R=\sqrt{2^t}$.

Do đó, để tồn tại x,y thì $d(I,(d))\le R \Leftrightarrow t\le 1$.

Khi đó, $(x+1)^2+y'^2=2^t\le 2$, suy ra $(x+1)^2\le 2\Leftrightarrow -1-\sqrt{2}\le x\le -1+\sqrt{2}$.

Vì $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{-2;-1;0\}$

TH: $x=-2$, thay vào ta được: $y=\sqrt{3^t}+1>1$.

Mà $(x+1)^2+2y^2=2^t\le 2$, suy ra $2y^2\le 2\Leftrightarrow |y|<1$, do đó, không có $y>1$ thỏa mãn.

TH: $x=-1$, thay vào ta được: $\begin{cases} y=\sqrt{3^t} \\ 2y^2=2^t \end{cases} \Leftrightarrow 2.3^t=2^t\Leftrightarrow t=\log_{1,5}0,5\Rightarrow y=\sqrt{3^{\log_{1,5}0,5}}$

TH: $x=0$, thay vào ta được: $\begin{cases} y=\sqrt{3^t}-1 \\ 2y^2=2^t-1 \end{cases} \Leftrightarrow 2\left(\sqrt{3^t}-1\right)^2=2^t-1$.

Dễ thấy $t=0$ là một nghiệm, do đó, $y=0$ là một nghiệm.

Vậy, có 2 số nguyên x thỏa mãn.

Chọn đáp án A

Câu 90:

$\left(z^2-2z+7\right)\left[z-2(\overline{z})^2\right]=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2-2z+7=0\ \ (*) \\ z-2(\overline{z})^2=0\ \ (**) \end{array}\right.$

$(*)\Leftrightarrow z=1\pm\sqrt{6}i$

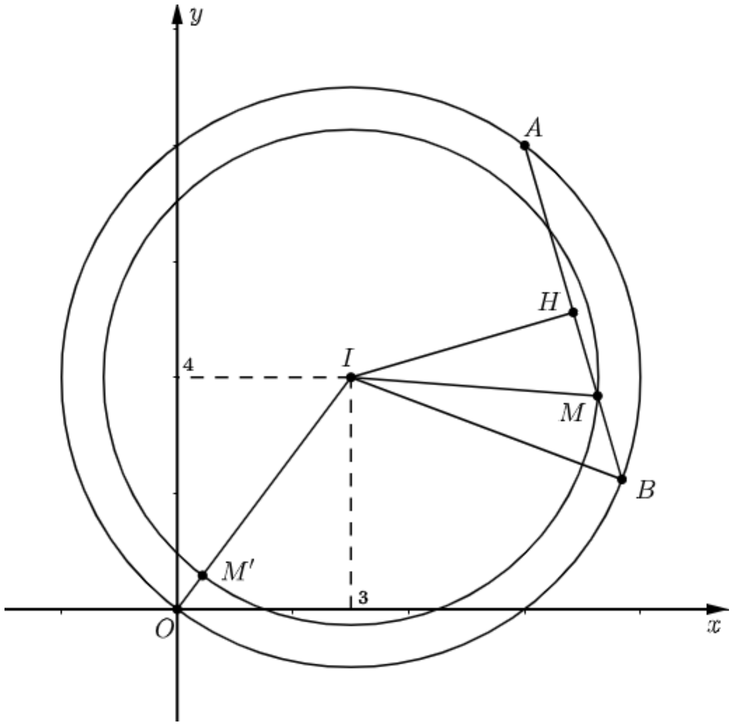
$(**)\Leftrightarrow \left(a-2a^2+2b^2\right)+(4ab+b)i=0$ với $z=a+bi$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-2a^2+2b^2=0 \\ 4ab+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-2a^2+2b^2=0 \\ \left[\begin{array}{l} b=0 \\ a=-\dfrac{1}{4} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=0 \\ z=\dfrac{1}{2} \\ z=-\dfrac{1}{4}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{4}i \end{array}\right.$$

Vậy, có 6 số phức z thỏa mãn.
Chọn đáp án C

Câu 91:

Cách 1:



Đặt $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$, gọi A,B lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z_1,z_2.

Ta có: $(z-6)(8-i\overline{z})=(8x+6y-48)+\left(-x^2-y^2+6x+8y\right)i$

Để $(z-6)(8-i\overline{z})$ là số thực thì $-x^2-y^2+6x+8y=0$

Hay $(x-3)^2+(y-4)^2=25$ là đường tròn tâm $I(3;4)$, bán kính $R=5$.

Xét điểm M thỏa mãn: $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}=4\overrightarrow{OM}$

Gọi H là trung điểm AB, suy ra $IH=\sqrt{IB^2-HB^2}=4$, kéo theo, $IM=\sqrt{IH^2+HM^2}=\dfrac{\sqrt{73}}{2}$.

Suy ra, điểm M thuộc đường tròn tâm I, bán kính $\dfrac{\sqrt{73}}{2}$

Lại có: $|z_1+3z_2|=\left|\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}\right|=\left|4\overrightarrow{OM}\right|=4OM$.

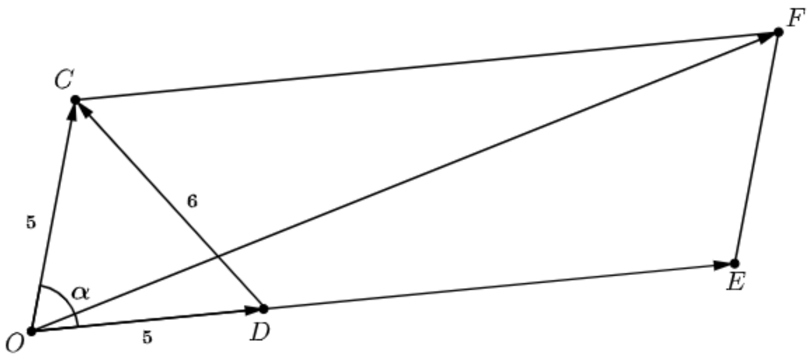
Để $|z_1+3z_2|$ nhỏ nhất thì OM nhỏ nhất, khi đó, $M\equiv M'$.

Suy ra, $\min|z_1+3z_2|=4OM'=4\left(IO-IM'\right)=20-2\sqrt{73}$

Cách 2:

Ta có: $(x-3)^2+(y-4)^2=25$, suy ra $|z-3-4i|=5$.

Đặt $w_1=z_1-3-4i$, $w_2=z_2-3-4i$. Khi đó, $|w_1|=|w_2|=5$ và $|w_1-w_2|=6$.



Gọi C,D,E,F lần lượt là các điểm biểu diễn của w_1, w_2 ,w_2', w_3, trong đó $w_2'=3w_2$ và $w_1+3w_2=w_3$

Có $\cos\alpha=\dfrac{OC^2+OD^2-CD^2}{2.OC.OD}=\dfrac{7}{25}$

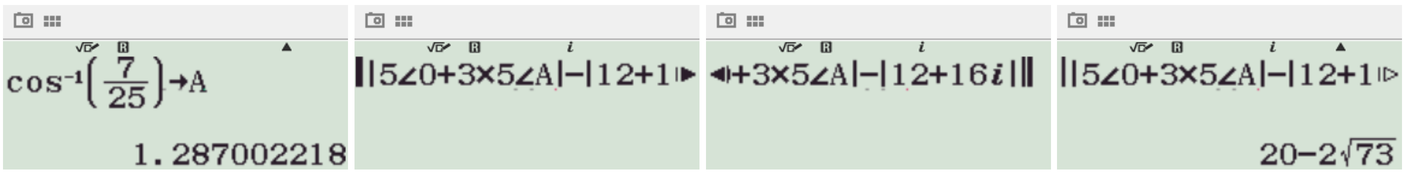
Suy ra, $OF^2=OE^2+EF^2-2.OE.EF\cos(180^\circ-\alpha)$.

$$=OE^2+EF^2+2.OE.EF\cos\alpha=292$$

Suy ra $OF=2\sqrt{73}$. Ta có: $|z_1+3z_2|=|w_1+3w_2+12+16i|=|w_3+12+16i|$

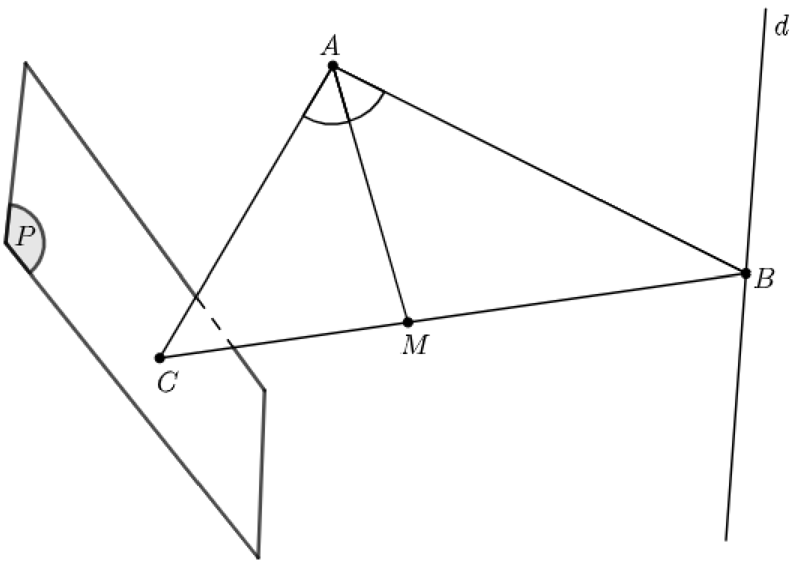
Áp dụng bất đẳng thức trị tuyệt đối, ta có: $|w_3+12+16i|\geq||w_3|-|12+16i||=20-2\sqrt{73}$.

Từ cơ sở của cách 2, ta suy được cách bấm máy như sau: **CASIO số phức:** NHẤN VÀO ĐÂY.



Chọn đáp án D

Câu 92:



Có AM là phân giác của ΔABC. Suy ra $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{MB}{MC}=2\Rightarrow \overrightarrow{MB}=-2\overrightarrow{MC}$

Có $B\in d$, suy ra $B(t;t;t)$, suy ra $C\left(\dfrac{2-t}{2};\dfrac{-t}{2};\dfrac{4-t}{2}\right)$.

Có $C\in(P)$, suy ra $t=-2$, kéo theo, $B(-2;-2;-2)$

Đường thẳng BC đi qua B và nhận $\overrightarrow{BM}=2(2;1;3)$ làm VTCP. Suy ra $BC:\begin{cases}x=-2+2t\\y=-2+t\\z=-2+3t\end{cases}$

Chọn đáp án C

Câu 93:

Cách 1:

Ta có: $g(x)=f\left(\sqrt{x^2-4x+6}\right)-2\left(x^2-4x\right)\sqrt{x^2-4x+6}-12\sqrt{x^2-4x+6}+1$

$$=f\left(\sqrt{x^2-4x+6}\right)-2\left(x^2-4x+6\right)\sqrt{x^2-4x+6}+1.$$

Từ đồ thị, suy ra $f(x)=x^4-2x^2-3$, suy ra $f'(x)=4x^3-4x$

Đặt $t=\sqrt{x^2-4x+6}$, có $x\in[1;4]$ suy ra $t\in\left[\sqrt{2};\sqrt{6}\right]$.

Xét hàm số $h(t)=f(t)-2t^3+1$, ta có: $h'(t)=f'(t)-6t^2=4t^3-4t-6t^2$

$\Rightarrow h'(t)=0\Leftrightarrow 4t^3-6t^2-4t=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=2\\t=0\\t=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

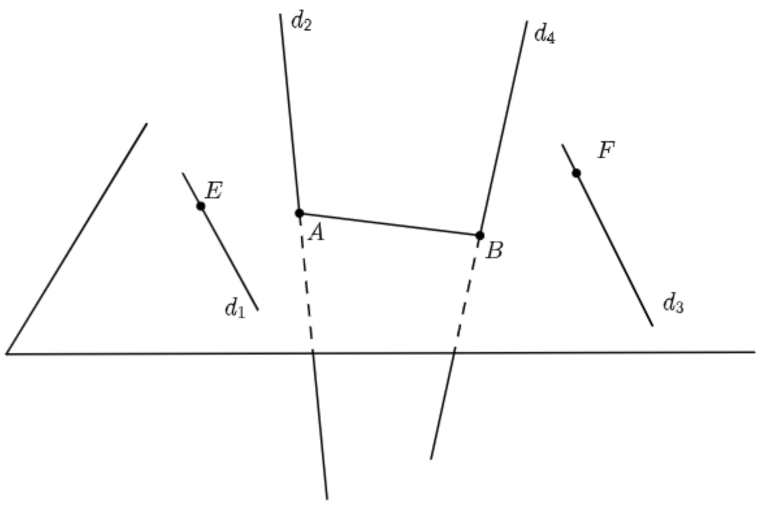
Có $h\left(\sqrt{2}\right)=-2-4\sqrt{2}$, $h(2)=-10$, $h\left(\sqrt{6}\right)=22-12\sqrt{6}$. Suy ra $\max\limits_{[1;4]}g(x)+\min\limits_{[1;4]}g(x)=12-12\sqrt{6}$

Cách 2: Suy được hàm $f(x)=x^4-2x^2-3$, sử dụng TABLE khảo sát $g(x)$ với $x\in[1;4]$.

(Phần này các bạn tự xử lí)

Chọn đáp án B

Câu 94:



Đường thẳng d_1 có $\overrightarrow{u_1} = (-1;1;1)$ và đi qua điểm $E(3;-3;0)$.

Đường thẳng d_3 có $\overrightarrow{u_3} = (1;-1;-1)$ và đi qua điểm $F(0;-2;-1)$.

Vì $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_3}$ cùng phương và không cùng phương với $\overrightarrow{FE} = (3;-1;1)$ nên $d_1 \parallel d_3$.

Gọi (α) là mặt phẳng chứa d_1, d_3. Ta có: $\overrightarrow{n_\alpha} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{FE}\right] = 2(1;2;-1)$

Suy ra $(\alpha): x+2y-z+3=0$.

Lại có: $\overrightarrow{n_\alpha}.\overrightarrow{u_2} \neq 0$ và $\overrightarrow{n_\alpha}.\overrightarrow{u_4} \neq 0$ nên (α) cắt d_2, d_4.

Gọi A, B lần lượt giao điểm của (α) với d_2, d_4. Suy ra $A(0;-1;1)$ và $B(6+t;a+3t;b+t)$

Vì d_1, d_3 nằm trong (α) nên đường thẳng cắt đồng thời d_1, d_3 thì phải nằm trong mặt phẳng (α).

Có duy nhất đường thẳng AB nằm trong (α) và cắt đồng thời d_2, d_4.

Do đó, để không có đường thẳng nào đồng thời cắt cả bốn đường thẳng d_1, d_2, d_3, d_4 thì $AB \parallel d_1 \parallel d_3$.

Tức là $\overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{u_1} \Leftrightarrow \dfrac{6+t}{-1} = \dfrac{a+1+3t}{1} = \dfrac{b-1+t}{1} \Leftrightarrow -6-t = a+1+3t = b-1+t$, với $k \neq 0$.

Suy ra $\begin{cases} a = -7-4t \\ b = -5-2t \end{cases}$, kéo theo $2b-a=-3$.

Chọn đáp án D

Câu 95:

Đặt $t = 3^x$, vì $x \geq 0$ nên $t \geq 1$, phương trình trở thành:

$$t^3 - (2m-1)t^2 + \left(m^2+2m-53\right)t - m^2 + 51 = 0 \ \ (*)$$

Dễ thấy $t=1$ là nghiệm của phương trình, khi đó:

$$t^3 - (2m-1)t^2 + \left(m^2+2m-53\right)t - m^2 + 51 = 0 \Leftrightarrow (t-1)\left(t^2-(2m-2)t+m^2-51\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t^2-(2m-2)t+m^2-51=0 \ \ (**) \end{array}\right.$$

Để phương trình $(*)$ có ba nghiệm phân biệt $t \geq 1$ thì phương trình $(**)$ có hai nghiệm phân biệt $t > 1$.

Xét phương trình $t^2-(2m-2)t+m^2-51=0$ với $m \notin \{-6;8\}$

$\Delta = (2m-2)^2 - 4\left(m^2-51\right) = -8m+208 > 0 \Leftrightarrow m < 26$

Hướng 1:

Khi đó, để có hai nghiệm $t > 1$ thì

$$t_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} > 1 \Leftrightarrow 2m-4 > \sqrt{-8m+208} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ 4m^2-8m-192 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 8.$$

Kết hợp điều kiện, ta được: $m \in \{9;10;...;25\}$.

Vậy, có 17 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Hướng 2: (áp dụng định lí về dấu của tam thức bậc 2)

Để $1 < t_1 < t_2$ thì $\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} > 1 \\ a.f(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ 1-(2m-2)+m^2-51 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 8$

Kết hợp điều kiện, ta được: $m \in \{9;10;...;25\}$.

Vậy, có 17 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Chọn đáp án A

Câu 96:

Cách 1:

Đặt $t = \sqrt{3-x}$, có $t' = -\dfrac{1}{2\sqrt{3-x}} < 0,\ \forall x \in (-6;2)$. Và $x \in (-6;2)$, suy ra $t \in (1;3)$

Vì t nghịch biến nên bài toán trở thành tìm m để $y = \dfrac{t+2}{t+m}$ nghịch biến trên khoảng $(1;3)$.

Điều kiện: $t \neq -m \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -m \leq 1 \\ -m \geq 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq -1 \\ m \leq -3 \end{array}\right.$

Ta có: $y' = \dfrac{m-2}{(t+m)^2} < 0 \Leftrightarrow m < 2$

Kết hợp điều kiện, suy ra: $m \in \{-9;-8;...;-3;-1;0;1\}$. Vậy, có 10 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Cách 2:

Thay các giá trị $m \in (-10;10)$, rồi xét hàm số trên khoảng $(-6;2)$ bằng TABLE.

(Nhược điểm là nếu khoảng m quá lớn thì không xét hết được).

Chọn đáp án B

Câu 97:

Ta có: $I = \displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{f(\ln x)}{x}\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x$

$$= \int_{-1}^{0}\left(2x\sqrt{x^2+3}+1\right)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} 3x^2\ln(x+1)\mathrm{d}x$$

Đặt $t = \sqrt{x^2+3} \Rightarrow t^2 = x^2+3 \Rightarrow 2t\mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{0}\left(2x\sqrt{x^2+3}+1\right)\mathrm{d}x = \int_{2}^{\sqrt{3}} 2t^2\mathrm{d}t + x\Big|_{-1}^{0} = 2\sqrt{3} - \frac{13}{3}$$

Đặt $\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ \mathrm{d}v = 3x^2\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{x+1} \\ v = x^3+1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_{0}^{1} 3x^2\ln(x+1)\mathrm{d}x = \left(x^3+1\right)\ln(x+1)\Big|_{0}^{1} - \int_{0}^{1}\left(x^2-x+1\right)\mathrm{d}x = 2\ln 2 - \frac{5}{6}$$

$\Rightarrow I = 2\sqrt{3} + 2\ln 2 - \dfrac{31}{6} \Rightarrow a + b + 6c = -27$

Chọn đáp án C

Câu 98:

Với $x \in \mathbb{R} \backslash \{-2; 0\}$, ta có:

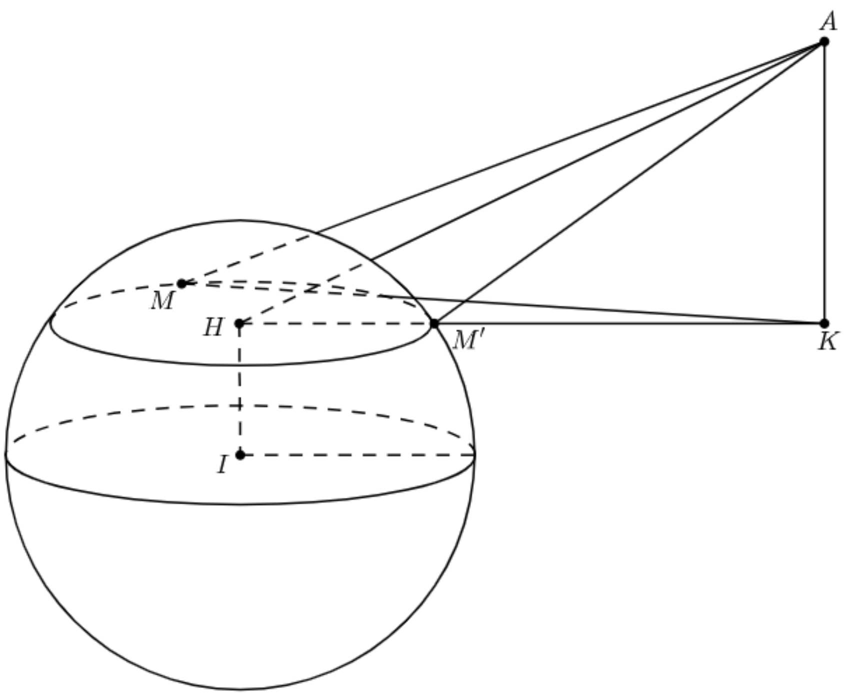
$x(x+2)f'(x) + 2f(x) = x^2 + 2x \Leftrightarrow \dfrac{x}{x+2}f'(x) + \dfrac{2}{(x+2)^2}f(x) = \dfrac{x}{x+2} \Leftrightarrow \left(\dfrac{x}{x+2}f(x)\right)' = 1 - \dfrac{2}{x+2}$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được: $\dfrac{x}{x+2}f(x) = \displaystyle\int \left(1 - \dfrac{2}{x+2}\right) \mathrm{d}x = x - 2\ln|x+2| + C$

Có $f(1) = -6\ln 3 \Rightarrow C = -1 \Rightarrow f(3) = \dfrac{20}{3}$

Chọn đáp án D

Câu 99:



Ta có: $(x_A + 2)^2 + y_A^2 + (z_A + 5)^2 > 24$, suy ra A nằm bên ngoài mặt cầu.

Gọi I là tâm mặt cầu (S), H, K lần lượt là hình chiếu của I và A lên mặt phẳng (α).

Suy ra $I(-2; 0; -5)$, $H(-2 + a; a; -5)$, $K(4 + b; -12 + b; 1)$.

Vì $H, K \in (\alpha)$ nên $H(-3; -1; -5)$, $K(6; -10; 1)$, kéo theo, $HK = 3\sqrt{22}$, $IH = \sqrt{2}$.

Gọi R, r lần lượt là bán kính của mặt cầu (S) và đường tròn (C). Ta có: $MH = r = \sqrt{R^2 - IH^2} = \sqrt{22}$

Lại có: $AM = \sqrt{MK^2 + AK^2}$, vì AK không đổi nên AM nhỏ nhất khi MK nhỏ nhất.

MK nhỏ nhất khi và chỉ khi $M \equiv M'$. Khi đó, $\overrightarrow{HM} = \dfrac{\overrightarrow{HK}}{3} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \dfrac{2\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OK}}{3} = (0; -4; -3)$

Chọn đáp án B

Câu 100:

Điều kiện: $x+y>0 \Rightarrow y>-x$.

Xét hàm số $f(y)=4^{x^2-5y+16}+2^{-x-y}-512 \geq 0$.

Ta có: $f'(y)=-5.4^{x^2-5y+16}\ln 4-2^{-x-y}\ln 2<0,\ \forall y>-x$.

Để có không quá 2 số nguyên y thỏa mãn thì $f(-x+1)>f(-x+2)\geq 0>f(-x+3)$.

Nghĩa là $f(-x+3)<0 \Leftrightarrow 4^{x^2+5x+1}<511,875 \Leftrightarrow x^2+5x+1-\log_4 511,875<0$

Vì $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{-5;-4;...;0\}$.

Vậy có 6 số nguyên x thỏa mãn.

Chọn đáp án C

Câu 101:

Cách 1:

Với $x,y>0$, ta có:

$$2\left(x^2+y^2+4\right)+\log_{2022}\left(\frac{2}{x}+\frac{2}{y}\right)=\frac{1}{2}(xy-4)^2 \Leftrightarrow (2x+2y)^2+\log_{2022}(2x+2y)^2=x^2y^2+\log_{2022}\left(x^2y^2\right)$$

Xét hàm số $f(t)=t+\log_{2022}t$, với $t>0$. Ta có: $f'(t)=1+\dfrac{1}{t\ln 2022}>0,\ \forall t>0$

$$\Rightarrow f\left((2x+2y)^2\right)=f\left(x^2y^2\right)\Leftrightarrow (2x+2y)^2=x^2y^2 \Leftrightarrow 2x+2y=xy \Leftrightarrow y=\frac{2x}{x-2},\text{ với } x>2 \text{ (vì } x,y>0)$$

Hướng 1:

Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$, ta có:

$$P=x+\frac{8x}{x-2}=x-2+\frac{16}{x-2}+10\geq 2\sqrt{(x-2).\frac{16}{x-2}}+10=18$$

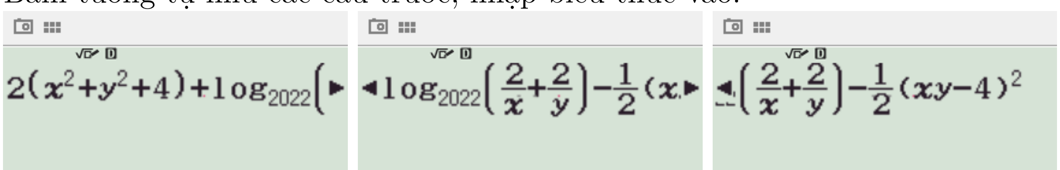
Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $x=6$. Suy ra $y=3$, kéo theo $\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{2}$

Hướng 2:

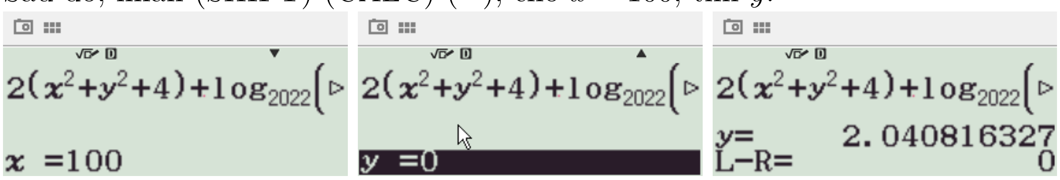
Khảo sát hàm số $P(x)=x+\dfrac{8x}{x-2}$ với $x>2$. Suy ra $P(x)\geq P(6)$. Suy ra $x=6, y=3$, kéo theo $\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{2}$

Cách 2: Kĩ thuật "hàm đặc trưng": NHẤN VÀO ĐÂY.

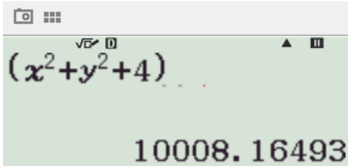
Bấm tương tự như các câu trước, nhập biểu thức vào:

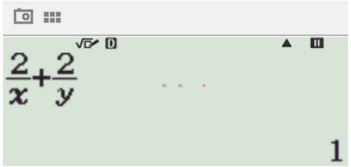


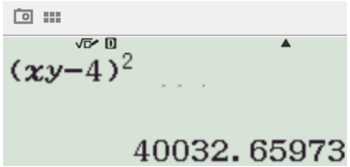
Sau đó, nhấn (SHIFT) (CALC) (=), cho $x=100$, tìm y:



Sau đó, nhập các biểu thức của phương trình vào kiểm tra:







Dễ thấy $4\left(x^2+y^2+4\right)=(xy-4)^2$, từ đó suy ra $2x+2y=xy$

Còn nếu không thấy được thì ta cũng có $\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{y}=1$, từ đó được kết quả tương tự.

Cuối cùng, thay vào khảo sát hàm số $P(x)$ hoặc $P(y)$ bằng TABLE. (các bạn tự xử lí).

Chọn đáp án C

Câu 102:

Cơ sở của hai cách làm: NHẤN VÀO ĐÂY.

Cách 1:

Đặt $g(x)=f\left(|4-2x|+m-6\right)$. Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=+\infty$

Do đó, để hàm số $g(x)$ có đúng 3 điểm cực tiểu thì hàm số $g(x)$ có đúng 5 điểm cực trị.

Lại có: Số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ bằng số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(|x|+m-6\right)$.

Mà số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(|x|+m-6\right)$ thì bằng hai lần số điểm cực trị dương của hàm số $y=f\left(x+m-6\right)$ cộng một.

Vì thế, để hàm số $g(x)$ có đúng 5 điểm cực trị thì hàm số $y=f\left(x+m-6\right)$ có đúng 2 điểm cực trị dương.

Từ đồ thị hàm số $f'(x)$, suy ra các điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x+m-6\right)$ là:

$$\left[\begin{array}{l} x+m-6=-1 \\ x+m-6=1 \\ x+m-6=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5-m \\ x=7-m \\ x=10-m \end{array}\right.$$

Để có đúng 2 điểm cực trị dương thì $5-m\le 0<7-m \Leftrightarrow 5\le m<7$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $S=\{5;6\}$.

Vậy, tổng các phần tử của S bằng 11.

Cách 2:

Lý luận như trên đến đoạn, hàm số $g(x)$ có đúng 5 điểm cực trị. Đặt $u(x)=|4-2x|+m-6$, ta có:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$u(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$m-6$	$\nearrow$	$+\infty$

Áp dụng công thức:

$$\text{SĐCT } f(u(x)) = \text{SĐCT } u(x) + \text{SNBL} \left[\begin{array}{l} u(x) = -1 \\ u(x) = 1 \\ u(x) = 4 \end{array}\right.$$

Ta có: $u(x)$ có đúng một điểm cực trị. Do đó, để $f(u(x))$ có đúng 5 điểm cực trị thì

$\left[\begin{array}{l} u(x) = -1 \\ u(x) = 1 \\ u(x) = 4 \end{array}\right.$ có đúng 4 nghiệm bội lẻ. Khi đó, $-1 \le m-6 < 1 \Leftrightarrow 5 \le m < 7$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $S = \{5; 6\}$.

Vậy, tổng các phần tử của S bằng 11.

Chọn đáp án B

Câu 103:

Việc tìm mối liên hệ giữa x, y bằng CASIO các bạn tham khảo ở các câu trước.

Với $x, y > 0$, ta có:

$$\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3)+y(y-3)+xy$$

$$\Leftrightarrow 2\log_3(3x+3y)+3x+3y = 2\log_3\left(x^2+y^2+xy+2\right)+x^2+y^2+xy+2$$

Xét hàm số $f(t) = 2\log_3 t + t$, với $t > 0$. Ta có: $f'(t) = \dfrac{2}{t\ln 3} + 1 > 0, \forall t > 0$.

$$\Rightarrow f(3x+3y) = f\left(x^2+y^2+xy+2\right) \Leftrightarrow 3x+3y = x^2+y^2+xy+2 \ \ (*)$$

Cách 1:

$$(*) \Leftrightarrow \left(x+\frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} - 3\left(x+\frac{y}{2}\right) - \frac{3y}{2} + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{y}{2}-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{y\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$$

Đặt $\begin{cases} a = x+\dfrac{y}{2}-\dfrac{3}{2} \\ b = \dfrac{y\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a - \dfrac{b}{\sqrt{3}} + 1 \\ y = \dfrac{2b}{\sqrt{3}} + 1 \end{cases}$

Khi đó, ta có: $P(x+2y+1) = 4x+5y-3 \Rightarrow (P-4)a + \sqrt{3}(P-2)b + 4P - 6 = 0$ và $a^2+b^2 = 1$

Khi đó, trở thành bài toán tương giao giữa đường thẳng $(\alpha): (P-4)a + \sqrt{3}(P-2)b + 4P - 6 = 0$ và đường tròn $(C): a^2+b^2 = 1$, tâm $I(0;0)$, bán kính $R = 1$.

Để tồn tại $\max P$ thì $d(I,(\alpha)) \le R \Leftrightarrow -12P^2 + 28P - 8 \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} \le P \le 2$

Ta có: $\max P = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} -2a+2 = 0 \\ a^2+b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow 2021x + 2022y = 6064.$

Cách 2:

$(*) \Leftrightarrow 4x^2+4y^2+4xy+8-12x-12y=0 \Leftrightarrow (2x+y)^2-6(2x+y)+5=-3(y-1)^2 \le 0$

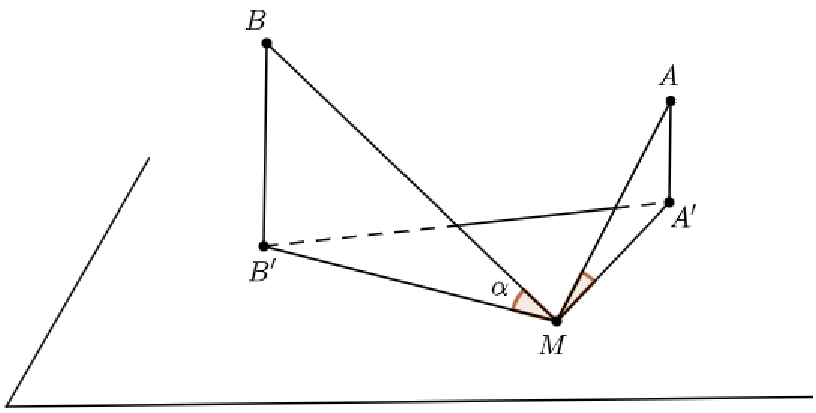
Suy ra $1 \le 2x+y \le 5$.

Ta có: $P=\dfrac{4x+5y-3}{x+2y+1}=2+\dfrac{2x+y-5}{x+2y+1} \le 2$ (Vì $2x+y-5 \le 0$ và $x+2y+1>0$)

Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} 2x+y-5=0 \\ y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow 2021x+2022y=6064$

Chọn đáp án A

Câu 104:



Gọi A', B' lần lượt là hình chiếu của A, B lên mặt phẳng (Oxz).

Suy ra $A'(3;0;1)$, $B'(3;0;-2)$, kéo theo, $AA'=1$ và $BB'=2$.

Ta có: $MB'=BB'.\cot\alpha$, $MA'=AA'.\cot\alpha$

$\Rightarrow MB'=2MA' \Leftrightarrow (x-3)^2+y^2+(z+2)^2=4\left((x-3)^2+y^2+(z-1)^2\right)$, với $M(x;y;z)$

$\Leftrightarrow (x-3)^2+y^2+(z-2)^2=4 \ (S)$

Suy ra M nằm trong mặt cầu tâm $I(3;0;2)$, bán kính $R=2$.

Lại có: $I, M \in (Oxz)$, $(C)=(S)\cap(Oxz)$.

Suy ra bán kính đường tròn (C) bằng $R=2$.

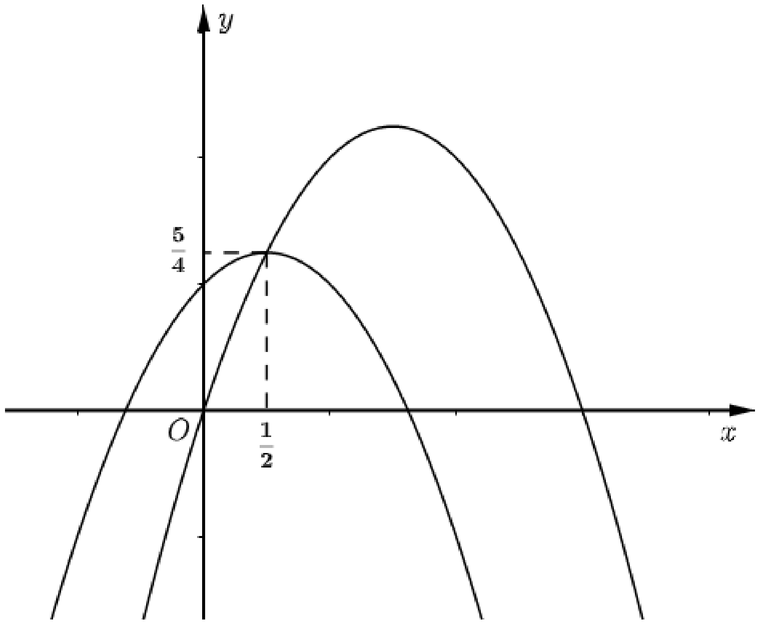
Chọn đáp án D

Câu 105:

Biến đổi giả thiết, ta được: $\left(x^2-2x+m\right)^2-2\left(x^2-2x+m\right)-x+m=0$.

Đặt $t=x^2-2x+m$, ta được: $\begin{cases} t^2-2t+m=x \\ x^2-2x+m=t \end{cases}$

$\Rightarrow t^2-x^2-2t+2x=x-t \Leftrightarrow (t-x)(t+x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=x \\ t=1-x \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=3x-x^2 \\ m=1+x-x^2 \end{array}\right.$



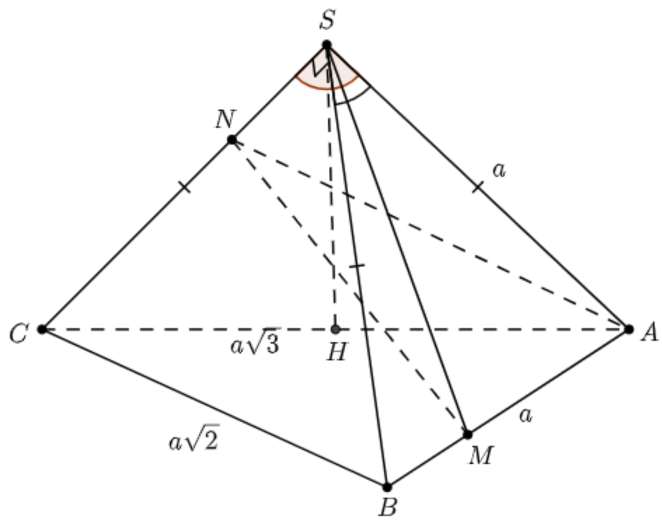
Dựa vào đồ thị, suy ra: để phương trình có 4 nghiệm phân biệt thì $m < \dfrac{5}{4}$.

Kết hợp điều kiện, suy ra: $m \in \{-2022; -2021; ...; 1\}$.

Vậy, có 2024 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Chọn đáp án Ⓒ

Câu 106:



Dễ dàng tính được các cạnh $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$, $AC = a\sqrt{3}$, suy ra ΔABC vuông tại B.

Gọi H là trung điểm của AC, suy ra $AH = HC = HB$ và $SH \perp AC$, suy ra $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \dfrac{a}{2}$.

Lại có: $SH^2 + HB^2 = SB^2$, suy ra $SH \perp HB$, kéo theo $SH \perp (ABC)$.

Do đó, $V_{SABC} = \dfrac{SH.AB.BC}{6} = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{12}$

Đặt $k = \dfrac{CN}{SC} = \dfrac{AM}{AB}$, với $k \in [0;1]$. Suy ra, $\overrightarrow{NC} = k\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.

Ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{SN} - \overrightarrow{SM} = (1-k)\overrightarrow{SC} + (k-1)\overrightarrow{SA} - k\overrightarrow{SB}$

Suy ra $MN^2 = \left(3k^2 - 5k + 3\right)a^2 \geq \dfrac{11a^2}{12}$. Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $k = \dfrac{5}{6}$

Lại có: $\dfrac{V_{SAMN}}{V_{SAMC}} = \dfrac{SN}{SC}$ và $\dfrac{V_{AMSC}}{V_{ABSC}} = \dfrac{AM}{AB}$.

Suy ra $V_{SAMN} = \dfrac{SN}{SC}.\dfrac{AM}{AB}.V_{SABC} = (1-k)k.V_{SABC} = \dfrac{5\sqrt{2}a^3}{432}$.

Chọn đáp án D

Câu 107:

Đặt $k = \int\limits_0^1 x^2 f\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$, suy ra $f(x) = x^2 + 12k$, kéo theo, $f\left(\sqrt{x}\right) = x + 12k$

Thay vào, ta được: $k = \int\limits_0^1 x^2 f\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 x^2(x+12k)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(x^3 + 12kx^2\right)\mathrm{d}x = \left(\dfrac{x^4}{4} + 4kx^3\right)\Bigg|_0^1$

Suy ra $k = \dfrac{1}{4} + 4k \Leftrightarrow k = -\dfrac{1}{12} \Rightarrow f(x) = x^2 - 1 \Rightarrow I = \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = -\dfrac{2}{3}$

Chọn đáp án B

Câu 108:

Cách 1:

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ 27 - 3^{x-6} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \leq 9.$

Dễ thấy trường hợp $x = 9$, bất phương trình thỏa mãn.

Xét trường hợp $0 < x < 9$, khi đó, bất phương trình tương đương: $\log_2^2(2x) - 3\log_2 x - 7 \leq 0 \ (*)$

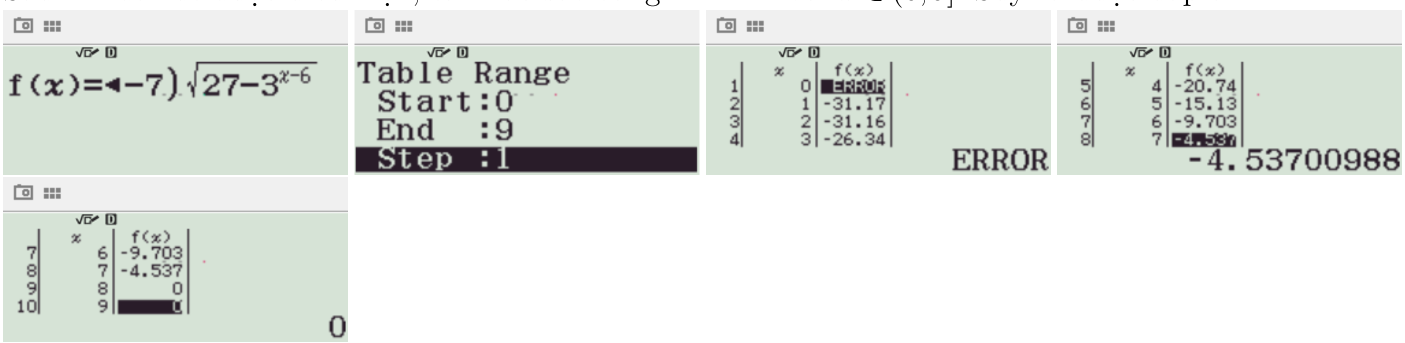
$(*) \Leftrightarrow \log_2^2 x - \log_2 x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq \log_2 x \leq 3 \Leftrightarrow \dfrac{1}{4} \leq x \leq 8.$

Kết hợp điều kiện, suy ra: $x \in \{1;2;...;9\}$.

Vậy, có 9 giá trị nguyên x thỏa mãn.

Cách 2:

Sau khi đã rút được điều kiện, ta khảo sát bằng TABLE với $x \in (0;9]$. Suy ra được đáp án.



Chọn đáp án A

Câu 109:

Cách 1:

$\Delta = 4(m+1)^2 - 4(m+3) = 4m^2 + 4m - 8$

TH1: $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq -2 \\ m \geq 1 \end{array}\right.$. Khi đó, $z_0 \in \mathbb{R}$. Suy ra $|z_0 + 2| = 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_0 = 4 \\ z_0 = -8 \end{array}\right.$

Với $z_0 = 4$, suy ra $m = \dfrac{11}{7}$ (nhận)

Với $z_0 = -8$, suy ra $m = -\dfrac{83}{17}$ (nhận)

TH2: $\Delta < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 1$. Khi đó, $z_0 = \dfrac{2(m+1) \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2} = m + 1 \pm i\sqrt{-m^2 - m + 2}$.

Suy ra $(m+3)^2 - m^2 - m + 2 = 36 \Leftrightarrow m = 5$ (loại).

Vậy, có 2 giá trị m thỏa mãn.

Cách 2:

Đặt $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$, thay vào ta được: $\begin{cases} x^2 - y^2 - 2(m+1)x + m + 3 = 0 \\ 2xy - 2(m+1)y = 0 \\ (x+2)^2 + y^2 = 36 \end{cases}$

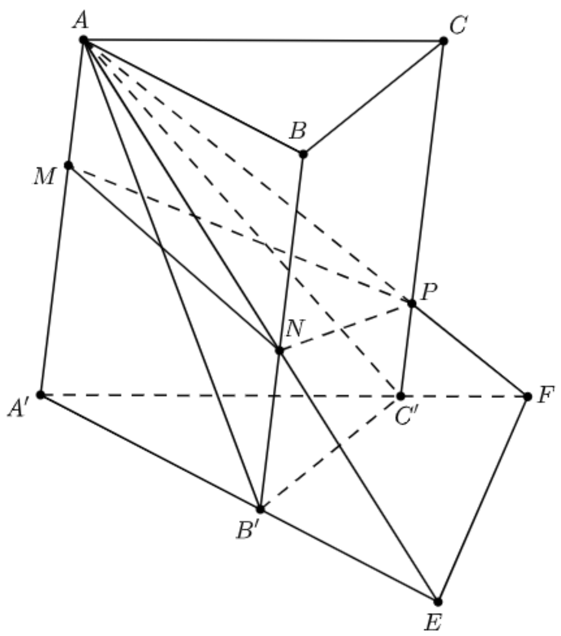
Giải hệ phương trình, ta được: $(x; y; m) \in \left\{ \left(4; 0; \dfrac{11}{7}\right); \left(-8; 0; -\dfrac{83}{17}\right); \left(6; \pm 2\sqrt{7}i; 5\right) \right\}$.

Vì $x, y \in \mathbb{R}$ nên $m \in \left\{ \dfrac{11}{7}; -\dfrac{83}{17} \right\}$.

Vậy, có 2 giá trị m thỏa mãn.

Chọn đáp án A

Câu 110:



Bài toán tổng quát

Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. M,N,P là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh AA',BB',CC' sao cho $\dfrac{AM}{AA'}=a$, $\dfrac{BN}{BB'}=b$, $\dfrac{CP}{CC'}=c$. Chứng minh $\dfrac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}}=\dfrac{a+b+c}{3}$

Gọi $E=AN\cap A'B'$, $F=AP\cap A'C'$.

Ta có: $\dfrac{A'B'}{A'E}=\dfrac{AN}{AE}=\dfrac{BN}{BB'}=b$ và $\dfrac{A'C'}{A'F}=\dfrac{AP}{AF}=\dfrac{CP}{CC'}=c$.

$\dfrac{S_{A'B'C'}}{S_{A'EF}}=\dfrac{A'B'}{A'E}.\dfrac{A'C'}{A'F}=bc\Rightarrow V_{AA'EF}=\dfrac{V_{AA'B'C'}}{bc}=\dfrac{V_{ABCA'B'C'}}{3bc}$

$\dfrac{V_{AMNP}}{V_{AA'EF}}=abc\Rightarrow V_{AMNP}=\dfrac{a}{3}.V_{ABCA'B'C'}$

$\dfrac{S_{BNPC}}{S_{BB'C'C}}=\dfrac{b+c}{2}\Rightarrow V_{ABNPC}=\dfrac{b+c}{2}.V_{ABB'C'C}=\dfrac{b+c}{2}.\dfrac{2V_{ABCA'B'C'}}{3}=\dfrac{b+c}{3}.V_{ABCA'B'C'}$

Khi đó: $V_{ABC.MNP}=V_{AMNP}+V_{ABNPC}=\dfrac{a+b+c}{3}V_{ABC.A'B'C'}$

> Nếu các bạn không nhớ công thức thì phải làm các bước trên.

Áp dụng vào đề bài, ta có: $\dfrac{V_{ABC.MNP}}{V}=\dfrac{\frac{1}{3}+x+y}{3}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow x+y=\dfrac{5}{3}\Rightarrow xy\le\dfrac{(x+y)^2}{4}=\dfrac{25}{36}$.

Chọn đáp án A

Câu 111:

Cơ sở của hai cách làm: NHẤN VÀO ĐÂY.

Cách 1:

Đặt $k=2x^3+3x\Rightarrow k'=6x^2+3>0,\ \forall x$.

Do đó, với mỗi giá trị của x, chỉ có duy nhất một giá trị của k.

Suy ra, số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ bằng số điểm cực trị của hàm số $f(|x|-m+1)$.

Mà SĐCT của $f(|x|-m+1)$ bằng hai lần SĐCT dương của hàm số $h(x)=f(x-m+1)$ cộng với 1.

Do đó, để hàm số $g(x)$ có đúng 5 điểm cực trị thì hàm số $h(x)$ có đúng 2 điểm cực trị dương.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$, suy ra các điểm cực trị của hàm số $y=f(x-m+1)$ là:

$$\left[\begin{array}{l}x-m+1=-2\\x-m+1=2\\x-m+1=6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3+m\\x=1+m\\x=5+m\end{array}\right.$$

Để có đúng 2 điểm cực trị dương thì $-3+m\le 0<1+m\Leftrightarrow -1<m\le 3$.

Kết hợp điều kiện, suy ra $m\in\{0;1;2;3\}$.

Vậy, có 4 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Cách 2:

Đặt $u(x)=\left|2x^3+3x\right|-m+1$, ta có:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$u(x)$	$+\infty$ ↘	$-m+1$	↗ $+\infty$

Áp dụng công thức:

$$\text{SĐCT } f\left(u(x)\right)=\text{SĐCT } u(x)+\text{SNBL}\left[\begin{array}{l}u(x)=-2\\u(x)=2\\u(x)=6\end{array}\right.$$

Ta có: $u(x)$ có đúng một điểm cực trị. Do đó, để $f\left(u(x)\right)$ có đúng 5 điểm cực trị thì

$\left[\begin{array}{l}u(x)=-2\\u(x)=2\\u(x)=6\end{array}\right.$ có đúng 4 nghiệm bội lẻ. Khi đó, $-2\le -m+1<2\Leftrightarrow -1<m\le 3$

Vậy, có 4 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Chọn đáp án A

Câu 112:

Cách 1:

Ta có: $12\sqrt[3]{3y+12.2^x}=2^{3x}-3y\Leftrightarrow 3y+12.2^x+12\sqrt[3]{3y+12.2^x}=2^{3x}+12.2^x$.

Xét hàm số $f(u)=u^3+12u$, có $f'(u)=3u^2+12>0\ \forall u$

$\Rightarrow f\left(\sqrt[3]{3y+12.2^x}\right)=f\left(2^x\right)\Leftrightarrow \sqrt[3]{3y+12.2^x}=2^x\Leftrightarrow 3y=2^{3x}-12.2^x$

Xét hàm số $g(x)=2^{3x}-12.2^x$, ta có:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	0 ↘		-16		↗ $+\infty$

Để tồn tại $x\in\mathbb{R}$ thì $3y\ge -16\Leftrightarrow y\ge -\dfrac{16}{3}$

Kết hợp điều kiện, suy ra $y\in\{-5;-4;...;2022\}$.

Vậy, có 2028 giá trị nguyên y thỏa mãn.

Cách 2:

Đặt $t = \sqrt[3]{3y + 12.2^x}$, suy ra $t^3 = 3y + 12.2^x$, ta có: $\begin{cases} t^3 - 12.2^x = 3y \\ 2^{3x} - 12t = 3y \end{cases}$

$\Rightarrow t^3 - 2^{3x} + 12(t - 2^x) = 0 \Leftrightarrow (t - 2^x)\left(t^2 + t.2^x + 2^{2x} + 12\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2^x \\ t^2 + t.2^x + 2^{2x} + 12 = 0 \end{array}\right.$

TH: $t^2 + t.2^x + 2^{2x} + 12 = 0$

Ta có: $\Delta = t^2 - 4\left(t^2 + 12\right) = -3t^2 - 48 < 0$. Suy ra, không tồn tại giá trị của x.

TH: $t = 2^x$, thay vào ta được: $2^{3x} - 12.2^x = 3y$.

Xét hàm số $g(x) = 2^{3x} - 12.2^x$, ta có:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\searrow$	-16	$\nearrow$	$+\infty$

Để tồn tại $x \in \mathbb{R}$ thì $3y \geq -16 \Leftrightarrow y \geq -\dfrac{16}{3}$

Kết hợp hai trường hợp và điều kiện, suy ra $y \in \{-5; -4; ...; 2022\}$.

Vậy, có 2028 giá trị nguyên y thỏa mãn.

Chọn đáp án B

Câu 113:

Ta có: $f(x) = a\left(x^2 - 2x\right)$ $(a \neq 0)$, $f'(x) = 2ax - 2a = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow I\left(1; -\dfrac{1}{2}\right) \Rightarrow a = \dfrac{1}{2}$

Giả sử $x_1 < x_2 < x_3$, suy ra $x_2 = x_I = 1$, kéo theo $x_1.x_3 = -6$.

Vì hàm số $y = g(x)$ có hai điểm cực trị là 0 và 2, suy ra $g'(x) = k\left(x^2 - 2x\right)$ $(k \neq 0)$

Suy ra $g(x) = k\left(\dfrac{x^3}{3} - x^2\right) + c$, có $g(1) = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow -\dfrac{2k}{3} + c + \dfrac{1}{2} = 0$

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$k\left(\frac{x^3}{3} - x^2\right) + c = \frac{x^2}{2} - x \Leftrightarrow \frac{kx^3}{3} - \left(k + \frac{1}{2}\right)x^2 + x + c = 0 \Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{kx^2}{3} - \left(\frac{2k}{3} + \frac{1}{2}\right)x - \frac{2k}{3} + \frac{1}{2}\right) = 0$$

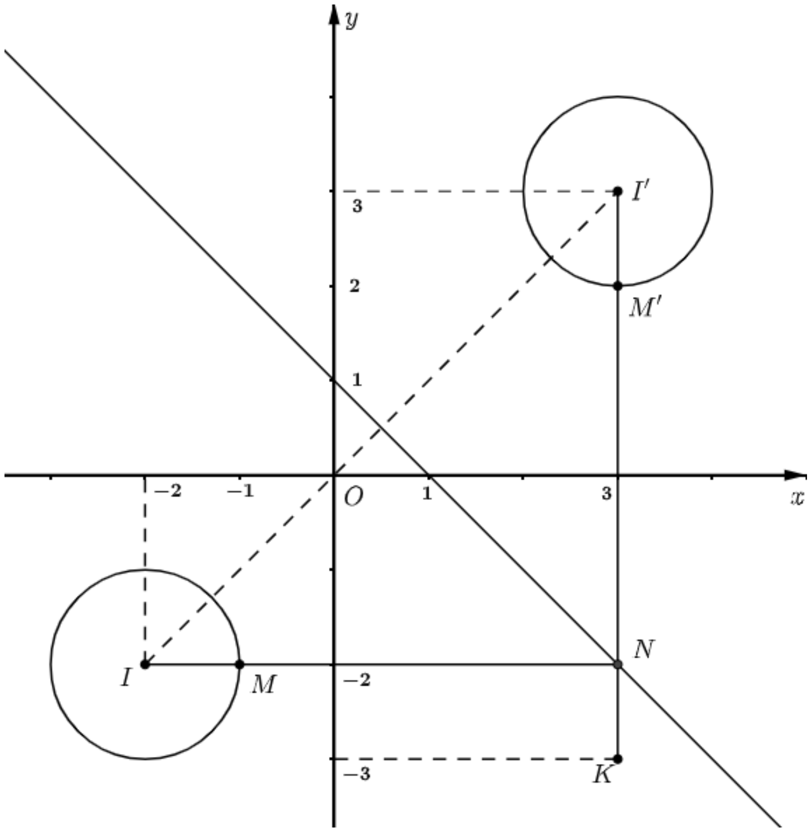
Khi đó, x_1, x_3 là nghiệm của phương trình $\dfrac{kx^2}{3} - \left(\dfrac{2k}{3} + \dfrac{1}{2}\right)x - \dfrac{2k}{3} + \dfrac{1}{2} = 0$

Có $x_1.x_3 = \dfrac{-\dfrac{2k}{3} + \dfrac{1}{2}}{\dfrac{k}{3}} = -6 \Rightarrow k = -\dfrac{3}{8}$, suy ra $c = -\dfrac{3}{4}$ và $\left[\begin{array}{l} x_1 = -1 - \sqrt{7} \\ x_3 = -1 + \sqrt{7} \end{array}\right.$

$$S=\int\limits_{-1-\sqrt{7}}^{1}\left[\frac{x^2}{2}-x-\left(-\frac{x^3}{8}+\frac{3x^2}{8}-\frac{3}{4}\right)\right]\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{-1+\sqrt{7}}\left[-\frac{x^3}{8}+\frac{3x^2}{8}-\frac{3}{4}-\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\right]\mathrm{d}x=\frac{299}{48}$$

Chọn đáp án A

Câu 114:



Gọi M,N lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z,w và điểm $K(3;-3)$.

Từ giả thiết bài toán, suy ra: điểm M thuộc đường tròn $(C):(x+2)^2+(y+2)^2=1$, tâm $I(-2;-2)$, bán kính $R=1$ và điểm N thuộc đường thẳng $d:x+y-1=0$.

Dựng đường tròn (C') đối xứng với đường tròn (C) qua đường thẳng d.

Suy ra $(C'):(x-3)^2+(y-3)^2=1$, tâm $I'(3;3)$, bán kính $R=1$.

Khi đó, $|z-w|+|w-3+3i|=MN+NK=M'N+NK\geq M'K$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi M',N,K thẳng hàng.

Lại có: $M'K$ nhỏ nhất khi M' nằm giữa I' và K.

Do đó, để $|z-w|+|w-3+3i|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì I',M',N,K thẳng hàng.

Có $\overrightarrow{I'M}=\dfrac{\overrightarrow{I'K}}{6}$, suy ra $M'(3;2)$, suy ra $M(-1;-2)$, kéo theo $z=-1-2i$.

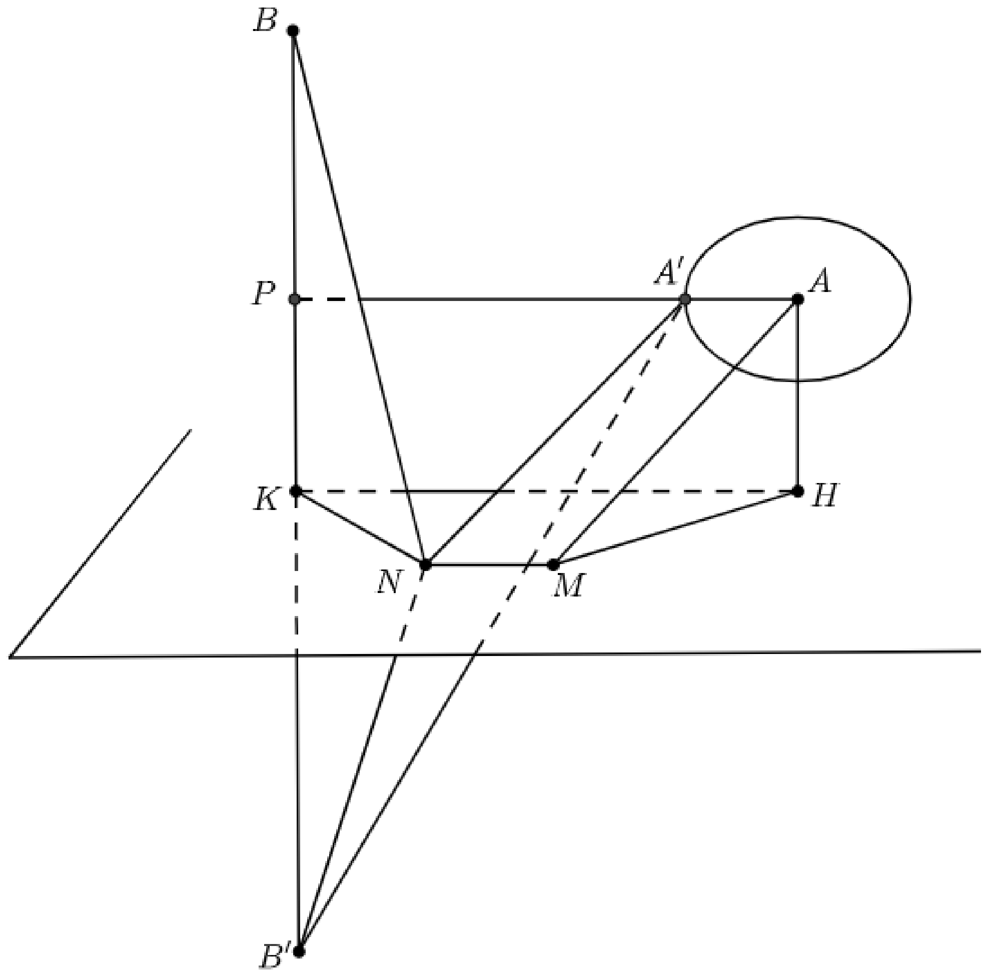
Có $N=d\cap I'K$, suy ra $N(3;-2)$, kéo theo $w=3-2i$.

Khi đó, $|z+2w|=\sqrt{61}$.

Chọn đáp án B

Câu 115:

Cách 1:



Ta có: $y_A . y_B > 0$, suy ra A, B nằm cùng phía đối với mặt phẳng (Oxz).

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A, B trên mặt phẳng (Oxz).

Suy ra $H(1;0;-3)$, $K(-2;0;1)$, kéo theo, $AH = 1$, $BK = 3$ và $HK = 5$.

Trên mặt phẳng (α) đi qua điểm A và song song với mặt phẳng (Oxz) lấy điểm A' sao cho $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MN}$

Khi đó, $AM = A'N$ và $AA' = 2$, suy ra A' nằm trên đường tròn tâm A bán kính $AA' = 2$.

Gọi B' là điểm đối xứng của B qua mặt phẳng (Oxz) và P là hình chiếu của B' trên mặt phẳng (α)

Suy ra $BN = B'N$, $B'P = 4$ và $B'P \perp (\alpha)$.

Khi đó, $AM + BN = A'N + B'N \geq A'B'$. Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi N nằm giữa A' và B'.

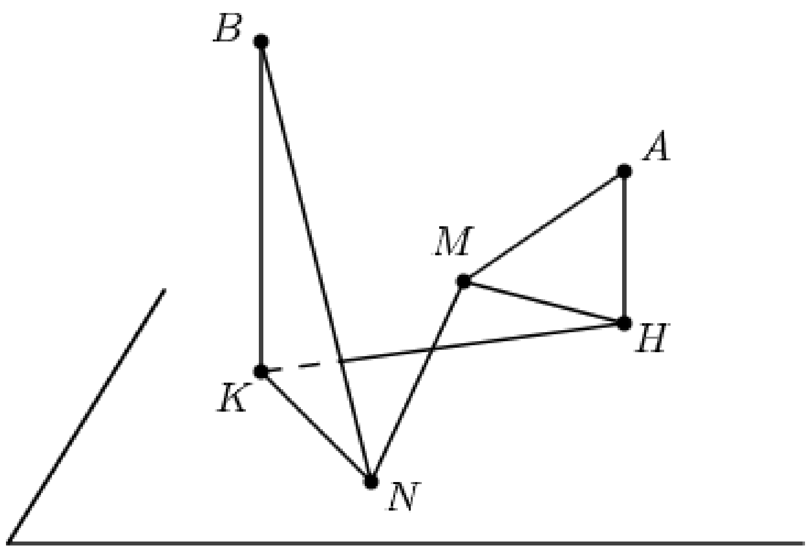
Lại có: $A'B' = \sqrt{B'P^2 + PA'^2}$, mà $B'P$ không đổi nên $A'B'$ nhỏ nhất khi PA' nhỏ nhất.

PA' nhỏ nhất khi và chỉ khi A' nằm giữa P và A.

Khi đó, $PA' = PA - AA' = KH - AA' = 3$. Kéo theo, $A'B' = 5$.

Kết hợp các điều trên, ta được: $AM + BN \geq A'B' \geq 5$

Cách 2:



Ta có: $y_A.y_B > 0$, suy ra A,B nằm cùng phía đối với mặt phẳng (Oxz).

Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của A,B trên mặt phẳng (Oxz).

Suy ra $H(1;0;-3)$, $K(-2;0;1)$, kéo theo, $AH = 1$, $BK = 3$ và $HK = 5$.

Áp dụng BĐT Minkowski, ta có:

$$AM + BN = \sqrt{AH^2 + MH^2} + \sqrt{BK^2 + KN^2} \geq \sqrt{(AH+BK)^2 + (MH+KN)^2}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $KN = 3MH$.

Lại có: $KN + NM + MH \geq KH$, suy ra $MH + KN \geq KH - MN = 3$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi K,N,M,H theo thứ tự cùng nằm trên một đường thẳng.

Kết hợp các điều trên, ta được: $AM + BN \geq 5$.

Chọn đáp án D

Câu 116:

Gọi A,B lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức z,w.

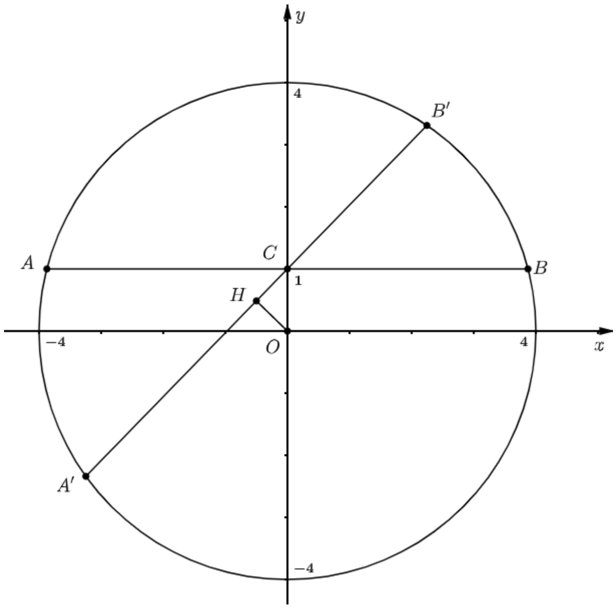
Ta có: $|z| = |w| = 4$, suy ra A,B thuộc đường tròn tâm O, bán kính $R = 4$.

Đặt $(z-i)(\overline{w}+i) = a$ $(a \in \mathbb{R})$.

TH: $a = 0$, suy ra $\left[\begin{array}{l} z = i \\ w = i \end{array}\right.$, không thỏa giả thiết (loại).

TH: $a \neq 0$, ta có $z - i = \dfrac{a}{\overline{w}+i} = \dfrac{a}{|\overline{w}+i|^2}.(w-i) = k(w-i)$ với $k = \dfrac{a}{|\overline{w}+i|^2} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

Suy ra $A,B,C(0;1)$ thẳng hàng.



Gọi H là trung điểm AB. Ta có: $|z-w| = AB = 2AH = 2\sqrt{OA^2 - OH^2}$

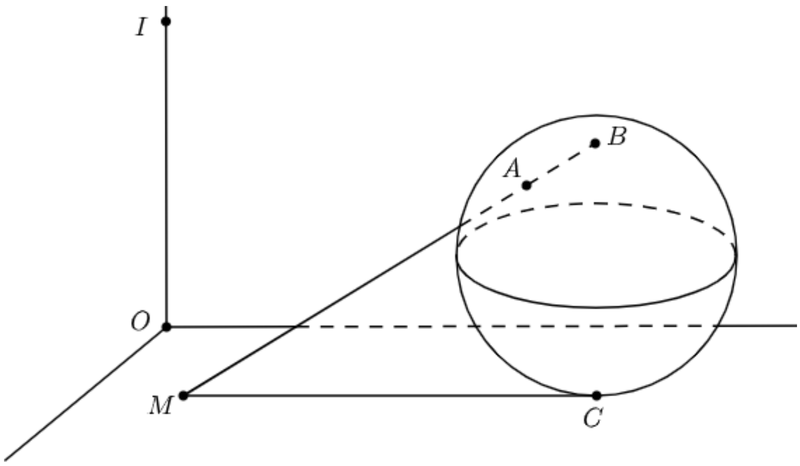
Để AB nhỏ nhất thì AH nhỏ nhất, mà OA không đổi, do đó, để AH nhỏ nhất thì OH lớn nhất.

Lại có: $OH \leq OC$. Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $H \equiv C$.

Khi đó, $AB = 2AC = 2\sqrt{OA^2 - OC^2} = 2\sqrt{15}$.

Chọn đáp án B

Câu 117:



Phương trình đường thẳng $AB: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1+t \\ z = 1+t \end{cases}$

Gọi $M = AB \cap (Oxy)$, suy ra $M(1;0;0)$, kéo theo $MA = \sqrt{2}$, $MB = \sqrt{8}$.

Ta có: $MC^2 = MA.MB = 4 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 4$, $x \in [-1;3]$, với $C(x;y;0)$

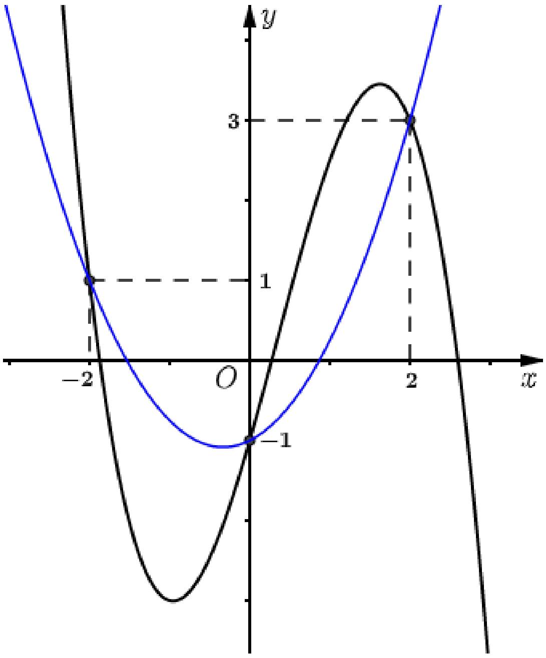
Lại có: $IC^2 = x^2 + y^2 + 16 = 2x + 19 \leq 25$, suy ra $IC \leq 5$.

Chọn đáp án C

Câu 118:

Tịnh tiến đồ thị: NHẤN VÀO ĐÂY.

Ta có: $g'(x) = f'(x) - \dfrac{3x^2}{4} - \dfrac{x}{2} + 1 \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{3x^2}{4} + \dfrac{x}{2} - 1$



Dựa vào đồ thị, suy ra

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗		↘		↗		↘	

Suy ra

x	$-\infty$		$-2-m$		$-m$		$2-m$		$+\infty$
$g(x+m)$		↗		↘		↗		↘	

Để hàm số $y = g(x+m)$ nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$ thì $2-m \le 3 \Leftrightarrow m \ge -1$.

Vậy, $m \in [-1;+\infty)$.

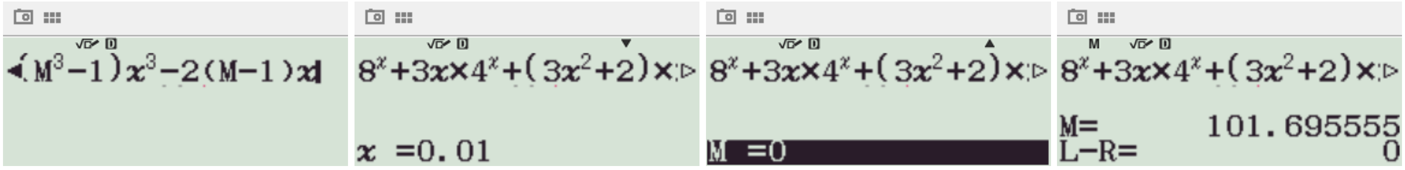
Chọn đáp án B

Câu 119:

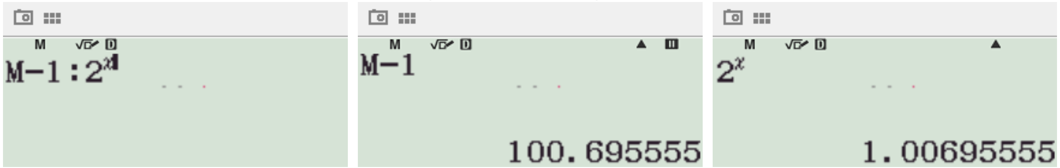
Hướng 1: **Ví dụ tham khảo:** NHẤN VÀO ĐÂY.

> Ở câu này là bất phương trình có dạng hàm đặc trưng, thì chúng ta cũng bấm tương tự trường hợp dấu "=", rồi sau đó xử lí trường hợp dấu "<", ">" sau:

Đầu tiên, chuyển hết về vế trái ($VT \leq 0$), rồi cho $x = 0,01$, tìm m:



Sau đó, thử các biểu thức trong bất phương trình, ta được:



Dễ thấy $m-1 = 100.2^x = \dfrac{2^x}{x}$

Tiếp tục, chúng ta xét các trường hợp dấu "<", ">".

TH: $\dfrac{2^x}{x} \leq m-1$, ta cho $x=1$ thì $m \geq 3$.

> Ta chỉ cần chọn các giá trị $m \geq 3$ rồi thay x, m vào bất phương trình xem có thỏa mãn không, thỏa thì **TH** đó đúng, không thỏa thì loại.

TH: $\dfrac{2^x}{x} \geq m-1$ làm tương tự.

Từ hai trường hợp trên, suy ra $\dfrac{2^x}{x} \leq m-1$

Hướng 2:

Ta có: $8^x + 3x.4^x + \left(3x^2+2\right)2^x \leq \left(m^3-1\right)x^3 + 2(m-1)x \Leftrightarrow \left(2^x+x\right)^3 + 2\left(2^x+x\right) \leq (mx)^3 + 2mx$

Xét hàm số $f(x) = x^3 + 2x$, có $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0\ \forall x$.

$\Rightarrow f\left(2^x+x\right) \leq f(mx) \Leftrightarrow 2^x + x \leq mx \Leftrightarrow \dfrac{2^x}{x} \leq m-1 \quad \left(x \in \mathbb{N}^*\right)$

Xét hàm số $g(x) = \dfrac{2^x}{x}$ với $x > 0$. Ta có: $g'(x) = \dfrac{2^x\left(x\ln 2 - 1\right)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \log_2 e$

x	0		1		$\log_2 e$		2		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘			$e\ln 2$			↗	$+\infty$

Để bất phương trình có đúng 5 nghiệm nguyên dương thì $g(5) \le m-1 < g(6) \Leftrightarrow \dfrac{37}{5} \le m < \dfrac{35}{3}$

Kết hợp điều kiện, suy ra $m \in \{8;9;10;11\}$. Vậy, có 4 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Chọn đáp án C

Câu 120:

Ta có: $f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$, $f''(x) = 12x^2 + 6ax + 2b$, $g'(x) = \dfrac{f'(x)\left(x^2+1\right) - 2xf(x)}{(x^2+1)^2}$

$\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f''(x) = f''\left(\dfrac{1}{4}\right) \Rightarrow -\dfrac{6a}{24} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow a = -1.$

Vì hàm số $g(x)$ đạt cực trị tại $x=0$, $x=1$ nên:

$$\begin{cases} g'(0) = 0 \\ g'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(0) = 0 \\ f'(1) = f(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = b+1 \end{cases}$$

Suy ra $f(x) = x^4 - x^3 + bx^2 + b + 1$ và $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2bx$

Vì hàm số $g(x)$ có ba điểm cực trị là $x=m$, $x=0$, $x=1$ nên $m \ne 0$.

Ta có: $g'(m) = 0 \Leftrightarrow f'(m)\left(m^2+1\right) = 2mf(m) \Leftrightarrow \dfrac{f'(m)}{2m} = \dfrac{f(m)}{m^2+1}$

Khi đó, $g(m) = \dfrac{f(m)}{m^2+1} = \dfrac{f'(m)}{2m} = 2m^2 - \dfrac{3m}{2} + b.$

Suy ra $A(m;g(m)) \in (P): y = 2x^2 - \dfrac{3x}{2} + b$. Dễ thấy $C(1;g(1))$ và $D(2;b+5)$ thuộc (P).

Do đó, $y = h(x) = 2x^2 - \dfrac{3x}{2} + b$. Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^4 - x^3 + bx^2 + b + 1 = \left(x^2+1\right)\left(2x^2 - \frac{3x}{2} + b + x - 1\right) \Leftrightarrow x^4 + \frac{x^3}{2} + x^2 - \frac{x}{2} - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = \left(x^2+1\right)(h(x)+x-1)$ bằng:

$$S = \int_{-1}^{1} \left| x^4 + \frac{x^3}{2} + x^2 - \frac{x}{2} - 2 \right| \mathrm{d}x = \frac{44}{15}$$

Chọn đáp án D

Câu 121:

Tịnh tiến đồ thị: NHẤN VÀO ĐÂY.

Từ bảng biến thiên, ta có: $y = f(x)$ có hai điểm cực trị, kéo theo, $y = f(x) - m$ có hai điểm cực trị.

Do đó, để $h(x) = |f(x) - m|$ có đúng ba điểm cực trị thì phương trình $f(x) - m = 0$ có đúng một nghiệm bội lẻ.

Khi và chỉ khi, $\left[\begin{array}{l} m \ge 1 \\ m \le 0 \end{array}\right.$. Kết hợp điều kiện, suy ra $m \in \{-10;-9;...;10\}$.

Vậy, có 21 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Chọn đáp án A

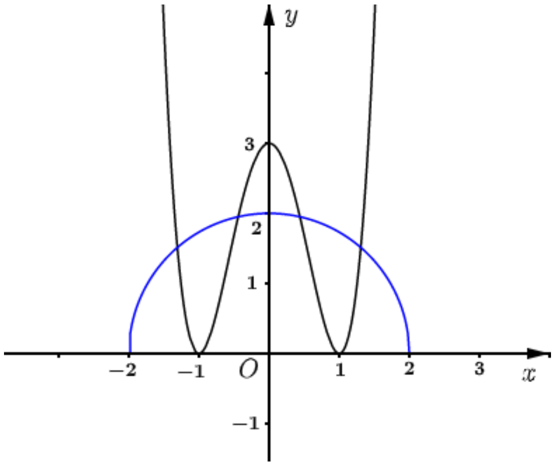
Câu 122:

Đặt $t=f^2(x)+x^2$, ta có: $t^2-\left(m^2+2m+14\right)t+4(m+1)^2+36=0$ $(*)$.

Dễ thấy, $t=4$ là một nghiệm của phương trình $(*)$.

Khi đó, $(*)\Leftrightarrow (t-4)\left(t-m^2-2m-10\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=4 \\ t=m^2+2m+10 \end{array}\right.$

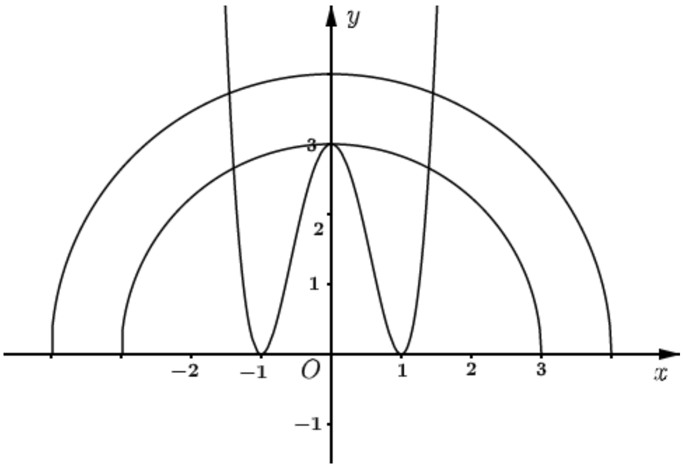
TH: $t=4$, ta có: $4=f^2(x)+x^2\Leftrightarrow f(x)=\sqrt{4-x^2}$, với $x\in[-2;2]$. $\left(\text{Vì } f(x)\geq 0 \text{ và } f^2(x)\geq 0\right)$



Dựa vào đồ thị, suy ra phương trình $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ có bốn nghiệm phân biệt.

TH: $t=m^2+2m+10=(m+1)^2+9$, đặt $R^2=(m+1)^2+9\geq 9$, suy ra $R\geq 3$.

Khi đó, $f^2(x)=R^2-x^2\Leftrightarrow f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$, với $R\geq 3$, $x\in[-R;R]$



Dựa vào đồ thị, với $R\geq 3$ thì phương trình $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$ có ít nhất 2 nghiệm phân biệt và nhiều nhất 3 nghiệm phân biệt.

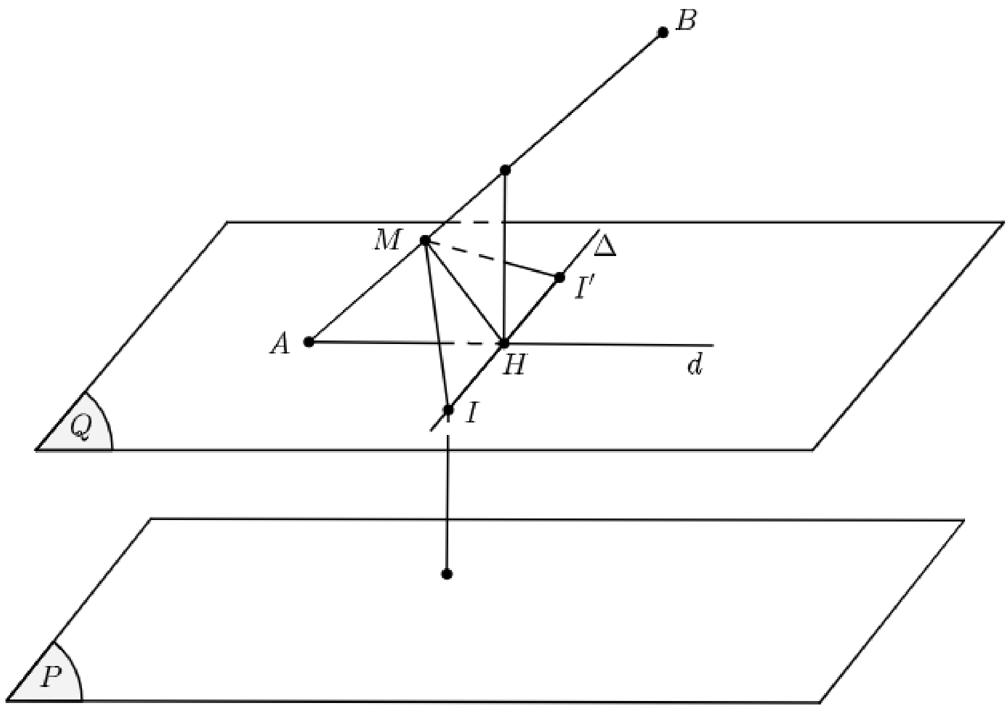
Dễ thấy các nghiệm của hai trường hợp là các nghiệm phân biệt.

Do đó, không tồn tại m để phương trình ban đầu có đúng 5 nghiệm phân biệt.

> Trường hợp các bạn không nhẩm được nghiệm $t=4$, thì có thể dùng casio để tìm mối quan hệ giữa t và m như ở các câu trước.

Chọn đáp án A

Câu 123:



Có $(x_A + y_A - 2z_A + 10)(x_B + y_B - 2z_B + 10) > 0$. Suy ra A, B nằm cùng phía đối với mặt phẳng (P).

Có $d(A;(P)) = \sqrt{6}$, $d(B;(P)) = \dfrac{20}{\sqrt{6}}$.

Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua A và song song với (P), gọi (S) là mặt cầu tâm I, bán kính $\sqrt{6}$, tiếp xúc với (P) và đoạn thẳng AB. Suy ra $I \in (Q)$

Ta có: $AB : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + t \\ z = 2 - 6t \end{cases}$. Suy ra $M(1+t; -1+t; 2-6t)$. Vì M thuộc đoạn AB nên $t \in [0;1]$.

Gọi (α) là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB, $\Delta = (\alpha) \cap (Q)$, suy ra $I \in \Delta$. ($I \in (Q)$, $IM \perp AB$)

Gọi d là hình chiếu của AB trên mặt phẳng (Q) và cắt Δ tại H. Suy ra $\begin{cases} MH \perp AB \\ MH \perp \Delta \end{cases}$.

Để tồn tại 2 điểm I thỏa mãn $IM = \sqrt{6}$ thì $MH < \sqrt{6}$.

Ta có: $\sin \widehat{MAH} = \left| \cos\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{n_Q}\right) \right| = \dfrac{7}{\sqrt{57}} \Rightarrow \tan \widehat{MAH} = \dfrac{7\sqrt{2}}{4}$.

Có $MH = AM.\tan \widehat{MAH} = \dfrac{7\sqrt{2}}{4}.AM < \sqrt{6} \Leftrightarrow AM^2 < \dfrac{48}{49} \Leftrightarrow t^2 < \dfrac{24}{931}$

Lại có: $25a^2 + b^2 + 2c^2 = 98t^2 + 34 \in \left[34; \dfrac{694}{19}\right)$, với $t^2 \in \left[0; \dfrac{24}{931}\right)$.

Suy ra $m + n = 34 + \dfrac{694}{19} = \dfrac{1340}{19}$.

Chọn đáp án D

Câu 124:

Cơ sở cách làm: NHẤN VÀO ĐÂY.

Đặt $u(x) = \left|x^4 - 8x^2\right| + m$, ta có:

x	$-\infty$		$-2\sqrt{2}$		-2		0		2		$2\sqrt{2}$		$+\infty$
$u(x)$	$+\infty$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$16+m$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$16+m$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

Lại có: $f'(x) = x^3 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \ \text{(nghiệm bội chẵn)} \\ x = 2 \ \text{(nghiệm bội lẻ)} \end{array}\right.$

Áp dụng công thức:

$$\text{SĐCT } f(u(x)) = \text{SĐCT } u(x) + \text{SNBL } u(x) = 2$$

Ta có: $u(x)$ có đúng 5 điểm cực trị.

Do đó, để $f(u(x))$ có đúng 7 điểm cực trị thì $u(x) = 2$ có đúng 2 nghiệm bội lẻ.

Suy ra $16 + m \leq 2 \Leftrightarrow m \leq -14$. Kết hợp điều kiện, suy ra $m \in \{-30; -29; ...; -14\}$.

Vậy, có 17 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Chọn đáp án C

Câu 125:

Các bạn xét theo Δ vẫn được.

Ta có: $z^2 - 2z - m + 2 = 0 \Leftrightarrow (z-1)^2 = m - 1$

TH1: $m > 1$, suy ra $z = 1 \pm \sqrt{m-1}$, suy ra $A(1 + \sqrt{m-1}; 0)$, $B(1 - \sqrt{m-1}; 0)$.

Kéo theo, $d(C; AB) = 1$ và $AB = 2\sqrt{m-1}$.

Suy ra $S = \dfrac{d(C; AB).AB}{2} = \sqrt{m-1} = 2\sqrt{2} \Rightarrow m = 9$ (nhận).

TH2: $m = 1$, suy ra $z = 1$, kéo theo, $A \equiv B$ (loại).

TH3: $m < 1$, suy ra $z = 1 \pm i\sqrt{1-m}$, suy ra $A\left(1; \sqrt{1-m}\right)$, $B\left(1; -\sqrt{1-m}\right)$.

Kéo theo, $d(C; AB) = 2$ và $AB = 2\sqrt{1-m}$.

Suy ra $S = 2\sqrt{1-m} = 2\sqrt{2} \Rightarrow m = -1$ (nhận).

Kết hợp 3 trường hợp, suy ra $T = \{-1; 9\}$.

Vậy, tổng các phần tử của T bằng 8.

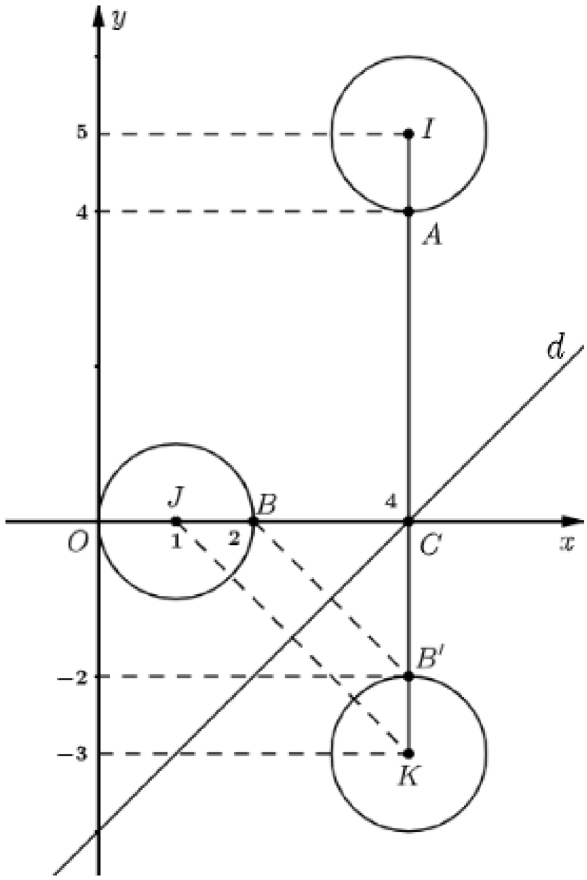
Chọn đáp án C

Câu 126:

Có $|z_1 - 4 - 5i| = 1$, suy ra tập hợp các điểm A biểu diễn số phức z_1 là đường tròn (C_1) tâm $I(4;5)$, bán kính $R_1 = 1$.

Có $|z_2 - 1| = 1$, suy ra tập hợp các điểm B biểu diễn số phức z_2 là đường tròn (C_2) tâm $J(1;0)$, bán kính $R_2 = 1$.

Có $|\overline{z} + 4i| = |z - 8 + 4i|$, suy ra tập hợp các điểm C biểu diễn số phức z là đường thẳng $d: x - y - 4 = 0$.



Gọi K là điểm đối xứng của J qua d, suy ra $K(4;-3)$.

Dựng đường tròn (C_3), tâm K, bán kính $R = 1$

Gọi B' là điểm đối xứng của B qua d. Suy ra $B' \in (C_3)$

Khi đó, $P = |z - z_1| + |z - z_2| = CA + CB = CA + CB' \geq AB'$.

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi C nằm giữa A và B'.

Lại có: AB' nhỏ nhất khi và chỉ khi I, A, B', K theo thứ tự nằm trên một đường thẳng.

Do đó, để P đạt GTNN thì I, A, C, B', K theo thứ tự nằm trên một đường thẳng.

Có $A = IK \cap (C_1)$, suy ra $A(4;4)$. Có $B' = IK \cap (C_3)$, suy ra $B'(4;-2)$, kéo theo $B(2;0)$.

Khi đó, $M = |z_1 + z_2| = 2\sqrt{13}$.

Chọn đáp án D

Câu 127:

Với $x, y > 0$, ta có:

$$\log_{2022}\frac{x+1}{y+1} \le y^4+2y^3-x^2y^2-2y^2x \Leftrightarrow \log_{2022}(yx+y)+(yx+y)^2 \le \log_{2022}\left(y^2+y\right)+\left(y^2+y\right)^2$$

Xét hàm số $f(t)=\log_{2022}t+t^2$, với $t>0$. Ta có: $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2022}+2t>0\ \forall t>0$

$\Rightarrow f(yx+y) \le f\left(y^2+y\right) \Leftrightarrow yx+y \le y^2+y \Leftrightarrow x \le y\ (y>0)$.

Kết hợp điều kiện, suy ra $0<x\le y\le 20$ và $x, y \in \mathbb{Z}$.

Với mỗi số nguyên dương y, có y số nguyên dương x thỏa mãn.

Do đó, có y cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn.

Mà $y \in \{1;2;...;20\}$ nên số cặp nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn bằng $1+2+...+20=210$.

Chọn đáp án D

Câu 128:

Gọi A, B lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z_1 và z_2

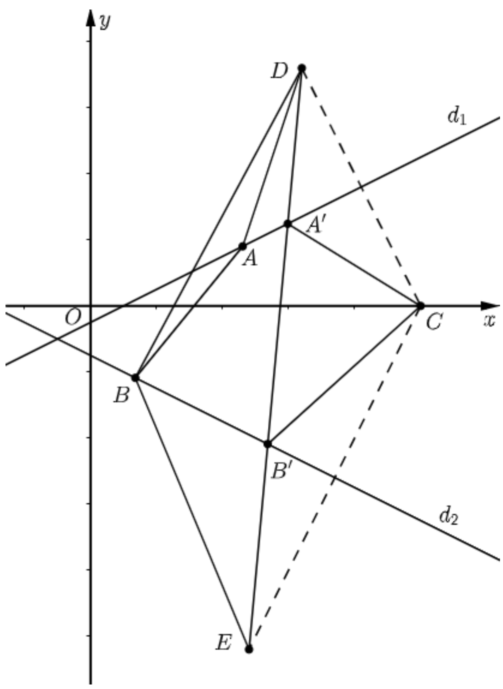
Có $|z_1-i|=|z_1-1+i|$ và $|z_2-1|=|z_2+2i|$

Suy ra tập hợp các điểm A là đường thẳng $d_1: 2x-4y-1=0$, tập hợp các điểm B là đường thẳng $d_2: 2x+4y+3=0$.

Ta có: $P=|z_1-z_2|+|z_1-5|+|z_2-5|=AB+AC+BC$, với $C(5;0)$.

Gọi D, E lần lượt là các điểm đối xứng với C qua d_1 và d_2. Suy ra $D\left(\dfrac{16}{5};\dfrac{18}{5}\right)$, $E\left(\dfrac{12}{5};-\dfrac{26}{5}\right)$

Khi đó, $P=AB+AC+BC=AB+AD+BE$



Lại có: $AB+AD \geq BD$ và $BD+BE \geq DE$, suy ra $P = AB+AD+BE \geq DE = \dfrac{4\sqrt{122}}{5}$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} A \equiv A' \\ B \equiv B' \end{cases}$.

Chọn đáp án C

Câu 129:

Cách 1:

Đặt $\begin{cases} u = \cos^2 x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\sin 2x \, dx \\ v = f(x) \end{cases}$

Ta có: $2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\cos^2 x \, dx = f(x)\cos^2 x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2x \, dx = -1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2x \, dx$

$\Rightarrow \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2x \, dx = 3$

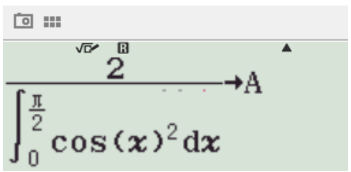
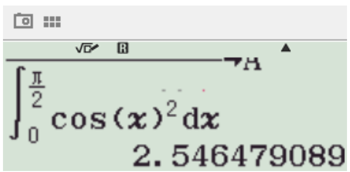
Cách 2:

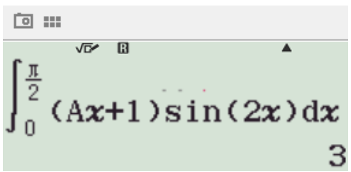
Đặt $f(x) = ax+b$, suy ra $f'(x) = a$. Có $f(0) = 1$, suy ra $b = 1$.

Có $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\cos^2 x \, dx = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx = 2$, suy ra $a = \dfrac{2}{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx}$

Suy ra $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{2}{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx} x + 1 \right) \sin 2x \, dx = 3$

Bấm như sau:



Chọn đáp án A

Câu 130:

Cơ sở cách làm: NHẤN VÀO ĐÂY.

Xét hàm số $h(x) = x^3 - 3mx^2 + 24(m-2)x + 2021m$.

Có $h'(x) = 3x^2 - 6mx + 24(m-2) = 3(x-4)(x+4-2m) \Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = 2m-4 \end{array} \right.$

Ta có: số điểm cực trị của hàm số $y = f(x) = h(|x|)$ bằng hai lần số điểm cực trị dương của hàm số $y = h(x)$ cộng với một.

Do đó, để hàm số $y = f(x)$ có đúng 5 điểm cực trị thì hàm số $y = h(x)$ có đúng 2 điểm cực trị dương.

Khi đó, $\begin{cases} 2m-4>0 \\ 2m-4 \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>2 \\ m \neq 4 \end{cases}$

Kết hợp điều kiện, suy ra $m \in \{3;5;6;7;...;2022\}$

Vậy, có 2019 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Chọn đáp án C

Câu 131:

Cách 1:

Ta có: $5^{x^2-2x-3} - \left(2x - x^2\right).25^x \leq 1 + 3.25^x \Leftrightarrow 5^{x^2-4x-3} + x^2 - 4x - 3 \leq 5^{-2x} - 2x$

Xét hàm số $h(t) = 5^t + t$, có $h'(t) = 5^t \ln 5 + 1 > 0\ \forall t$

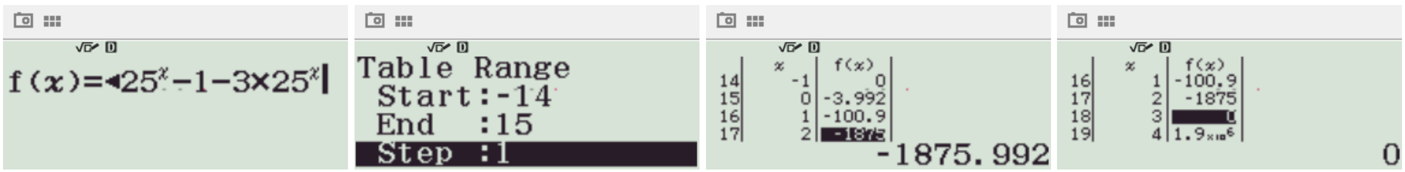
$\Rightarrow h\left(x^2 - 4x - 3\right) \leq h(-2x) \Leftrightarrow x^2 - 4x - 3 \leq -2x \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3.$

Vậy, có 5 giá trị nguyên x thỏa mãn.

Cách 2:

Chuyển hết về vế trái, ta được: $f(x) = 5^{x^2-2x-3} - \left(2x - x^2\right).25^x - 1 - 3.25^x \leq 0.$

Sử dụng TABLE, xem các giá trị x nguyên nào thỏa mãn bất phương trình.



Chọn đáp án A

Câu 132:

TH1: $f(x) = 0\ \forall x > 0$, vô lí vì $f(1) = -\dfrac{1}{6}$

TH2: $\exists\, x > 0 : f(x) \neq 0$, ta có:

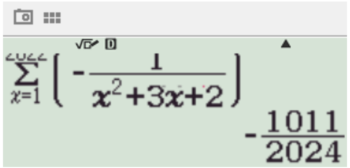
$$f'(x) - (2x+3)\, f^2(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{f'(x)}{f^2(x)} = -2x - 3 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -2x - 3$$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được: $\dfrac{1}{f(x)} = \displaystyle\int (-2x-3)\ \mathrm{d}x = -x^2 - 3x + C$

Có $f(1) = -\dfrac{1}{6} \Rightarrow C = -2 \Rightarrow f(x) = -\dfrac{1}{x^2+3x+2} = -\left(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+2}\right) \neq 0\ \forall x > 0.$

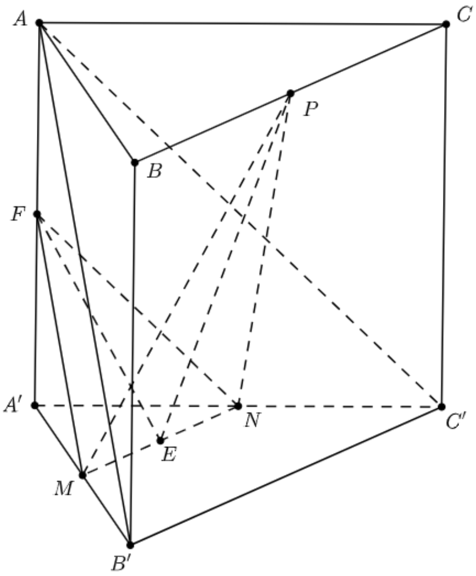
$$\Rightarrow T = f(1) + f(2) + ... + f(2022) = -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2023} - \frac{1}{2024}\right) = -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2024}\right) = -\frac{1011}{2024}$$

Hoặc có thể bấm:



Chọn đáp án D

Câu 133:



Cách 1:

Gọi E, F lần lượt là trung điểm của MN và AA'. Ta có: $\begin{cases} MN \parallel B'C' \\ MF \parallel AB' \end{cases} \Rightarrow (MNF) \parallel (AB'C')$.

Lại có: $\begin{cases} (MNF) \cap (MNP) = MN \\ FE \perp MN \\ PE \perp MN \end{cases}$, suy ra $(\widehat{(AB'C'),(MNP)}) = (\widehat{(MNF),(MNP)}) = \widehat{FEP}$.

Dễ dàng tính được $EF = \sqrt{13}$, $EP = 5$ và $FP = 2\sqrt{10}$.

$\Rightarrow \cos\widehat{FEP} = \left| \dfrac{EF^2 + EP^2 - FP^2}{2.EF.EP} \right| = \dfrac{\sqrt{13}}{65}$

Cách 2:

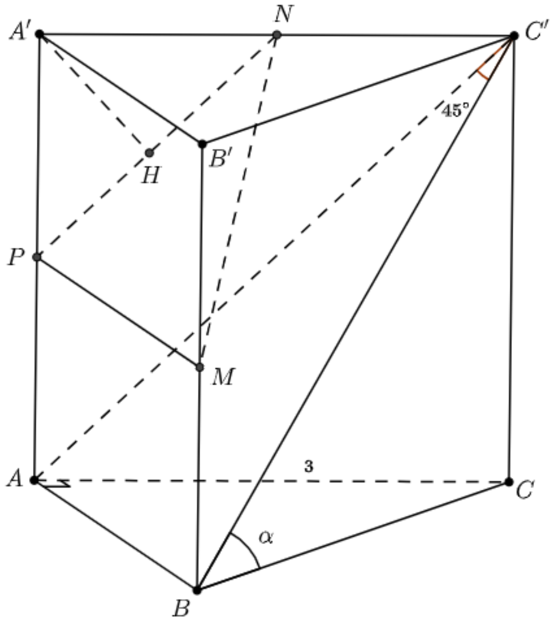
Gắn trục tọa độ, với $A'(0;0;0)$, $A(0;0;4)$ và $C'\left(4\sqrt{3};0;0\right)$, suy ra $B'\left(2\sqrt{3};6;0\right)$, $M\left(\sqrt{3};3;0\right)$, $N\left(2\sqrt{3};0;0\right)$, $P\left(3\sqrt{3};3;4\right)$.

Kéo theo, $\overrightarrow{n}_{(AB'C')} = \left(\sqrt{3};1;3\right)$, $\overrightarrow{n}_{(MNP)} = \left(-2\sqrt{3};-2;3\right)$

Suy ra $\cos(\widehat{(AB'C'),(MNP)}) = \dfrac{|-6-2+9|}{5\sqrt{13}} = \dfrac{\sqrt{13}}{65}$.

Chọn đáp án C

Câu 134:



Cách 1:

Gọi P là trung điểm AA'. Ta có: $PN \parallel AC'$, suy ra $AC' \parallel (PNM)$

Kéo theo $d\left(AC';MN\right) = d\left(AC';(PNM)\right) = d(A;(PNM))$.

Có $\begin{cases} PM \parallel AB \\ AB \perp AC \\ AB \perp AA' \end{cases}$, suy ra $PM \perp (AA'C'C)$. Vẽ $A'H \perp PN$, suy ra $A'H \perp (PNM)$.

Lại có: $AP = A'P$, suy ra $d(A;(PNM)) = d\left(A';(PNM)\right) = A'H$

Đặt $BC' = x$, suy ra $BC = BC'.\cos\alpha = x.\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \dfrac{x\sqrt{14}}{4}$ và $AB = BC'.\sin 45^\circ = \dfrac{x\sqrt{2}}{2}$.

Có ΔABC vuông tại A, suy ra $AB^2 + AC^2 = BC^2$, suy ra $x = 2\sqrt{6} \Rightarrow CC' = BC'.\sin\alpha = \sqrt{3}$

Có $\dfrac{1}{A'H^2} = \dfrac{1}{A'P^2} + \dfrac{1}{A'N^2}$, suy ra $d\left(AC';MN\right) = A'H = \dfrac{3}{4}$

Cách 2:

Tính được cạnh $AB = 2\sqrt{3}$ và $AA' = \sqrt{3}$.

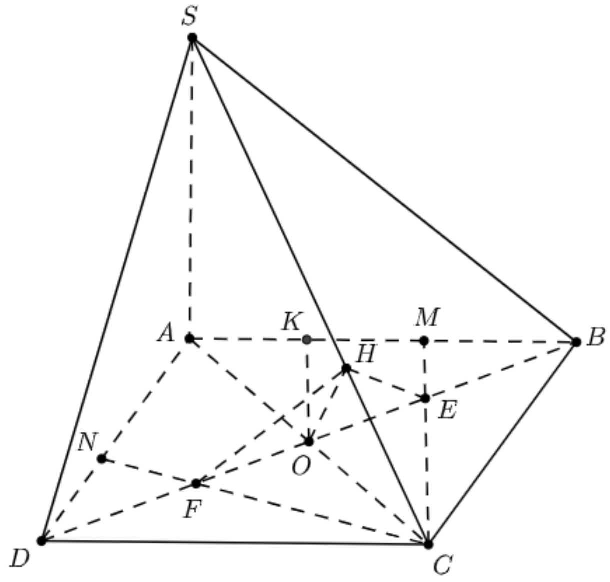
Chọn hệ trục tọa độ với $A(0;0;0)$, $B\left(0;2\sqrt{3};0\right)$, $C(3;0;0)$, $A'\left(0;0;\sqrt{3}\right)$, suy ra $M\left(0;2\sqrt{3};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

$N\left(\dfrac{3}{2};0;\sqrt{3}\right)$, $C'\left(3;0;\sqrt{3}\right)$

$$\Rightarrow d\left(MN, AC'\right) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{MN};\overrightarrow{AC'}\right].\overrightarrow{AN}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{MN};\overrightarrow{AC'}\right]\right|} = \frac{3}{4}.$$

Chọn đáp án C

Câu 135:



Cách 1:

Đặt $AM = x$, $AN = y$ với $x, y \in [0;1]$.

Gọi $O = AC \cap BD$, $E = CM \cap BD$, $F = CN \cap BD$ và H là hình chiếu của O trên SC.

Ta có: $\begin{cases} SC \perp BD \\ SC \perp OH \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} EH \perp SC \\ FH \perp SC \end{cases}$, mà $(SMC) \perp (SNC)$ nên ΔEHF vuông tại H.

Gọi K trung điểm AM, suy ra $OK \parallel ME$.

Kéo theo $\dfrac{BE}{EO} = \dfrac{BM}{MK} = \dfrac{2BM}{AM} = \dfrac{2(1-x)}{x} \Rightarrow \dfrac{x}{EO} = \dfrac{2-2x}{BE} = \dfrac{2-x}{OB} = \dfrac{4-2x}{\sqrt{2}} \Rightarrow OE = \dfrac{x\sqrt{2}}{4-2x}$

Chứng minh tương tự, ta có: $OF = \dfrac{y\sqrt{2}}{4-2y}$.

Lại có: $OE.OF = OH^2$, suy ra: $\dfrac{x\sqrt{2}}{4-2x}.\dfrac{y\sqrt{2}}{4-2y} = \dfrac{1}{3}$, kéo theo $(x+4)(y+4) = 24$

Có $0 \le y = \dfrac{24}{x+4} - 4 \le 1$ và $0 \le x \le 1$, suy ra $\dfrac{4}{5} \le x \le 1$.

Có $V_{SAMCN} = \dfrac{1}{3}.SA.S_{AMCN} = \dfrac{1}{3}(x+y) = \dfrac{1}{3}\left(x + \dfrac{24}{x+4} - 4\right) \le \dfrac{3}{5}$.

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x = \dfrac{4}{5} \\ y = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{4}{5} \end{cases}$. Khi đó, $T = \dfrac{1}{AM^2} + \dfrac{1}{AN^2} = \dfrac{41}{16}$.

Cách 2:

Chọn hệ tọa độ $A(0;0;0)$, $S(0;0;2)$, $C(1;1;0)$, $M(x;0;0)$, $N(0;y;0)$, với $x, y \in [0;1]$

Suy ra $\overrightarrow{n}_{(SMC)} = (2; 2x-2; x)$ và $\overrightarrow{n}_{(SNC)} = (2y-2; 2; y)$.

Có $(SMC) \perp (SNC)$ nên $\overrightarrow{n}_{(SMC)}.\overrightarrow{n}_{(SNC)} = 4x + 4y + xy - 8 = 0$, suy ra $y = \dfrac{8-4x}{x+4}$.

Có $0 \le y = \dfrac{8-4x}{x+4} \le 1$ và $0 \le x \le 1$, suy ra $\dfrac{4}{5} \le x \le 1$

$V_{SAMCN} = \frac{1}{3}.SA.S_{AMCN} = \frac{1}{3}(x+y) = \frac{1}{3}\left(x+\frac{8-4x}{x+4}\right) \le \frac{3}{5}$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x = \frac{4}{5} \\ y = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{4}{5} \end{cases}$. Khi đó, $T = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{41}{16}$.

Chọn đáp án B

Câu 136:

Ta có: $a + \frac{1}{a} \ge 2 \; \forall \, a > 0$, suy ra $2^{a+\frac{1}{a}} \ge 4$.

Có: $(8-b)\sqrt{b+4} \le 16 \; \forall \, b \in [0;8)$, suy ra $\log_2\left[(8-b)\sqrt{b+4}\right] \le 4$.

Do đó, bất phương trình thỏa mãn khi và chỉ khi $\begin{cases} a + \frac{1}{a} = 2 \\ (8-b)\sqrt{b+4} = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$

Khi đó, ta có: $\sin 2x = 2m-1$ có nghiệm, khi và chỉ khi, $-1 \le 2m-1 \le 1 \Leftrightarrow 0 \le m \le 1$.

Kết hợp điều kiện, suy ra $m \in \{0;1\}$.

Vậy, có 2 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Chọn đáp án A

Câu 137:

Gọi (P), (Q) lần lượt là hai mặt phẳng qua M, N và vuông góc với Δ.

Suy ra $(P): x-2y+3z-12 = 0$ và $(Q): x-2y+3z-10 = 0$, kéo theo $M'N' = d((P);(Q)) = \frac{\sqrt{14}}{7}$.

Đường thẳng Δ qua $A\left(m;-1;-m^2\right)$ và có $\overrightarrow{u}_\Delta = (1;-2;3)$

Đường thẳng MN qua $M(-1;-2;3)$ và có $\overrightarrow{u}_{MN} = (3;1;-1)$

Gọi α là góc giữa hai đường thẳng Δ và MN, ta có:

$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{u}_\Delta.\overrightarrow{u}_{MN}|}{|\overrightarrow{u}_\Delta|.|\overrightarrow{u}_{MN}|} = \frac{\sqrt{154}}{77} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{5\sqrt{231}}{77}$.

Có $d(\Delta, MN) = \frac{\left|[\overrightarrow{u}_\Delta;\overrightarrow{u}_{MN}].\overrightarrow{AM}\right|}{|[\overrightarrow{u}_\Delta;\overrightarrow{u}_{MN}]|} = \frac{\left|7m^2+m+12\right|}{5\sqrt{6}} \ge \frac{67}{28\sqrt{6}}$.

Suy ra $V_{MNN'M'} = \frac{1}{6}.d(\Delta, MN).M'N'.MN.\sin\alpha \ge \frac{335}{1176}$.

Chọn đáp án A

Câu 138:

Từ giả thiết, suy ra $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + 2x + \frac{1}{2}$.

Xét hàm số $h(x) = 18f\left(1-\frac{x}{3}\right) - x^2$, có $h'(x) = -6\left(f'\left(1-\frac{x}{3}\right) - \left(1-\frac{x}{3}\right)+1\right)$.

$$\Rightarrow h'(x) < 0 \Leftrightarrow f'\left(1-\frac{x}{3}\right) - \left(1-\frac{x}{3}\right) + 1 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < 1-\dfrac{x}{3} < 1 \\ 1-\dfrac{x}{3} > 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < 6 \\ x < -6 \end{array}\right. .$$

Lại có: $h(3) = 18f(0) - 9 = 0$ và $h(-6) = 18f(3) - 36 = -\dfrac{81}{2} < 0$

x	$-\infty$		-6		0		3		6		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\vdots$	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\dfrac{81}{2}$	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = g(x) = |h(x)|$ bằng số điểm cực trị của hàm số $h(x)$ cộng với số nghiệm bội lẻ của phương trình $h(x) = 0$.

x	$-\infty$			-6			0		3		6			$+\infty$
$\lvert h(x)\rvert$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy, hàm số $g(x)$ có 7 điểm cực trị.

Chọn đáp án D

Câu 139:

Lấy điểm I sao cho: $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}}{4} = (2;-5;7)$.

Ta có: $MA^2 + MB^2 + 2MC^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 + 2\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right)^2$

$= 4MI^2 + IA^2 + IB^2 + 2IC^2$.

Để $MA^2 + MB^2 + 2MC^2$ đạt GTNN thì MI đạt GTNN, tức là M là hình chiếu của I trên (P).

Khi đó, đường thẳng IM có dạng: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -5 - 2t \\ z = 7 + 2t \end{cases}$, suy ra $M(2+t;-5-2t;7+2t)$.

Có $M \in (P)$, suy ra $t = -3$, kéo theo $M(-1;1;1)$.

Suy ra $2a + 3b + c = 2$.

Chọn đáp án B

Câu 140:

Với $x \in \mathbb{R}\backslash\{0;1\}$ và $f(x) \neq 0$, ta có:

$x\left[f'(x)-2f^2(x)\right]=f(x)\left[1-3x^2f(x)\right] \Leftrightarrow \dfrac{f(x)-xf'(x)}{f^2(x)}=3x^2-2x \Leftrightarrow \left(\dfrac{x}{f(x)}\right)'=3x^2-2x.$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được: $\dfrac{x}{f(x)}=\displaystyle\int\left(3x^2-2x\right)\mathrm{d}x=x^3-x^2+C$

Có $f(2)=\dfrac{1}{2} \Rightarrow C=0 \Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{x^2-x}=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}.$

$\Rightarrow P=f(2)+f(3)+...+f(2021)=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{2020}-\dfrac{1}{2021}=1-\dfrac{1}{2021}=\dfrac{2020}{2021}$

Chọn đáp án B

Câu 141:

Đặt $x=t^3+3t+1$, ta có:

$$\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f\left(t^3+3t+1\right)\,\mathrm{d}\left(t^3+3t+1\right)=\int_0^1 (t+3)\left(3t^2+3\right)\mathrm{d}t=\frac{57}{4}$$

Chọn đáp án C

Câu 142:

Gọi (C) là đường tròn giao tuyến của (P) và (S); $I(1;1;0)$ là tâm mặt cầu (S).

Để (C) có bán kính nhỏ nhất thì $d(I,(P))$ đạt GTLN.

$d(I,(P))=\dfrac{|m-3-9|}{\sqrt{m^2+3^2+(2m-3)^2}} \leq \sqrt{11}.$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m=1$. Khi đó, $(P): x-3y+z-9=0$.

Suy ra $d(A,(P))=\dfrac{13\sqrt{11}}{11}.$

Chọn đáp án B

Câu 143:

Xét hàm số $h(x)=f(x)-g(x)$, có $h'(x)=f'(x)-g'(x)=4ax^3+(3b-3m)x^2+(2c-2n)x+4 \ (*)$.

Vì hàm số $h(x)$ có ba điểm cực trị là -1, 3, 4 nên

$h'(x)=4a(x+1)(x-3)(x-4)=4ax^3-24ax^2+20ax+48a \ (**)$.

Từ $(*)$ và $(**)$ suy ra $4=48a \Leftrightarrow a=\dfrac{1}{12}$, kéo theo, $h'(x)=\dfrac{1}{3}(x+1)(x-3)(x-4)$

Khi đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ bằng

$$S=\int_{-1}^{4}\left|f'(x)-g'(x)\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{4}\left|h'(x)\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{4}\left|\frac{1}{3}(x+1)(x-3)(x-4)\right|\mathrm{d}x=\frac{131}{12}$$

Chọn đáp án D

Câu 144:

Đặt $w = 2z_2$, ta có: $|z_2 + 2 - i| = 1 \Leftrightarrow |w + 4 - 2i| = 2$.

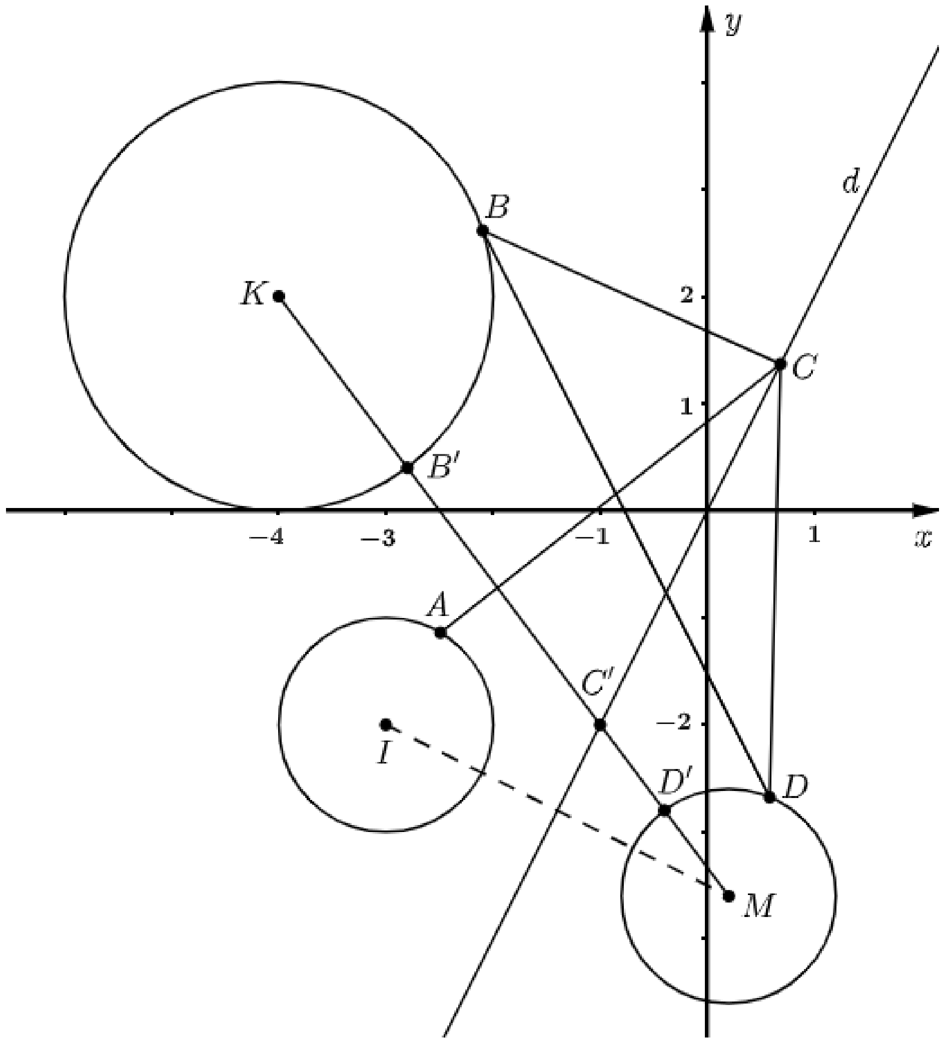
Gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức z_1, w, z. Khi đó:

Tập hợp các điểm A là đường tròn tâm $I(-3;-2)$, bán kính 1.

Tập hợp các điểm B là đường tròn tâm $K(-4;2)$, bán kính 2.

Tập hợp các điểm C là đường thẳng $d: 2x - y = 0$.

Gọi D là điểm đối xứng với A qua d. Khi đó, tập hợp các điểm D là đường tròn tâm $M\left(\frac{1}{5}; -\frac{18}{5}\right)$, bán kính 1.



Ta có: $T = |z - z_1| + |z - 2z_2| = |z - z_1| + |z - w| = CA + CB = CD + CB \geq BD$.

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi C nằm giữa B và D.

Lại có: BD đạt GTNN, khi và chỉ khi $\begin{cases} B \equiv B' \\ D \equiv D' \end{cases}$. Khi đó, $C \equiv C'$.

Có $C' = KM \cap d$ suy ra $C'(-1;-2)$. Kéo theo, $P = a^2 + b^2 = (-1)^2 + (-2)^2 = 5$

Chọn đáp án C

Câu 145:

Vì (C) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt là $A(x_1;0)$, $B(x_2;0)$, $C(x_3;0)$, $D(x_4;0)$ nên

$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$.

Suy ra $\begin{cases} f'(x_1)=a(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)\\ f'(x_2)=a(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)\\ f'(x_3)=a(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)\\ f'(x_4)=a(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)\end{cases}$

Lại có: x_1, x_2, x_3, x_4 theo thứ tự lập thành cấp số cộng, suy ra $\begin{cases} x_2=x_1+k\\ x_3=x_1+2k\\ x_4=x_1+3k\end{cases}$.

Khi đó, $\begin{cases} f'(x_1)=-6ak^3\\ f'(x_2)=2ak^3\\ f'(x_3)=-2ak^3\\ f'(x_4)=6ak^3\end{cases}$.

Có tiếp tuyến của (C) tại A, B vuông góc, suy ra $f'(x_1).f'(x_2)=-12a^2k^6=-1 \Leftrightarrow a^2k^6=\dfrac{1}{12}$

Ta có: $P=\left[f'(x_3)+f'(x_4)\right]^{2022}=16^{1011}.\left(a^2k^6\right)^{1011}=\left(\dfrac{4}{3}\right)^{1011}$

Chọn đáp án A

Câu 146:

Xác suất làm đúng k câu hỏi là : $P_k=\mathrm{C}_{50}^{k}.\left(\dfrac{1}{4}\right)^{k}.\left(\dfrac{3}{4}\right)^{50-k}$.

Xét $\dfrac{P_{k+1}}{P_k}=\dfrac{50-k}{3(k+1)}$

TH1: $\dfrac{P_{k+1}}{P_k}>1 \Leftrightarrow \dfrac{50-k}{3(k+1)}>1 \Leftrightarrow k<\dfrac{47}{4}$.

Vì $k\in\mathbb{N}^*$ nên $k\in\{1;2;...;11\}$.

Suy ra $P_1<P_2<...<P_{12}$.

TH2: $\dfrac{P_{k+1}}{P_k}<1 \Leftrightarrow \dfrac{50-k}{3(k+1)}<1 \Leftrightarrow k>\dfrac{47}{4}$.

Vì $k+1\le 50$ và $k\in\mathbb{N}^*$ nên $k\in\{12;13;...;49\}$.

Suy ra $P_{50}<P_{49}<...<P_{12}$.

Do đó, P_k đạt GTLN, khi và chỉ khi, $k=12$.

Chọn đáp án D

Câu 147:

Cách 1:

$z-4=(1+i)|z|-(4+3z)i \Leftrightarrow \left(a-3b-\sqrt{a^2+b^2}-4\right)+\left(3a+b-\sqrt{a^2+b^2}+4\right)i=0$

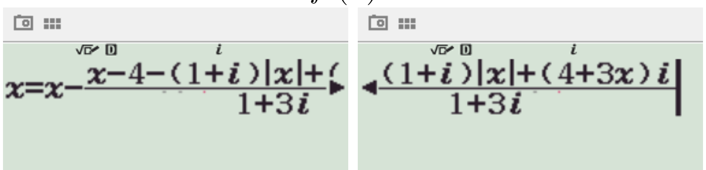
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-3b-\sqrt{a^2+b^2}-4=0 \\ 3a+b-\sqrt{a^2+b^2}+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-2 \end{cases}$$

Suy ra $P=a-3b=6$

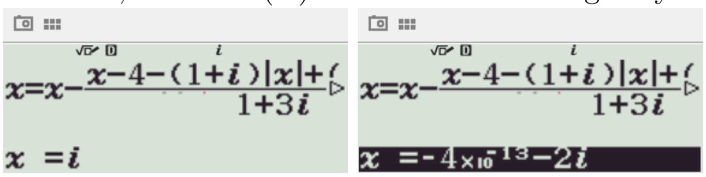
Cách 2: Phương pháp Newton - Raphson: NHẤN VÀO ĐÂY.

Xét $f(z)=z-4-(1+i)|z|+(4+3z)i$, suy ra $f'(z)=1+3i$.

Nhấn (MENU) (2), rồi nhập như sau: $x=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$



Sau đó, nhấn (CALC), cho $x=i$, rồi nhấn (=) cho đến khi x không thay đổi:



Dễ thấy $x \approx 0-2i$, suy ra $a=0$, $b=-2$.

Chọn đáp án C

Câu 148:

Đặt $t=2-x$, ta có: $\int\limits_0^2 f(2-x)\,\mathrm{d}x=-\int\limits_2^0 f(t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Khi đó, $2I=\int\limits_0^2 [f(x)+f(2-x)]\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{e}^4-1}{2}$. Suy ra $I=\dfrac{\mathrm{e}^4-1}{4}$.

Chọn đáp án C

Câu 149:

Với $x\in[-2;3]$ thì $f(x)\in[1;4]$ và $m\ge 0$, ta có:

$$\frac{m}{f(x)}-\sqrt{mf(x)}-1\ge\frac{3}{4}f^2(x)\Leftrightarrow\left(\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{f(x)}}-\frac{f(x)}{2}\right)^2\ge f^2(x)+1$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{m}\ge\left(\sqrt{f^2(x)+1}+\dfrac{f(x)}{2}\right)\sqrt{f(x)}\\ \sqrt{m}\le\left(-\sqrt{f^2(x)+1}+\dfrac{f(x)}{2}\right)\sqrt{f(x)}\end{array}\right.$$

Xét $\sqrt{m} \leq \left(-\sqrt{f^2(x)+1}+\dfrac{f(x)}{2}\right)\sqrt{f(x)}$

Với $f(x) \in [1;4]$, ta có: $\sqrt{f^2(x)+1} > f(x) > \dfrac{f(x)}{2}$, suy ra $-\sqrt{f^2(x)+1}+\dfrac{f(x)}{2} < 0$

Kéo theo $\sqrt{m} \leq \left(-\sqrt{f^2(x)+1}+\dfrac{f(x)}{2}\right)\sqrt{f(x)} < 0$, suy ra không tồn tại giá trị m thỏa mãn.

Xét $\sqrt{m} \geq \left(\sqrt{f^2(x)+1}+\dfrac{f(x)}{2}\right)\sqrt{f(x)}$

Đặt $t = \sqrt{f(x)}$, $f(x) \in [1;4] \Rightarrow t \in [1;2]$, bất phương trình trở thành: $\sqrt{m} \geq t\sqrt{t^4+1}+\dfrac{t^3}{2}$

Để bất phương trình đúng với mọi $t \in [1;2]$ thì $\sqrt{m} \geq \max\limits_{[1;2]}\left(t\sqrt{t^4+1}+\dfrac{t^3}{2}\right)$.

Xét hàm số $f(t) = t\sqrt{t^4+1}+\dfrac{t^3}{2}$, có $f'(t) = \dfrac{6t^4+3t^2\sqrt{t^4+1}+2}{2\sqrt{t^4+1}} > 0\ \forall t \in [1;2]$.

Suy ra $\sqrt{m} \geq \max\limits_{[1;2]}\left(t\sqrt{t^4+1}+\dfrac{t^3}{2}\right) = f(2) = 4+2\sqrt{17}$.

Kéo theo $m \geq 84+16\sqrt{17}$. Kết hợp điều kiện, suy ra $m \in \{150;151;...;2022\}$.

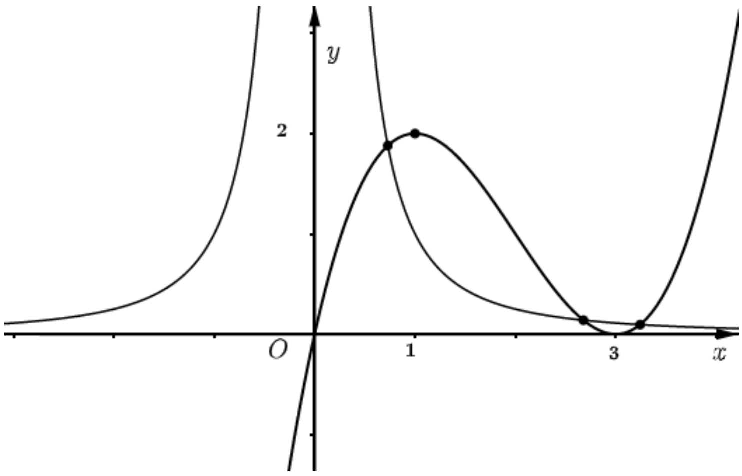
Vậy, có 1873 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Chọn đáp án D

Câu 150:

Ta có: $g(x) = f\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)-x^2$. Đặt $t = \dfrac{1}{x^2} > 0$.

Xét hàm số $h(t) = f(1-t)-\dfrac{1}{t}$, có $h'(t) = -f'(1-t)+\dfrac{1}{t^2}$.



Dựa vào đồ thị, suy ra $h'(t) = 0$ có ba nghiệm bội lẻ phân biệt $t > 0$.

Với mỗi giá trị $t > 0$, ta được hai giá trị x tương ứng.

Do đó, hàm số $g(x)$ có 6 điểm cực trị.

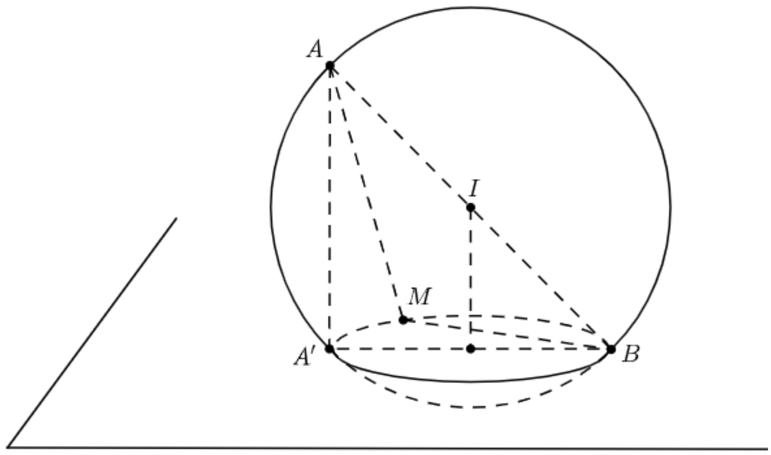
Chọn đáp án A

Câu 151:

Ta có: $2x_B + 2y_B - z_B + 9 = 0$, suy ra $B \in (P)$.

Gọi I là trung điểm AB, A' là hình chiếu của A trên (P), suy ra $A'(-3;-2;-1)$.

M là điểm thay đổi trên (P) và $\widehat{AMB} = 90^\circ$, suy ra M thuộc đường tròn giao tuyến của mặt cầu tâm I, bán kính IB và mặt phẳng (P).



Để MB lớn nhất thì $M \equiv A'$. Khi đó, $MB : \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -2 \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

Chọn đáp án A

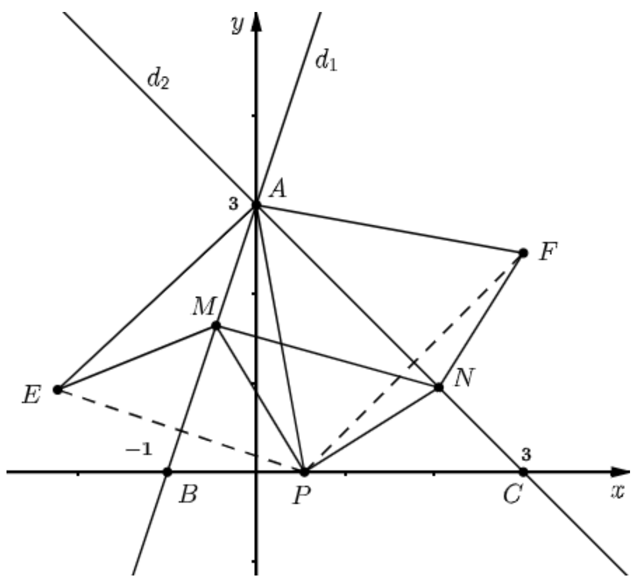
Câu 152:

Ta có: $|5z_1 + 9 - 3i| = |5z_1|$, $|z_2 - 2| = |z_2 - 3 - i|$

Suy ra tập hợp các điểm M, N biểu diễn số phức z_1, z_2 lần lượt là các đường thẳng $d_1 : 3x - y + 3 = 0$, $d_2 : x + y - 3 = 0$.

Gọi $A = d_1 \cap d_2$, $B(-1;0)$, $C(3;0)$. Suy ra $A(0;3)$.

Lại có: $|z_3 + 1| + |z_3 - 3| = 4$, suy ra P thuộc đoạn thẳng BC.



Gọi E, F lần lượt là các điểm đối xứng với P qua d_1, d_2.

Khi đó, Chu vi tam giác MNP bằng: $p = MP + MN + NP = ME + MN + NF \geq EF$.

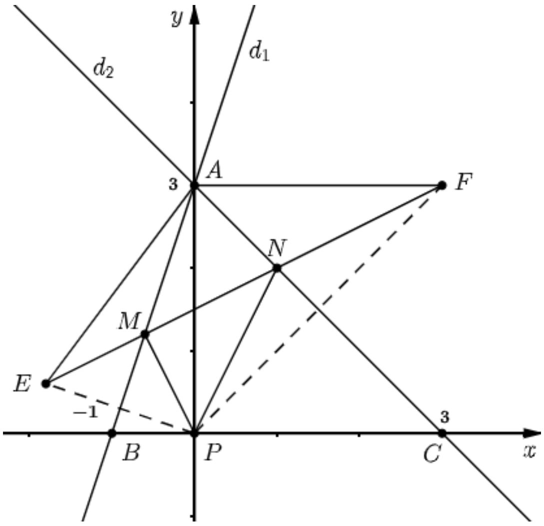
Dấu $" = "$ xảy ra khi và chỉ khi E, M, N, F theo thứ tự thẳng hàng.

Ta có: Hai tam giác ΔAEF, ΔAPF cân tại đỉnh A. Suy ra $\widehat{EAF} = 2\widehat{BAP} + 2\widehat{PAC} = 2\widehat{BAC}$.

Có $\widehat{BAC}$ không đổi, nên $\widehat{EAF}$ cũng không đổi.

Lại có: $AE = AP = AF$ và $EF^2 = AE^2 + AF^2 - 2AE.AF.\cos\widehat{EAF} = 2AP^2\left(1 - \cos\widehat{EAF}\right)$.

Do đó, để EF nhỏ nhất thì AP nhỏ nhất.



AP nhỏ nhất, khi và chỉ khi, P là hình chiếu của A trên BC.

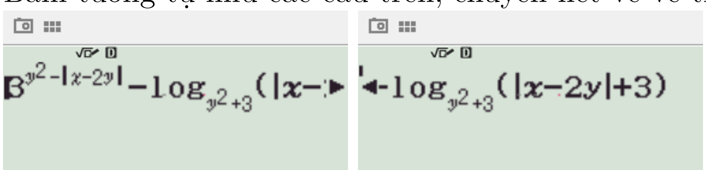
Khi đó, $AP = 3$, suy ra $EF = \dfrac{12\sqrt{5}}{5}$, kéo theo $\min p = \dfrac{12\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án B

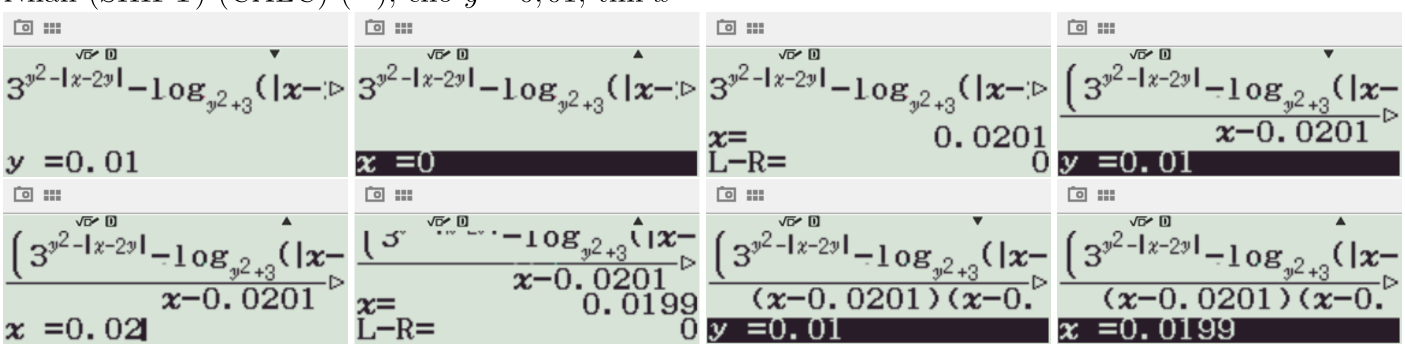
Câu 153:

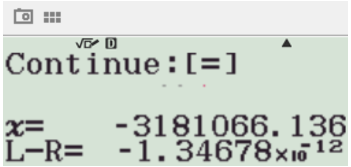
Cách 1:

Bấm tương tự như các câu trên, chuyển hết về vế trái, rồi nhập biểu thức vào máy:



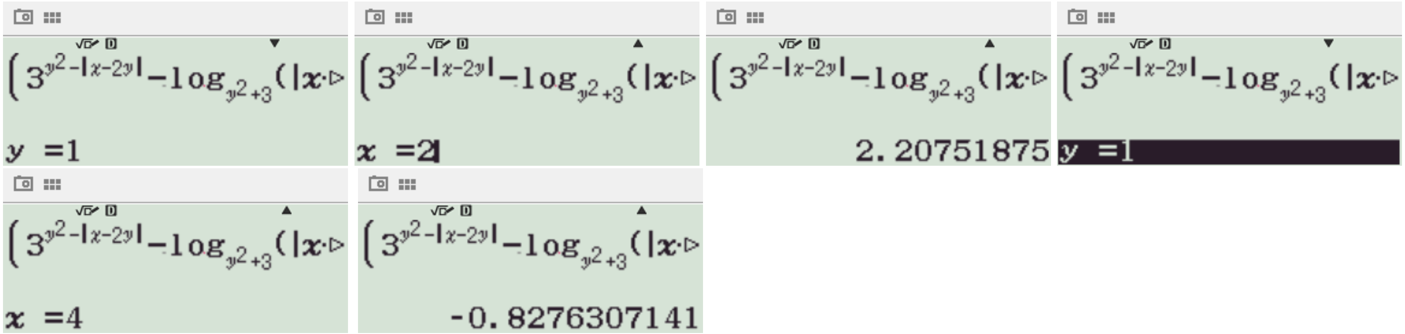
Nhấn (SHIFT) (CALC) (=), cho $y = 0,01$, tìm x





Ta tìm được hai nghiệm là $x = 0,0201 = 2y + y^2$ và $x = 0,0199 = 2y - y^2$. Mà đề cho là bất phương trình, nên ta xét các trường hợp $x \le y^2 + 2y$ hoặc $x \ge y^2 + 2y$ và $x \le -y^2 + 2y$ hoặc $x \ge -y^2 + 2y$

Cho $y = 1$, thử $x = 2$ hoặc $x = 4$.



Ta thấy $x = 4$, $y = 1$ thỏa $VT \le 0$, suy ra $x \ge y^2 + 2y$

Trường hợp còn lại, làm tương tự, suy ra $x \le -y^2 + 2y$

Cách 2:

Ta có: $3^{y^2 - |x-2y|} \le \log_{y^2+3}(|x-2y|+3) \Leftrightarrow 3^{y^2+3}.\log_3\left(y^2+3\right) \le 3^{|x-2y|+3}.\log_3(|x-2y|+3)$

Xét hàm số $f(t) = 3^t.\log_3 t$ với $t \ge 3$. Ta có: $f'(t) = 3^t.\ln 3.\log_3 t + \dfrac{3^t}{t\ln 3} > 0 \ \forall t \ge 3$.

$\Rightarrow f\left(y^2+3\right) \le f(|x-2y|+3) \Leftrightarrow y^2 + 3 \le |x-2y| + 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge y^2 + 2y \\ x \le -y^2 + 2y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y^2 + 2y - x \le 0 \ \ (*) \\ y^2 - 2y + x \le 0 \ \ (**) \end{array}\right.$

Ta có: $\Delta_1 = 4 + 4x$, $\Delta_2 = 4 - 4x$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$4+4x$		$-$	0	$+$		$+$	
$4-4x$		$+$		$+$	0	$-$	

TH1: $x < -1$.

$(*)$ vô nghiệm và $(**) \Leftrightarrow 1 - \sqrt{1-x} \le y \le 1 + \sqrt{1-x}$.

Lại có: Đồ thị hàm số $g(x) = x^2 - 2x$ có trục đối xứng $x = 1$.

Do đó, để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì $-2 < 1 - \sqrt{1-x} \le -1 < 0 < 1 < 2 < 3 \le 1 + \sqrt{1-x} < 4$

Tức là $\begin{cases} -2 < 1 - \sqrt{1-x} \le -1 \\ 3 \le 1 + \sqrt{1-x} < 4 \end{cases} \Leftrightarrow -8 < x \le -3$. Kết hợp điều kiện, suy ra $x \in \{-7; -6; ...; -3\}$

TH2: $-1 \le x \le 1$. Dễ thấy chỉ có $x = 0$ thỏa mãn.

TH3: $x > 1$.

$(**)$ vô nghiệm và $(*) \Leftrightarrow -1-\sqrt{1+x} \le y \le -1+\sqrt{1+x}$.

Lại có: Đồ thị hàm số $h(x) = x^2+2x$ có trục đối xứng $x = -1$.

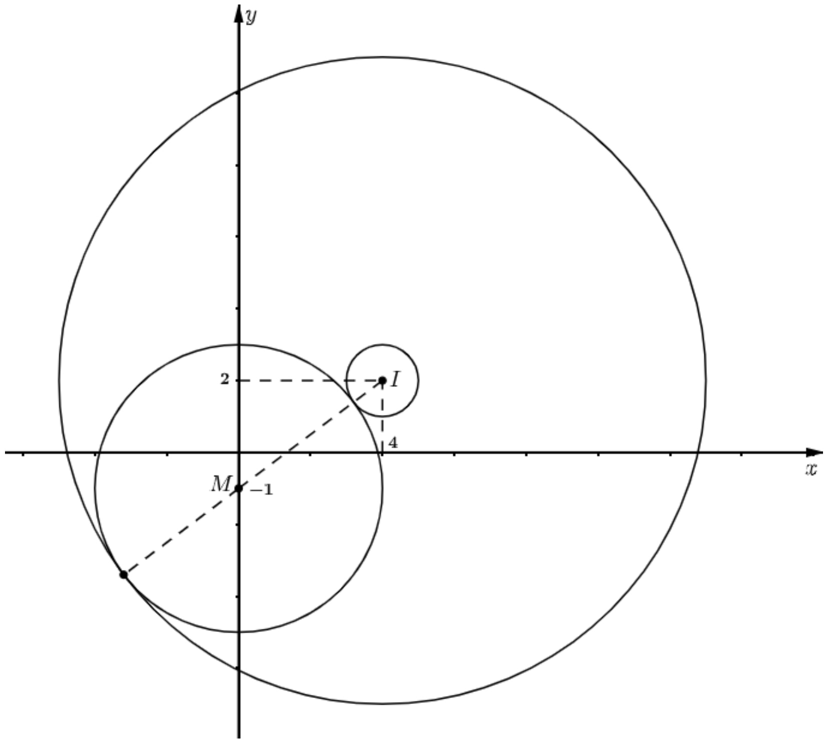
Do đó, để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì $-4 < -1-\sqrt{1+x} \le -3 < -2 < -1 < 0 < 1 \le -1+\sqrt{1+x} < 2$

Tức là $\begin{cases} -4 < -1-\sqrt{1+x} \le -3 \\ 1 \le -1+\sqrt{1+x} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow 3 \le x < 8$. Kết hợp điều kiện, suy ra $x \in \{3;4;...;7\}$

Vậy, có 11 giá trị nguyên x thỏa mãn.

Chọn đáp án B

Câu 154:



Tập hợp các điểm thỏa mãn $(z+i)(\overline{z}-i) = 16$ là đường tròn (C), tâm $M(0;-1)$, bán kính $R = 4$.

Xét $|z-4-2i| = m$

TH1: $m < 0$, suy ra không tồn tại số phức z thỏa mãn.

TH2: $m = 0$ là điểm $I(4;2)$ nằm ngoài đường tròn (C), suy ra không tồn tại số phức z thỏa mãn.

TH3: $m > 0$, tập hợp các điểm thỏa mãn là đường tròn (C_m), tâm $I(4;2)$, bán kính $R_m = m$.

Để tồn tại số phức z thỏa mãn yêu cầu thì (C) và (C_m) tiếp xúc nhau.

TH3.1: (C) và (C_m) tiếp xúc ngoài, ta có: $IM = R+R_m \Leftrightarrow m = IM-R = 5-4 = 1$.

TH3.2: (C) và (C_m) tiếp xúc trong, ta có: $IM = R_m - R \Leftrightarrow m = IM+R = 5+4 = 9$.

Suy ra $S = \{1;9\}$. Do đó, tổng các phần tử của S bằng 10.

Chọn đáp án D

Câu 155:

Giả sử $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ là nghiệm của phương trình $z^2 + az + b = 0$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

Khi đó: $z^2 + az + b = 0 \Leftrightarrow \overline{z^2 + az + b} = \overline{0} \Leftrightarrow \overline{z}^2 + a\overline{z} + b = 0$.

Suy ra $\overline{z}$ cũng là nghiệm của phương trình $z^2 + az + b = 0$.

Đặt $w = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$

Ta có: z_1, z_2 là nghiệm của phương trình $z^2 + az + b = 0$

TH1: $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ vô lí, vì $z_1 = w + 2i, z_2 = 2w - 3$ không đồng thời là số thực.

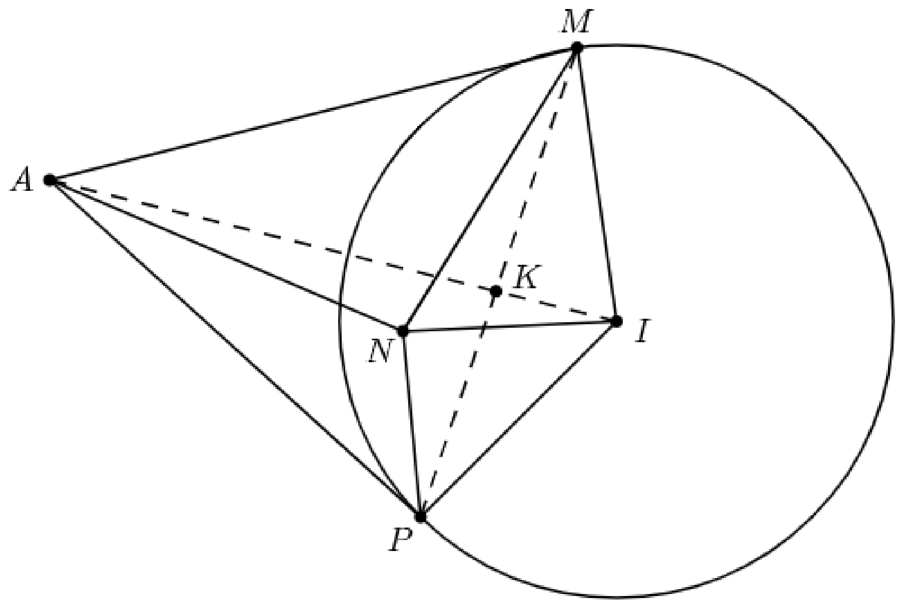
TH2: $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$. Khi đó,

$$z_1 = \overline{z_2} \Leftrightarrow x + (y+2)i = \overline{2x - 3 + 2yi} \Leftrightarrow x + (y+2)i = 2x - 3 - 2yi \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3 = 0 \\ 3y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Suy ra $z_1 = 3 + \dfrac{4}{3}i$, $z_2 = 3 - \dfrac{4}{3}i$, kéo theo, $T = |z_1| + |z_2| = \dfrac{2\sqrt{97}}{3}$

Chọn đáp án C

Câu 156:



Gọi $I(0;1;-2)$ là tâm mặt cầu (S), bán kính $R = 3$.

Dễ dàng chứng minh $\Delta AMI = \Delta ANI = \Delta API$. Gọi K là hình chiếu của M trên AI.

Suy ra $AK \perp (MNP)$, kéo theo $AI \perp (MNP)$. Có $\overrightarrow{IA} = (2;-2;4)$, suy ra $IA = 2\sqrt{6}$.

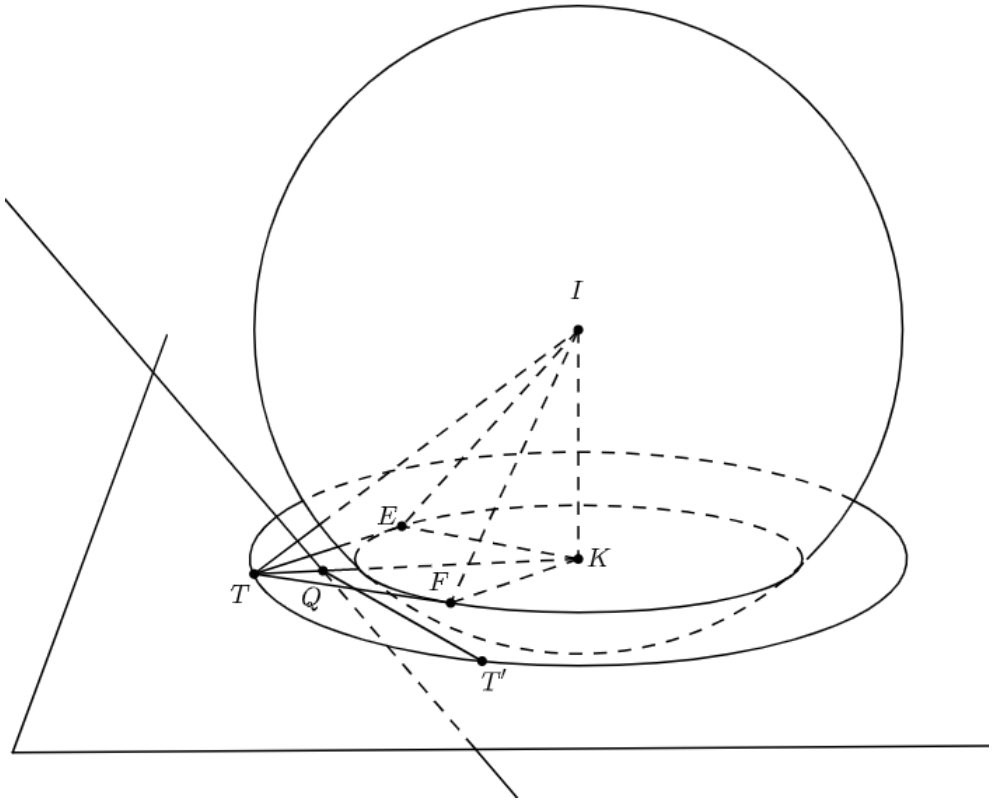
Có ΔAMI vuông tại M, MK đường cao, suy ra $IK = \dfrac{IM^2}{IA} = \dfrac{3\sqrt{6}}{4}$.

Kéo theo, $\overrightarrow{IK} = \dfrac{3}{8}\overrightarrow{IA}$, suy ra $K\left(\dfrac{3}{4}; \dfrac{1}{4}; -\dfrac{1}{2}\right)$.

Mặt phẳng (MNP) nhận $\overrightarrow{IA}$ làm VTPT và đi qua điểm K. Suy ra $(MNP): x - y + 2z + \dfrac{1}{2} = 0$.

Xét mặt phẳng (MNP) và mặt cầu (S):

Gọi E, F là tiếp điểm của hai tiếp tuyến kẻ từ T với mặt cầu (S), $Q = \Delta \cap (MNP)$, suy ra $Q\left(-\dfrac{15}{16}; \dfrac{31}{16}; \dfrac{19}{16}\right)$, kéo theo $QK = \dfrac{27\sqrt{3}}{16}$.



Ta có: $\begin{cases} TE \perp EI \\ TE \perp FI \\ TE \perp IK \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} TE \perp EK \\ TE \perp FK \end{cases}$. Lại có: $\begin{cases} EK = FK \\ TE \perp TF \end{cases}$, suy ra $TEKF$ là hình vuông.

Có $FK = \sqrt{R^2 - IK^2} = \dfrac{3\sqrt{10}}{4}$, suy ra $TK = \dfrac{3\sqrt{5}}{2} > QK$

Kéo theo, T thuộc đường tròn (C) tâm K, bán kính $KT = \dfrac{3\sqrt{5}}{2}$ và Q nằm trong đường tròn (C).

Để TQ nhỏ nhất thì Q nằm giữa T và K, khi đó, $QT = KT - KQ = \dfrac{3\sqrt{5}}{2} - \dfrac{27\sqrt{3}}{16}$.

Chọn đáp án B

Câu 157:

Xét hàm số $h(x) = f\left(\sqrt{x^2+1}\right) + x^2$, ta có: $h'(x) = x.\left[\dfrac{f'\left(\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}} + 2\right]$

$\Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'\left(\sqrt{x^2+1}\right) = -2\sqrt{x^2+1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \sqrt{x^2+1} = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{array}\right.$

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra $f'\left(\sqrt{x^2+1}\right) - \left(-2\sqrt{x^2+1}\right) > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} > 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \sqrt{3} \\ x < -\sqrt{3} \end{array}\right.$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{f'\left(\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}}+2$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘		↗	$h(1)$	↘		↗	$+\infty$

Ta có: $h(1) = f(1) < 0$, suy ra

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	↘ ↗		↘	$h(1)$	↗		↘ ↗	$+\infty$

Suy ra $g(x)$ đồng biến trên $(0;1)$

Chọn đáp án C

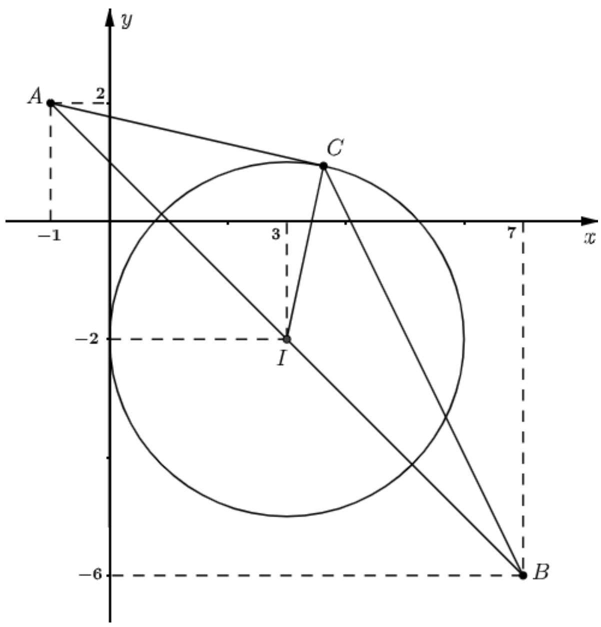
Câu 158:

Cách 1:

Ta có: $|(2+i)(z-4)+5i| = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow |2+i|\left|(z-4)+\dfrac{5i}{2+i}\right| = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow |z-3+2i| = 3$

Gọi $A(-1;2)$, $B(7;-6)$ và C là điểm biểu diễn số phức z.

Suy ra, tập hợp các điểm C là đường tròn tâm $I(3;-2)$, bán kính $R = 3$.



Dễ thấy I là trung điểm của AB. Suy ra $CI^2 = \dfrac{CA^2 + CB^2}{2} - \dfrac{AB^2}{4} \Leftrightarrow 2\left(CA^2 + CB^2\right) = 4CI^2 + AB^2$

Ta có: $P = |z + 1 - 2i| + |z - 7 + 6i| = CA + CB \le \sqrt{2\left(CA^2 + CB^2\right)} = \sqrt{4CI^2 + AB^2} = 2\sqrt{41}$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $CA = CB$.

Cách 2:

Đặt $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$, ta có: $|z - 3 + 2i| = 3$, suy ra $(a-3)^2 + (b+2)^2 = 9$

$P = |z + 1 - 2i| + |z - 7 + 6i| = \sqrt{(a+1)^2 + (b-2)^2} + \sqrt{(a-7)^2 + (b+6)^2}$

Áp dụng bất đẳng thức CBS, ta có:

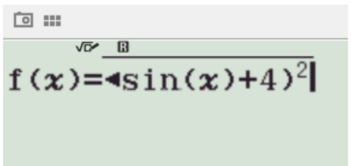
$$P \le \sqrt{2\left[(a+1)^2 + (b-2)^2 + (a-7)^2 + (b+6)^2\right]} = \sqrt{2\left[2(a-3)^2 + 2(b+2)^2 + 64\right]} = 2\sqrt{41}$$

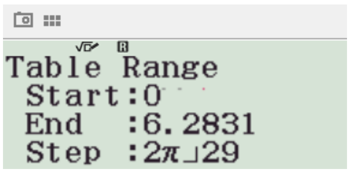
Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} (a+1)^2 + (b-2)^2 = (a-7)^2 + (b+6)^2 \\ (a-3)^2 + (b+2)^2 = 9 \end{cases}$

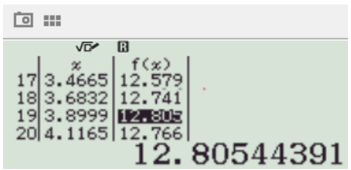
Cách 3:

Đặt $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$, ta có: $|z - 3 + 2i| = 3$, suy ra $(a-3)^2 + (b+2)^2 = 9$

Đặt $\begin{cases} a = 3\cos x + 3 \\ b = 3\sin x - 2 \end{cases}$, khi đó, $P = \sqrt{(3\cos x + 4)^2 + (3\sin x - 4)^2} + \sqrt{(3\cos x - 4)^2 + (3\sin x + 4)^2}$

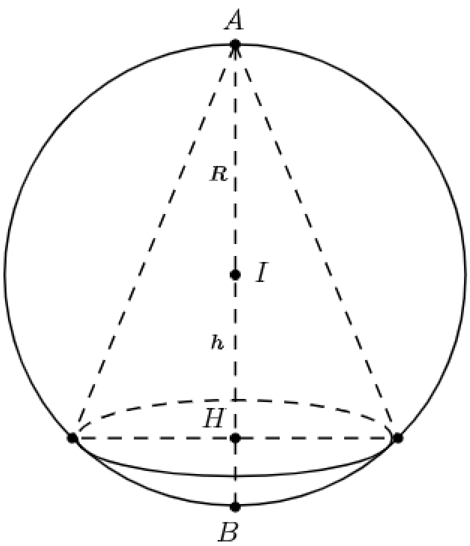






Chọn đáp án D

Câu 159:



Gọi I là trung điểm AB, đặt $IH = h$. Suy ra $I(3;4;0)$, $IA = R = 3$.

Thể tích khối nón bằng $V = \dfrac{\pi.\left(R^2 - h^2\right).(R+h)}{3}$.

Ta có: $V' = \dfrac{\pi.\left(R^2 - 2Rh - 3h^2\right)}{3} \Rightarrow V' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} h = -R \text{ (loại)} \\ h = \dfrac{R}{3} = 1 \end{array}\right.$

h	0		1		3
V'		$+$	0	$-$	
V		$\nearrow$	$\dfrac{32\pi}{3}$	$\searrow$	

Suy ra $\overrightarrow{IH} = -\dfrac{\overrightarrow{IA}}{3}$, kéo theo $H\left(\dfrac{11}{3};\dfrac{14}{3};\dfrac{1}{3}\right)$. Suy ra $(P): 2x+2y+z-17=0$. Suy ra $M \in (P)$

Chọn đáp án D

Câu 160:

Cách 1:

Ta có: $\begin{cases} A, N \in d \\ A, N \in \Delta \end{cases}$, suy ra $d \equiv \Delta$.

Cách 2:

Có $N \in \Delta$, suy ra $N(4+2t;-2-t;4+t)$. N trung điểm AM, suy ra $M(6+4t;-3-2t;5+2t)$.

Có $M \in (P)$, suy ra $t = -\dfrac{3}{2}$, kéo theo $M(0;0;2)$. Suy ra $\overrightarrow{u}_d = (2;-1;1)$, kéo theo $d: \begin{cases} x = 2+2t \\ y = -1-t \\ z = 3+t \end{cases}$

Chọn đáp án C

Câu 161:

Cách 1:

Đặt $z = x+yi$ $(a, b \in \mathbb{R})$, suy ra: $|z-3-4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5$, có dạng là phương trình đường tròn (C), tâm $I(3;4)$, bán kính $R = \sqrt{5}$.

Ta có: $P = |z+2|^2 - |z-i|^2 = 4x+2y+3 \Leftrightarrow 4x+2y+3-P = 0$, có dạng là phương trình đường thẳng (α).

Khi đó, để tồn tại số phức z thỏa mãn thì $d(I,(\alpha)) \leq R \Leftrightarrow \dfrac{|23-P|}{2\sqrt{5}} \leq \sqrt{5} \Leftrightarrow 13 \leq P \leq 33$

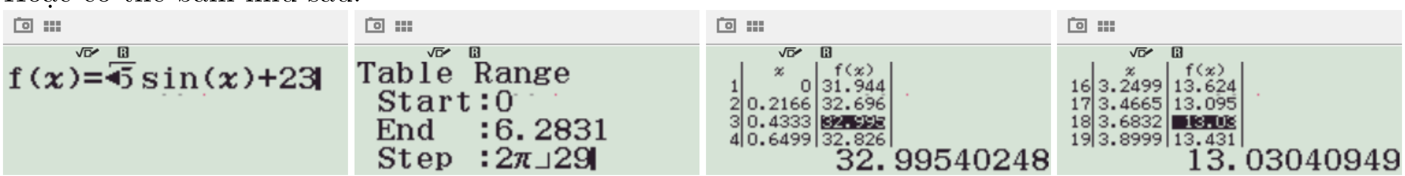
Suy ra $w = 33+13i$, kéo theo $|w| = \sqrt{1258}$.

Cách 2:

Ta có: $(x-3)^2+(y-4)^2=5$, đặt $\begin{cases} x=\sqrt{5}\cos t+3 \\ y=\sqrt{5}\sin t+4 \end{cases}$. Khi đó,

$P=4\sqrt{5}\cos t+2\sqrt{5}\sin t+23=10\sin(t+\alpha)+23$, với $\alpha=\arccos\dfrac{2\sqrt{5}}{10}$. Suy ra $13\le P\le 33$.

Hoặc có thể bấm như sau:



Suy ra $M=33$, $m=13$, kéo theo $|w|=\sqrt{1258}$.

Chọn đáp án C

Câu 162:

Cách 1:

Ta có: $f'(x)=(x-2)^2\left(x^2-x\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=2 \text{ (nghiệm bội chẵn)} \\ x=1 \\ x=0 \end{array}\right.$

Xét hàm số $g(x)=f\left(\dfrac{1}{2}x^2-6x+m\right)$, có $g'(x)=(x-6)f'\left(\dfrac{1}{2}x^2-6x+m\right)$

$$\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=6 \\ \dfrac{1}{2}x^2-6x+m=2 \\ \dfrac{1}{2}x^2-6x+m=1 \\ \dfrac{1}{2}x^2-6x+m=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=6 \\ \dfrac{1}{2}x^2-6x=2-m \text{ (nghiệm bội chẵn)} \\ \dfrac{1}{2}x^2-6x=1-m \\ \dfrac{1}{2}x^2-6x=-m \end{array}\right.$$

Lại có: $2-m>1-m>-m$ và

x	$-\infty$	6	$+\infty$
$\dfrac{x^2}{2}-6x$	$+\infty$ ↘	-18	↗ $+\infty$

Do đó, để hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị thì $-m>-18\Leftrightarrow m<18$.

Kết hợp điều kiện, suy ra $S=\{1;2;\ldots;17\}$

Kéo theo, tổng tất cả các phần tử của S bằng $1+2+\ldots+17=153$

Cách 2: Cơ sở cách làm: NHẤN VÀO ĐÂY.

Ta có: $f'(x)=(x-2)^2\left(x^2-x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \ \text{(nghiệm bội chẵn)} \\ x=1 \\ x=0 \end{array}\right.$

Đặt $u(x)=\dfrac{1}{2}x^2-6x+m$, ta có:

x	$-\infty$	6	$+\infty$
$u(x)$	$+\infty$ ↘	$-18+m$	↗ $+\infty$

Áp dụng công thức:

$$\text{SĐCT } f(u(x)) = \text{SĐCT } u(x) + \text{SNBL} \left[\begin{array}{l} u(x)=1 \\ u(x)=0 \end{array}\right.$$

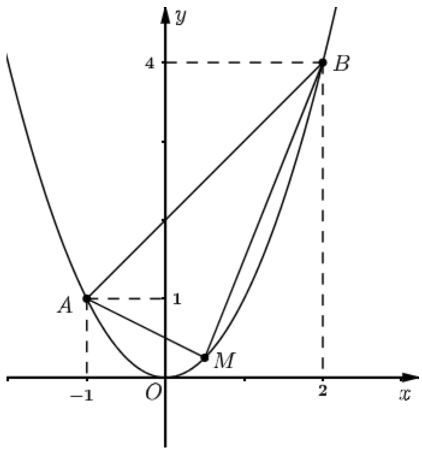
Do đó, để $f(u(x))$ có 5 điểm cực trị thì $0>-18+m \Leftrightarrow m<18$.

Kết hợp điều kiện, suy ra $S=\{1;2;...;17\}$

Kéo theo, tổng tất cả các phần tử của S bằng $1+2+...+17=153$

Chọn đáp án D

Câu 163:



Ta có: $AB: x-y+2=0$, $M\in(P)$, suy ra $M(t;t^2)$ với $t\in(-1;2)$.

Có $S_{AMB}=\dfrac{d(M,AB).AB}{2}$, mà AB không đổi, do đó, để S_{AMB} đạt GTLN thì $d(M,AB)$ đạt GTLN.

$d(M,AB)=\dfrac{\left|t-t^2+2\right|}{\sqrt{2}}\leq\dfrac{9\sqrt{2}}{8}$, với $t\in(-1;2)$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $t=\dfrac{1}{2}$, suy ra $M\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{4}\right)$.

Khi đó, chu vi ΔAMB bằng: $3\sqrt{2}+\dfrac{3\sqrt{5}}{4}+\dfrac{3\sqrt{29}}{4}$. Suy ra $a+b+c=\dfrac{9}{2}$

Chọn đáp án C

Câu 164:

Với $a,b>0$, ta có: $\log_2 \dfrac{2^a+a}{ab}+2^a \leq a(b-1) \Leftrightarrow \log_2\left(2^a+a\right)+2^a+a \leq \log_2(ab)+ab$

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+t$ với $t>0$, ta có: $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+1>0\ \forall t>0$

$\Rightarrow f\left(2^a+a\right)\leq f(ab) \Leftrightarrow 2^a+a\leq ab \Leftrightarrow \dfrac{2^a}{a}+1=g(a)\leq b.$

Để có đúng 3 số nguyên dương a thỏa mãn thì $g(3)\leq b<g(4) \Leftrightarrow \dfrac{11}{3}\leq b<5.$

Kết hợp điều kiện, suy ra $b=4$.

Vậy, có 1 giá trị nguyên dương b thỏa mãn.

Chọn đáp án A

Câu 165:

Ta có: $f'(x)=1+3^x\ln 3>0\ \forall x$, $g'(x)=3x^2-2mx+m^2+1>0\ \forall x$ (vì $\Delta<0$ và $a>0$)

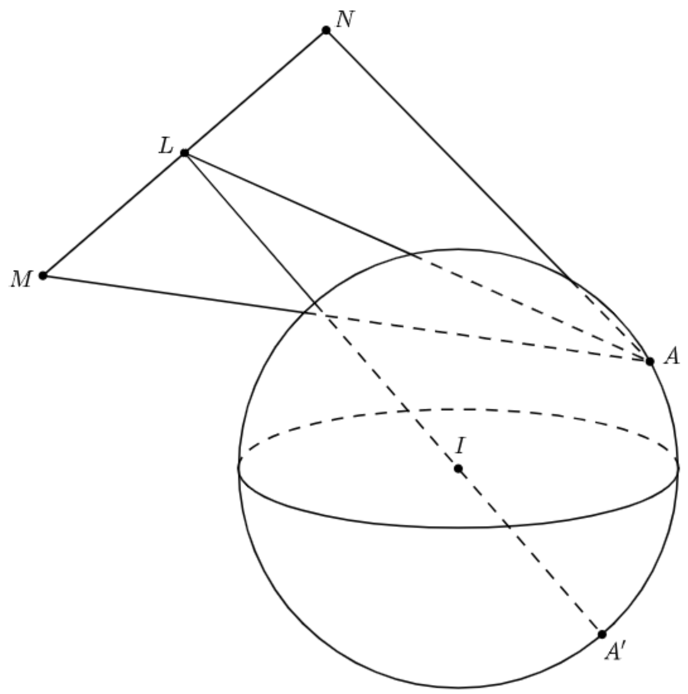
$\Rightarrow y'=\left(2+f'(x)\right)g'\left(2x+f(x)\right)>0\ \forall x.$

Suy ra $M=\max\limits_{[0;1]} g\left(2x+f(x)\right)=g\left(2+f(1)\right)=g(6)=6m^2-36m+219\geq 165.$

Dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi $m=3$.

Chọn đáp án A

Câu 166:



Gọi I là tâm mặt cầu (S), bán kính $R=\sqrt{35}$; L là trung điểm của MN.

Suy ra $I(2;-1;-2)$, $L(8;-3;8)$, kéo theo, $\overrightarrow{IL}=(6;-2;10)$, $IL=2\sqrt{35}$.

Ta có: $IM=IN$, suy ra IL là trung trực của MN.

Lại có: $AL^2 = \dfrac{AM^2+AN^2}{2} - \dfrac{MN^2}{4} \Leftrightarrow 2\left(AM^2+AN^2\right) = 4AL^2 + MN^2$.

Khi đó, $AM + AN \leq \sqrt{2\left(AM^2+AN^2\right)} = \sqrt{4AL^2+MN^2} \leq \sqrt{4A'L^2+MN^2} = 42$

Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $A \equiv A'$. Ta có: $\overrightarrow{IA'} = -\dfrac{\overrightarrow{IL}}{2}$, suy ra $A'(-1;0;-7)$.

Khi đó, tiếp diện của mặt cầu (S) tại A có phương trình là $3x - y + 5z + 38 = 0$.

Chọn đáp án B

Câu 167:

Ta có: $f(x) = \int f'(x)\,\mathrm{d}x = \int \cos x\left(6\sin^2 x - 1\right)\,\mathrm{d}x = \int \left(6\sin^2 x - 1\right)\,\mathrm{d}(\sin x) = 2\sin^3 x - \sin x + C$.

Có $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = 2\sin^3 x - \sin x$.

Lại có: $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) - F(0) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2\sin^3 x - \sin x\right)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}$. Suy ra $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{3} + F(0) = 1$.

Chọn đáp án C

Câu 168:

Điều kiện: $\begin{cases} x+2>0 \\ 2x^2-1>0 \\ \log_3(x+2) \geq 0 \\ \log_3\left(2x^2-1\right) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 1 \\ 2x^2-1 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x \geq 1 \end{array}\right.$. Ta có:

$\sqrt{2\log_3(x+2)} - \sqrt{\log_3\left(2x^2-1\right)} \geq (x+1)(x-5) \Leftrightarrow \sqrt{\log_3(x+2)^2} + (x+2)^2 \geq \sqrt{\log_3\left(2x^2-1\right)} + 2x^2 - 1$

Dễ thấy, $x = -1$ và $x = 1$ thỏa mãn.

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{\log_3 t} + t$ với $t > 1$. Ta có: $f'(t) = \dfrac{1}{2t\sqrt{\ln 3 . \ln t}} + 1 > 0\ \forall t > 1$.

$\Rightarrow f\left((x+2)^2\right) \geq f\left(2x^2-1\right) \Leftrightarrow (x+2)^2 \geq 2x^2 - 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 5$

Kết hợp điều kiện, suy ra $x \in \{-1;1;2;3;4;5\}$. Vậy, có 6 số nguyên x thỏa mãn.

Chọn đáp án C

Câu 169:

Cách 1:

Với $a, b \geq 0$, ta có: $16b + 3a.2^{3a+4b} \geq 8 \Leftrightarrow 3a.2^{3a} \geq (2-4b).2^{2-4b}$ $(*)$.

TH1: $2 - 4b \geq 0 \Leftrightarrow b \leq \dfrac{1}{2}$

Xét hàm số $f(t) = t.2^t$ với $t \geq 0$, ta có: $f'(t) = 2^t + t.2^t \ln 2 > 0\ \forall t \geq 0$.

$\Rightarrow f(3a) \geq f(2-4b) \Leftrightarrow 3a \geq 2 - 4b \Leftrightarrow a \geq \dfrac{2-4b}{3}$.

Khi đó, $P=3a^2+3b^2+12a+18b+6\geq 3\left(\dfrac{2-4b}{3}\right)^2+3b^2+12\left(\dfrac{2-4b}{3}\right)+18b+6\geq 15.$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a=\dfrac{2}{5} \\ b=\dfrac{1}{5} \end{cases}$

TH2: $2-4b\leq 0\Leftrightarrow b\geq\dfrac{1}{2}$. Khi đó, $(*)$ đúng với mọi $a\geq 0$.

Kéo theo, $P=3a^2+3b^2+12a+18b+6\geq 3.0^2+3\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+12.0+18.\dfrac{1}{2}+6=\dfrac{63}{4}$.

Vậy với $a,b\geq 0$ thì $\min P=15$.

Cách 2:

Với mọi a,b không âm, ta có: $16b+3a.2^{3a+4b}\geq 8\Leftrightarrow (3a+4b-2)+3a.\left(2^{3a+4b-2}-1\right)\geq 0.$

TH1: $3a+4b-2<0$, suy ra $(3a+4b-2)+3a.\left(2^{3a+4b-2}-1\right)<0$, loại.

TH2: $3a+4b-2\geq 0\Leftrightarrow 3a+4b\geq 2$

Áp dụng bất đẳng thức CBS, ta có:

$$P=3a^2+3b^2+12a+18b+6=\frac{1}{3}(3a+6)^2+\frac{3}{16}(4b+12)^2-33\geq\frac{3}{25}(3a+4b+18)^2-33\geq 15$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} 3a+4b=2 \\ 16(3a+6)=9(4b+12) \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=\dfrac{2}{5} \\ b=\dfrac{1}{5} \end{cases}$

Chọn đáp án A

Câu 170:

Cách 1:

Giả sử $z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ là nghiệm của phương trình $z^2+az+b=0$ với $a,b\in\mathbb{R}$.

Khi đó: $z^2+az+b=0\Leftrightarrow\overline{z^2+az+b}=\overline{0}\Leftrightarrow\overline{z}^2+a\overline{z}+b=0.$

Suy ra $\overline{z}$ cũng là nghiệm của phương trình $z^2+az+b=0$. Suy ra $z_2=\overline{z_1}=2+i$

Lại có: $\begin{cases} z_1+z_2=4=-a \\ z_1.z_2=5=b \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=-4 \\ b=5 \end{cases}$. Suy ra $|az_1-bz_2|=5\sqrt{13}$.

Cách 2:

Ta có: $z_1=2-i$ là nghiệm của phương trình $z^2+az+b=0$ với $a,b\in\mathbb{R}$.

Suy ra $(2-i)^2+a(2-i)+b=0\Leftrightarrow(2a+b+3)-(a+4)i=0\Leftrightarrow\begin{cases} 2a+b+3=0 \\ a+4=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=-4 \\ b=5 \end{cases}$.

Suy ra $z_2=2+i$, kéo theo, $|az_1-bz_2|=5\sqrt{13}$.

Chọn đáp án D

Câu 171:

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$ax^3+bx^2+cx-4=dx^2+ex+2 \Leftrightarrow ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x-6=0 \ \ (*)$$.

Ta có: $f(x)-g(x)$ có các nghiệm lần lượt là -3; -1; 2.

Suy ra $f(x)-g(x)=a(x+3)(x+1)(x-2)=ax^3+2ax^2-5ax-6a \ \ (**)$.

Từ $(*)$ và $(**)$, suy ra $-6=-6a \Leftrightarrow a=1$. Kéo theo, $f(x)-g(x)=x^3+2x^2-5x-6$.

Khi đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y=f(x)$ và $y=g(x)$ bằng:

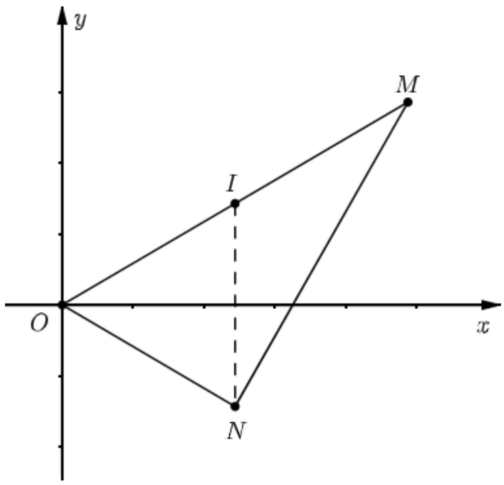
$$S=\int_{-3}^{2}|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x=\int_{-3}^{2}\left|x^3+2x^2-5x-6\right|\,\mathrm{d}x=\frac{253}{12}$$

Chọn đáp án C

Câu 172:

Ta có: $|z_1|z_1=4|z_2|z_2 \Leftrightarrow |z_1|^2=4|z_2|^2 \Leftrightarrow |z_1|=2|z_2|$. Suy ra $z_1=2z_2$.

Gọi I là điểm biểu diễn số phức z_2. Khi đó, I là trung điểm OM và I đối xứng với N qua trục Ox.



Ta có: $S_{MON}=\dfrac{1}{2}OM.ON.\sin\widehat{MON}=32 \Rightarrow OI^2.\sin\widehat{MON}=32$

Lại có: $0^\circ<\widehat{MON}<180^\circ$, suy ra $0<\sin\widehat{MON}\le 1$, kéo theo $OI^2\ge 32 \Rightarrow OI\ge 4\sqrt{2}$.

Suy ra $|z_1+z_2|=3|z_2|=3OI\ge 12\sqrt{2}$. Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $\widehat{MON}=90^\circ$.

Chọn đáp án B

Câu 173:

Đặt $x=\dfrac{SC}{SP}$, áp dụng công thức **Câu 31**, ta có: $\dfrac{2}{k}=1+x \Leftrightarrow x=\dfrac{2}{k}-1$.

Suy ra $\dfrac{S_{S.AMPN}}{V}=\dfrac{k^2}{2-k}=\dfrac{1}{6}$, suy ra $k=\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án A

Câu 174:

Với $f(x)>0$, đặt $u=\sqrt{f^3(x)}$, suy ra $u^2=f^3(x)$ và $u'=\dfrac{3}{2}\sqrt{f(x)}f'(x)\Leftrightarrow 2u'=3f'(x)\sqrt{f(x)}$

Thay vào, ta được: $u^2\mathrm{e}^{2x}+1=-2u'\mathrm{e}^x$.

Hướng 1:

Đặt $t=u\mathrm{e}^x$, ta có: $t'=u'\mathrm{e}^x+u\mathrm{e}^x$, suy ra $u'\mathrm{e}^x=t'-t$.

Thay vào, ta được: $t^2+1=-2t'+2t\Leftrightarrow t^2+1=-2\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}+2t\ \ (*)$

TH1: $t=1$, $(*)$ đúng, khi đó $u=\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$, suy ra $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{2x}{3}}$, kéo theo $f(2)=\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}}$ (không thỏa), loại.

TH2: $t\neq 1$, $(*)\Leftrightarrow -\dfrac{2\mathrm{d}t}{(t-1)^2}=\mathrm{d}x$.

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được: $\dfrac{2}{t-1}=x+C$

Ta có: $\dfrac{2}{t-1}\neq 0$ nên $x+C\neq 0$, suy ra $t=\dfrac{2+x+C}{x+C}$, suy ra $u=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}(2+x+C)}{x+C}$

Kéo theo, $f(x)=\sqrt[3]{\left(\dfrac{\mathrm{e}^{-x}(2+x+C)}{x+C}\right)^2}$. Có $f(2)=\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}$ suy ra $C=\dfrac{2\mathrm{e}^4-4}{1-\mathrm{e}^4}$.

Suy ra $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{\left(1+3\mathrm{e}^4\right)^{\frac{2}{3}}}{\mathrm{e}.(-5+\mathrm{e}^4)^{\frac{2}{3}}}$

Hướng 2:

TH: $u\mathrm{e}^x=1$, suy ra $f(2)=\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}}$, loại.

TH: $u\mathrm{e}^x\neq 1$, $u^2\mathrm{e}^{2x}+1=-2u'\mathrm{e}^x\Leftrightarrow u^2\mathrm{e}^{2x}-2u\mathrm{e}^x+1=-2(u\mathrm{e}^x)'\Leftrightarrow -\dfrac{(u\mathrm{e}^x)'}{(u\mathrm{e}^x-1)^2}=\dfrac{1}{2}$

Suy ra $-\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{2}\dfrac{(u\mathrm{e}^x)'}{(u\mathrm{e}^x-1)^2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int_{\frac{3}{2}}^{2}\mathrm{d}x\Leftrightarrow \left.\dfrac{1}{u(x)\mathrm{e}^x-1}\right|_{\frac{3}{2}}^{2}=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow \dfrac{1}{u(2)\mathrm{e}^2-1}-\dfrac{1}{u\left(\frac{3}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}-1}=\dfrac{1}{4}$

Có $u(2)=\sqrt{f^3(2)}=\mathrm{e}^2$, suy ra $u\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\left(1+3\mathrm{e}^4\right)}{5-\mathrm{e}^4}$, kéo theo $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\sqrt[3]{u^2\left(\dfrac{3}{2}\right)}=\dfrac{\left(1+3\mathrm{e}^4\right)^{\frac{2}{3}}}{\mathrm{e}.(-5+\mathrm{e}^4)^{\frac{2}{3}}}$

> Ở câu này, phương pháp làm không sai, nhưng "cấn" một chỗ là $u=\sqrt{f^3(x)}>0$ mà $u\left(\dfrac{3}{2}\right)<0$,
> các phép đặt $u=-\sqrt{f^3(x)}$, $u=\sqrt{f(x)}$ cũng xuất hiện những chỗ "cấn" tương tự.
>
> Vì có chỗ "cấn" nên casio bị lỗi, nếu không thì bài này casio sẽ nhanh hơn.
>
> Đề "gốc" là $\boxed{\mathrm{e}^{2x}f^3(x)+1=3\mathrm{e}^xf'(x)\sqrt{f(x)}}$, tác giả "chỉnh" đề nhưng chưa để ý điều kiện $u\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

Chọn đáp án D

Câu 175:

Điều kiện: $m^2-m-8\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\leq \dfrac{1-\sqrt{33}}{2} \\ m\geq \dfrac{1+\sqrt{33}}{2}\end{array}\right.$, khi đó

$$\left|z_1\left(z_1^2+mz_2\right)\right|=\left(m^2-m-8\right)|z_2| \Leftrightarrow |z_1|.\left|z_1^2-mz_1+m+8+m(z_1+z_2)-m-8\right|=\left(m^2-m-8\right)|z_2|$$

$$\Leftrightarrow |z_1|.\left|m^2-m-8\right|=\left(m^2-m-8\right)|z_2| \quad (*)$$

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m^2-m-8\neq 0$. Do đó, $(*)\Leftrightarrow |z_1|=|z_2|$

TH1: $\Delta=m^2-4m-32>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-4 \\ m>8\end{array}\right.$.

Vì $|z_1|=|z_2|$ và $z_1\neq z_2$ nên $z_2=-z_1\neq 0$. Khi đó, $z_1^2-mz_1+m+8=(-z_1)^2-m(-z_1)+m+8=0$.

Suy ra $-mz_1=mz_1 \Leftrightarrow 2m=0 \Leftrightarrow m=0$ (loại).

TH2: $\Delta=0$ (loại).

TH3: $\Delta<0 \Leftrightarrow -4<m<8$.

Khi đó, $z_2=\overline{z_1}$ nên $|z_1|=|z_2|$ đúng với mọi $m\in(-4;8)$.

Kết hợp điều kiện, suy ra $m\in\{-3;4;5;6;7\}$.

Vậy, có 5 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Chọn đáp án A

Câu 176:

Cách 1:

Ta có: $f'(x)=(x-1)^2\left(x^2-7x+12\right)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \text{ (nghiệm bội chẵn)} \\ x=3 \\ x=4\end{array}\right.$

Xét hàm số $g(x)=f\left(x^3-3x+m\right)$, có $g'(x)=\left(3x^2-3\right)f'\left(x^3-3x+m\right)$

$$\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x^3-3x+m=1 \\ x^3-3x+m=3 \\ x^3-3x+m=4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x^3-3x=1-m \text{ (nghiệm bội chẵn)} \\ x^3-3x=3-m \\ x^3-3x=4-m\end{array}\right.$$

Lại có: $4-m>3-m>1-m$ và

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^3-3x	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Do đó, để hàm số $g(x)$ có đúng 6 điểm cực trị thì $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3-m \leq -2\\ -2<4-m<2\end{cases}\\ \begin{cases}-2<3-m<2\\ 4-m \geq 2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5 \leq m<6\\ 1<m \leq 2\end{array}\right.$.

Kết hợp điều kiện, suy ra $m \in \{2;5\}$. Vậy, có 2 giá trị nguyên dương m thỏa mãn.

Cách 2: Cơ sở cách làm: NHẤN VÀO ĐÂY.

Ta có: $f'(x)=(x-1)^2\left(x^2-7x+12\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1 \text{ (nghiệm bội chẵn)}\\ x=3\\ x=4\end{array}\right.$

Đặt $u(x)=x^3-3x+m$, ta có:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$u(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$2+m$	$\searrow$	$-2+m$	$\nearrow$	$+\infty$

Áp dụng công thức:

$$\text{SĐCT } f(u(x)) = \text{SĐCT } u(x) + \text{SNBL} \left[\begin{array}{l}u(x)=3\\ u(x)=4\end{array}\right.$$

Do đó, để $f(u(x))$ có đúng 6 điểm cực trị thì $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3 \leq -2+m\\ -2+m<4<2+m\end{cases}\\ \begin{cases}-2+m<3<2+m\\ 4 \geq 2+m\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5 \leq m<6\\ 1<m \leq 2\end{array}\right.$.

Kết hợp điều kiện, suy ra $m \in \{2;5\}$. Vậy, có 2 giá trị nguyên dương m thỏa mãn.

Chọn đáp án C

Câu 177:

TH1: $y<1 \leq 5^{x^2}$, suy ra $5^{x^2}-y>0$, khi đó, bất phương trình tương đương: $3^{x^2-2x} \leq 27 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$.

Dễ thấy không tồn tại y thỏa mãn.

TH2: $y=1$, ta có $5^{x^2}-1 \geq 0$, khi đó, bất phương trình tương đương:

$$\begin{cases}3^{x^2-2x} \leq 27\\ 5^{x^2} \geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-1 \leq x \leq 3\\ \left[\begin{array}{l}x \geq 0\\ x \leq 0\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$$

Dễ thấy không tồn tại y thỏa mãn.

TH3: $y>1$, khi đó bất phương trình tương đương:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3^{x^2-2x}-27\geq 0\\ 5^{x^2}-y\leq 0\end{cases}\\ \begin{cases}3^{x^2-2x}-27\leq 0\\ 5^{x^2}-y\geq 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\leq -1\\ x\geq 3\end{array}\right.\\ -\sqrt{\log_5 y}\leq x\leq\sqrt{\log_5 y}\end{cases}\\ \begin{cases}-1\leq x\leq 3\\ \left[\begin{array}{l}x\leq-\sqrt{\log_5 y}\\ x\geq\sqrt{\log_5 y}\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\sqrt{\log_5 y}\leq x\leq -1\\ 3\leq x\leq\sqrt{\log_5 y}\\ -1\leq x\leq-\sqrt{\log_5 y}\\ \sqrt{\log_5 y}\leq x\leq 3\end{array}\right.$$

TH3.1: $\sqrt{\log_5 y}\leq x\leq 3$

Tập nghiệm của bất phương trình là $\left[-\sqrt{\log_5 y};-1\right]\cup\left[\sqrt{\log_5 y};3\right]$ hoặc $\left[-1;-\sqrt{\log_5 y}\right]\cup\left[\sqrt{\log_5 y};3\right]$

Xét $\left[-\sqrt{\log_5 y};-1\right]\cup\left[\sqrt{\log_5 y};3\right]$

Để có đúng 6 số nguyên x thì $\begin{cases}-4<-\sqrt{\log_5 y}\leq -3\\ 0<\sqrt{\log_5 y}\leq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3<\sqrt{\log_5 y}\leq 4\\ 0<\sqrt{\log_5 y}\leq 1\end{cases}\Leftrightarrow y\in\varnothing$

Xét $\left[-1;-\sqrt{\log_5 y}\right]\cup\left[\sqrt{\log_5 y};3\right]$, dễ thấy tập nghiệm không chứa quá 5 số nguyên x.

TH3.2: $3\leq x\leq\sqrt{\log_5 y}$, khi đó $-\sqrt{\log_5 y}<-1$

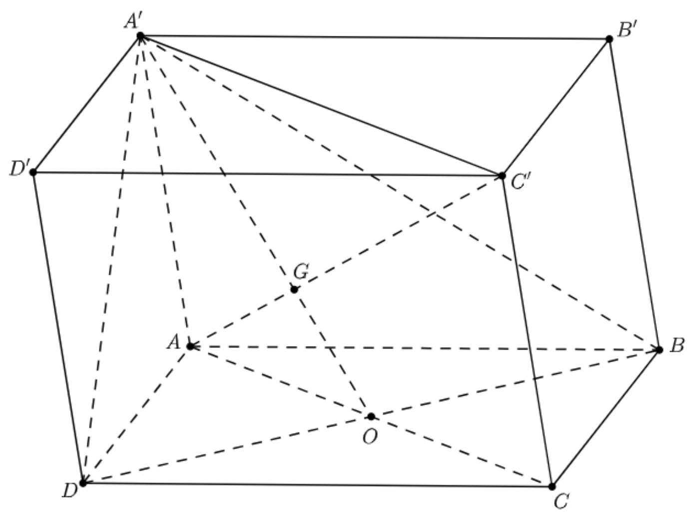
Do đó, tập nghiệm của bất phương trình là $\left[-\sqrt{\log_5 y};-1\right]\cup\left[3;\sqrt{\log_5 y}\right]$.

Để có đúng 6 số nguyên x thì $4\leq\sqrt{\log_5 y}<5\Leftrightarrow 5^{16}\leq y<5^{25}$.

Suy ra $m+n+p=16+25+5=46$.

Chọn đáp án Ⓐ

Câu 178:

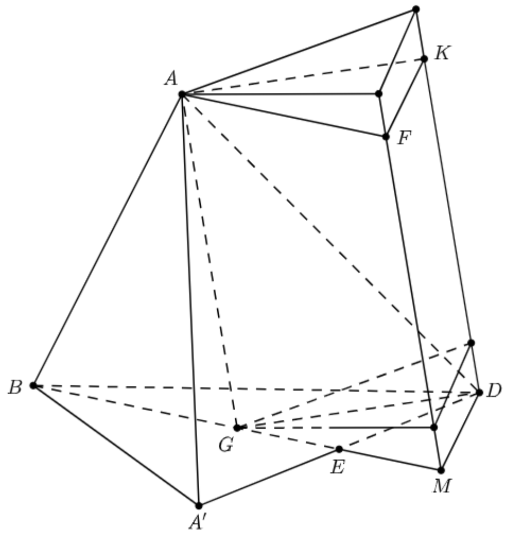


Gọi $G=AC'\cap(A'BD)$ và $O=AC\cap BD$.

Ta có: $AO \parallel A'C'$ suy ra $\dfrac{AG}{GC'} = \dfrac{OG}{GA'} = \dfrac{AO}{A'C'} = \dfrac{1}{2}$. Suy ra $AG = \dfrac{AC'}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Lại có O trung điểm BD, suy ra G là trọng tâm $\Delta A'BD$.

Xét tứ diện $A.A'BD$:



Gọi E là trung điểm $A'D$, M là điểm đối xứng với B qua G. Dựng lăng trụ $GMD.AFK$. Khi đó,

$d(A', AG) = d(D, FM) = d(KD, FM)$, $d(B, AG) = d(M, AG) = d(MF, AG)$, $d(D, AG) = d(KD, AG)$.

Dựng hai mặt phẳng qua A, G và vuông góc với AG.

Khi đó, ta được khối lăng trụ (T) và $V_{GMD.AFK} = V_{(T)} = AG.S = \dfrac{\sqrt{3}}{3}.\dfrac{\sqrt{6}}{12} = \dfrac{\sqrt{2}}{12}$.

Lại có: $S_{GMD} = \dfrac{2}{3}.S_{BED} = \dfrac{1}{3}.S_{A'BD}$, suy ra $V_{GMD.AFK} = V_{A.A'BD} = \dfrac{1}{6}.V_{ABCD.A'B'C'D'}$.

Kéo theo, $V_{ABCD.A'B'C'D'} = 6.V_{GMD.AFK} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án A

Câu 179:

Ta có: $f'''(x) = 1$ nên $g'(x) = 2f'(x)f''(x) - 2f'''(x)f(x) - 2f''(x)f'(x) = -2f(x)$.

Có $-2f(x_1) = g'(x_1) = 0$, $-2f(x_2) = g'(x_2) = 0$, $-2f(x_3) = g'(x_3) = 0$. Suy ra x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

Lại có: $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$, do đó, x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của phương trình $h(x) = 0$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = h(x)$ và trục Ox bằng

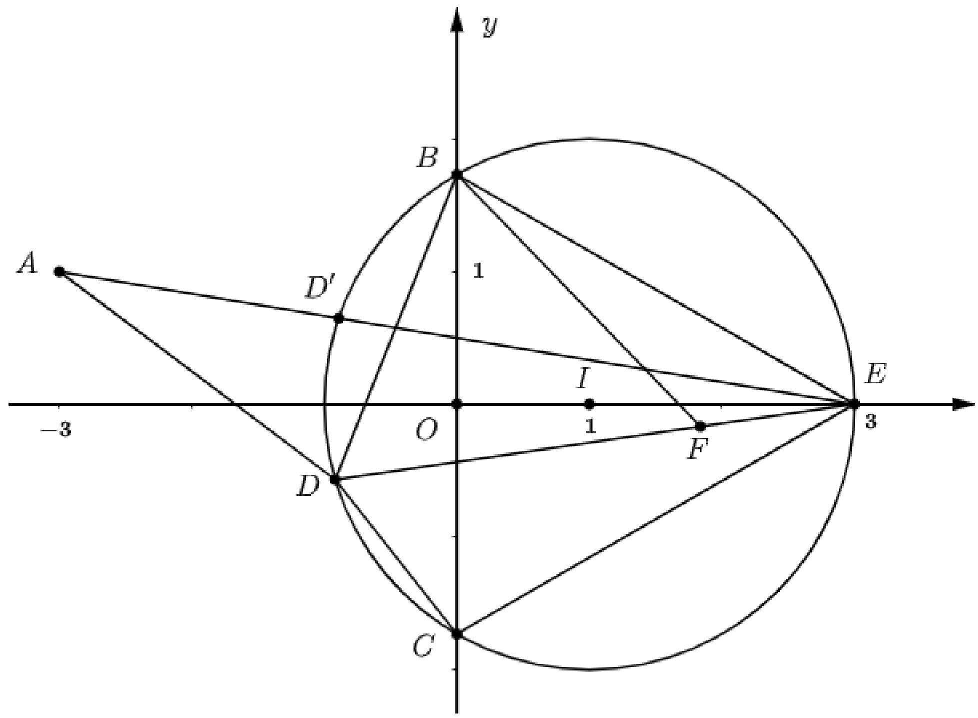
$$S = \int_{x_1}^{x_3} \left| \frac{f(x)}{g(x)+1} \right| \mathrm{d}x = \left| \int_{x_1}^{x_2} \frac{f(x)}{g(x)+1} \mathrm{d}x \right| + \left| \int_{x_2}^{x_3} \frac{f(x)}{g(x)+1} \mathrm{d}x \right| = \frac{1}{2} \left| \int_{x_1}^{x_2} \frac{g'(x)}{g(x)+1} \mathrm{d}x \right| + \frac{1}{2} \left| \int_{x_2}^{x_3} \frac{g'(x)}{g(x)+1} \mathrm{d}x \right|$$

$$= \frac{1}{2} \left| \int_{2}^{5} \frac{1}{t+1} \mathrm{d}t \right| + \frac{1}{2} \left| \int_{5}^{1} \frac{1}{t+1} \mathrm{d}t \right| = \frac{\ln 6}{2}$$

Chọn đáp án B

Câu 180:

Cách 1:



Gọi D là điểm biểu diễn số phức z và các điểm $A(-3;1)$, $B\left(0;\sqrt{3}\right)$, $C\left(0;-\sqrt{3}\right)$, $E(3;0)$.

Các điểm D biểu diễn số phức z có phần thực âm và thỏa mãn $|z-1|=2$, là cung nhỏ $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ của đường tròn tâm $I(1;0)$, bán kính $R=2$.

Trên DE lấy điểm F sao cho $\widehat{FBE}=\widehat{DBC}$, lại có: $\widehat{FEB}=\widehat{DCB}$, suy ra $\Delta FEB \backsim \Delta DCB$.

Kéo theo $\dfrac{FE}{DC}=\dfrac{EB}{CB}$ hay $FE.CB=DC.EB$ $(*)$.

Có $\widehat{BFE}+\widehat{BFD}=\widehat{BDC}+\widehat{BEC}=180^\circ$

Mà $\widehat{BFE}=\widehat{BDC}$, suy ra $\widehat{BFD}=\widehat{BEC}$, lại có: $\widehat{BDF}=\widehat{BCE}$, suy ra $\Delta BDF \backsim \Delta BCE$.

Kéo theo $\dfrac{DF}{CE}=\dfrac{BD}{BC}$ hay $DF.BC=CE.BD$ $(**)$

Cộng vế theo vế $(*)$ và $(**)$, suy ra $BC.DE=DC.EB+CE.BD$ (Đẳng thức **Ptolemy**)

Suy ra $2\sqrt{3}.DE=2\sqrt{3}.(BD+DC)$, kéo theo $DB+DC=DE$.

Khi đó $P=|z+3-i|+\left|z-\sqrt{3}i\right|+\left|z+\sqrt{3}i\right|=DA+DB+DC=DA+DE\geq AE=\sqrt{37}$.

Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $D\equiv D'$.

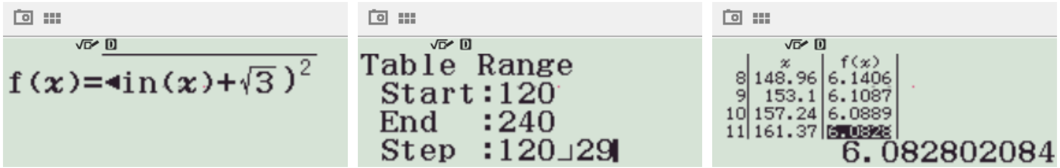
Cách 2:

Ta có: $\cos\widehat{BIO}=\dfrac{OI}{IB}=\dfrac{1}{2}$, suy ra $\widehat{BIO}=60^\circ$, suy ra $\widehat{BIE}=120^\circ$ và $\widehat{BIC}=120^\circ$.

Có $|z-1|=2$, suy ra $(x-1)^2+y^2=4$, đặt $\begin{cases} x=2\cos t+1 \\ y=2\sin t \end{cases}$.

D thuộc cung nhỏ $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$, suy ra $t\in[120^\circ;240^\circ]$.

Ta có: $P=\sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2}+\sqrt{x^2+(y-\sqrt{3})^2}+\sqrt{x^2+(y+\sqrt{3})^2}$.



Chọn đáp án B

Câu 181:

Dựa vào đồ thị $y=f'(x)$, suy ra:

x	$-\infty$		-1		2		4		$+\infty$
$f(x)$		↗		↘		↗		↘	

Cách 1:

Ta có: $y=f\left(x^2\right)$ là hàm chẵn nên đồ thị hàm số $y=f\left(x^2\right)$ đối xứng qua trục Oy.

Do đó, để số nghiệm của phương trình $f\left(x^2\right)=2022m-2021$ nhiều nhất thì số nghiệm $x>0$ của phương trình $f(x)=2022m-2021$ nhiều nhất.

Dựa vào BBT, suy ra số nghiệm $x>0$ của phương trình $f(x)=2022m-2021$ nhiều nhất là 3.

Suy ra số nghiệm nhiều nhất của phương trình $f\left(x^2\right)=2022m-2021$ là 6.

Cách 2: Phương pháp "ghép trục": NHẤN VÀO ĐÂY.

Đặt $t=x^2$, suy ra

x	$-\infty$						$+\infty$
t	$+\infty$	→		0		→	$+\infty$
$f(t)$	↗	↘	↗		↘	↗	↘

Suy ra số nghiệm nhiều nhất của phương trình $f\left(x^2\right)=2022m-2021$ là 6.

Cách 3:

Xét hàm số $g(x)=f\left(x^2\right)$, có $g'(x)=2x.f'\left(x^2\right)$

$$\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=-1\\x^2=2\\x^2=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{2}\\x=\pm 2\end{array}\right..\text{ Có } f'\left(x^2\right)>0\Leftrightarrow 2<x^2<4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2<x<-\sqrt{2}\\\sqrt{2}<x<2\end{array}\right.$$

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		2		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f\left(x^2\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Suy ra số nghiệm nhiều nhất của phương trình $f\left(x^2\right)=2022m-2021$ là 6

Chọn đáp án D

Câu 182:

Điều kiện: $\begin{cases}x^2+ax+2\geq 0\\x^2+ax+5>0\\a>0\\a\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+ax+2\geq 0\\a>1\end{cases}$

Đặt $t=\sqrt{x^2+ax+2}\geq 0$, phương trình trở thành:

$$\log_a 4-\log_5(t+4).\log_a\left(t^2+3\right)=0\Leftrightarrow\log_a(t+4).\log_a\left(t^2+3\right)-\log_a 4.\log_a 5=0$$

Xét hàm số $f(t)=\log_a(t+4).\log_a\left(t^2+3\right)-\log_a 4.\log_a 5$ với $t\geq 0$

Ta có: $f'(t)=\dfrac{\log_a\left(t^2+3\right)}{(t+4)\ln a}+\dfrac{2t.\log_a(t+4)}{(t^2+3)\ln a}>0\ \forall t\geq 0,\ a>1.$

Dễ thấy $t=1$ là nghiệm và là nghiệm duy nhất của phương trình $f(t)=0$.

Do đó, để phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất thì $\sqrt{x^2+ax+2}=1$ có nghiệm duy nhất.

Tương đương, $x^2+ax+1=0$ có nghiệm duy nhất, khi và chỉ khi, $\Delta=0\Leftrightarrow a^2-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=2\\a=-2\text{ (loại)}\end{array}\right.$.

Suy ra $S=\{2\}$. Kéo theo, tổng các phần tử của S bằng 2.

Chọn đáp án A

Câu 183:

Điều kiện: $\begin{cases} x^2+4mx+12m>0 \\ x^2+4x+12>0 \\ x^2+8x+24>0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2+4mx+12m>0$

Điều kiện cần:

$x^2+4mx+12m>0\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta<0 \Leftrightarrow 16m^2-48m<0 \Leftrightarrow 0<m<3$

Với $x=-2$, bất phương trình trở thành: $3\log_2(4+4m)<\log_2 8.\log_2 12 \Leftrightarrow m<2$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m=1$.

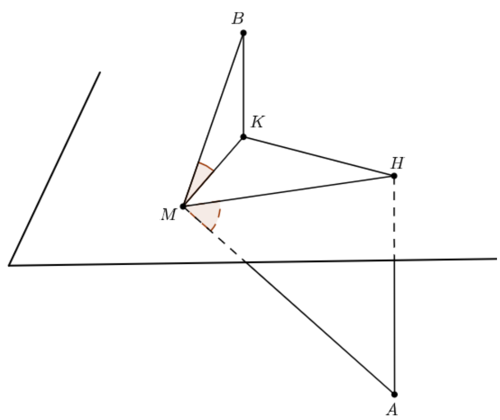
Điều kiện đủ:

Với $m=1$, bất phương trình tương đương: $1<\log_8\left(x^2+8x+24\right) \Leftrightarrow x^2+8x+16>0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\backslash\{-4\}$.

Vậy, không tồn tại giá trị nguyên m thỏa mãn.

Chọn đáp án D

Câu 184:



Có $(2x_A+2y_A-z_A-12)(2x_B+2y_B-z_B-12)<0$

Suy ra A,B nằm khác phía đối với mặt phẳng (P)

Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của A,B trên mặt phẳng (P).

Suy ra $H(6;2;4)$, $K(1;1;-8)$, kéo theo $AH=6$, $BK=3$.

Ta có: $\tan\alpha=\dfrac{BK}{MK}=\dfrac{AH}{MH}$, suy ra $MH=2MK$.

$\Rightarrow (x-6)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=4\left[(x-1)^2+(y-1)^2+(z+8)^2\right]$

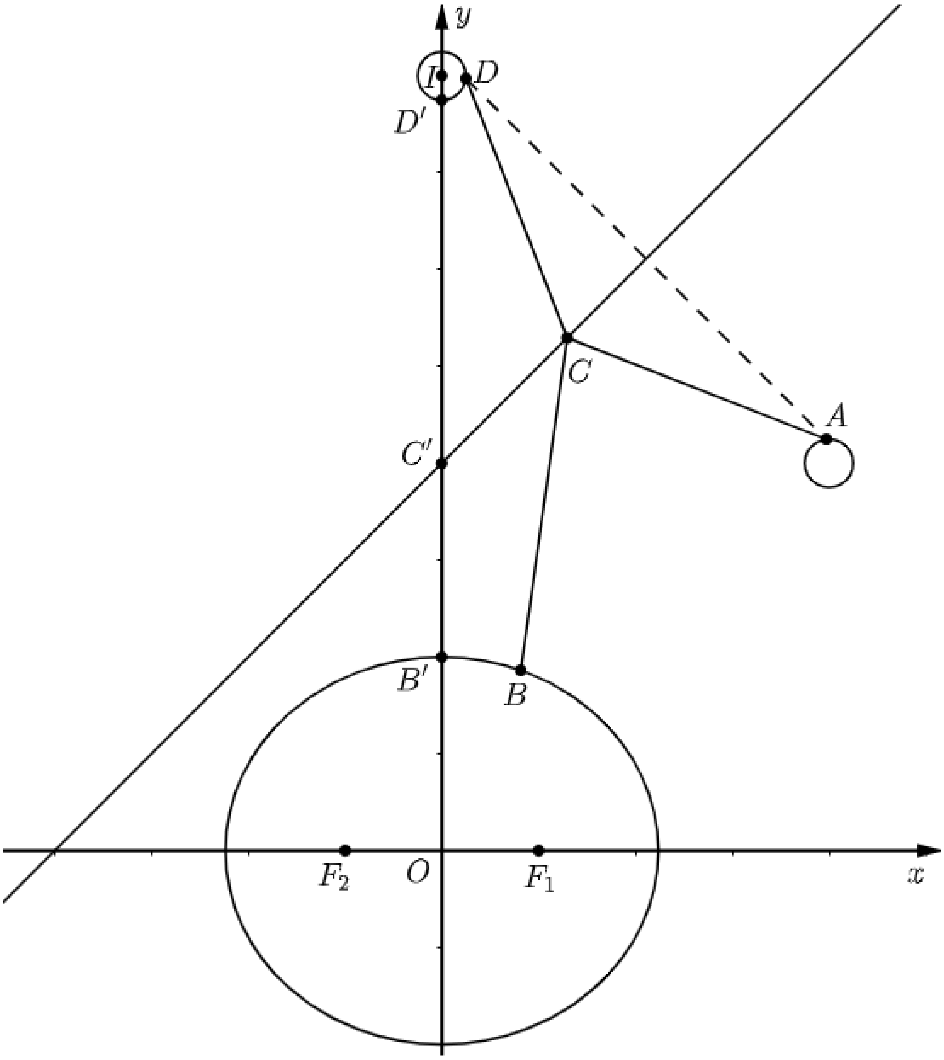
$\Leftrightarrow \left(x+\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(y-\dfrac{2}{3}\right)^2+(z+12)^2=\dfrac{680}{9}$.

Suy ra M thuộc mặt cầu (S), tâm $I\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3};-12\right)$, bán kính $\dfrac{2\sqrt{170}}{3}$.

Lại có: $I\in(P)$ nên đường tròn (C), giao tuyến của mặt cầu (S) và mặt phẳng (P), có tâm trùng với điểm I.

Chọn đáp án A

Câu 185:



Đặt $w = 2z_1$, thay vào ta được: $\left|\dfrac{w}{2} - 2 - 2i\right| = \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow |w - 4 - 4i| = \dfrac{1}{4}$

Gọi A, B, C là các điểm biểu diễn các số phức w, z_2, z. Và các điểm $F_1(1;0)$, $F_2(-1;0)$

Có $|z_2 - 1| + |z_2 + 1| = 2\sqrt{5}$, suy ra tập hợp các điểm B là đường elip $(Q): \dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

Có $|2z + 2 - 5i| = |2z + 3 - 6i|$, suy ra tập hợp các điểm C là đường thẳng $d: 4x - 4y + 16 = 0$.

Gọi D là điểm đối xứng với A qua d, suy ra tập hợp các điểm D là đường tròn (C), tâm $I(0;8)$, bán kính $R = \dfrac{1}{4}$.

Ta có: $P = |z - 2z_1| + |z - z_2| = |z - w| + |z - z_2| = CA + CB = CD + CB \geq BD$.

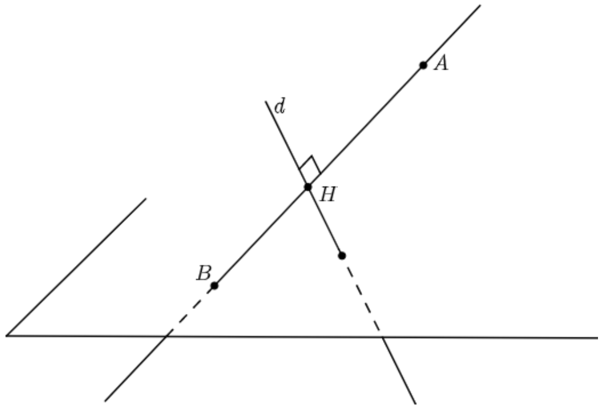
Dấu $" = "$ xảy ra khi và chỉ khi C nằm giữa B và D.

Lại có: BD nhỏ nhất khi và chỉ khi $\begin{cases} B \equiv B' \\ D \equiv D' \end{cases}$. Khi đó, $BD = B'D' = OI - OB' - R = \dfrac{23}{4}$.

Vậy, giá trị nhỏ nhất của P bằng $\dfrac{23}{4}$.

Chọn đáp án A

Câu 186:



Gọi $H = d \cap AB$, suy ra $H(2+t;-1+2t;-t)$, kéo theo $\overrightarrow{AH} = (t;2t;-t-3)$.

Có $AB \perp d$, suy ra $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{u_d} = 0 \Leftrightarrow t+4t+t+3 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$, kéo theo $\overrightarrow{u}_{AB} = \left(-\frac{1}{2};-1;-\frac{5}{2}\right)$.

Suy ra $B\left(2-\frac{k}{2};-1-k;3-\frac{5k}{2}\right)$, có $B \in (P)$, suy ra $k=-2$, kéo theo, $B(3;1;8)$

Chọn đáp án C

Câu 187:

TH1: $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$

Ta có: $z_1 + 3iz_2 = 7+5i \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 7 \\ z_2 = \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow z_1 + z_2 = \frac{26}{3} = 2a \Rightarrow a = \frac{13}{3}$, loại.

TH2: $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$

Đặt $z_1 = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$, suy ra $z_2 = x - yi$, thay vào ta được:

$$\begin{cases} x+3y = 7 \\ 3x+y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 + z_2 = 2 = 2a \\ z_1.z_2 = 5 = b^2 - 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \pm 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \end{cases}$$

Kéo theo, $7a + 5b = 32$.

Chọn đáp án C

Câu 188:

Dựa vào đồ thị, ta có:

$f(x)$ có hai điểm cực trị trên $[-2;3]$.

$f'(x) = 0$ có một nghiệm trên $(-\infty;-2)$ nên $f(x)$ có một điểm cực trị trên $(-\infty;-2)$.

$f''(x) = 0$ có một nghiệm trên $(3;+\infty)$ nên $f'(x) = 0$ có tối đa hai nghiệm trên $(3;+\infty)$, suy ra $f(x)$ có tối đa hai điểm cực trị trên $(3;+\infty)$.

Vậy, hàm số $y = f(x)$ có tối đa 5 điểm cực trị.

Chọn đáp án A

Câu 189:

Ta có: $z_1\overline{z_1} = z_2\overline{z_2} \Leftrightarrow |z_1|^2 = |z_2|^2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2| \quad (*)$

TH1: $\Delta > 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 24m + 32 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 2 \\ m > 4 \end{array}\right.$

Khi đó, $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ và $z_1 \neq z_2$, do đó, $(*) \Leftrightarrow z_1 = -z_2 \neq 0$

Suy ra $z_1 + z_2 = 0 = 2m$, kéo theo $m = 0$, nhận.

TH2: $\Delta < 0 \Leftrightarrow 2 < m < 4$

Khi đó, $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ nên $z_2 = \overline{z_1}$, do đó $(*)$ đúng với mọi $m \in (2;4)$.

Kết hợp điều kiện, suy ra $m \in \{0;3\}$.

Vậy, có 2 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Chọn đáp án B

Câu 190:

Đặt $2x - 1 = t$, suy ra $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{2}$.

Dựa vào đồ thị, ta có:

$$\int_0^1 \left|f'(2x-1)\right| \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \left|f'(t)\right| \mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_{-1}^0 f'(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^1 f'(t)\mathrm{d}t = -\frac{f(0)-f(-1)}{2} + \frac{f(1)-f(0)}{2} = 4$$

Chọn đáp án B

Câu 191:

Dựa vào đồ thị, ta có: $f(-1) = f(0)$, suy ra $b = -a$.

Suy ra $f(x) = ax^4 - ax^2 + c$, kéo theo $f'(x) = a\left(4x^3 - 2x\right)$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x = 0 \\ x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. .$$

Xét hàm số $y = f\left(m - 3^x\right)$, có $y' = -3^x \ln 3. f'\left(m - 3^x\right)$.

$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m - 3^x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ m - 3^x = 0 \\ m - 3^x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 3^x \\ m = 3^x \\ m - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 3^x \end{array}\right.$$

Có $m + \dfrac{\sqrt{2}}{2} > m > m - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ và

x	$-\infty$		$+\infty$
3^x	0	$\nearrow$	$+\infty$

Do đó, để hàm số $y = f(m - 3^x)$ có đúng một điểm cực trị thì $m \leq 0 < m + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow -\dfrac{\sqrt{2}}{2} < m \leq 0$.

Kết hợp điều kiện, suy ra $m = 0$.

Chọn đáp án (A)

Câu 192:

Có $f(1) = 0$ và $f'(1) = 0$, suy ra $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$.

(P) có đỉnh $I(0;-1)$ và đi qua điểm $B(2;3)$, suy ra $(P): y = x^2 - 1$.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^4 - 2x^2 + 1 = x^2 - 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và (P) bằng

$$S = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left|x^4 - 3x^2 + 2\right| \, \mathrm{d}x = \frac{24 - 8\sqrt{2}}{5}$$

Chọn đáp án (B)

Câu 193:

Đặt $t = 2 + \sin x$, suy ra $t \in [1;3]$, xét hàm số $h(t) = f(t) + m$, có $h'(t) = -3t^2 + 3 \leq 0 \ \forall t \in [1;3]$

Suy ra $\max\limits_{[1;3]} h(t) = h(1) = m + 2$, $\min\limits_{[1;3]} h(t) = h(3) = m - 18$. Ta có:

t	1				3
$f(t)+m$	$m+2$	$\searrow$	$m-8$	$\searrow$	$m-18$

TH1: $\left[\begin{array}{l} 0 \geq m + 2 \\ 0 \leq m - 18 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq -2 \\ m \geq 18 \end{array}\right.$

Với $m \leq -2$, $\max\limits_{\mathbb{R}} g(x) + \min\limits_{\mathbb{R}} g(x) = |m - 18| + |m + 2| = -m + 18 - m - 2 = 50 \Rightarrow m = -17$, nhận.

Với $m \geq 18$, $\max\limits_{\mathbb{R}} g(x) + \min\limits_{\mathbb{R}} g(x) = |m + 2| + |m - 18| = m + 2 + m - 18 = 50 \Rightarrow m = 33$, nhận.

TH2: $m-8 \le 0 \le m+2 \Leftrightarrow -2 \le m \le 8$

Khi đó, $\max\limits_{\mathbb{R}} g(x)+\min\limits_{\mathbb{R}} g(x)=|m-18|+0=-m+18=50 \Rightarrow m=-32$, loại.

TH3: $m-18 \le 0 \le m-8 \Leftrightarrow 8 \le m \le 18$

Khi đó, $\max\limits_{\mathbb{R}} g(x)+\min\limits_{\mathbb{R}} g(x)=|m+2|+0=m+2=50 \Rightarrow m=48$, loại.

Vậy, có 2 giá trị m thỏa mãn.

Chọn đáp án C

Câu 194:

Xét hàm số $f(b)=2^b+b-4^a$, có $f'(b)=2^b.\ln 2+1>0\ \forall b$.

Với mọi $b \ge a$, ta có: $4^a=2^b+b \ge 2^a+a \Rightarrow 2^a+a-4^a \le 0 \Leftrightarrow f(a) \le 0$.

Để tồn tại số b thỏa mãn đề bài thì $\begin{cases} f(a) \le 0 \\ f(a+5)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^a+a-4^a \le 0 \\ 2^{a+5}+a+5-4^a>0 \end{cases}$.

Suy ra $a \in \{-5;-4;...;5\}$. Vậy, có 11 số nguyên a thỏa mãn.

Chọn đáp án D

Câu 195:

Dựa vào đồ thị, ta có:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(1+x)$		+	0	−	0	+	0	−	

Suy ra

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	0	−	

Xét hàm số $g(x)=f\left(-x^2+2x-2022+m\right)$, có $g'(x)=(-2x+2).f'\left(-x^2+2x-2022+m\right)$

Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(0;1)$ thì $g'(x) \ge 0\ \forall x \in (0;1)$.

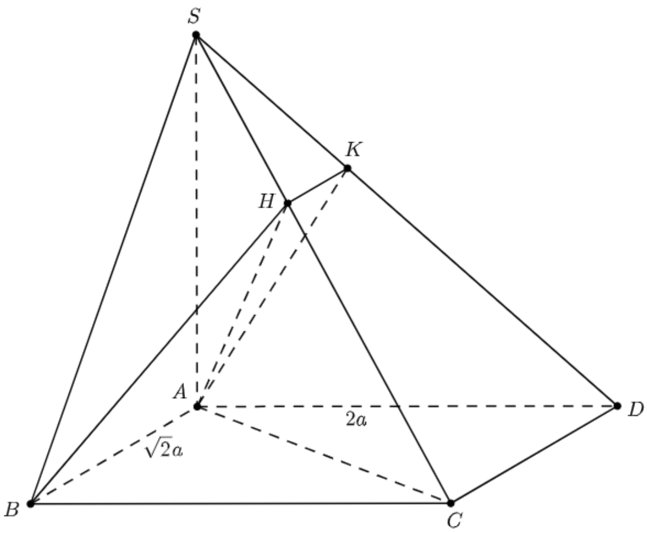
Khi và chỉ khi, $f'\left(-x^2+2x-2022+m\right) \ge 0\ \ \forall x \in (0;1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x^2+2x-2022+m \le 1\ \ \forall x \in (0;1) \\ 2 \le -x^2+2x-2022+m \le 3\ \ \forall x \in (0;1) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le x^2-2x+2023\ \ \forall x \in (0;1) \\ x^2-2x+2024 \le m \le x^2-2x+2025\ \ \forall x \in (0;1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le 2022 \\ 2024 \le m \le 2024 \end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện, suy ra $m \in \{1;2;...;2022;2024\}$. Vậy, có 2023 giá trị nguyên dương m thỏa mãn.

Chọn đáp án A

Câu 196:



Ta có: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC.\cos 45^\circ = 2a^2$

Suy ra $AC = \sqrt{2}a$, kéo theo ΔABC vuông cân tại A.

Vẽ $AH \perp SC$ $(H \in SC)$, có $\begin{cases} AB \perp SA \\ AB \perp AC \end{cases}$, suy ra $AB \perp SC$, kéo theo $BH \perp SC$.

Có $\begin{cases} CD \perp AC \\ CD \perp SA \end{cases}$, suy ra $CD \perp SC$, vẽ $HK \parallel CD$ $(K \in SD)$, suy ra $HK \perp SC$.

Suy ra $(\widehat{(SBC);(SCD)}) = (\widehat{HB,HK}) = 30^\circ$.

Lại có: $AH \perp (SCD)$, suy ra $AH \perp HK$, suy ra $\widehat{AHK} = 90^\circ$.

Do đó, $\widehat{BHK} = 150^\circ$, suy ra $\widehat{BHA} = 60^\circ$, suy ra $AH = BA.\cot 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Lại có: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AC^2}$, suy ra $SA = a$.

Suy ra $V_{SABCD} = \dfrac{SA.S_{ABCD}}{3} = \dfrac{SA.2S_{ABC}}{3} = \dfrac{SA.AB.AC}{3} = \dfrac{2a^3}{3}$.

Chọn đáp án C

Câu 197:

Cách 1:

Ta có: $f'(x) - f(x) = (x+1)e^{3x} \Leftrightarrow e^{-x}f'(x) - e^{-x}f(x) = (x+1)e^{2x} \Leftrightarrow \left(e^{-x}f(x)\right)' = (x+1)e^{2x}$.

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được: $e^{-x}f(x) = \displaystyle\int (x+1)e^{2x}\,dx = \dfrac{(2x+1)e^{2x}}{4} + C$.

Có $f(0) = \dfrac{5}{4}$, suy ra $C = 1$, kéo theo, $f(1) = \dfrac{3}{4}e^3 + e$

Cách 2: CASIO tích phân hàm ẩn: NHẤN VÀO ĐÂY.

Chọn đáp án B

Câu 198:

Cơ sở của hai cách làm: NHẤN VÀO ĐÂY.

Ta có: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-9 \\ x=0 \\ x=\pm 3 \end{array}\right.$

Cách 1:

Đặt $k=x^3+3x \Rightarrow k'=3x^2+3>0,\ \forall x$.

Do đó, với mỗi giá trị của x, chỉ có duy nhất một giá trị của k.

Suy ra, số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ bằng số điểm cực trị của hàm số $f\left(|x|+2m-m^2\right)$.

Mà SĐCT của $f\left(|x|+2m-m^2\right)$ bằng hai lần SĐCT dương của hàm số $h(x)=f(x+2m-m^2)$ cộng với 1.

Do đó, để hàm số $g(x)$ có không quá 6 điểm cực trị thì hàm số $h(x)$ có không quá 2 điểm cực trị dương.

Các điểm cực trị của hàm số $y=f(x+2m-m^2)$ là: $\left[\begin{array}{l} x+2m-m^2=-9 \\ x+2m-m^2=-3 \\ x+2m-m^2=0 \\ x+2m-m^2=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m^2-2m-9 \\ x=m^2-2m-3 \\ x=m^2-2m \\ x=m^2-2m+3 \end{array}\right.$

Để có không quá 2 điểm cực trị dương thì $m^2-2m-3\le 0 \Leftrightarrow -1\le m\le 3$.

Kết hợp điều kiện, suy ra $m\in\{-1;0;1;2;3\}$.

Vậy, có 5 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Cách 2:

Đặt $u(x)=\left|x^3+3x\right|+2m-m^2$, ta có:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$u(x)$	$+\infty$ $\searrow$	$2m-m^2$	$\nearrow$ $+\infty$

Áp dụng công thức:

$$\text{SĐCT } f\left(u(x)\right) = \text{SĐCT } u(x) + \text{SNBL} \left[\begin{array}{l} u(x)=-9 \\ u(x)=-3 \\ u(x)=0 \\ u(x)=3 \end{array}\right.$$

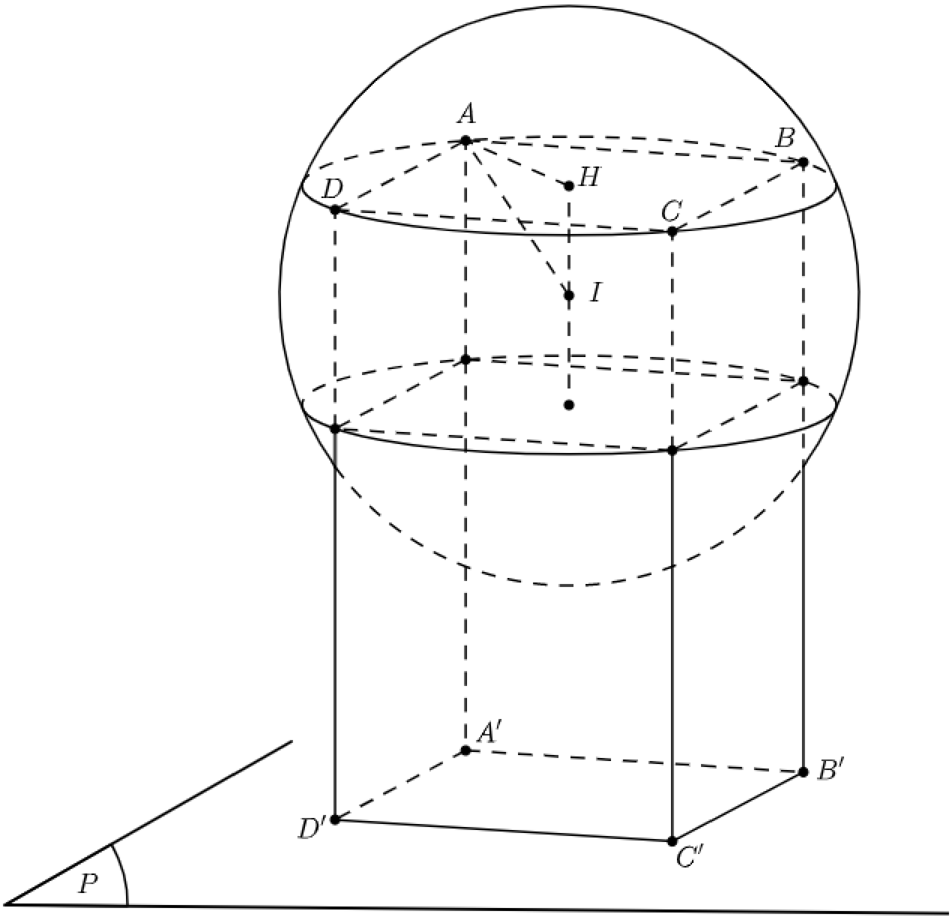
Ta có: $u(x)$ có đúng một điểm cực trị. Do đó, để $f\left(u(x)\right)$ có không quá 6 điểm cực trị thì

$\left[\begin{array}{l} u(x)=-9 \\ u(x)=-3 \\ u(x)=0 \\ u(x)=3 \end{array}\right.$ có không quá 5 nghiệm bội lẻ. Khi đó, $-3 \le 2m-m^2 \Leftrightarrow -1 \le m \le 3$

Vậy, có 5 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Chọn đáp án B

Câu 199:



Ta có: (H) là khối hộp chữ nhật nên $(Q) \parallel (P)$, suy ra $(Q): 2x-y+2z+d=0$.

Để (H) có thể tích lớn nhất thì (Q), (P) nằm khác phía với mặt phẳng qua I và song song với (P).

Đặt $IH=t$, suy ra $AH=\sqrt{21-t^2}$ $\left(0 \le t \le \sqrt{21}\right)$

Ta có: $d(I,(P))=9$ và $AB.BC \le \dfrac{AB^2+BC^2}{2}=\dfrac{4AH^2}{2}=42-2t^2$.

$V_{(H)}=AB.BC.(IH+d(I,(P))) \le \left(42-2t^2\right)(t+9) \le 400$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $t=1$.

Khi đó $d(I;(Q))=1 \Leftrightarrow \dfrac{|11+d|}{3}=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} d=-14 & \text{, nhận vì } d((P),(Q))=10 \\ d=-8 & \text{, loại vì } d((P),(Q)) \neq 10 \end{array}\right.$.

Kéo theo, $(Q): 2x-y+2z-14=0$. Suy ra $b+c+d=-13$.

Chọn đáp án B

Câu 200:

Cách 1:

Ta có: $|z|^2+|w|^2=|z+w|^2$ và $|z|=1$, đặt $z=\cos x+i\sin x$, suy ra $w=\sin x-i\cos x$

$P=|zw+2i(z+w)-4|=|w+2i|.|z+2i|=\sqrt{\sin^2 x+(2-\cos x)^2}.\sqrt{\cos^2 x+(\sin x+2)^2}$.

$=\sqrt{25-20\left(\cos x-\sin x\right)-16\sin x\cos x}$

Đặt $t=\cos x-\sin x$, suy ra $t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$ và $-\sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$

Suy ra $P=\sqrt{25-20t+8\left(t^2-1\right)}\geq\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $t=\dfrac{5}{4}$.

Cách 2:

Tính chất:

Gọi A, B là các điểm biểu diễn các số phức z,w. Nếu $A\not\equiv O$ thì $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ vuông góc, khi và chỉ khi, $\dfrac{w}{z}$ là số ảo.

Chứng minh:

Đặt $z=a+bi$, $w=x+yi$, ta có: $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=ax+by=\dfrac{z\overline{w}+\overline{z}w}{2}$.

Vì $A\not\equiv O$ nên $z\neq 0$. Khi đó,

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0\Leftrightarrow z\overline{w}+\overline{z}w=0\Leftrightarrow\frac{\overline{w}}{\overline{z}}+\frac{w}{z}=0\Leftrightarrow\frac{w}{z}=ki\ \ (k\in\mathbb{R})$$

Trường hợp, $w=-iz$ cho kết quả tương tự. Ở đây, mình chỉ muốn giới thiệu thêm một tính chất để khi gặp các bài khác, các bạn có thể nghĩ ra nhiều hướng làm hơn.

Ta có: $|z|^2+|w|^2=|z+w|^2$, suy ra $w=iz$. Khi đó,

$P=|zw+2i(z+w)-4|=|w+2i|.|z+2i|=|z+2|.|z+2i|$.

Lại có: $|z|=1$, đặt $z=\cos x+i\sin x$.

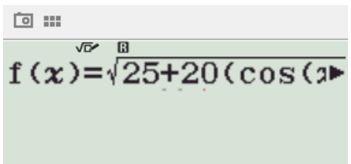
Hướng 1:

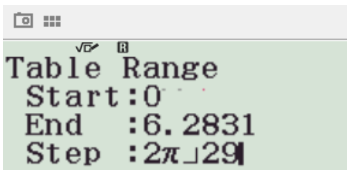
$P=\sqrt{(\cos x+2)^2+\sin^2 x}.\sqrt{\cos^2 x+(\sin x+2)^2}=\sqrt{25+20\left(\cos x+\sin x\right)+16\sin x\cos x}$.

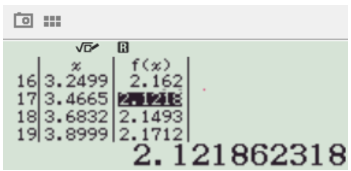
Đặt $t=\cos x+\sin x$, suy ra $t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$ và $\sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$

Suy ra $P=\sqrt{25+20t+8\left(t^2-1\right)}\geq\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $t=-\dfrac{5}{4}$.

Hướng 2:







Chọn đáp án (A)