

NGUYỄN CÔNG ĐỊNH

Giáo viên THPT Đầm Dơi



Chuyên đề **TỈ SỐ THỂ TÍCH**

ÔN THI THPT QUỐC GIA

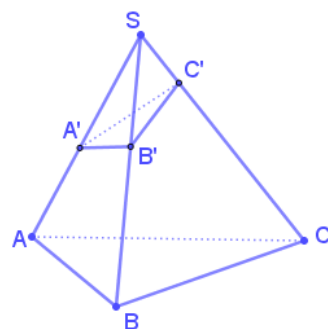
CHỦ ĐỀ: HÌNH HỌC KHÔNG GIAN
VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO

DẠNG 3

TỈ SỐ THỂ TÍCH

Bài toán 1: Tỉ số thể tích hình chóp tam giác.

$$\frac{V_{A'B'C'}}{V_{ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}.$$



Bài toán 2: Tỉ số thể tích hình chóp tứ giác có đáy là hình bình hành.

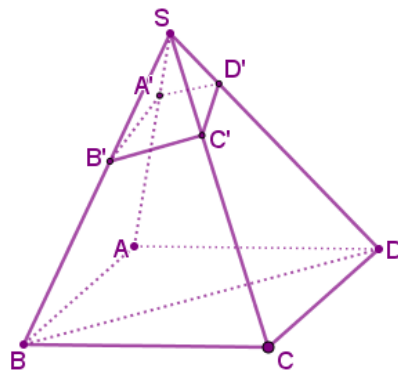
N.C.Đ

Đặt $\frac{SA}{SA'} = a; \frac{SB}{SB'} = b; \frac{SC}{SC'} = c; \frac{SD}{SD'} = d.$

Khi đó :

1. $a + c = b + d.$

2. $\frac{V_{A'B'C'D'}}{V_{ABCD}} = \frac{a+b+c+d}{4abcd}.$



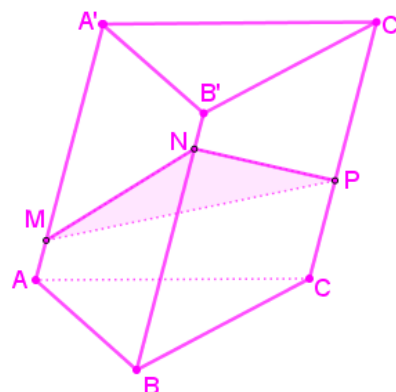
Bài toán 3: Tỉ số thể tích hình chóp lăng trụ tam giác.

Giả sử

$$\frac{A'M}{A'A} = x; \frac{B'N}{B'B} = y; \frac{C'P}{C'C} = z$$

Khi đó :

$$\frac{V_{A'B'C'.MNP}}{V_{A'B'C'.ABC}} = \frac{x+y+z}{3}.$$



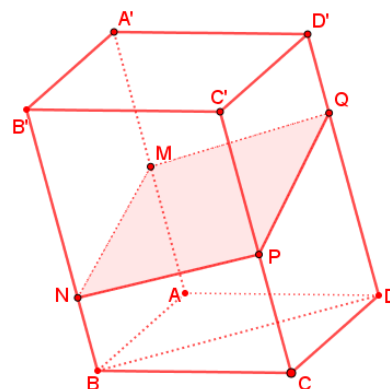
Bài toán 4: Tỷ số thể tích hình hộp.

Giả sử $\frac{A'M}{AA'} = x, \frac{C'P}{CC'} = y, \frac{D'N}{DD'} = z, \frac{B'Q}{BB'} = t.$

Khi đó

1. $x + y = z + t.$

2. $\frac{V_{A'B'C'D'.MNPQ}}{V_{A'B'C'D'.ABCD}} = \frac{x + y + z + t}{4}.$



Kiến thức khác: Tỷ số thể tích hình chóp chung đỉnh hoặc chung đáy.

1. Hai hình chóp có chung đáy thì $\frac{V_1}{V_2} = \frac{h_1}{h_2}.$

2. Hai hình chóp có chung đỉnh và hai đáy nằm trên một mặt phẳng thì $\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1}{S_2}.$

N.C.Đ

CHỦ ĐỀ: HÌNH HỌC KHÔNG GIAN
VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO

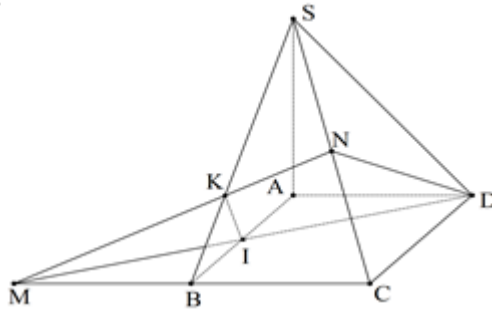
DẠNG 3

TỈ SỐ THỂ TÍCH

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và có thể tích là V . Gọi M là trung điểm của SB . P là điểm thuộc cạnh SD sao cho $SP = 2DP$. Mặt phẳng (AMP) cắt cạnh SC tại N . Tính thể tích của khối đa diện $ABCDMNP$ theo V

- A.** $V_{ABCDMNP} = \frac{23}{30}V$. **B.** $V_{ABCDMNP} = \frac{19}{30}V$. **C.** $V_{ABCDMNP} = \frac{2}{5}V$. **D.** $V_{ABCDMNP} = \frac{7}{30}V$.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $BAD = 60^\circ$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng 45° . Gọi M là điểm đối xứng của C qua B và N là trung điểm của SC . Mặt phẳng (MND) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh S có thể tích là V_1 , khối còn lại có thể tích là V_2 (tham khảo hình vẽ bên). Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.



- A.** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{5}$. **B.** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{3}$. **C.** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{12}{7}$. **D.** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{5}$.

Câu 3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối tứ diện $ACB'D'$ và khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng:

- A.** $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có M, N, P được xác định bởi $\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{SN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$. Tính thể tích khối chóp $S.MNP$ biết $SA = 4\sqrt{3}$, $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC đều có cạnh bằng $\sqrt{6}$.

- A.** 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC . Điểm I thuộc đoạn SA . Biết mặt phẳng (MNI) chia khối

chóp $S.ABCD$ thành hai phần, phần chứa đỉnh S có thể tích bằng $\frac{7}{13}$ lần phần còn lại.

Tính tỉ số $k = \frac{IA}{IS}$?

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{3}{4}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 6. Cho lập phương có cạnh bằng a và một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn nội tiếp hai mặt đối diện của hình lập phương. Gọi S_1 là tổng diện tích 6 mặt của hình lập phương, S_2 là diện tích xung quanh của hình trụ. Tỉ số $\frac{S_2}{S_1}$ bằng

- A. $\frac{S_2}{S_1} = \frac{\pi}{2}$. B. $\frac{S_2}{S_1} = \frac{\pi}{6}$. C. $\frac{S_2}{S_1} = \pi$. D. $\frac{S_2}{S_1} = \frac{1}{2}$.

Câu 7. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Trên các cạnh AA', BB' lần lượt lấy các điểm E, F sao cho $AA' = kA'E, BB' = kB'F$. Mặt phẳng $(C'EF)$ chia khối trụ đã cho thành hai khối đa diện bao gồm khối chóp $(C'.A'B'FE)$ có thể tích V_1 và khối đa diện $(ABCEFC')$ có thể tích V_2 . Biết rằng $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{7}$, tìm k

- A. $k = 4$. B. $k = 3$. C. $k = 1$. D. $k = 2$.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, M là trung điểm của AD . Gọi S' là giao của SC với mặt phẳng chứa BM và song song với SA . Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp $S'.BCDM$ và $S.ABCD$.

- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{3}{4}$.

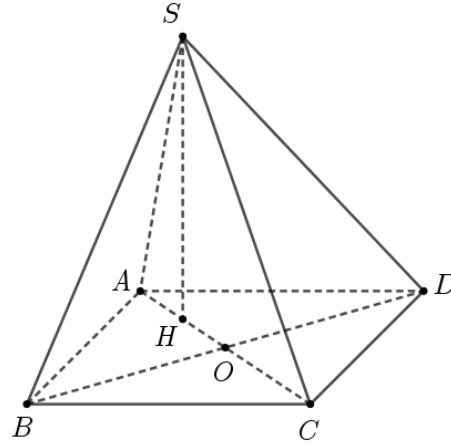
Câu 9. Cho khối chóp $S.A_1A_2...A_n$ (với $n \geq 3$ là số nguyên dương). Gọi B_j là trung điểm của đoạn thẳng SA_j ($j = \overline{1, n}$). Kí hiệu V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hai khối chóp $S.A_1A_2...A_n$ và $S.B_1B_2...B_n$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

- A. 2. B. 4. C. 8. D. 2^n .

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi V là thể tích của khối chóp $S.ABCD$ và M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh SB, SD, AD . Thể tích của khối tứ diện $AMNP$ bằng

- A. $\frac{1}{32}V$ B. $\frac{1}{8}V$ C. $\frac{1}{4}V$ D. $\frac{1}{16}V$

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a , tâm O . Hình chiếu vuông góc của điểm S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của đoạn thẳng AO . Biết mặt phẳng (SCD) tạo với mặt đáy $(ABCD)$ một góc 60° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng



- A. $\frac{9\sqrt{3}}{4}a^3$. B. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^3$. C. $\frac{3}{4}a^3$. D. $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^3$.

Câu 12. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $BAD = 60^\circ$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ là 45° . Gọi M là điểm đối xứng của C qua B và N là trung điểm SC . Mặt phẳng (MND) chia khối chóp thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện có đỉnh S có thể tích là V_1 , khối đa diện còn lại có thể tích V_2 . Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$

- A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{12}{7}$. B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{3}$. C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{5}$. D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{5}$.

Câu 13. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 48cm^3 . Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm các cạnh CC', BC và $B'C'$. Tính thể tích của khối chóp $A'MNP$.

- A. 8cm^3 . B. 12cm^3 . C. 24cm^3 . D. $\frac{16}{3}\text{cm}^3$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là $\triangle ABC$ vuông cân ở B , $AC = a\sqrt{2}$, $SA \perp (ABC)$, $SA = a$. Gọi G là trọng tâm của $\triangle SBC$, $mp(\alpha)$ đi qua AG và song song với BC chia khối chóp thành hai phần. Gọi V là thể tích của khối đa diện không chứa đỉnh S . Tính V .

- A. $\frac{5a^3}{54}$. B. $\frac{2a^3}{9}$. C. $\frac{4a^3}{27}$. D. $\frac{4a^3}{9}$.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{2}$. B', D' lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SD . Mặt phẳng $(AB'D')$ cắt SC tại C' . Thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$ là

- A. $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $V = \frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. C. $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{9}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{9}$.

Câu 16. Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt thuộc các cạnh bên AA', CC' sao cho $MA = MA'; NC = 4NC'$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Hỏi trong bốn khối tứ diện $GA'B'C', BB'MN, ABB'C'$ và $A'BCN$, khối tứ diện nào có thể tích nhỏ nhất?

- A. Khối $ABB'C'$. B. Khối $A'BCN$. C. Khối $BB'MN$. D. Khối $GA'B'C'$.

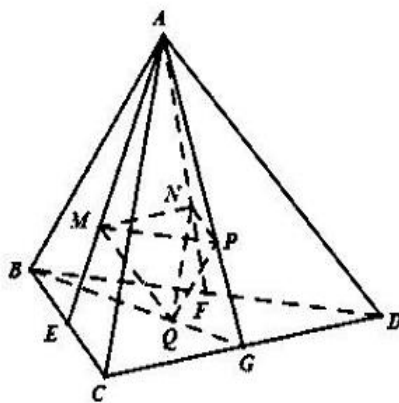
Câu 17. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Mặt phẳng (P) qua A và vuông góc SC cắt SB , SC , SD lần lượt tại B' , C' , D' . Biết C' là trung điểm SC . Gọi V_1 , V_2 lần lượt là thể tích hai khối chóp $S.AB'C'D'$ và $S.ABCD$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

- A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{3}$. B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{9}$. C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{4}{9}$. D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{3}$.

Câu 18. Cho hình chóp đều $S.ABC$, có đáy là tam giác đều cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SC . Biết mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC) . Tính thể tích V của khối chóp $A.BCNM$.

- A. $V = \frac{\sqrt{5}a^3}{32}$. B. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{16}$. C. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{48}$. D. $V = \frac{\sqrt{5}a^3}{96}$.

Câu 19. Cho khối tứ diện $ABCD$ có thể tích V . Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của BC, BD, CD , và M, N, P, Q lần lượt là trọng tâm của các tam giác $\triangle ABC, \triangle ABD, \triangle ACD, \triangle BCD$. Tính thể tích của khối tứ diện $MNPQ$ theo V .



- A. $\frac{V}{9}$. B. $\frac{V}{3}$. C. $\frac{2V}{9}$. D. $\frac{V}{27}$.

Câu 20. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$. Gọi M là trung điểm của SA , lấy điểm N trên cạnh SB sao cho $\frac{SN}{SB} = \frac{2}{3}$. Mặt phẳng (α) qua MN và song song với SC chia khối chóp thành hai phần. Gọi V_1 là thể tích của khối đa diện chứa đỉnh A , V_2 là thể tích của khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

- A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{16}$. B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{18}$. C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{11}$. D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{9}$.

Câu 21. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích bằng 1. Gọi M, N lần lượt là các điểm trên các cạnh SB, SD sao cho $MS = MB$, $ND = 2NS$. Mặt phẳng (CMN) chia khối chóp đã cho thành hai phần, thể tích của phần có thể tích nhỏ hơn bằng

- A. $\frac{2}{25}$. B. $\frac{1}{12}$. C. $\frac{3}{25}$. D. $\frac{5}{48}$.

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SD . Mặt phẳng (α) chứa MN và cắt các tia SB, SC lần lượt tại P và Q . Đặt $\frac{SP}{SB} = x$, V_1 là thể tích của khối chóp $S.MNPQ$ và V là thể tích khối chóp $S.ABCD$. Tìm x để $V = 2V_1$.

- A. $x = \frac{1}{2}$. B. $x = \frac{-1 + \sqrt{33}}{4}$. C. $x = \frac{-1 + \sqrt{41}}{4}$. D. $x = \sqrt{2}$.

Câu 23. Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, P, Q là các điểm lần lượt thuộc các cạnh $AA', BB', CC', B'C'$ thỏa mãn $\frac{AM}{AA'} = \frac{1}{2}, \frac{BN}{BB'} = \frac{1}{3}, \frac{CP}{CC'} = \frac{1}{4}, \frac{C'Q}{B'C'} = \frac{1}{5}$. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối tứ diện $MNPQ$ và khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Tính tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$.

- A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{11}{30}$. B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{11}{45}$. C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{19}{45}$. D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{22}{45}$.

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC . Điểm K thuộc đoạn SA . Biết mặt phẳng (MNK) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần, phần chứa đỉnh S có thể tích bằng $\frac{7}{13}$ lần phần còn lại.

Tính tỉ số $t = \frac{KA}{KS}$.

- A. $t = \frac{1}{2}$. B. $t = \frac{3}{4}$. C. $t = \frac{1}{3}$. D. $t = \frac{2}{3}$.

Câu 25. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, thể tích bằng 1. Gọi M là trung điểm cạnh SA ; các điểm E, F lần lượt là điểm đối xứng của A qua B và D . Mặt phẳng (MEF) cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại các điểm N, P . Thể tích của khối đa diện $ABCDMNP$ bằng

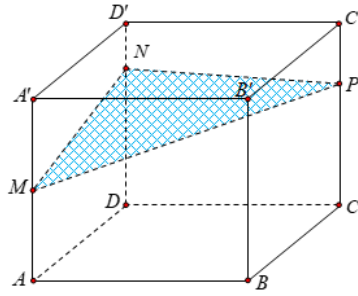
- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{1}{4}$

Câu 26. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi M, N lần lượt nằm trên các cạnh $A'B'$ và BC sao cho $MA' = MB'$ và $NB = 2NC$. Mặt phẳng (DMN) chia khối lập phương đã cho thành hai khối đa diện. Gọi $V_{(H)}$ là thể tích khối đa diện chứa đỉnh

A , $V_{(H')}$ là thể tích khối đa diện còn lại. Tỉ số $\frac{V_{(H)}}{V_{(H')}}$ bằng

- A. $\frac{151}{209}$. B. $\frac{151}{360}$. C. $\frac{2348}{3277}$. D. $\frac{209}{360}$.

Câu 27. Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 2110. Biết $A'M = MA$, $DN = 3ND'$, $CP = 2C'P$ như hình vẽ. Mặt phẳng (MNP) chia khối hộp đã cho thành hai khối đa diện. Thể tích khối đa diện nhỏ hơn bằng



- A. $\frac{5275}{6}$. B. $\frac{5275}{12}$. C. $\frac{7385}{18}$. D. $\frac{8440}{9}$.

Câu 28. Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng 1, đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AD và $AD = 3BC$. Gọi M là trung điểm của cạnh SA , N là điểm thuộc CD sao cho $ND = 3NC$. Mặt phẳng (BMN) cắt SD tại P . Thể tích khối chóp $AMBNP$ bằng:

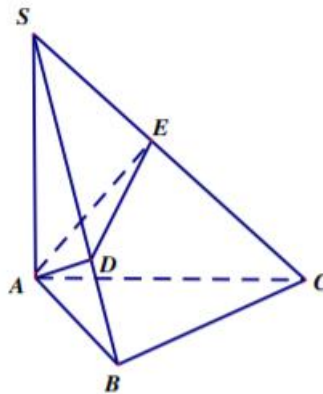
- A. $\frac{3}{8}$ B. $\frac{5}{12}$ C. $\frac{5}{16}$ D. $\frac{9}{32}$

Câu 29. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang với hai đáy là AB và CD , $AB = 2CD$. Gọi E là một điểm trên cạnh SC . Mặt phẳng (ABE) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện có thể tích bằng nhau. Tính tỉ số $\frac{SE}{SC}$.

- A. $\frac{\sqrt{10}-2}{2}$. B. $\sqrt{6}-2$. C. $\sqrt{2}-1$. D. $\frac{\sqrt{26}-4}{2}$.

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , SA vuông góc với mặt đáy (ABC) , $BC = a$, góc hợp bởi (SBC) và (ABC) là 60° . Mặt phẳng (P) qua A vuông góc với SC cắt SB, SC lần lượt tại D, E . Thể tích khối đa diện $ABCED$ là

- A. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{40}$. B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$. C. $\frac{11\sqrt{3}a^3}{120}$. D. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{60}$.



Câu 31. Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 2019. Thể tích phần chung của hai khối $AB'CD'$ và $A'BC'D$ bằng

- A. $\frac{673}{4}$. B. 673. C. $\frac{673}{3}$. D. $\frac{673}{2}$.

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Trên đường thẳng vuông góc với $(ABCD)$ tại D lấy điểm S' thỏa mãn $S'D = \frac{1}{2}SA$ và S', S ở cùng

phía đối với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi V_1 là phần thể tích chung của hai khối chóp $S.ABCD$ và $S'.ABCD$. Gọi V_2 là thể tích khối chóp $S.ABCD$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

- A. $\frac{4}{9}$. B. $\frac{7}{9}$. C. $\frac{7}{18}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 33. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$, điểm M nằm trên cạnh CC' thỏa mãn $CC' = 3CM$. Mặt phẳng $(AB'M)$ chia khối hộp thành hai khối đa diện. Gọi V_1 là thể tích khối đa diện chứa đỉnh A' , V_2 là thể tích khối đa diện chứa đỉnh B' . Tính tỉ số thể tích V_1 và V_2 .

- A. $\frac{41}{13}$. B. $\frac{27}{7}$. C. $\frac{7}{20}$. D. $\frac{9}{4}$.

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Trên đường thẳng qua D và song song với SA lấy điểm S' thỏa mãn $\overrightarrow{S'D} = k\overrightarrow{SA}$ với $k > 0$. Gọi V_1 là phần thể tích chung của hai khối chóp $S.ABCD$ và $S'.ABCD$. Gọi V_2 là thể tích khối chóp $S.ABCD$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

- A. $\frac{2k^2 + k}{2(k+1)^2}$. B. $\frac{3k+2}{2(k+1)^2}$. C. $\frac{3k^2 + 2k}{2(k+1)^2}$. D. $\frac{k}{k+1}$.

Câu 35. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC , biết góc tạo bởi SG và (SBC) bằng 30° . Mặt phẳng chứa BC và vuông góc với SA chia khối chóp đã cho thành hai phần có thể tích V_1, V_2 trong đó V_1 là phần thể tích chứa điểm S . Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

- A. 6. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{6}{7}$. D. 7.

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Trong không gian lấy điểm S' thỏa mãn $\overrightarrow{SS'} = 2\overrightarrow{BC}$. Gọi V_1 là phần thể tích chung của hai khối chóp $S.ABCD$ và $S'.ABCD$. Gọi V_2 là thể tích khối chóp $S.ABCD$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

- A. $\frac{1}{9}$. B. $\frac{5}{9}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{4}{9}$.

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Trong không gian lấy điểm S' thỏa mãn $\overrightarrow{SS'} = k\overrightarrow{BC}$ với $k > 0$. Gọi V_1 là phần thể tích chung của hai khối chóp $S.ABCD$ và $S'.ABCD$. Gọi V_2 là thể tích khối chóp $S.ABCD$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

- A. $\frac{2k^2 + k}{2(k+1)^2}$. B. $\frac{3k+2}{2(k+1)^2}$. C. $\frac{3k^2 + 2k}{2(k+1)^2}$. D. $\frac{k}{k+1}$.

Câu 38. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bên tạo với đường cao một góc 30° , O là trọng tâm tam giác ABC . Một hình chóp tam giác đều thứ hai $O.A'B'C'$ có S là tâm của tam giác $A'B'C'$ và cạnh bên của hình chóp $O.A'B'C'$ tạo với đường cao một góc 60°

(hai hình chóp có chung chiều cao) sao cho mỗi cạnh bên SA, SB, SC lần lượt cắt các cạnh bên OA', OB', OC' . Gọi V_1 là phần thể tích chung của hai khối chóp $S.ABC$ và $O.A'B'C'$. Gọi V_2 là thể tích khối chóp $S.ABC$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

- A. $\frac{9}{16}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{27}{64}$. D. $\frac{9}{64}$.

Câu 39. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$, O là trọng tâm tam giác ABC . Một hình chóp tam giác đều thứ hai $O.A'B'C'$ có S là tâm của tam giác $A'B'C'$ và cạnh bên của hình chóp $O.A'B'C'$ và $A'B' = kAB$ (hai hình chóp có chung chiều cao) sao cho mỗi cạnh bên SA, SB, SC lần lượt cắt các cạnh bên OA', OB', OC' . Gọi V_1 là phần thể tích chung của hai khối chóp $S.ABC$ và $O.A'B'C'$. Gọi V_2 là thể tích khối chóp $S.ABC$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

- A. $\frac{k^3 + k^2}{(k+1)^3}$. B. $\frac{k^3}{(k+1)^3}$. C. $\frac{1}{k+1}$. D. $\frac{k}{k+1}$.

Câu 40. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi V_1 là phần thể tích chung của hai khối của hai khối tứ diện $A'BC'D$ và $AB'CD'$. Gọi V_2 là thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 41. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$, trên các cạnh AA', BB' lấy các điểm M, N sao cho $AA' = 3A'M, BB' = 3B'N$. Mặt phẳng $(C'MN)$ chia khối lăng trụ đã cho thành hai phần. Gọi V_1 là thể tích của khối chóp $C'.A'B'NM$, V_2 là thể tích của khối đa diện $ABCMNC'$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng:

- A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{4}{7}$. B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{7}$. C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{7}$. D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{7}$.

Câu 42. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$, trên các cạnh AA', BB' lấy các điểm M, N sao cho $AA' = k.A'M, BB' = k.B'N$ ($k > 1$). Mặt phẳng $(C'MN)$ chia khối lăng trụ đã cho thành hai phần. Gọi V_1 là thể tích của khối chóp $C'.A'B'MN$, V_2 là thể tích của khối đa diện $ABCMNC'$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng:

- A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{4}{3k-2}$. B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{3k-2}$. C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{3k-2}$. D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{3k-2}$.

Câu 43. Cho một miếng tôn hình tròn tâm O , bán kính R . Cắt bỏ một phần miếng tôn theo một hình quạt OAB và gò phần còn lại thành một hình nón đỉnh O không có đáy (OA trùng với OB). Gọi S và S' lần lượt là diện tích của miếng tôn hình tròn ban đầu và diện tích của miếng tôn còn lại. Tìm tỉ số $\frac{S'}{S}$ để thể tích của khối nón đạt giá trị lớn nhất.

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

B. $\frac{1}{4}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC .

Mặt phẳng (BMN) cắt SD tại P . Tỉ số $\frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}$ bằng:

A. $\frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{16}$.

B. $\frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{6}$.

C. $\frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{12}$.

D. $\frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{8}$.

Câu 45. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'B', AC$ và P là điểm thuộc cạnh CC' sao cho $CP = 2C'P$. Tính thể tích khối tứ diện $BMNP$ theo V .

A. $\frac{2V}{9}$.

B. $\frac{V}{3}$.

C. $\frac{5V}{24}$.

D. $\frac{4V}{9}$.

Câu 46. Cho tứ diện $SABC$ có G là trọng tâm tứ diện, mặt phẳng quay quanh AG cắt các cạnh SB, SC lần lượt tại M, N . Giá trị nhỏ nhất của tỉ số $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}$ là?

A. $\frac{4}{9}$.

B. $\frac{3}{8}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Câu 47. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AC và $B'C'$. Gọi (P) là mặt phẳng qua M và song song với mặt phẳng $(A'NC)$. Mặt phẳng (P) chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành hai khối đa diện, gọi (H) là khối đa diện chứa đỉnh A . Thể tích của khối đa diện (H) bằng

A. $\frac{3}{5}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{2}{5}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Câu 48. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh $2a$. Gọi M là trung điểm của BB' và P thuộc cạnh DD' sao cho $DP = \frac{1}{4}DD'$. Biết mặt phẳng (AMP) cắt CC' tại N , thể tích của khối đa diện $AMNPBCD$ bằng

A. $2a^3$.

B. $3a^3$.

C. $\frac{11a^3}{3}$.

D. $\frac{9a^3}{4}$.

Câu 49. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng V . Gọi M, N, P, Q, E, F lần lượt là tâm các hình bình hành $ABCD, A'B'C'D', ABB'A', BCC'B', CDD'C', DAA'D'$. Thể tích khối đa diện có các đỉnh M, P, Q, E, F, N bằng

A. $\frac{V}{4}$.

B. $\frac{V}{2}$.

C. $\frac{V}{6}$.

D. $\frac{V}{3}$.

Câu 50. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = \sqrt{6}$, $AD = \sqrt{3}$, $A'C = 3$ và mặt phẳng $(AA'C'C)$ vuông góc với đáy. Biết mặt phẳng $(AA'C'C)$ và $(AA'B'B)$ tạo với nhau góc α , thỏa mãn $\tan \alpha = \frac{3}{4}$. Thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ bằng

A. $V = 10$.

B. $V = 8$.

C. $V = 12$.

D. $V = 6$.

Câu 51. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi K là trung điểm của SC . Mặt phẳng qua AK cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại M và N . Gọi V_1, V theo thứ tự là thể tích khối chóp $S.AMKN$ và khối chóp $S.ABCD$. Giá trị nhỏ nhất của tỉ số $\frac{V_1}{V}$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{3}{8}$.

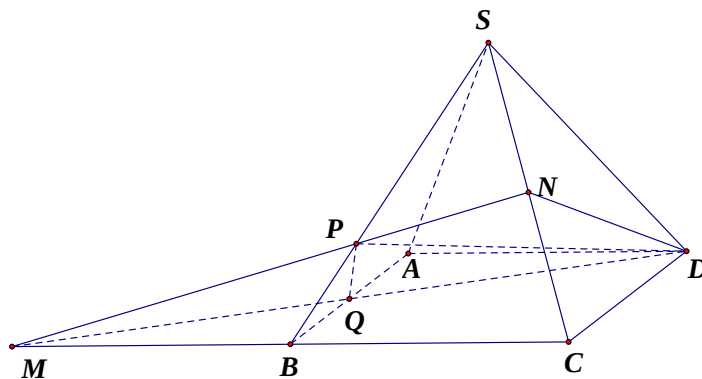
Câu 52. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trọng tâm các tam giác ABD, ABC và E là điểm đối xứng với B qua D . Mặt (MNE) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện trong đó khối đa diện chứa đỉnh A có thể tích V . Tính V .

- A. $V = \frac{9\sqrt{2}a^3}{320}$. B. $V = \frac{3\sqrt{2}a^3}{320}$. C. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{96}$. D. $V = \frac{3\sqrt{2}a^3}{80}$.

Câu 53. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và có thể tích là V . Gọi P là điểm trên cạnh SC sao cho $SC = 5SP$. Một mặt phẳng (α) qua AP cắt hai cạnh SB và SD lần lượt tại M và N . Gọi V_1 là thể tích của khối chóp $S.AMPN$. Tìm giá trị lớn nhất của $\frac{V_1}{V}$.

- A. $\frac{1}{15}$. B. $\frac{1}{25}$. C. $\frac{3}{25}$. D. $\frac{2}{15}$.

Câu 54. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành, M là điểm đối xứng với C qua B . N là trung điểm SC . Mặt phẳng (MND) chia hình chóp thành hai khối đa diện (tham khảo hình vẽ bên). Gọi V_1 là thể tích khối đa diện chứa đỉnh S và V_2 là thể tích khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$?



- A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{3}$. B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{12}{7}$. C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{5}$. D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{5}$.

Câu 55. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 2. Gọi M, N lần lượt là hai điểm nằm trên hai cạnh AA' và BB' sao cho M là trung điểm của AA' và $B'N = \frac{2}{3}BB'$. Đường thẳng CM cắt đường thẳng $A'C'$ tại P và đường thẳng CN cắt đường thẳng $B'C'$ tại Q . Thể tích khối đa diện lồi $A'MPB'NQ$ bằng

- A. $\frac{13}{18}$. B. $\frac{23}{9}$. C. $\frac{7}{18}$. D. $\frac{5}{9}$.

Câu 56. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ cạnh đáy bằng a , chiều cao bằng $2a$. Mặt phẳng (P) qua B' và vuông góc với $A'C$ chia lăng trụ thành hai khối. Biết thể tích của hai khối là V_1 và V_2 với $V_1 < V_2$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

- A. $\frac{1}{11}$. B. $\frac{1}{23}$. C. $\frac{1}{47}$. D. $\frac{1}{7}$.

Câu 57. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và M, N là hai điểm lần lượt trên cạnh CA, CB sao cho MN song song với AB và $\frac{CM}{CA} = k$. Mặt phẳng $(MNB'A')$ chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$

thành hai phần có thể tích V_1 (phần chứa điểm C) và V_2 sao cho $\frac{V_1}{V_2} = 2$. Khi đó giá trị

của k là

- A. $k = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. B. $k = \frac{1}{2}$. C. $k = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. D. $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và có thể tích là V . Gọi M là trung điểm của SB . P là điểm thuộc cạnh SD sao cho $SP = 2DP$. Mặt phẳng (AMP) cắt cạnh SC tại N . Tính thể tích của khối đa diện $ABCDMNP$ theo V

A. $V_{ABCDMNP} = \frac{23}{30}V$.

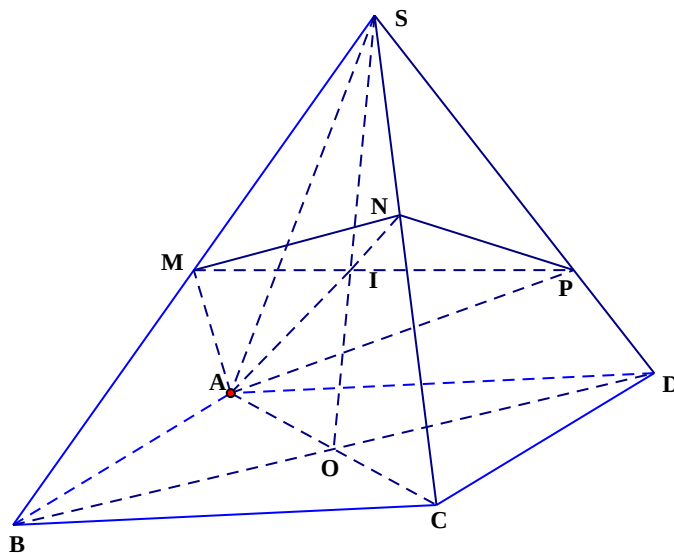
B. $V_{ABCDMNP} = \frac{19}{30}V$.

C. $V_{ABCDMNP} = \frac{2}{5}V$.

D. $V_{ABCDMNP} = \frac{7}{30}V$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $O = AC \cap BD$, $I = MP \cap SO$, $N = AI \cap SC$ Khi đó

$$V_{ABCDMNP} = V_{S.ABCD} - V_{S.AMNP}$$

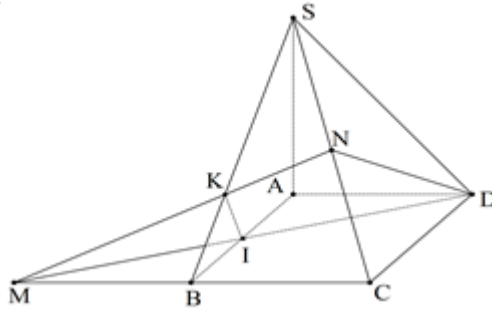
Đặt $a = \frac{SA}{SM} = 1$, $b = \frac{SB}{SM} = 2$, $c = \frac{SC}{SN}$, $d = \frac{SD}{SP} = \frac{3}{2}$ ta có

$$a + c = b + d \Rightarrow c = \frac{5}{2}.$$

$$\frac{V_{S.AMNP}}{V_{S.ABCD}} = \frac{a+b+c+d}{4abcd} = \frac{1+2+\frac{5}{2}+\frac{3}{2}}{4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2}} = \frac{7}{30}$$

$$\Rightarrow V_{ABCDMNP} = V_{S.ABCD} - V_{S.AMNP} = V - \frac{7}{30}V = \frac{23}{30}V.$$

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $BAD = 60^\circ$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng 45° . Gọi M là điểm đối xứng của C qua B và N là trung điểm của SC . Mặt phẳng (MND) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh S có thể tích là V_1 , khối còn lại có thể tích là V_2 (tham khảo hình vẽ bên). Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.



A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{5}$.

B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{3}$.

C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{12}{7}$.

D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Trong tam giác SMC , SB và MN là hai trung tuyến cắt nhau tại trọng tâm K

$$\Rightarrow \frac{SK}{SB} = \frac{2}{3}.$$

BI là đường trung bình của tam giác MCD

$\Rightarrow I$ là trung điểm AB .

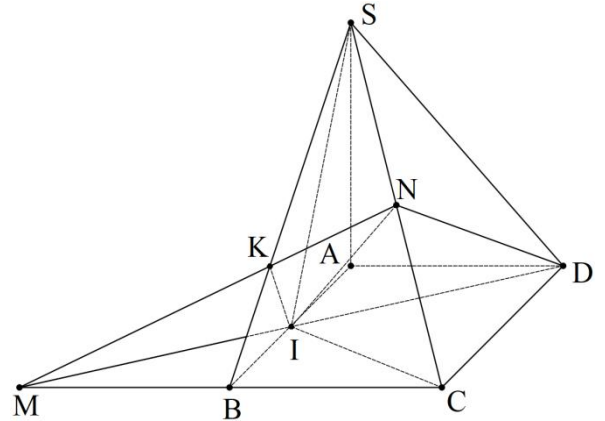
$$V_1 = V_{S.AID} + V_{S.IKN} + V_{S.IND}$$

$$\text{Đặt: } V_{S.ABCD} = V. V_{S.AID} = \frac{1}{4}.V;$$

$$V_{S.IKN} = \frac{SK}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} \cdot V_{S.IBC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} V = \frac{1}{12} V;$$

$$V_{S.IND} = \frac{SN}{SC} \cdot V_{S.ICD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} V = \frac{1}{4} V$$

$$\Rightarrow V_1 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} \right) \cdot V = \frac{7}{12} \cdot V \Rightarrow V_2 = \frac{5}{12} \cdot V \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{5}.$$



Câu 3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối tứ diện $ACB'D'$ và khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng:

A. $\frac{1}{3}$.

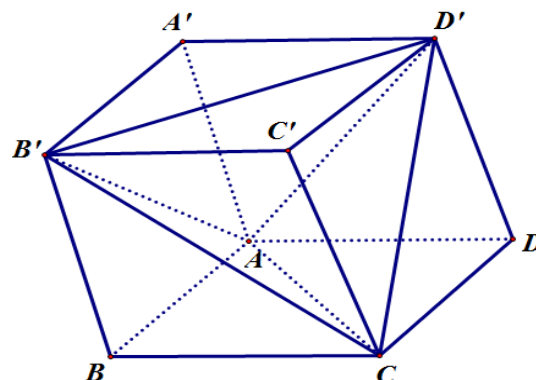
B. $\frac{1}{6}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn A



$$\text{Ta có } V_{B'.ABC} = V_{D'.ACD} = V_{C.B'C'D'} = V_{A.A'B'D'} = \frac{1}{6} V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{1}{6} V_2.$$

$$\text{Suy ra } V_1 = V_2 - 4 \cdot \frac{1}{6} V_2 = \frac{1}{3} V_2 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{3}.$$

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có M, N, P được xác định bởi $\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{SN} = \frac{2}{3} \overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SP} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{SC}$. Tính thể tích khối chóp $S.MNP$ biết $SA = 4\sqrt{3}$, $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC đều có cạnh bằng $\sqrt{6}$.

A. 3.

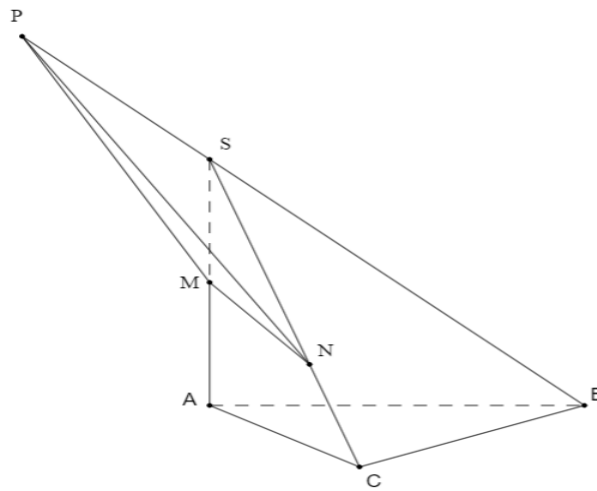
B. 4.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn C



$$\text{Ta có: } S_{ABC} = \frac{(\sqrt{6})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Suy ra: } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = 6.$$

$$\text{Lại có: } \frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SP}{SC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \Rightarrow V_{S.MNP} = \frac{V_{S.ABC}}{6} = \frac{6}{6} = 1.$$

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC . Điểm I thuộc đoạn SA . Biết mặt phẳng (MNI) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần, phần chứa đỉnh S có thể tích bằng $\frac{7}{13}$ lần phần còn lại.

$$\text{Tính tỉ số } k = \frac{IA}{IS}?$$

A. $\frac{1}{2}$.

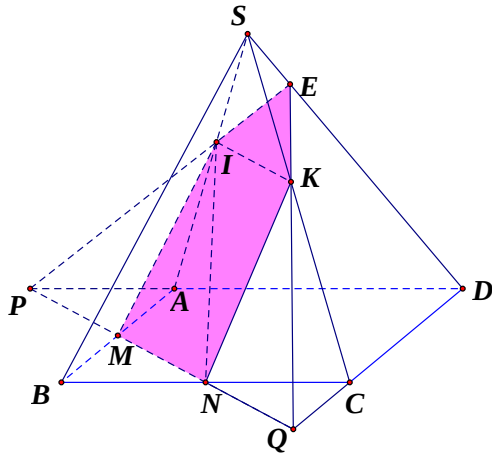
B. $\frac{3}{4}$.

C. $\frac{2}{3}$.

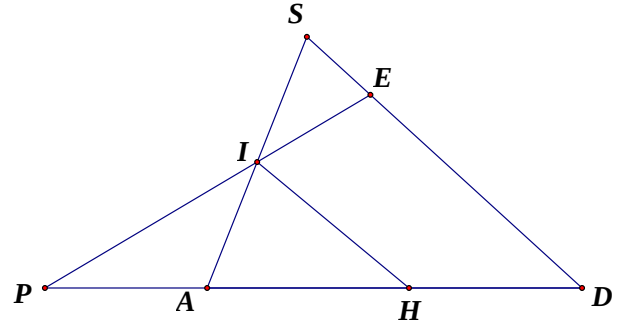
D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Hình 1



Hình 2

Mặt phẳng (MNI) cắt khối chóp theo thiết diện như hình 1. Đặt $V_{S.ABCD} = V$.

$$\text{Ta có } S_{\triangle APM} = S_{\triangle BMN} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{8} S_{ABCD} \Rightarrow \frac{S_{\triangle APM}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{8}.$$

$$\frac{d(I, (ABCD))}{d(S, (ABCD))} = \frac{IA}{SA} = \frac{k}{k+1}.$$

$$\Rightarrow \frac{V_{I.APM}}{V_{S.ABCD}} = \frac{S_{\triangle APM}}{S_{ABCD}} \cdot \frac{d(I, (ABCD))}{d(S, (ABCD))} = \frac{k}{8(k+1)} \Rightarrow V_{I.APM} = \frac{k}{8(k+1)} V.$$

Do $MN \parallel AC \Rightarrow IK \parallel AC \Rightarrow IK \parallel (ABCD) \Rightarrow d(I, (ABCD)) = d(K, (ABCD)).$

$$\text{Mà } S_{\triangle APM} = S_{\triangle NCQ} \Rightarrow V_{I.APM} = V_{K.NCQ} = \frac{k}{8(k+1)} V.$$

Kẻ $IH \parallel SD$ ($H \in SD$) như hình 2. Ta có: $\frac{IH}{SD} = \frac{AH}{AD} = \frac{AI}{AS} = \frac{k}{k+1}.$

$$\frac{IH}{ED} = \frac{PH}{PD} = \frac{PA}{PD} + \frac{AH}{PD} = \frac{PA}{PD} + \frac{2AH}{3AD} = \frac{1}{3} + \frac{2k}{3(k+1)} = \frac{3k+1}{3(k+1)}.$$

$$\Rightarrow \frac{ED}{SD} = \frac{IH}{SD} : \frac{ID}{ED} = \frac{3k}{3k+1} \Rightarrow \frac{d(E, (ABCD))}{d(S, (ABCD))} = \frac{ED}{SD} = \frac{3k}{3k+1}.$$

$$\frac{S_{\triangle PQD}}{S_{ABCD}} = \frac{9}{8} \Rightarrow \frac{V_{E.PQD}}{V_{S.ABCD}} = \frac{27k}{24k+8} \Rightarrow V_{E.PQD} = \frac{27k}{24k+8} V.$$

$$V_{EIKAMNCD} = \frac{13}{20} V \Leftrightarrow V_{E.PDC} - V_{I.APM} - V_{K.NCQ} = \frac{13}{20} V$$

$$\Leftrightarrow \frac{27k}{8(3k+1)} V - \frac{k}{8(k+1)} V - \frac{k}{8(k+1)} V = \frac{13}{20} V \Leftrightarrow \frac{27k}{2(3k+1)} - \frac{k}{k+1} = \frac{13}{5} \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}.$$

Câu 6. Cho lập phương có cạnh bằng a và một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn nội tiếp hai mặt đối diện của hình lập phương. Gọi S_1 là tổng diện tích 6 mặt của hình lập phương, S_2 là diện tích xung quanh của hình trụ. Tỉ số $\frac{S_2}{S_1}$ bằng

A. $\frac{S_2}{S_1} = \frac{\pi}{2}.$

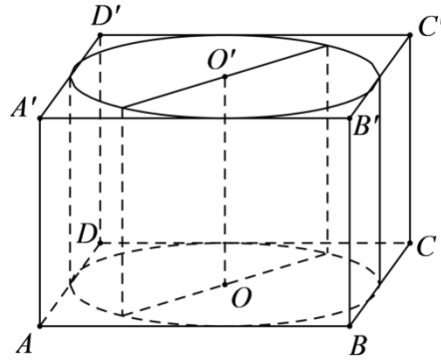
B. $\frac{S_2}{S_1} = \frac{\pi}{6}.$

C. $\frac{S_2}{S_1} = \pi.$

D. $\frac{S_2}{S_1} = \frac{1}{2}.$

Lời giải

Chọn B



Ta có: $S_1 = 6a^2$.

Hình trụ có hai đáy là hai hình tròn nội tiếp hai mặt đối diện của hình lập phương cạnh a có bán kính đáy $r = \frac{a}{2}$ và chiều cao bằng $h = l = a$.

Suy ra $S_2 = 2\pi rl = 2\pi \cdot \frac{a}{2} \cdot a = \pi a^2$.

Do đó $\frac{S_2}{S_1} = \frac{\pi a^2}{6a^2} = \frac{\pi}{6}$.

Câu 7. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Trên các cạnh AA', BB' lần lượt lấy các điểm E, F sao cho $AA' = kA'E, BB' = kB'F$. Mặt phẳng $(C'EF)$ chia khối trụ đã cho thành hai khối đa diện bao gồm khối chóp $(C'.A'B'FE)$ có thể tích V_1 và khối đa diện $(ABCEFC')$ có thể tích V_2 .

Biết rằng $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{7}$, tìm k

A. $k = 4$.

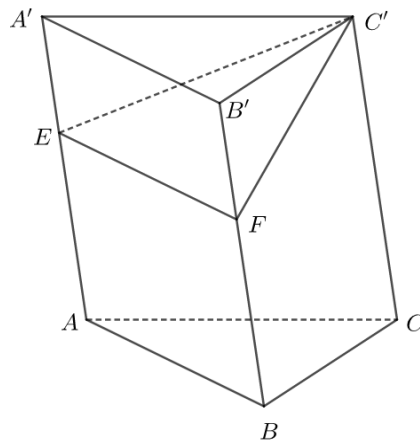
B. $k = 3$.

C. $k = 1$.

D. $k = 2$.

Lời giải

Chọn B



+) Do khối chóp $C'.A'B'FE$ và khối chóp $C'.A'B'BA$ có chung đường cao hạ từ C' nên

$$\frac{V_{C'.A'B'FE}}{V_{C'.A'B'BA}} = \frac{S_{A'B'FE}}{S_{A'B'BA}} = \frac{2S_{A'B'E}}{2S_{A'B'A}} = \frac{A'E}{A'A} = \frac{1}{k} \quad (1)$$

+) Do khối chóp $C'.ABC$ và khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chung đường cao hạ từ C' và đáy là

$$\Delta ABC \text{ nên } \frac{V_{C'.ABC}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{V_{C'.A'B'BA}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{2}{3} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{V_{C'.A'B'FE}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{2}{3k} \Rightarrow \frac{V_1}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{2}{3k} \Rightarrow V_1 = \frac{2}{3k} \cdot V_{ABC.A'B'C'}$$

$$+) \text{ Đặt } V = V_{ABC.A'B'C'} \text{ Khi đó } \begin{cases} V_1 = \frac{2}{3k} \cdot V \\ V_2 = V - V_1 = V - \frac{2}{3k} \cdot V \end{cases}$$

$$\text{Mà } \frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{7} \text{ nên}$$

$$\frac{2}{3k} \cdot V = \frac{2}{7} \left(V - \frac{2}{3k} \cdot V \right) \Leftrightarrow \frac{2}{3k} = \frac{2}{7} \left(1 - \frac{2}{3k} \right) \Leftrightarrow \frac{6}{7k} = \frac{2}{7} \Leftrightarrow 2k = 6 \Leftrightarrow k = 3$$

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, M là trung điểm của AD . Gọi S' là giao của SC với mặt phẳng chứa BM và song song với SA . Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp $S'.BCDM$ và $S.ABCD$.

A. $\frac{2}{3}$.

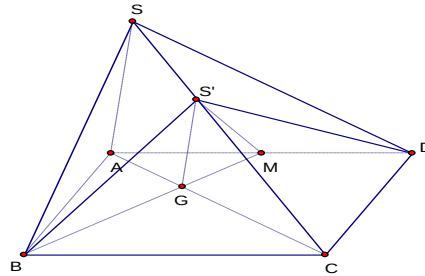
B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{4}$.

D. $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn B



$$\text{Gọi } G = BM \cap AC. AM \parallel BC \Rightarrow \Delta AGM \sim \Delta CGB \Rightarrow \frac{AG}{GC} = \frac{AM}{BC} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} (SAC) \cap (S'BM) = S'G \\ (SAC) \supset SA, SA \parallel (S'BM) \end{cases} \Rightarrow S'G \parallel SA \Rightarrow \frac{S'C}{SC} = \frac{GC}{AC} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Do đó: } \frac{d(S', (ABCD))}{d(S, (ABCD))} = \frac{S'C}{SC} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Ta có } S_{ABM} = \frac{1}{2} d(M, AB) \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} d(D, AB) \cdot AB = \frac{1}{4} S_{ABCD}$$

$$\Rightarrow S_{BCDM} = S_{ABCD} - \frac{1}{4} S_{ABCD} = \frac{3}{4} S_{ABCD}.$$

$$\text{Do vậy: } V_{S'.BCDM} = \frac{1}{3} d(S', (ABCD)) \cdot S_{BCDM} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} d(S, (ABCD)) \cdot \frac{3}{4} S_{ABCD}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} d(S, (ABCD)) \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD} \Rightarrow \frac{V_{S'.BCDM}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{2}.$$

Câu 9. Cho khối chóp $S.A_1A_2...A_n$ (với $n \geq 3$ là số nguyên dương). Gọi B_j là trung điểm của đoạn thẳng SA_j ($j = \overline{1, n}$). Kí hiệu V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hai khối chóp $S.A_1A_2...A_n$ và $S.B_1B_2...B_n$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. 2.

B. 4.

C. 8.

D. 2^n .

Lời giải

Chọn C

Khối chóp $S.A_1A_2...A_n$ có diện tích mặt đáy $A_1A_2...A_n: \beta_1$, độ dài đường cao h_1

Khối chóp $S.B_1B_2...B_n$ có diện tích mặt đáy $B_1B_2...B_n: \beta_2$, độ dài đường cao h_2

Do mặt phẳng $(B_1B_2...B_n) \parallel (A_1A_2...A_n)$ cắt khối chóp theo thiết diện $B_1B_2...B_n$ nên ta có 2 đáy là 2 đa giác đồng dạng : $A_1A_2...A_n$ & $B_1B_2...B_n$.

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{V_2} &= \frac{\frac{1}{3}\beta_1h_1}{\frac{1}{3}\beta_2h_2} = \frac{\frac{1}{2}A_1A_2.A_1A_3.\sin(B_2) + \frac{1}{2}A_1A_3.A_1A_4.\sin(B_3) + \dots + \frac{1}{2}A_1A_{n-1}.A_1A_n.\sin(B_1)}{\frac{1}{2}B_1B_2.B_1B_3.\sin(B_2) + \frac{1}{2}B_1B_3.B_1B_4.\sin(B_3) + \dots + \frac{1}{2}B_1B_{n-1}.B_1B_n.\sin(B_1)} \cdot \frac{h_1}{h_2} \\ &= \frac{2B_1B_2.2B_1B_3.\sin(B_2) + 2B_1B_3.2B_1B_4.\sin(B_3) + \dots + 2B_1B_{n-1}.2B_1B_n.\sin(B_1)}{B_1B_2.B_2B_3.\sin(B_2) + B_2B_3.B_3B_4.\sin(B_3) + \dots + B_nB_1.B_1B_2.\sin(B_1)} \cdot \frac{2h_2}{h_2} \\ &= 4.2 = 8. \end{aligned}$$

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi V là thể tích của khối chóp $S.ABCD$ và M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh SB, SD, AD . Thể tích của khối tứ diện $AMNP$ bằng

A. $\frac{1}{32}V$

B. $\frac{1}{8}V$

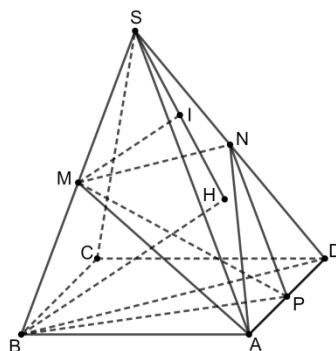
C. $\frac{1}{4}V$

D. $\frac{1}{16}V$

Lời giải

Chọn D

Cách 1



$$\text{Kẻ } BH \perp (SAD); MI \perp (SAD) \text{ có } \frac{d(M, (SAD))}{d(B, (SAD))} = \frac{MI}{BH} = \frac{MS}{BS} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ta có } S_{\triangle ANP} = \frac{1}{2} S_{\triangle AND} \text{ (Vì } P \text{ là trung điểm của } AD \text{)}.$$

$$\text{Mà } S_{\triangle AND} = \frac{1}{2} S_{\triangle ASD} \text{ (Vì } N \text{ là trung điểm của } SD \text{)}.$$

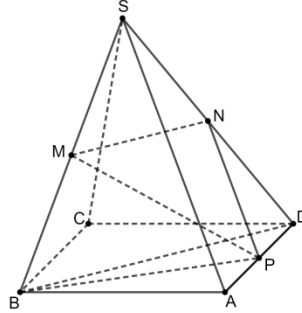
$$\text{Nên } S_{\triangle ANP} = \frac{1}{4} S_{\triangle ASD}.$$

$$\text{Lại có } V_{M.ANP} = \frac{1}{3} S_{\triangle ANP} \cdot MI = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ANP} \cdot \frac{1}{2} BH = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} S_{\triangle ANP} \cdot BH = \frac{1}{8} V_{B.SAD} = \frac{1}{8} V_{S.BAD}$$

$$\text{Mặt khác } V_{S.BAD} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD} = \frac{1}{2} V.$$

$$\text{Do đó } V_{A.MNP} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} V = \frac{1}{16} V.$$

Cách 2:



$$\text{Do } SA \parallel NP \Rightarrow SA \parallel (MNP) \Rightarrow d(A, (MNP)) = d(S, (MNP)).$$

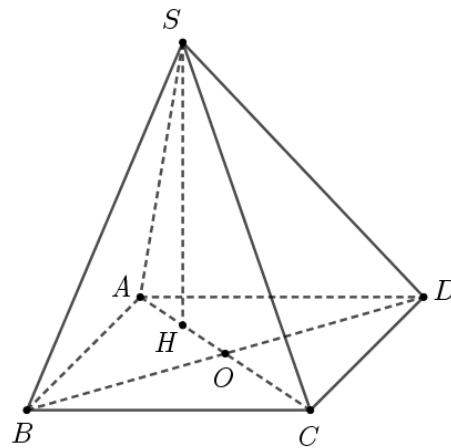
$$\text{Nên } V_{A.MNP} = V_{S.MNP} \quad (1)$$

$$\text{Ta có } \frac{V_{S.MNP}}{V_{S.BDP}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SD} \cdot \frac{SP}{SD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{S.MNP} = \frac{1}{4} V_{S.BDP} \quad (2)$$

$$\text{Lại có } S_{\triangle BDP} = \frac{1}{2} S_{\triangle BDA} = \frac{1}{4} S_{ABCD} \Rightarrow V_{S.BDP} = \frac{1}{4} V_{S.ABCD} = \frac{1}{4} V \quad (3)$$

$$\text{Từ (1),(2),(3) có } V_{A.MNP} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} V = \frac{1}{16} V.$$

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a , tâm O . Hình chiếu vuông góc của điểm S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của đoạn thẳng AO . Biết mặt phẳng (SCD) tạo với mặt đáy $(ABCD)$ một góc 60° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng



A. $\frac{9\sqrt{3}}{4} a^3.$

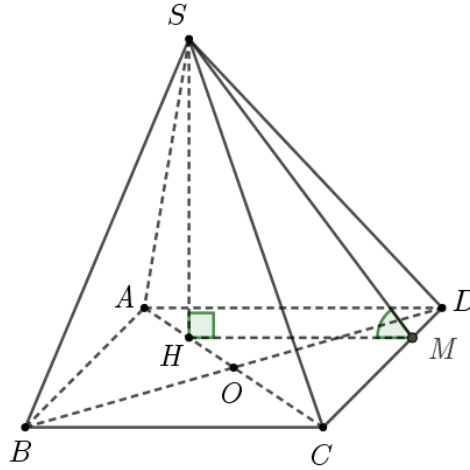
B. $\frac{\sqrt{3}}{4} a^3.$

C. $\frac{3}{4} a^3.$

D. $\frac{3\sqrt{3}}{4} a^3.$

Lời giải

Chọn B



Dựng $HM \perp CD$ tại M .

Ta có $\begin{cases} CD \perp HM \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SHM) \Rightarrow CD \perp SM$.

Khi đó $\begin{cases} (SCD) \cap (ABCD) = CD \\ (SCD) \supset SM \perp CD \\ (ABCD) \supset HM \perp CD \end{cases}$ nên góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ là góc SMH .

Theo giả thiết ta có $SMH = 60^\circ$.

Mặt khác ta lại có $\triangle CMH$ đồng dạng với $\triangle CDA$ nên

$$\frac{HM}{AD} = \frac{CH}{CA} = \frac{3}{4} \Rightarrow HM = \frac{3}{4}AD = \frac{3}{4}a.$$

Xét $\triangle SMH$ vuông tại H ta có $SH = HM \cdot \tan SMH = \frac{3a}{4} \tan 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{4}a$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \frac{3\sqrt{3}}{4}a \cdot a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^3$.

Câu 12. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $BAD = 60^\circ$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ là 45° . Gọi M là điểm đối xứng của C qua B và N là trung điểm SC . Mặt phẳng (MND) chia khối chóp thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện có đỉnh S có thể tích là V_1 , khối đa diện còn lại có thể tích V_2 . Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$

A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{12}{7}$.

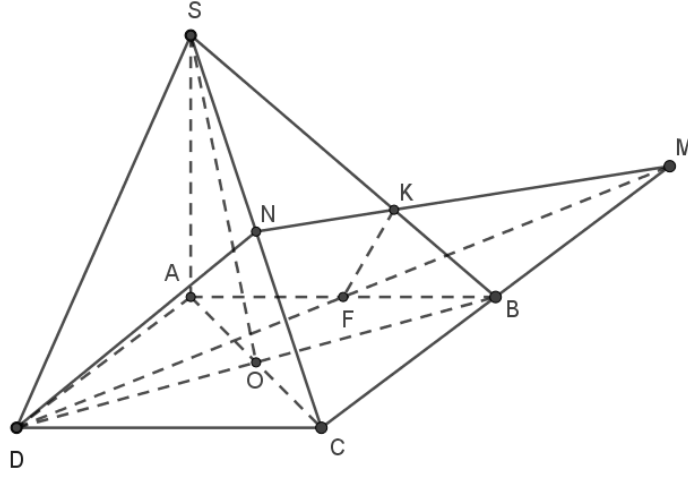
B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{3}$.

C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{5}$.

D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{5}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi $O = AC \cap BD$; $F = DM \cap AB$; $K = SB \cap MN$.

Ta có: $\angle BAD = 60^\circ$ nên tam giác ADB là tam giác đều.

K là trọng tâm $\triangle SCM \Rightarrow \frac{MK}{MN} = \frac{2}{3}$.

$$\text{Xét: } \frac{V_{M.KFB}}{V_{M.NDC}} = \frac{MK}{MN} \cdot \frac{MF}{MD} \cdot \frac{MB}{MC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \Rightarrow V_{M.KFB} = \frac{1}{6} \cdot V_{M.NDC}.$$

$$\Rightarrow V_{KFBND} = \frac{5}{6} V_{M.NDC}.$$

Mà: $V_{M.NDC} = 2V_{B.NDC}$ (vì $d(M, (NDC)) = 2d(B, (NDC))$)

Và: $2V_{N.BCD} = 2 \cdot \frac{1}{2} V_{S.BCD}$, vì $d(N, (BDC)) = \frac{1}{2} d(S, (BDC)) = \frac{1}{2} V_{S.ABCD}$

$$\Rightarrow V_2 = V_{KFBND} = \frac{5}{6} V_{M.NDC} = \frac{5}{12} V_{S.ABCD}.$$

$$\Rightarrow V_1 = V_{SADFKN} = V_{S.ABCD} - V_2 = \frac{7}{12} V_{S.ABCD}$$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{5}.$$

Câu 13. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 48cm^3 . Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm các cạnh CC', BC và $B'C'$. Tính thể tích của khối chóp $A'.MNP$.

A. 8cm^3 .

B. 12cm^3 .

C. 24cm^3 .

D. $\frac{16}{3}\text{cm}^3$.

Lời giải

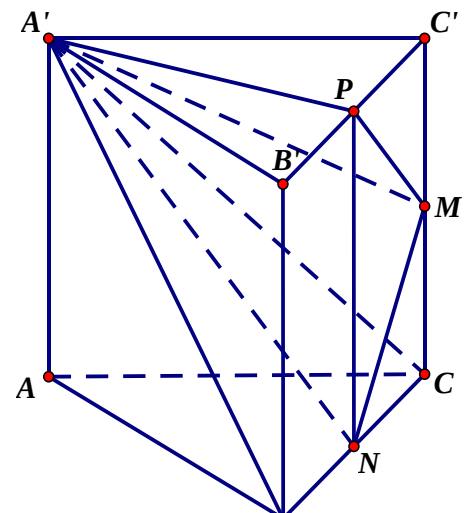
Chọn B

Gọi V là thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Ta có :

$$\begin{cases} S_{\triangle MNP} = \frac{1}{4} S_{BCC'B'} \\ d(A', (MNP)) = d(A', (BCC'B')) \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_{A'MNP} = \frac{1}{4} V_{A'BCC'B'} \quad (1)$$



$$\text{Mặt khác: } V_{A'BCC'B'} = V - V_{A'ABC} = V - \frac{1}{3}V = \frac{2}{3}V \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow V_{A'MNP} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}V = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot 48 = 8 \text{ cm}^3.$$

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là $\triangle ABC$ vuông cân ở B , $AC = a\sqrt{2}$, $SA \perp (ABC)$, $SA = a$. Gọi G là trọng tâm của $\triangle SBC$, $mp(\alpha)$ đi qua AG và song song với BC chia khối chóp thành hai phần. Gọi V là thể tích của khối đa diện không chứa đỉnh S . Tính V .

A. $\frac{5a^3}{54}$.

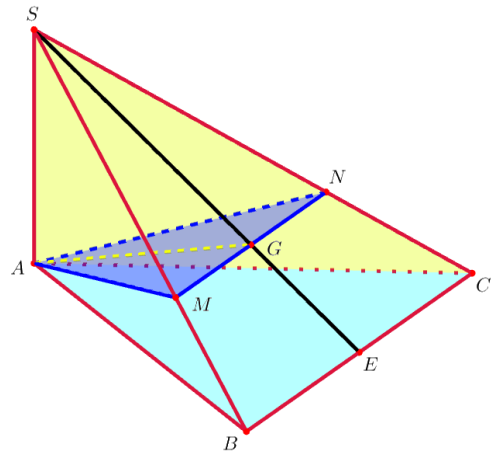
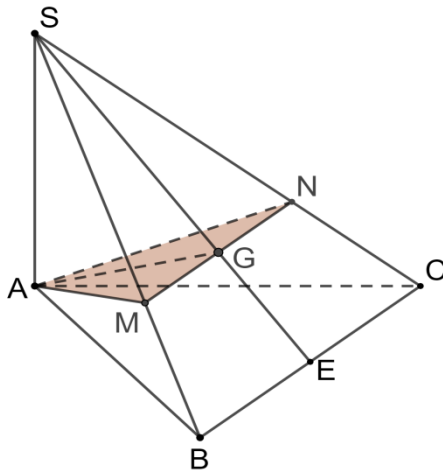
B. $\frac{2a^3}{9}$.

C. $\frac{4a^3}{27}$.

D. $\frac{4a^3}{9}$.

Lời giải.

Chọn A



Trong mặt phẳng (SBC) , qua G kẻ đường thẳng song song với BC cắt SB, SC lần lượt tại M, N . Suy ra $BC \parallel (MAN)$, $AG \subset (MAN)$. Vì vậy $(MAN) \equiv (\alpha)$.

Ta có tam giác ABC vuông cân tại B , $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow AB = BC = a$.

$$\Rightarrow V_{SABC} = \frac{1}{3} SA \cdot \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{a^3}{6}.$$

$$\text{Gọi } E \text{ là trung điểm của } BC. \text{ Ta có } MN \parallel BC \Rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SC} = \frac{SG}{SE} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Khi đó: } \frac{V_{SAMN}}{V_{SABC}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{V}{V_{SABC}} = \frac{5}{9}.$$

$$\Rightarrow V = \frac{5}{9} V_{SABC} = \frac{5}{9} \cdot \frac{a^3}{6} = \frac{5a^3}{54}.$$

Cách tính khác:

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB . Ta chứng minh được $AH \perp (SBC)$ và $BMNC$ là hình thang vuông tại B, M .

$$\text{Khi đó } V_{ABMNC} = \frac{1}{3} \cdot AH \cdot \frac{1}{2} \cdot BM \cdot (MN + BC) = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{3} \cdot \left(\frac{2a}{3} + a \right) = \frac{5a^3}{54}.$$

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{2}$. B', D' lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SD . Mặt phẳng $(AB'D')$ cắt SC tại C' . Thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$ là

A. $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

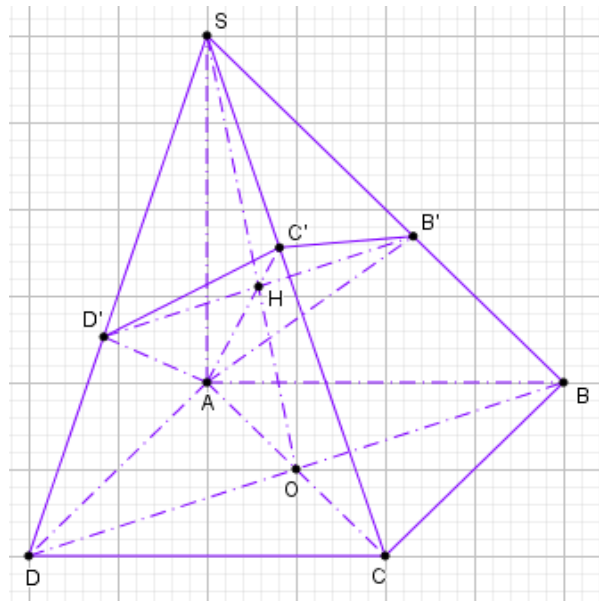
B. $V = \frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$.

C. $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{9}$.

D. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{9}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{a^3\sqrt{2}}{3} \Rightarrow V_{S.ABC} = V_{S.ACD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Có $\Delta SAB = \Delta SAD \Rightarrow \begin{cases} SB = SD = a\sqrt{3} \\ AB' = AD' \end{cases} \Rightarrow SB' = SD' = \frac{SA^2}{SB} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$

Gọi $O = AC \cap BD$, $H = B'D' \cap SO$. Khi đó $C' = AH \cap SC$.

Ta có $\frac{SB'}{SB} = \frac{SD'}{SD} = \frac{2}{3} \Rightarrow B'D' \parallel BD \Rightarrow \frac{SH}{SO} = \frac{2}{3}$ suy ra H là trọng tâm của tam giác SAC
 $\Rightarrow \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{2}$.

Ta có $\frac{V_{S.AC'D'}}{V_{S.ACD}} = \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{SD'}{SD} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{S.AC'D'} = \frac{1}{3} V_{S.ACD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{18}$.

Ta có $\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{SB'}{SB} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{S.AB'C'} = \frac{1}{3} V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{2}}{18}$.

Vậy $V_{S.AB'C'D'} = V_{S.AB'C'} + V_{S.AC'D'} = \frac{a^3\sqrt{2}}{9}$.

Câu 16. Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt thuộc các cạnh bên AA', CC' sao cho $MA = MA'$; $NC = 4NC'$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Hỏi trong bốn khối tứ diện $GA'B'C'$, $BB'MN$, $ABB'C'$ và $A'BCN$, khối tứ diện nào có thể tích nhỏ nhất?

A. Khối $ABB'C'$.

B. Khối $A'BCN$.

C. Khối $BB'MN$.

D. Khối $GA'B'C'$.

Lời giải

Chọn B

$$\Rightarrow BD // B'D' \quad (\text{do } (P) \cap (SBD) = B'D')$$

Mặt khác:

$$(P) \cap (SBD) = B'D', I \in AC' \subset (P), I \in SH \subset (SBD) \Rightarrow I \in B'D'$$

Do đó:

$$\frac{SB'}{SB} = \frac{SD'}{SD} = \frac{SI}{SH} = \frac{2}{3}$$

Ta có:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_{S.AB'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{\frac{1}{2}V_{S.AB'C'D'}}{\frac{1}{2}V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

Câu 18. Cho hình chóp đều $S.ABC$, có đáy là tam giác đều cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SC . Biết mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC) . Tính thể tích V của khối chóp $A.BCNM$.

A. $V = \frac{\sqrt{5}a^3}{32}$.

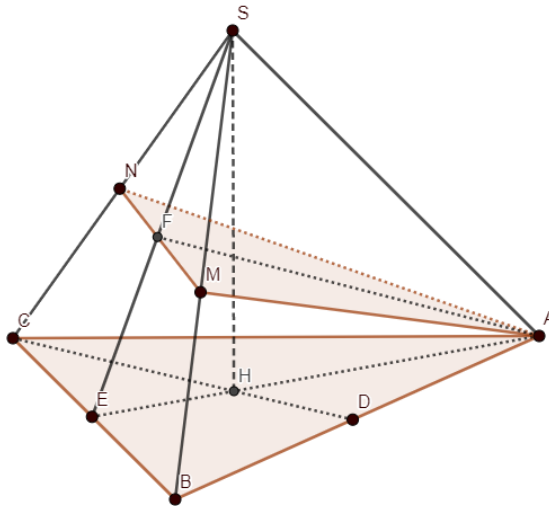
B. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{16}$.

C. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{48}$.

D. $V = \frac{\sqrt{5}a^3}{96}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BC, MN . Gọi H là trọng tâm $\triangle ABC$.

Ta có: $\triangle SBC$ cân tại $S \Rightarrow SF \perp MN$.

$$\begin{cases} SF \perp MN \\ MN = (SBC) \cap (AMN) \Rightarrow SF \perp (AMN) \\ (SBC) \perp (AMN) \end{cases}$$

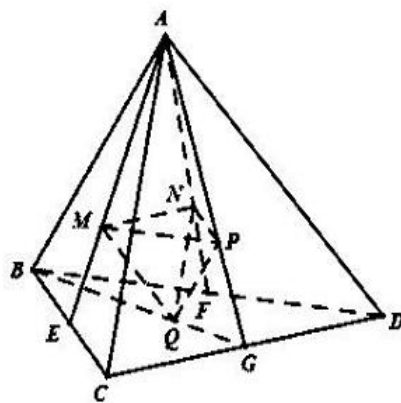
Ta có: $\triangle ASE$ có AF vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến $\Rightarrow \triangle ASE$ cân tại A .

$$\Rightarrow SA = AE = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{15}}{6}, S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

$$V_{SAMN} = \frac{1}{4}V_{SABC} \Rightarrow V_{SAMNCB} = \frac{3}{4}V_{SABC} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{15}}{6} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{5}}{32} \text{ (đvtt)}.$$

- Câu 19.** Cho khối tứ diện $ABCD$ có thể tích V . Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của BC, BD, CD , và M, N, P, Q lần lượt là trọng tâm của các tam giác $\triangle ABC, \triangle ABD, \triangle ACD, \triangle BCD$. Tính thể tích của khối tứ diện $MNPQ$ theo V .



A. $\frac{V}{9}$.

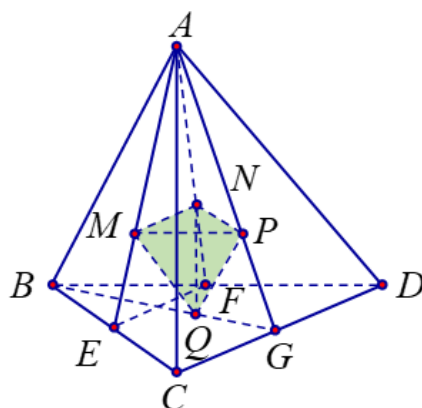
B. $\frac{V}{3}$.

C. $\frac{2V}{9}$.

D. $\frac{V}{27}$.

Lời giải

Chọn D



Do $(MNP) \parallel (BCD)$ nên: $d(Q, (MNP)) = d(E, (MNP)) = \frac{1}{2} d(A, (MNP))$ (Vì $MA = 2ME$).

Suy ra: $V_{QMNP} = \frac{1}{2} V_{AMNP}$. (1)

Mặt khác áp dụng công thức tỷ số thể tích ta có $\frac{V_{AMNP}}{V_{AEFG}} = \frac{AM}{AE} \cdot \frac{AN}{AF} \cdot \frac{AP}{AG} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$. (2)

Lại có: $\frac{V_{AEFG}}{V_{ABCD}} = \frac{1}{4}$. (3)

Từ (1), (2), (3) ta có: $V_{MNPQ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{27} \cdot \frac{1}{4} \cdot V_{ABCD} = \frac{V}{27}$. Vậy $V_{MNPQ} = \frac{V}{27}$.

- Câu 20.** Cho hình chóp tam giác $S.ABC$. Gọi M là trung điểm của SA , lấy điểm N trên cạnh SB sao cho $\frac{SN}{SB} = \frac{2}{3}$. Mặt phẳng (α) qua MN và song song với SC chia khối chóp thành hai phần. Gọi V_1 là thể tích của khối đa diện chứa đỉnh A , V_2 là thể tích của khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{16}$.

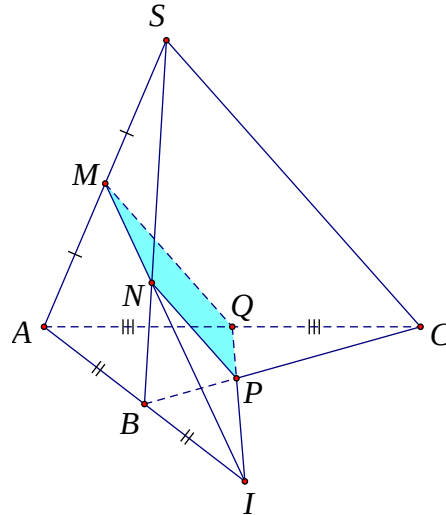
B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{18}$.

C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{11}$.

D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{9}$.

Lời giải

Chọn C



Kẻ $MQ \parallel SC, NP \parallel SC$ ta được $(MNPQ)$ chính là mặt phẳng (α) .

Ba mặt phẳng $(\alpha), (SAB), (ABC)$ giao nhau theo ba giao tuyến MN, AB, PQ đồng quy tại I .

Xét trong tam giác SAB có $\frac{MS}{MA} \cdot \frac{IA}{IB} \cdot \frac{NB}{NS} = 1 \Leftrightarrow 1 \cdot \frac{IA}{IB} \cdot \frac{1}{2} = 1$ nên B là trung điểm của IA .

Các tam giác SAI, IAC lần lượt có các trọng tâm là N, P .

Gọi thể tích khối chóp $IAMQ$ là V .

Ta có:
$$\frac{V_{IBNP}}{V_{IAMQ}} = \frac{IB}{IA} \cdot \frac{IN}{IM} \cdot \frac{IP}{IQ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9} \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{7}{9} \Rightarrow V_1 = \frac{7}{9}V \quad (1)$$

$$\frac{V_{ABSC}}{V_{AIMQ}} = \frac{AB}{AI} \cdot \frac{AS}{AM} \cdot \frac{AC}{AQ} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2 \Rightarrow V_{S.ABC} = 2V \Rightarrow V_1 + V_2 = 2V \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $V_2 = 2V - \frac{7}{9}V = \frac{11}{9}V$

Từ đó suy ra $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{11}$.

Câu 21. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích bằng 1. Gọi M, N lần lượt là các điểm trên các cạnh SB, SD sao cho $MS = MB, ND = 2NS$. Mặt phẳng (CMN) chia khối chóp đã cho thành hai phần, thể tích của phần có thể tích nhỏ hơn bằng

A. $\frac{2}{25}$.

B. $\frac{1}{12}$.

C. $\frac{3}{25}$.

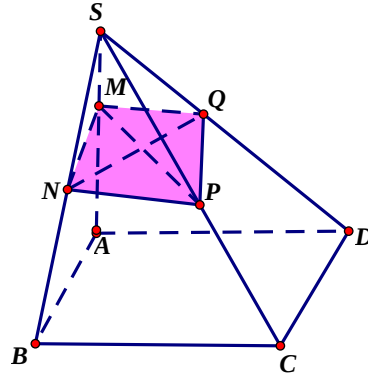
D. $\frac{5}{48}$.

Lời giải

Chọn D

Nhắc lại: Công thức tính nhanh tỉ số thể tích khối chóp có đáy là hình bình hành

+) Công thức 1:



Mặt phẳng (α) cắt các cạnh bên của hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tại các điểm M, N, P, Q không trùng với S như hình vẽ

Đặt $\frac{SM}{SA} = x; \frac{SN}{SB} = y; \frac{SP}{SC} = z; \frac{SQ}{SD} = t.$

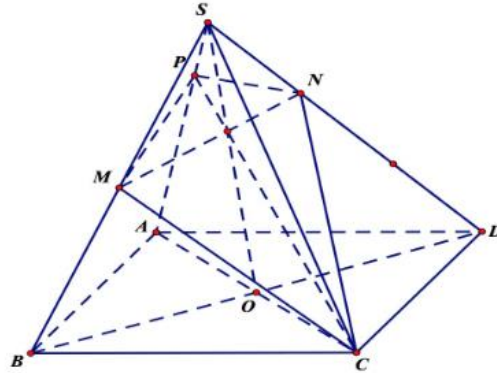
Ta có $V_{S.MNPQ} = \frac{xyzt}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right) V_{S.ABCD}$, và $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{y} + \frac{1}{t}.$

+) **Công thức 2:** Nếu $\frac{SA}{SM} = a; \frac{SB}{SN} = b; \frac{SC}{SP} = c; \frac{SD}{SQ} = d$

Ta có $\frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}} = \frac{a+b+c+d}{4a.b.c.d}$ với $a+c=b+d$

Áp dụng:

*) **Cách 1:** Áp dụng công thức 1



Ta có $x = \frac{SC}{SM} = 1; y = \frac{SM}{SB} = \frac{1}{2}; z = \frac{SP}{SA}; t = \frac{SN}{SD} = \frac{1}{3}$

và $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{y} + \frac{1}{t} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{z} = 2 + 3 \Leftrightarrow z = \frac{1}{4}.$

Khi đó $V_{S.CMPN} = \frac{xyzt}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right) V_{S.ABCD} = \frac{5}{48} V_{S.ABCD} = \frac{5}{48}$ vì $V_{S.ABCD} = 1$

*) **Cách 2:** Áp dụng công thức 2

Ta có $a = \frac{SC}{SM} = 1; b = \frac{SB}{SM} = 2; c = \frac{SA}{SP}; d = \frac{SD}{SN} = 3$

Có $a+c=b+d \Leftrightarrow 1+c=2+3 \Leftrightarrow c=4$

Khi đó $\frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}} = \frac{a+b+c+d}{4a.b.c.d} = \frac{1+2+4+3}{4.1.2.4.3} = \frac{10}{96} = \frac{5}{48} \Rightarrow V_{S.MNPQ} = \frac{5}{48} V_{S.ABCD} = \frac{5}{48}$

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SD . Mặt phẳng (α) chứa MN và cắt các tia SB, SC lần lượt tại P và Q . Đặt $\frac{SP}{SB} = x$, V_1 là thể tích của khối chóp $S.MNQP$ và V là thể tích khối chóp $S.ABCD$. Tìm x để $V = 2V_1$.

A. $x = \frac{1}{2}$.

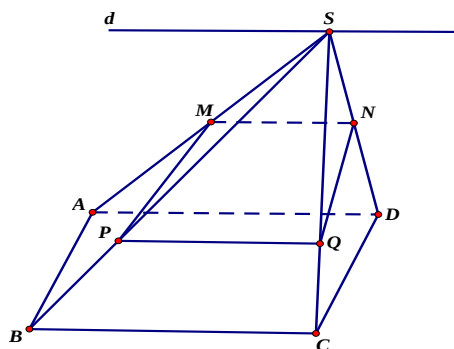
B. $x = \frac{-1 + \sqrt{33}}{4}$.

C. $x = \frac{-1 + \sqrt{41}}{4}$.

D. $x = \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B



Ta chứng minh $PQ // BC$.

Giải sử $(SBC) \cap (SAD) = d$ khi đó ta có:
$$\begin{cases} (SBC) \cap (SAD) = d \\ (SBC) \cap (ABCD) = BC \\ (SAD) \cap (ABCD) = AD \\ BC // AD \end{cases} \Rightarrow d // BC, d // AD.$$

M, N lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SD nên ta có $MN // AD, MN // d$.

Ta lại có:
$$\begin{cases} (SBC) \cap (SAD) = d \\ (SBC) \cap (\alpha) = PQ \\ (SAD) \cap (\alpha) = MN \\ d // MN \end{cases} \Rightarrow PQ // MN \Rightarrow PQ // BC.$$

Xét tam giác SBC có $PQ // BC$, $\frac{SP}{SB} = x \Rightarrow \frac{SQ}{SC} = \frac{SP}{SB} = x$.

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{V} &= \frac{V_{S.MNQP}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.MNP} + V_{S.NQP}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.MNP}}{2V_{S.ABD}} + \frac{V_{S.NQP}}{2V_{S.DCB}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{SM \cdot SN \cdot SP}{SA \cdot SB \cdot SD} + \frac{1}{2} \cdot \frac{SN \cdot SQ \cdot SP}{SD \cdot SC \cdot SB} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot x = \frac{x + 2x^2}{8}. \end{aligned}$$

Theo bài ra: $V = 2V_1 \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x + 2x^2}{8} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{33}}{4} \\ x = \frac{-1 - \sqrt{33}}{4} \end{cases}$

Mà $\frac{SP}{SB} = x \Rightarrow x > 0 \Rightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{33}}{4}$.

Cách 2

Sử dụng công thức tính nhanh tỉ lệ thể tích của khối chóp tứ giác như sau:

Cho chóp $S.ABCD$ và mặt phẳng (α) cắt các cạnh SA, SB, SC, SD của khối chóp tại các điểm M, P, Q, N với $\frac{SQ}{SC} = \frac{SP}{SB} = x, \frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SD} = \frac{1}{2}$.

Thì ta có: $\frac{V_1}{V} = \frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}} = \frac{x \cdot x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + 2 + 2 \right) = \frac{x + 2x^2}{8}$.

Theo bài ra: $V = 2V_1 \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x + 2x^2}{8} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{33}}{4} \\ x = \frac{-1 - \sqrt{33}}{4} \end{cases}$.

Mà $\frac{SP}{SB} = x \Rightarrow x > 0 \Rightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{33}}{4}$

Câu 23. Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, P, Q là các điểm lần lượt thuộc các cạnh $AA', BB', CC', B'C'$ thỏa mãn $\frac{AM}{AA'} = \frac{1}{2}, \frac{BN}{BB'} = \frac{1}{3}, \frac{CP}{CC'} = \frac{1}{4}, \frac{C'Q}{B'C'} = \frac{1}{5}$. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối tứ diện $MNPQ$ và khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Tính tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{11}{30}$.

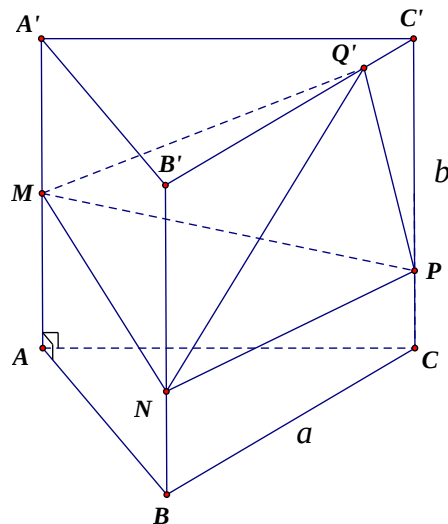
B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{11}{45}$.

C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{19}{45}$.

D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{22}{45}$.

Lời giải

Chọn B



Đặt $BC = a, CC' = b$

Diện tích tam giác NPQ' là: $S_{NPQ'} = S_{BCC'B'} - (S_{NB'Q'} + S_{PC'Q'} + S_{BCPN}) = \frac{11ab}{30}$

Suy ra: $\frac{V_{M.NPQ'}}{V_{A'.BCC'B'}} = \frac{11}{30}$. Tức là: $\frac{V_1}{V_{A'.BCC'B'}} = \frac{11}{30}$.

Mặt khác: $V_{A'.BCC'B'} + V_{A'.ABC} = V_{ABC.A'B'C'} \Leftrightarrow V_{A'.BCC'B'} + \frac{1}{3}V_2 = V_2 \Leftrightarrow V_{A'.BCC'B'} = \frac{2}{3}V_2$

Do đó: $\frac{V_1}{\frac{2}{3}V_2} = \frac{11}{30} \Leftrightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{11}{45}$.

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC . Điểm K thuộc đoạn SA . Biết mặt phẳng (MNK) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần, phần chứa đỉnh S có thể tích bằng $\frac{7}{13}$ lần phần còn lại.

Tính tỉ số $t = \frac{KA}{KS}$.

A. $t = \frac{1}{2}$.

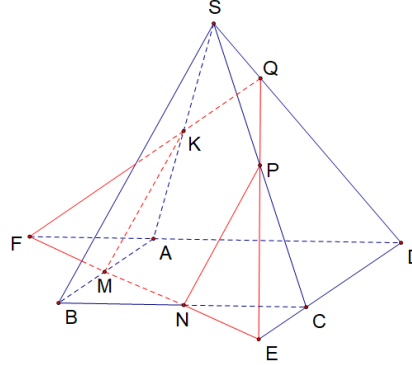
B. $t = \frac{3}{4}$.

C. $t = \frac{1}{3}$.

D. $t = \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Trong mặt phẳng $(ABCD)$, kéo dài MN cắt DA, DC lần lượt tại F, E .

Trong mặt phẳng (SAD) , gọi $FK \cap SD = Q$. Trong mặt phẳng (SCD) , gọi $QE \cap SC = P$.

Suy ra thiết diện là ngũ giác $MNPQK$ và $MN \parallel AC \parallel PK$.

Đặt $h = d(S, (ABCD))$

$$\frac{KA}{KS} = t \Rightarrow \frac{KA}{SA} = \frac{t}{t+1} \Rightarrow d(K, (ABCD)) = d(P, (ABCD)) = \frac{t}{t+1} \cdot h$$

Ta có: $FA = BN = \frac{1}{2} AD \Rightarrow \frac{FD}{FA} = 3$.

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác SAD , suy ra

$$\frac{QS}{QD} \cdot \frac{FD}{FA} \cdot \frac{KA}{KS} = 1 \Leftrightarrow \frac{QS}{QD} \cdot 3 \cdot t = 1 \Rightarrow \frac{QS}{QD} = \frac{1}{3t} \Rightarrow \frac{QD}{SD} = \frac{3t}{3t+1} \Rightarrow d(Q, (ABCD)) = \frac{3t}{3t+1} h$$

Mặt khác: $S_{FAM} = S_{NCE} = S_{BMN} = \frac{1}{4} S_{ABC} = \frac{1}{8} S_{ABCD} \Rightarrow S_{DEF} = \frac{9}{8} S_{ABCD}$

Suy ra thể tích của khối đa diện không chứa đỉnh S là

$$V = V_{QDEF} - V_{KAMF} - V_{PECN} = \frac{1}{3} \left(\frac{3t}{3t+1} h \cdot \frac{9}{8} S - \frac{t}{t+1} \cdot \frac{1}{8} S - \frac{t}{t+1} \cdot \frac{1}{8} S \right)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{27t}{8(3t+1)} - \frac{2t}{8(t+1)} \right) \cdot h \cdot S_{ABCD}$$

$$\Rightarrow V = \left(\frac{27t}{8(3t+1)} - \frac{2t}{8(t+1)} \right) V_{ABCD}$$

Phần thể tích của khối đa diện không chứa đỉnh S bằng $\frac{7}{13}$ phần còn lại suy ra thể tích của khối đa diện không chứa đỉnh S bằng $\frac{13}{20}$ thể tích khối chóp $S.ABCD$

$$\Rightarrow \frac{27t}{8(3t+1)} - \frac{2t}{8(t+1)} = \frac{13}{20} \Rightarrow t = \frac{2}{3}.$$

Câu 25. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, thể tích bằng 1. Gọi M là trung điểm cạnh SA ; các điểm E, F lần lượt là điểm đối xứng của A qua B và D . Mặt phẳng (MEF) cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại các điểm N, P . Thể tích của khối đa diện $ABCDMNP$ bằng

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{3}{4}$

D. $\frac{1}{4}$

Lời giải

Chọn A

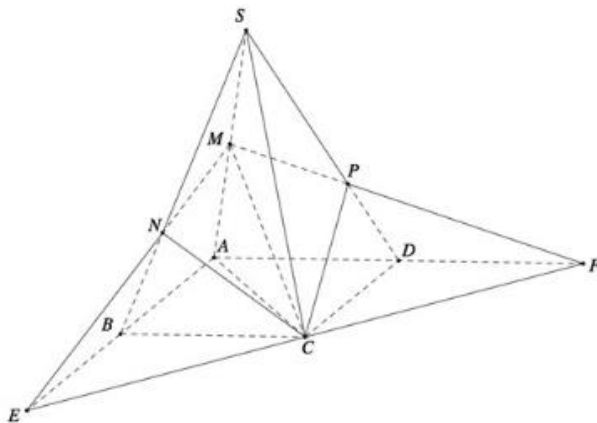
Nối hai điểm M, E cắt SB tại N , nối hai điểm M, F cắt SD tại P

Ta có $\triangle SAE; \triangle SAF$ lần lượt có N, P là trọng tâm vì N, P tương ứng là giao điểm của hai đường

trung tuyến của các tam giác đó.

Vì vậy $\frac{SN}{SB} = \frac{SP}{SD} = \frac{2}{3}$.

Mặt khác vì $CF \parallel BD, CE \parallel BD$ nên E, C, F thẳng hàng.



Ta có:

$$V_{S,MNC} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot V_{S,ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} V_{S,ABCD} = \frac{1}{6};$$

$$V_{S,MPC} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SP}{SD} \cdot V_{S,ADC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} V_{S,ABCD} = \frac{1}{6}$$

$$\text{Vì vậy } V_{S,MNCP} = V_{S,MNC} + V_{S,MPC} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Từ đó, ta có } V_{ABCD,MNP} = V_{S,ABCD} - V_{S,MNCP} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Chọn đáp án A.

Cách 2: Dùng công thức tính nhanh tỷ số thể tích

$$\text{Đặt } x = \frac{SM}{SA} = \frac{1}{2}; y = \frac{SN}{SB} = \frac{2}{3}; z = \frac{SC}{SC} = 1; t = \frac{SP}{SD} = \frac{2}{3}.$$

Thì ta có:

$$V_{S.MNCP} = \frac{1}{4}xyzt \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \right) V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{ABCDMNP} = V_{S.ABCD} - V_{S.MNCP} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Câu 26. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi M, N lần lượt nằm trên các cạnh $A'B'$ và BC sao cho $MA' = MB'$ và $NB = 2NC$. Mặt phẳng (DMN) chia khối lập phương đã cho thành hai khối đa diện. Gọi $V_{(H)}$ là thể tích khối đa diện chứa đỉnh

A , $V_{(H')}$ là thể tích khối đa diện còn lại. Tỉ số $\frac{V_{(H)}}{V_{(H'')}}$ bằng

A. $\frac{151}{209}$.

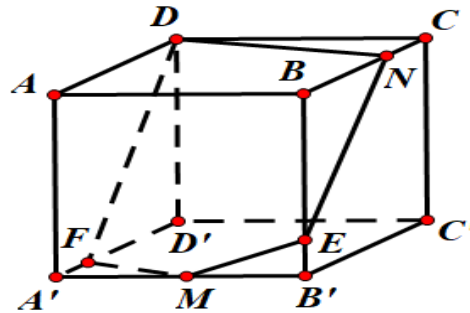
B. $\frac{151}{360}$.

C. $\frac{2348}{3277}$.

D. $\frac{209}{360}$.

Lời giải

Chọn A



Trong $(A'B'C'D')$ kẻ $MF \parallel DN$ suy ra $\Delta A'MF \sim \Delta CDN$ (g.g) do đó

$$\frac{A'F}{CN} = \frac{A'M}{CD} = \frac{1}{2} \Rightarrow A'F = \frac{a}{6} \Rightarrow D'F = \frac{5a}{6}.$$

Trong $(BCC'B')$ kẻ $NE \parallel DF$ suy ra $\Delta BNE \sim \Delta D'FD$ (g.g) do đó

$$\frac{BE}{D'D} = \frac{BN}{D'F} = \frac{4}{5} \Rightarrow BE = \frac{4a}{5} \Rightarrow B'E = \frac{a}{5}.$$

Mặt phẳng (DMN) cắt hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ theo thiết diện là ngũ giác

$$DNEMF \text{ với } EB' = \frac{a}{5} \text{ và } A'F = \frac{a}{6}.$$

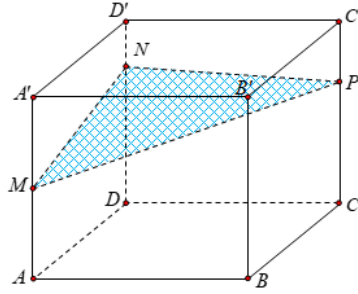
Ta có: $V_{(H')} = V_{E.B'C'D'FM} + V_{E.D'FD} + V_{E.DCC'D'} + V_{E.NCD}$

$$= \frac{1}{3} \left(a^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{6} \right) \frac{a}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{5a}{6} \cdot a + \frac{1}{3} a^3 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{4a}{5} = \frac{209}{360} a^3.$$

$$\text{Khi đó: } V_{(H)} = a^3 - V_{(H')} = \frac{151}{360} a^3.$$

$$\text{Vậy } \frac{V_{(H)}}{V_{(H')}} = \frac{151}{209}.$$

Câu 27. Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 2110. Biết $A'M = MA$, $DN = 3ND'$, $CP = 2C'P$ như hình vẽ. Mặt phẳng (MNP) chia khối hộp đã cho thành hai khối đa diện. Thể tích khối đa diện nhỏ hơn bằng



A. $\frac{5275}{6}$.

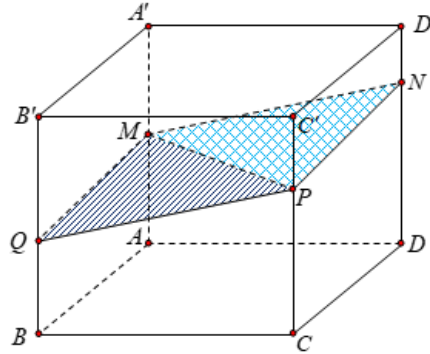
B. $\frac{5275}{12}$.

C. $\frac{7385}{18}$.

D. $\frac{8440}{9}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi Q là giao điểm của mặt phẳng (MNP) với BB' .

Giả sử $\frac{A'M}{AA'} = x$, $\frac{C'P}{CC'} = y$, $\frac{D'N}{DD'} = z$, $\frac{B'Q}{BB'} = t$. Khi đó $x + y = z + t$.

$$\frac{V_{A'B'D'.MQN}}{V_{A'B'D'.ABD}} = \frac{x + z + t}{3} \Rightarrow \frac{V_{A'B'D'.MQN}}{V_{A'B'C'D'.ABCD}} = \frac{x + z + t}{6}.$$

$$\frac{V_{C'B'D'.PQN}}{V_{C'B'D'.CBD}} = \frac{y + z + t}{3} \Rightarrow \frac{V_{C'B'D'.PQN}}{V_{A'B'C'D'.ABCD}} = \frac{y + z + t}{6}.$$

$$\Rightarrow \frac{V_{MNPQ.A'D'C'B'}}{V_{ABCD.A'D'C'B'}} = \frac{1}{2}(x + y).$$

$$\frac{V_{MNPQ.A'D'C'B'}}{V_{ABCD.A'D'C'B'}} = \frac{1}{2} \left(\frac{A'M}{AA'} + \frac{C'P}{CC'} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{5}{12}.$$

$$\Rightarrow V_{MNPQ.A'D'C'B'} = \frac{5}{12} V_{ABCD.A'D'C'B'} = \frac{5275}{6}.$$

Câu 28. Cho khối chóp S.ABCD có thể tích bằng 1, đáy ABCD là hình thang với đáy lớn AD và $AD = 3BC$. Gọi M là trung điểm của cạnh SA, N là điểm thuộc CD sao cho $ND = 3NC$. Mặt phẳng (BMN) cắt SD tại P. Thể tích khối chóp AMBNP bằng:

A. $\frac{3}{8}$

B. $\frac{5}{12}$

C. $\frac{5}{16}$

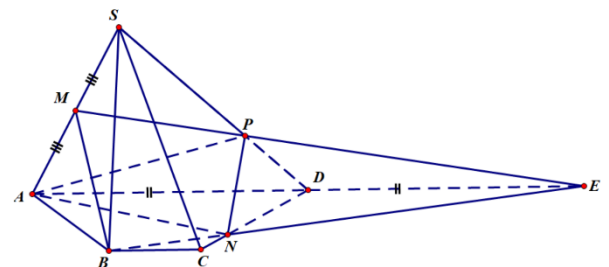
D. $\frac{9}{32}$

Lời giải

Chọn A

Gọi E là giao điểm của BN và AD. Đặt $V_1 = V_{AME}$

Ta có: $BC \parallel AD$ nên $\frac{DE}{BC} = \frac{ND}{NC} = 3 \Rightarrow DE = 3BC$



D là trung điểm của $AE \Rightarrow P$ là trọng tâm của tam giác $SAE \Rightarrow \frac{EP}{EM} = \frac{2}{3}, \frac{EN}{EB} = \frac{3}{4}$

$$\text{Ta có } \frac{V_{E.DNP}}{V_{E.MAB}} = \frac{ED}{EA} \cdot \frac{EP}{EM} \cdot \frac{EN}{EB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Mặt khác, } V_{E.NDP} = \frac{1}{3} d_{(P,(DEN))} \cdot S_{DEN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} d_{(S,(ABCD))} \cdot S_{DNE} = \frac{1}{9} d_{(S,(ABCD))} \cdot S_{DNE}$$

$$S_{AND} = S_{DNE} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot d_{(N,AD)} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot \frac{3}{4} h = \frac{3}{8} AD \cdot h \quad (h \text{ là đường cao của hình thang})$$

$$\text{Ta lại có: } S_{ABCD} = \frac{1}{2} (AD + BC) \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} AD \cdot h = \frac{2}{3} AD \cdot h \Rightarrow AD \cdot h = \frac{3}{2} S_{ABCD}$$

$$\Rightarrow S_{AND} = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{2} S_{ABCD} = \frac{9}{16} S_{ABCD}$$

$$\Rightarrow V_{E.NDP} = \frac{1}{9} d_{(S,(ABCD))} \cdot \frac{9}{16} S_{ABCD} = \frac{3}{16} \Rightarrow V_{AENP} = \frac{3}{8};$$

$$V_{E.ABM} = 4 \cdot \frac{3}{16} = \frac{3}{4} \Rightarrow V_{A.BMPC} = \frac{3}{4} - \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$$

Câu 29. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang với hai đáy là AB và CD , $AB = 2CD$. Gọi E là một điểm trên cạnh SC . Mặt phẳng (ABE) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện có thể tích bằng nhau. Tính tỉ số $\frac{SE}{SC}$.

A. $\frac{\sqrt{10}-2}{2}$.

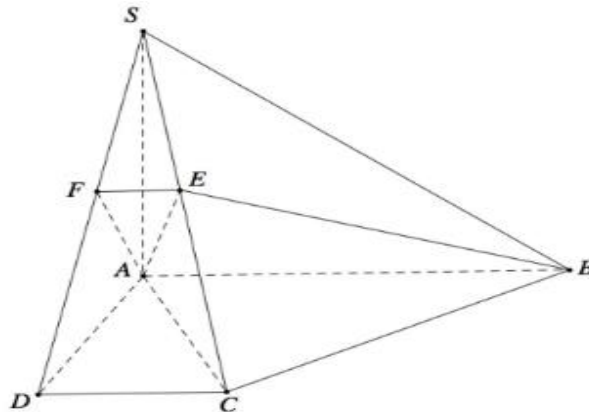
B. $\sqrt{6}-2$.

C. $\sqrt{2}-1$.

D. $\frac{\sqrt{26}-4}{2}$.

Lời giải

Chọn A



$$\text{Ta có: } \begin{cases} (ABE) \cap (SDC) = Ex \\ AB \parallel DC \end{cases} \Rightarrow Ex \parallel DC \parallel AB.$$

$$\text{Gọi } F = Ex \cap SD, \frac{SE}{SC} = x, (0 < x < 1) \Rightarrow \frac{SF}{SD} = \frac{SE}{SC} = x.$$

Do $ABCD$ là hình thang (đáy AB và CD) có $AB = 2CD$ nên

$$S_{\triangle ACB} = 2S_{\triangle ADC} \Rightarrow S_{\triangle ADC} = \frac{1}{3} S_{\square ABCD}; S_{\triangle ACB} = \frac{2}{3} S_{\square ABCD} \dots$$

Ta có:

$$\frac{V_{S.ACD}}{V_{S.ABCD}} = \frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\square ABCD}} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{S.ACD} = \frac{1}{3} V_{S.ABCD} \quad (1)$$

$$\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.ABCD}} = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\square ABCD}} = \frac{2}{3} \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{2}{3} V_{S.ABCD} \quad (2).$$

Lại có: $\frac{V_{S.AEF}}{V_{S.ACD}} = \frac{SE}{SC} \cdot \frac{SF}{SD} = x^2 \Rightarrow V_{S.AEF} = x^2 \cdot V_{S.ACD} = \frac{1}{3} x^2 \cdot V_{S.ABCD}$ (theo (1))

$$\frac{V_{S.ABE}}{V_{S.ABC}} = \frac{SE}{SC} = x \Rightarrow V_{S.ABE} = x \cdot V_{S.ABC} = \frac{2}{3} x \cdot V_{S.ABCD} \quad (\text{theo (2)}).$$

Theo bài ra mặt phẳng (ABE) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện có thể tích bằng nhau nên $V_{S.ABEF} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD}$

$$\Leftrightarrow V_{S.AEF} + V_{S.ABE} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3} x^2 + \frac{2}{3} x \right) \cdot V_{S.ABCD} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD} \Leftrightarrow \frac{1}{3} x^2 + \frac{2}{3} x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-2 + \sqrt{10}}{2} \\ x = \frac{-2 - \sqrt{10}}{2} \end{cases} \text{ Do } 0 < x < 1 \Rightarrow x = \frac{-2 + \sqrt{10}}{2}.$$

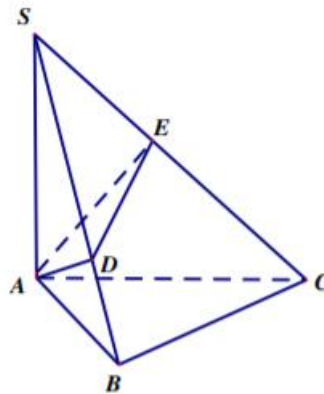
Câu 30. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , SA vuông góc với mặt đáy (ABC) , $BC = a$, góc hợp bởi (SBC) và (ABC) là 60° . Mặt phẳng (P) qua A vuông góc với SC cắt SB, SC lần lượt tại D, E . Thể tích khối đa diện $ABCED$ là

A. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{40}$.

B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$.

C. $\frac{11\sqrt{3}a^3}{120}$.

D. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{60}$.



Lời giải

Chọn C

Ta có $\begin{cases} BC \perp BA \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SBA) \Rightarrow BC \perp SB$. Do đó góc $\angle SBA$ là góc giữa (SBC) và (ABC) .

Từ đó suy ra $\angle SBA = 60^\circ$. Tam giác SBA vuông có $SA = AB \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$

Ta có $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AD$; $\begin{cases} AD \perp BC \\ AD \perp SC \end{cases} \Rightarrow AD \perp SB$.

$$\frac{V_{S.ADE}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SD}{SB} \cdot \frac{SE}{SC} = \frac{SD \cdot SB}{SB^2} \cdot \frac{SE \cdot SC}{SC^2} = \frac{SA^2}{SB^2} \cdot \frac{SA^2}{SC^2} = \frac{9a^4}{4a^2 \cdot 5a^2} = \frac{9}{20}.$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \sqrt{3}a \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{\sqrt{3}a^3}{6}.$$

$$\text{Vậy } V_{ABCD} = \frac{11}{20} \cdot V_{S.ABC} = \frac{11\sqrt{3}a^3}{120}.$$

Câu 31. Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 2019. Thể tích phần chung của hai khối $AB'CD'$ và $A'BC'D$ bằng

A. $\frac{673}{4}$.

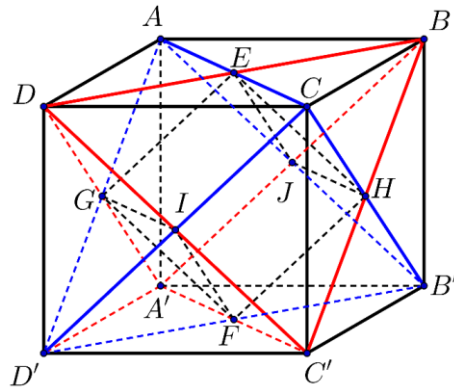
B. 673.

C. $\frac{673}{3}$.

D. $\frac{673}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi E, F, G, H, I, J lần lượt là tâm của các hình chữ nhật $ABCD, A'B'C'D', ADD'A', BCC'B', CDD'C', ABB'A'$.

Khi đó thể tích khối đa diện $IGFJEH$ là thể tích chung của hai khối $AB'CD'$ và $A'BC'D$.

Ta có: $V_{A'BC'D} = \frac{1}{3} V_{ABCD.A'B'C'D'} = 673$ và $V_{IGFJEH} = V_{A'BC'D} - V_{B.JEH} - V_{D.IGE} - V_{A'.GFJ} - V_{C'.IFH}$.

Ta lại có: $\frac{V_{B.JEH}}{V_{B.A'DC'}} = \frac{BJ}{BA'} \cdot \frac{BE}{BD} \cdot \frac{BH}{BC'} = \frac{1}{8} \Rightarrow V_{B.JEH} = \frac{1}{8} V_{A'BC'D}$.

Tương tự ta cũng chứng minh được $V_{D.IGE} = V_{A'.GFJ} = V_{C'.IFH} = \frac{1}{8} V_{A'BC'D}$.

Suy ra $V_{IGFJEH} = \frac{1}{2} V_{A'BC'D} = \frac{673}{2}$.

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Trên đường thẳng vuông góc với $(ABCD)$ tại D lấy điểm S' thỏa mãn $S'D = \frac{1}{2} SA$ và S', S ở cùng phía đối với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi V_1 là phần thể tích chung của hai khối chóp $S.ABCD$ và $S'.ABCD$. Gọi V_2 là thể tích khối chóp $S.ABCD$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{4}{9}$.

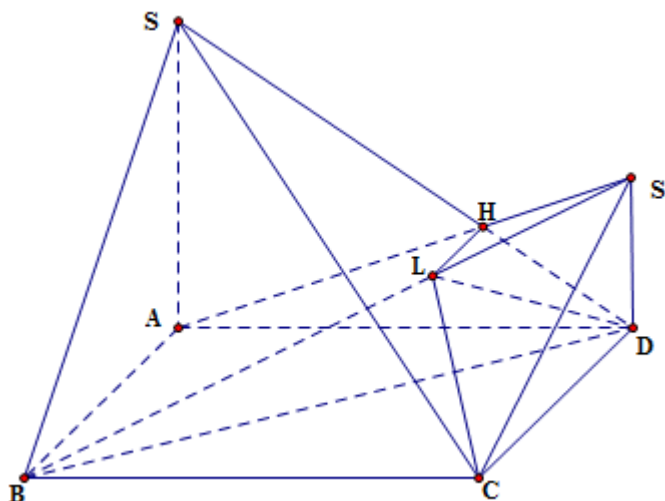
B. $\frac{7}{9}$.

C. $\frac{7}{18}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $V_2 = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD}$, $V_{S'.ABCD} = \frac{1}{3} S'D \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{2} V_2$.

Gọi $H = S'A \cap SD$, $L = S'B \cap (SCD)$ khi đó thể tích chung của hai khối chóp $S.ABCD$ và $S'.ABCD$ là thể tích khối $HLCDAB$. Do $AB // CD$ nên giao tuyến HL của hai mặt $(S'AB)$ và (SCD) phải song song với AB .

$$V_1 = V_{HLCDAB} = V_{S'.ABCD} - V_{S'.HLCD}.$$

$$\frac{S'H}{HA} = \frac{S'D}{SA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{S'H}{S'A} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{V_{S'.HLD}}{V_{S'.ABD}} = \frac{S'H \cdot S'L}{SA \cdot SB} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \Rightarrow V_{S'.HLD} = \frac{1}{9} V_{S'.ABD} = \frac{1}{18} V_{S'.ABCD}$$

$$\frac{V_{S'.LCD}}{V_{S'.BCD}} = \frac{S'L}{S'B} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{S'.LCD} = \frac{1}{3} V_{S'.BCD} = \frac{1}{6} V_{S'.ABCD}$$

$$V_{S'.HLCD} = V_{S'.HLD} + V_{S'.LCD} = \frac{1}{18} V_{S'.ABCD} + \frac{1}{6} V_{S'.ABCD} = \frac{2}{9} V_{S'.ABCD}$$

$$\Rightarrow V_1 = V_{S'.ABCD} - V_{S'.HLCD} = \frac{7}{9} V_{S'.ABCD} = \frac{7}{18} V_2$$

$$\text{Vậy } \frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{18}$$

Câu 33. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$, điểm M nằm trên cạnh CC' thỏa mãn $CC' = 3CM$. Mặt phẳng $(AB'M)$ chia khối hộp thành hai khối đa diện. Gọi V_1 là thể tích khối đa diện chứa đỉnh A' , V_2 là thể tích khối đa diện chứa đỉnh B' . Tính tỉ số thể tích V_1 và V_2 .

A. $\frac{41}{13}$.

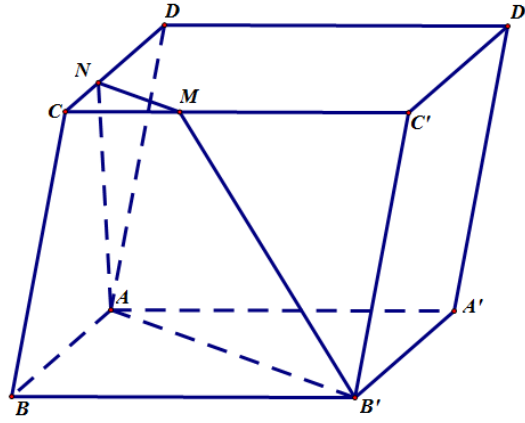
B. $\frac{27}{7}$.

C. $\frac{7}{20}$.

D. $\frac{9}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $N = (AB'M) \cap CD \Rightarrow (AB'M) \cap (CDD'C') = MN$.

Vì $AB' \parallel C'D \Rightarrow MN \parallel C'D \Rightarrow \frac{CN}{CD} = \frac{CM}{CC'} = \frac{1}{3}$.

Đặt $S_{ABB'A'} = S$, $d((ABB'A'), (CDD'C')) = h$, $V_{ABCD.A'B'C'D'} = V$. Suy ra: $V = hS$.

Lại có: $S_{ABB'} = \frac{1}{2} S_{ABB'A'} = \frac{1}{2} S$, $S_{CMN} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 S_{CDC'} = \frac{1}{18} S_{CDD'C'} = \frac{1}{18} S$.

Ta có: $V_2 = V_{CMN.BAB'} = \frac{1}{3} d((CMN), (BAB')) \cdot (S_{CMN} + \sqrt{S_{CMN} \cdot S_{BAB'}} + S_{BAB'})$
 $= \frac{1}{3} h \left(\frac{1}{18} S + \sqrt{\frac{1}{18} S \cdot \frac{1}{2} S} + \frac{1}{2} S \right) = \frac{13}{54} hS = \frac{13}{54} V \Rightarrow V_1 = V - V_2 = \frac{41}{54} V$. Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{41}{13}$.

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Trên đường thẳng qua D và song song với SA lấy điểm S' thỏa mãn $\overrightarrow{S'D} = k\overrightarrow{SA}$ với $k > 0$. Gọi V_1 là phần thể tích chung của hai khối chóp $S.ABCD$ và $S'.ABCD$. Gọi V_2 là thể tích khối chóp $S.ABCD$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{2k^2 + k}{2(k+1)^2}$.

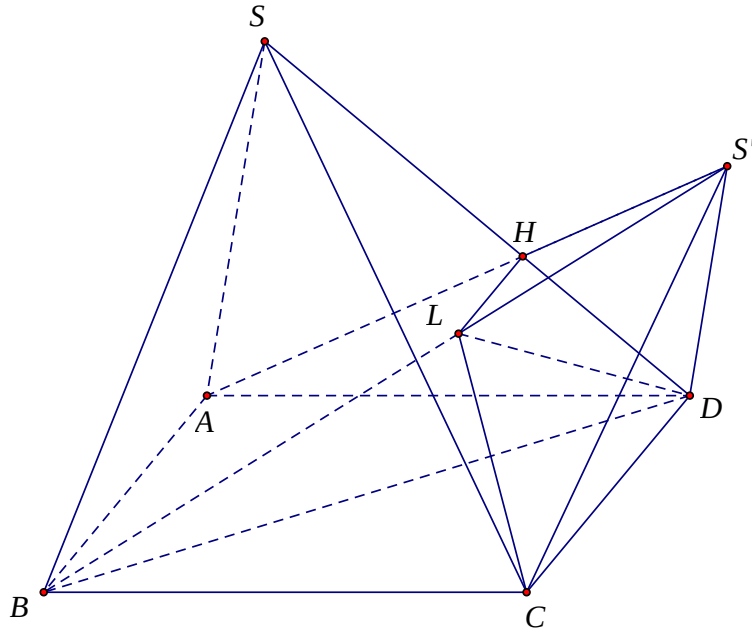
B. $\frac{3k+2}{2(k+1)^2}$.

C. $\frac{3k^2 + 2k}{2(k+1)^2}$.

D. $\frac{k}{k+1}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\frac{V_{S'.ABCD}}{V_2} = \frac{S'D}{SA} = k$.

Gọi $H = S'A \cap SD$, $L = S'B \cap (SCD)$ khi đó thể tích chung của hai khối chóp $S.ABCD$ và $S'.ABCD$ là thể tích khối $HLCDA$. Do $AB \parallel CD$ nên giao tuyến HL của hai mặt $(S'AB)$ và (SCD) phải song song với AB .

$$V_1 = V_{HLCDA} = V_{S'.ABCD} - V_{S'.HLCD}.$$

$$\frac{S'H}{HA} = \frac{S'D}{SA} = k \Rightarrow \frac{S'H}{S'A} = \frac{k}{k+1} \Rightarrow \frac{S'L}{S'B} = \frac{k}{k+1}$$

$$\frac{V_{S'.HLD}}{V_{S'.ABD}} = \frac{S'H.S'L}{SA.SB} = \frac{k^2}{(k+1)^2} \Rightarrow V_{S'.HLD} = \frac{k^2}{(k+1)^2} V_{S'.ABD} = \frac{k^2}{2(k+1)^2} V_{S'.ABCD}$$

$$\frac{V_{S'.LCD}}{V_{S'.BCD}} = \frac{S'L}{S'B} = \frac{k}{k+1} \Rightarrow V_{S'.LCD} = \frac{k}{k+1} V_{S'.BCD} = \frac{k}{2(k+1)} V_{S'.ABCD}$$

$$V_{S'.HLCD} = V_{S'.HLD} + V_{S'.LCD} = \frac{k^2}{2(k+1)^2} V_{S'.ABCD} + \frac{k}{2(k+1)} V_{S'.ABCD} = \frac{2k^2 + k}{2(k+1)^2} V_{S'.ABCD}$$

$$\Rightarrow V_1 = V_{S'.ABCD} - V_{S'.HLCD} = \frac{3k+2}{2(k+1)^2} V_{S'.ABCD} = \frac{3k^2 + 2k}{2(k+1)^2} V_2$$

$$\text{Vậy } \frac{V_1}{V_2} = \frac{3k^2 + 2k}{2(k+1)^2}.$$

Câu 35. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC , biết góc tạo bởi SG và (SBC) bằng 30° . Mặt phẳng chứa BC và vuông góc với SA chia khối chóp đã cho thành hai phần có thể tích V_1, V_2 trong đó V_1 là phần thể tích chứa điểm S . Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$

bằng

A. 6.

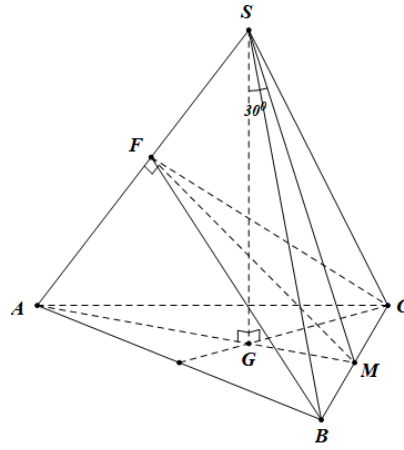
B. $\frac{1}{6}$.

C. $\frac{6}{7}$.

D. 7.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm BC , $F = SA \cap (\alpha)$, trong đó (α) là mặt phẳng chứa BC và vuông góc với SA , H là hình chiếu của G lên SM . Ta có: $SA \perp (\alpha)$, $FM \subset (\alpha)$ nên $SA \perp FM$.
 Vì $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều nên SG là đường cao hình chóp ứng với đáy (ABC) và ABC là tam giác đều.

Ta có:

- ⊙ AM vừa là đường trung tuyến, vừa là đường cao trong tam giác đều nên $AM \perp BC$.
- ⊙ $SG \perp (ABC)$, $BC \subset (ABC)$ nên $SG \perp BC$.
- ⊙ $AM \cap SG = G$ và $AM, SG \subset (SAM)$.

Suy ra $BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp GH$ (vì $GH \subset (SAM)$).

$$\text{Do đó: } \begin{cases} GH \perp SM \\ GH \perp BC \\ SM \cap BC = M \\ SM, BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow GH \perp (SBC).$$

Ta lại có: $\begin{cases} SG \cap (SBC) = S \\ SH \perp (SBC) \end{cases} \Rightarrow SH$ là hình chiếu vuông góc của SG lên (SBC) .

$$\Rightarrow (SG, (SBC)) = (SG, SH) = GSH = 30^\circ.$$

Giả sử cạnh của tam giác đều ABC là a .

Xét tam giác SGM vuông tại G , ta có: $SG = GM \cot 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \sqrt{3} = \frac{a}{2}$.

Xét tam giác SAG vuông tại G , ta có: $SA = \sqrt{AG^2 + SG^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$.

$$\text{Trong tam giác } SAM, \text{ ta có: } MF = \frac{SG \cdot AM}{SA} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{21}}{6}} = \frac{3a\sqrt{7}}{14}.$$

$$\text{Xét tam giác } AFM \text{ vuông tại } F, \text{ ta có: } FA = \sqrt{AM^2 - FM^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{3a\sqrt{7}}{14}\right)^2} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$$

$$\text{Suy ra } \frac{SF}{SA} = 1 - \frac{FA}{SA} = 1 - \frac{\frac{a\sqrt{21}}{7}}{\frac{a\sqrt{21}}{6}} = 1 - \frac{6}{7} = \frac{1}{7}.$$

$$\text{Mà } \frac{V_{S.FBC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SF}{SA} = \frac{1}{7} \Rightarrow V_1 = V_{S.FBC} = \frac{1}{7} V_{S.ABC}$$

$$\Rightarrow V_2 = \frac{6}{7} V_{S.ABC} \text{ (vì } V_{S.ABC} = V_{S.FBC} + V_{FABC} = V_1 + V_2).$$

$$\text{Do đó } \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{6}.$$

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Trong không gian lấy điểm S' thỏa mãn $\overrightarrow{SS'} = 2\overrightarrow{BC}$. Gọi V_1 là phần thể tích chung của hai khối chóp $S.ABCD$ và $S'.ABCD$. Gọi V_2 là thể tích khối chóp $S.ABCD$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{1}{9}$.

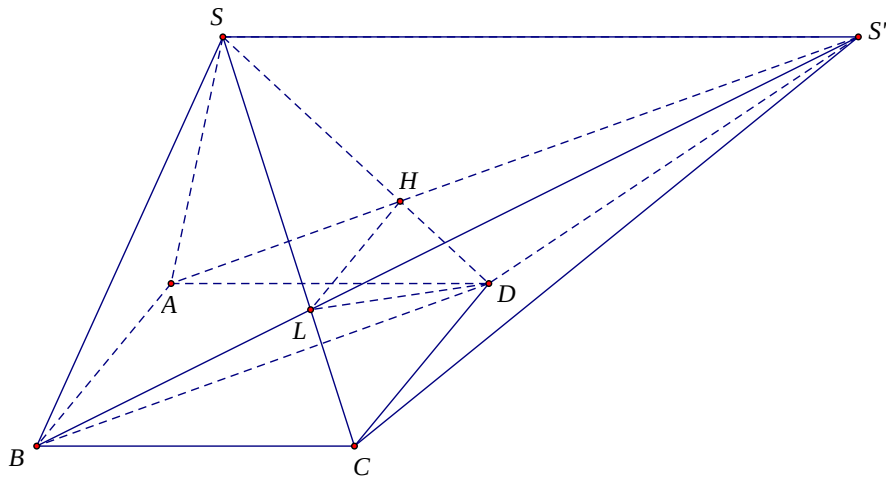
B. $\frac{5}{9}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{4}{9}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $V_{S'.ABCD} = V_2$.

Gọi $H = S'A \cap SD$, $L = S'B \cap SC$ khi đó thể tích chung của hai khối chóp $S.ABCD$ và $S'.ABCD$ là thể tích khối $HLCDAB$. Do $AB \parallel CD$ nên giao tuyến HL của hai mặt $(S'AB)$ và (SCD) phải song song với AB .

$$V_1 = V_{HLCDAB} = V_{S'.ABCD} - V_{S'.HLCD}.$$

$$\frac{S'H}{HA} = \frac{SS'}{AD} = 2 \Rightarrow \frac{S'H}{S'A} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{S'L}{S'B} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{V_{S'.HLD}}{V_{S'.ABD}} = \frac{S'H.S'L}{SA.SB} = \frac{4}{9} \Rightarrow V_{S'.HLD} = \frac{4}{9} V_{S'.ABD} = \frac{2}{9} V_{S'.ABCD}$$

$$\frac{V_{S'.LCD}}{V_{S'.BCD}} = \frac{S'L}{S'B} = \frac{2}{3} \Rightarrow V_{S'.LCD} = \frac{2}{3}V_{S'.BCD} = \frac{1}{3}V_{S'.ABCD}$$

$$V_{S'.HLCD} = V_{S'.HLD} + V_{S'.LCD} = \frac{2}{9}V_{S'.ABCD} + \frac{1}{3}V_{S'.ABCD} = \frac{5}{9}V_{S'.ABCD}$$

$$\Rightarrow V_1 = V_{S'.ABCD} - V_{S'.HLCD} = \frac{4}{9}V_{S'.ABCD} = \frac{4}{9}V_2$$

$$\text{Vậy } \frac{V_1}{V_2} = \frac{4}{9}$$

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Trong không gian lấy điểm S' thỏa mãn $\overrightarrow{SS'} = k\overrightarrow{BC}$ với $k > 0$. Gọi V_1 là phần thể tích chung của hai khối chóp $S.ABCD$ và $S'.ABCD$. Gọi V_2 là thể tích khối chóp $S.ABCD$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{2k^2 + k}{2(k+1)^2}$.

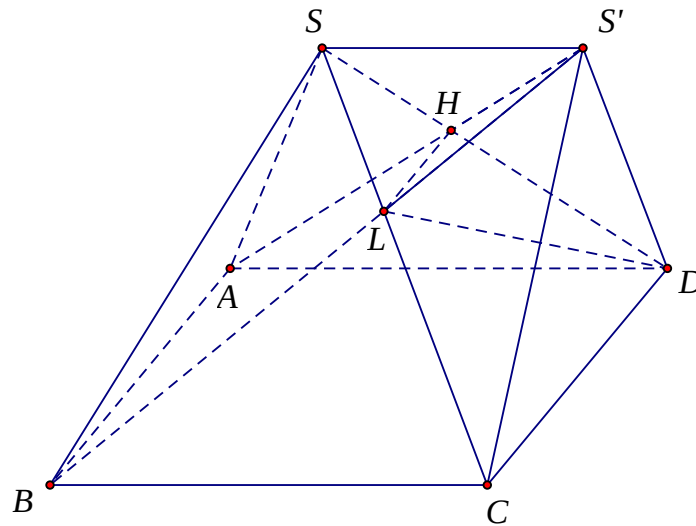
B. $\frac{3k+2}{2(k+1)^2}$.

C. $\frac{3k^2 + 2k}{2(k+1)^2}$.

D. $\frac{k}{k+1}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $V_{S'.ABCD} = V_2$.

Gọi $H = S'A \cap S'D$, $L = S'B \cap S'C$ khi đó thể tích chung của hai khối chóp $S.ABCD$ và $S'.ABCD$ là thể tích khối $HLCDAB$. Do $AB \parallel CD$ nên giao tuyến HL của hai mặt $(S'AB)$ và (SCD) phải song song với AB .

$$V_1 = V_{HLCDAB} = V_{S'.ABCD} - V_{S'.HLCD}.$$

$$\frac{S'H}{HA} = \frac{SS'}{AD} = k \Rightarrow \frac{S'H}{S'A} = \frac{k}{k+1} \Rightarrow \frac{S'L}{S'B} = \frac{k}{k+1}$$

$$\frac{V_{S'.HLD}}{V_{S'.ABD}} = \frac{S'H.S'L}{SA.SB} = \frac{k^2}{(k+1)^2} \Rightarrow V_{S'.HLD} = \frac{k^2}{(k+1)^2}V_{S'.ABD} = \frac{k^2}{2(k+1)^2}V_{S'.ABCD}$$

$$\frac{V_{S'.LCD}}{V_{S'.BCD}} = \frac{S'L}{S'B} = \frac{k}{k+1} \Rightarrow V_{S'.LCD} = \frac{k}{k+1}V_{S'.BCD} = \frac{k}{2(k+1)}V_{S'.ABCD}$$

$$V_{S'.HLCD} = V_{S'.HLD} + V_{S'.LCD} = \frac{k^2}{2(k+1)^2} V_{S'.ABCD} + \frac{k}{2(k+1)} V_{S'.ABCD} = \frac{2k^2+k}{2(k+1)^2} V_{S'.ABCD}$$

$$\Rightarrow V_1 = V_{S'.ABCD} - V_{S'.HLCD} = \frac{3k+2}{2(k+1)^2} V_{S'.ABCD} = \frac{3k+2}{2(k+1)^2} V_2$$

Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3k+2}{2(k+1)^2}$.

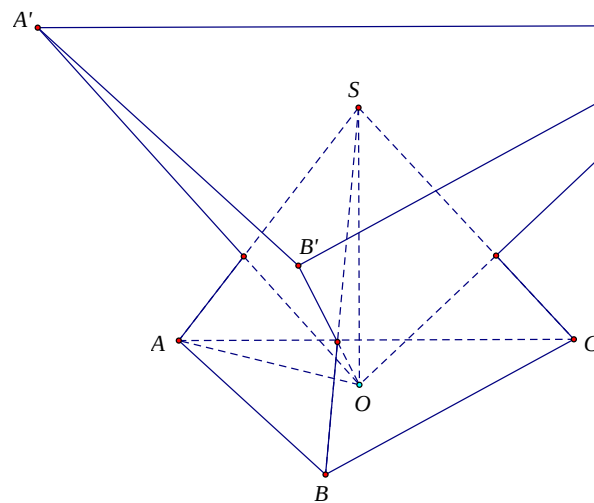
Câu 38. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bên tạo với đường cao một góc 30° , O là trọng tâm tam giác ABC . Một hình chóp tam giác đều thứ hai $O.A'B'C'$ có S là tâm của tam giác $A'B'C'$ và cạnh bên của hình chóp $O.A'B'C'$ tạo với đường cao một góc 60° (hai hình chóp có chung chiều cao) sao cho mỗi cạnh bên SA, SB, SC lần lượt cắt các cạnh bên OA', OB', OC' . Gọi V_1 là phần thể tích chung của hai khối chóp $S.ABC$ và $O.A'B'C'$. Gọi V_2 là thể tích khối chóp $S.ABC$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{9}{16}$.

B. $\frac{1}{4}$.

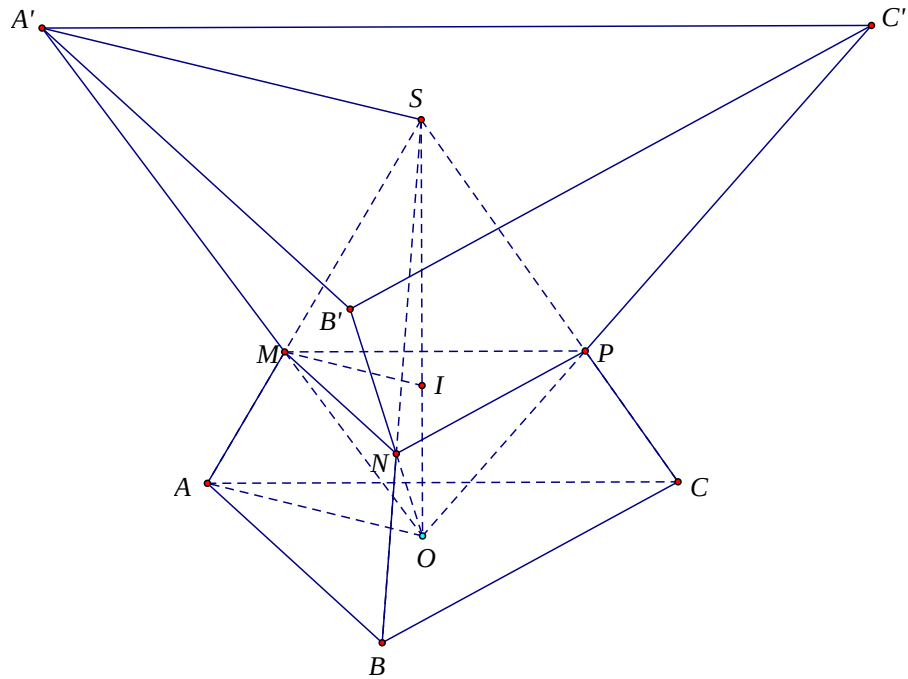
C. $\frac{27}{64}$.

D. $\frac{9}{64}$.



Lời giải

Chọn A



Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của mỗi cạnh bên SA, SB, SC tương ứng với các cạnh bên OA', OB', OC' . Phần chung của hai khối chóp $S.ABC$ và $O.A'B'C'$ là khối đa diện $SMNPO$.

Từ giả thiết ta có $(ABC) \parallel (A'B'C')$ mà ta có $MN \parallel AB \parallel A'B', NP \parallel AC \parallel A'C'$ do đó $(ABC) \parallel (MNP), (A'B'C') \parallel (MNP)$ và $\triangle MNP$ đều.

Xét các tam giác vuông SMI và OMI ta có $SI = \frac{MI}{\tan 30^\circ} = MI\sqrt{3}, OI = \frac{MI}{\tan 60^\circ} = \frac{MI}{\sqrt{3}}$ suy

$$\text{ra } \frac{SI}{OI} = 3 \text{ suy ra } \frac{SI}{SO} = \frac{MN}{AB} = \frac{3}{4}, \frac{OI}{OS} = \frac{MN}{A'B'} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{A'B'}{AB} = 3 \text{ hay } \frac{V_{O.A'B'C'}}{V_2} = 3^2 = 9 \Rightarrow V_{O.A'B'C'} = 9V_2$$

$$\text{Do đó } \frac{V_{S.MNP}}{V_2} = \left(\frac{SI}{SO}\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$$

$$\frac{V_{O.MNP}}{V_{O.A'B'C'}} = \left(\frac{OI}{OS}\right)^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64} \Rightarrow \frac{V_{O.MNP}}{V_2} = \frac{9}{64}$$

$$\text{Từ đó } \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_{OMNP} + V_{SMNP}}{V_2} = \frac{27}{64} + \frac{9}{64} = \frac{9}{16}.$$

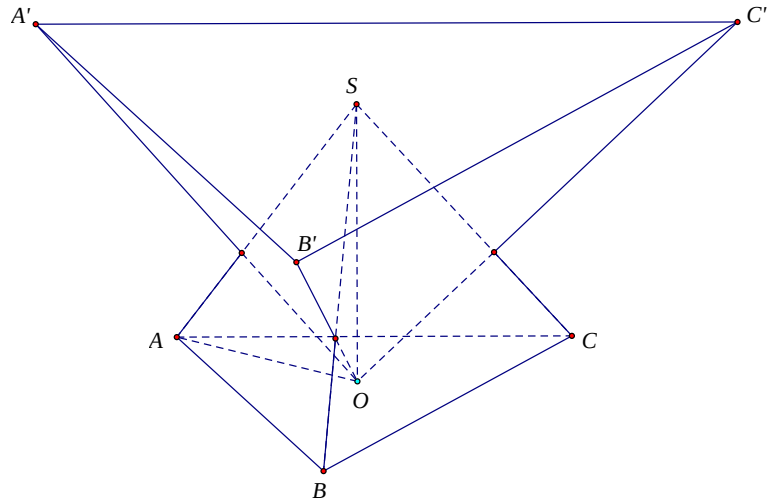
Câu 39. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$, O là trọng tâm tam giác ABC . Một hình chóp tam giác đều thứ hai $O.A'B'C'$ có S là tâm của tam giác $A'B'C'$ và cạnh bên của hình chóp $O.A'B'C'$ và $A'B' = kAB$ (hai hình chóp có chung chiều cao) sao cho mỗi cạnh bên SA, SB, SC lần lượt cắt các cạnh bên OA', OB', OC' . Gọi V_1 là phần thể tích chung của hai khối chóp $S.ABC$ và $O.A'B'C'$. Gọi V_2 là thể tích khối chóp $S.ABC$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{k^3 + k^2}{(k+1)^3}.$

B. $\frac{k^3}{(k+1)^3}.$

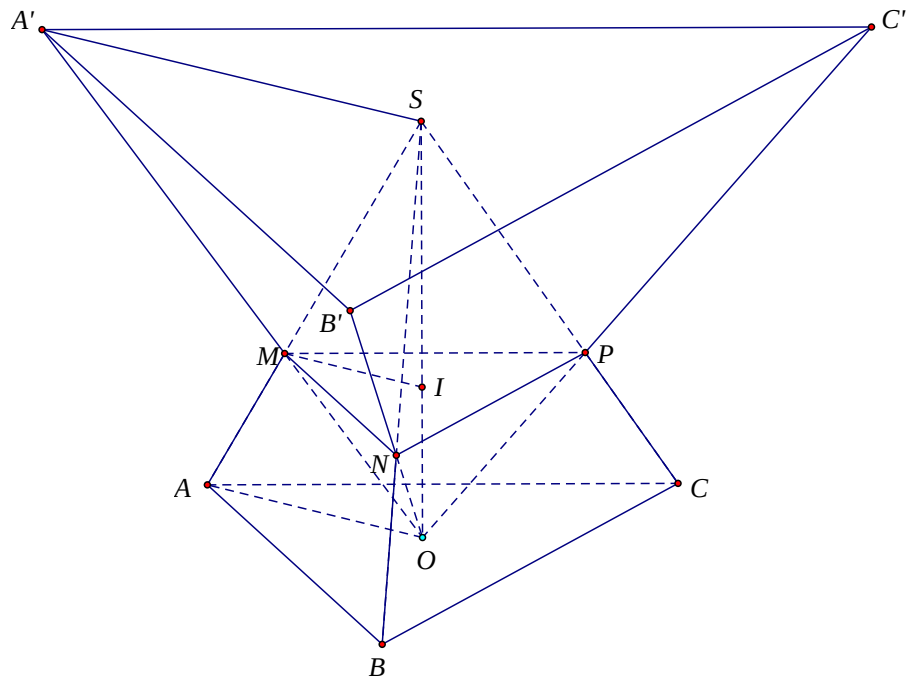
C. $\frac{1}{k+1}.$

D. $\frac{k}{k+1}.$



Lời giải

Chọn A



Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của mỗi cạnh bên SA, SB, SC tương ứng với các cạnh bên OA', OB', OC' . Phần chung của hai khối chóp $S.ABC$ và $O.A'B'C'$ là khối đa diện $SMNPO$.

Từ giả thiết ta có $(ABC) \parallel (A'B'C')$ và $MN \parallel AB \parallel A'B', NP \parallel AC \parallel A'C'$ do đó $(ABC) \parallel (MNP), (A'B'C') \parallel (MNP)$ và ΔMNP đều.

Suy ra $\frac{A'B'}{AB} = k$ hay $\frac{V_{O.A'B'C'}}{V_2} = k^2$.

Ta có $\frac{SI}{SO} = \frac{MN}{AB}, \frac{OS}{OI} = \frac{A'B'}{MN}$ suy ra $\frac{SI}{OI} = \frac{A'B'}{AB} = k$ từ đó $\frac{OI}{SO} = \frac{1}{k+1}, \frac{SI}{SO} = \frac{k}{k+1}$.

Do đó $\frac{V_{S.MNP}}{V_2} = \left(\frac{SI}{SO}\right)^3 = \left(\frac{k}{k+1}\right)^3 = \frac{k^3}{(k+1)^3}$

$$\frac{V_{O.MNP}}{V_{O.A'B'C'}} = \left(\frac{OI}{OS}\right)^3 = \left(\frac{1}{k+1}\right)^3 \Rightarrow \frac{V_{O.MNP}}{V_2} = \frac{k^2}{(k+1)^3}$$

$$\text{Từ đó } \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_{OMNP} + V_{SMNP}}{V_2} = \frac{k^3 + k^2}{(k+1)^3}.$$

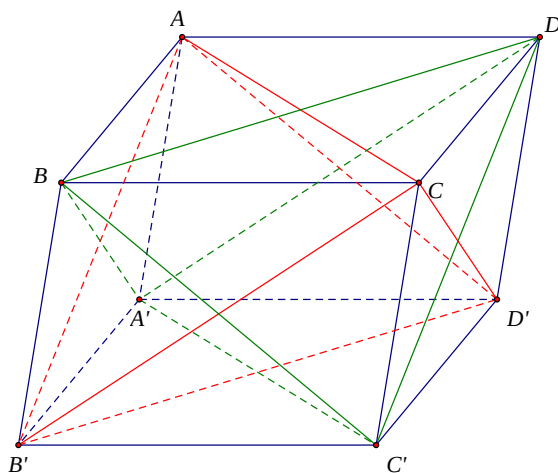
Câu 40. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi V_1 là phần thể tích chung của hai khối của hai khối tứ diện $A'BC'D$ và $AB'CD'$. Gọi V_2 là thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{6}$.

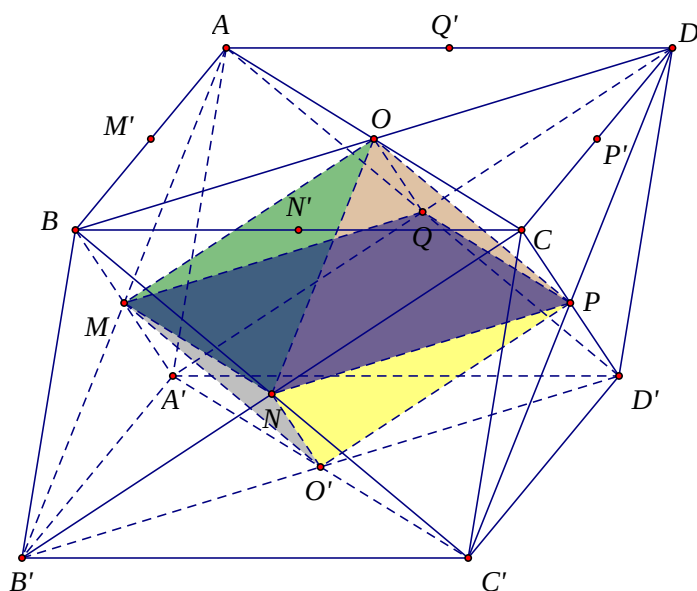
C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{1}{4}$.



Lời giải

Chọn B



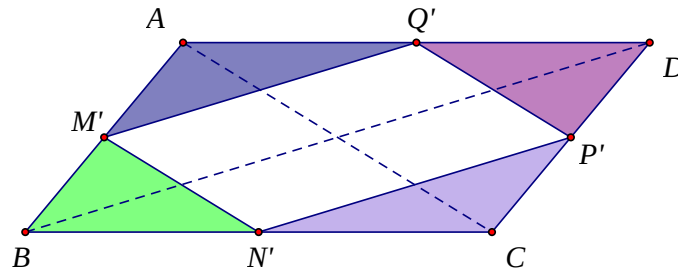
Gọi O, O', M, N, P, Q lần lượt là tâm của các hình chữ nhật $ABCD, A'B'C'D', A'B'BA, BB'C'C, CC'D'D, AA'D'D$.

Ta có phần chung của hai khối tứ diện $A'BC'D$ và $AB'CD'$ là bát diện $OMNPQO'$.

Gọi M', N', P', Q' lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA . Ta có

$$\frac{S_{MNPQ}}{S_{ABCB}} = \frac{S_{M'N'P'Q'}}{S_{ABCB}} = \frac{S_{ABCB} - S_{AM'Q'} - S_{BM'N'} - S_{CN'P'} - S_{DP'Q'}}{S_{ABCB}}$$

$$= \frac{S_{ABCB} - 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot S_{ABCB}}{S_{ABCB}} = \frac{1}{2}$$



Ngoài ra, chiều cao của khối chóp $V_{O.MNPQ}$ bằng $\frac{1}{2}$ chiều cao của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

$$\text{Suy ra } \frac{V_1}{V_2} = \frac{2V_{O.MNPQ}}{V_2} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Câu 41. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$, trên các cạnh AA', BB' lấy các điểm M, N sao cho $AA' = 3A'M$, $BB' = 3B'N$. Mặt phẳng $(C'MN)$ chia khối lăng trụ đã cho thành hai phần. Gọi V_1 là thể tích của khối chóp $C'.A'B'NM$, V_2 là thể tích của khối đa diện $ABCMNC'$.

Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng:

A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{4}{7}.$

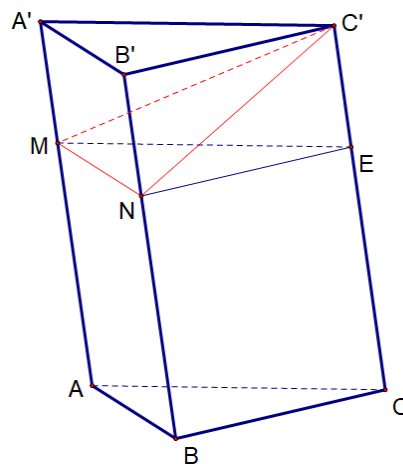
B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{7}.$

C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{7}.$

D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{7}.$

Lời giải

Chọn B



Đặt $V = V_{ABC.A'B'C'}$. Lấy điểm E trên CC' sao cho $CC' = 3C'E$.

$$\text{Suy ra } \frac{A'M}{A'A} = \frac{B'N}{B'B} = \frac{C'E}{C'C} = \frac{1}{3} \Rightarrow (MNE) \parallel (ABC).$$

Ta có: $V_{C'.MNE} = \frac{1}{3} V_{A'B'C'.MNE}$ (chóp và lăng trụ có chung đáy và đường cao)

$$\Rightarrow V_1 = \frac{2}{3} V_{A'B'C'.MNE}.$$

Mặt khác: $V_{A'B'C'.MNE} = \frac{1}{3} V$ (hai lăng trụ có chung đáy và tỉ lệ đường cao bằng

$$\frac{d(M, (A'B'C'))}{d(A, (A'B'C'))} = \frac{MA'}{AA'} = \frac{1}{3}).$$

$$\text{Suy ra } V_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} V = \frac{2}{9} V \Rightarrow V_2 = V - \frac{2}{9} V = \frac{7}{9} V \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{7}.$$

Câu 42. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$, trên các cạnh AA', BB' lấy các điểm M, N sao cho $AA' = k.A'M$, $BB' = k.B'N$ ($k > 1$). Mặt phẳng $(C'MN)$ chia khối lăng trụ đã cho thành hai phần. Gọi V_1 là thể tích của khối chóp $C'.A'B'MN$, V_2 là thể tích của khối đa diện $ABCMNC'$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng:

A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{4}{3k-2}.$

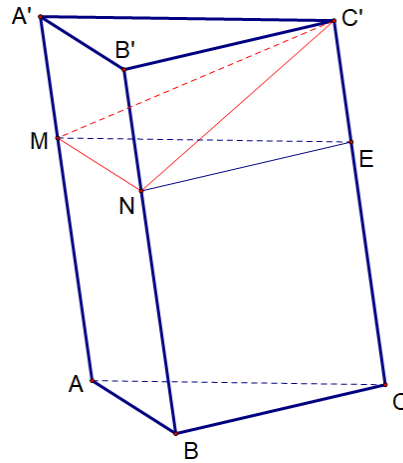
B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{3k-2}.$

C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{3k-2}.$

D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{3k-2}.$

Lời giải

Chọn B



Đặt $V = V_{ABC.A'B'C'}$. Lấy điểm E trên CC' sao cho $CC' = k.C'E$.

$$\text{Suy ra } \frac{A'M}{A'A} = \frac{B'N}{B'B} = \frac{C'E}{C'C} = \frac{1}{k} \Rightarrow (MNE) \parallel (ABC).$$

Ta có: $V_{C'.MNE} = \frac{1}{3} V_{A'B'C'.MNE}$ (chóp và lăng trụ có chung đáy, đường cao)

$$\Rightarrow V_1 = \frac{2}{3} V_{A'B'C'.MNE}.$$

Mặt khác: $V_{A'B'C'.MNE} = \frac{1}{k} V$ (hai lăng trụ có chung đáy và tỉ lệ đường cao bằng

$$\frac{d(M, (A'B'C'))}{d(A, (A'B'C'))} = \frac{MA'}{AA'} = \frac{1}{k}).$$

$$\text{Suy ra } V_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k} V = \frac{2}{3k} V \Rightarrow V_2 = V - \frac{2}{3k} V = \frac{3k-2}{3k} V \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{3k-2}.$$

Câu 43. Cho một miếng tôn hình tròn tâm O , bán kính R . Cắt bỏ một phần miếng tôn theo một hình quạt OAB và gò phần còn lại thành một hình nón đỉnh O không có đáy (OA trùng với OB). Gọi S và S' lần lượt là diện tích của miếng tôn hình tròn ban đầu và diện tích của miếng tôn còn lại. Tìm tỉ số $\frac{S'}{S}$ để thể tích của khối nón đạt giá trị lớn nhất.

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

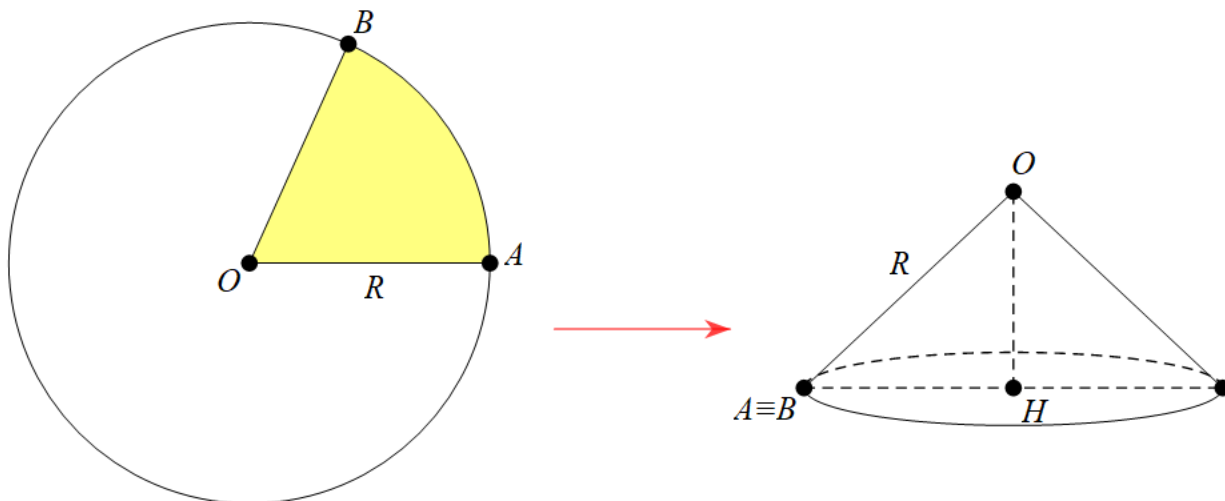
B. $\frac{1}{4}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có, diện tích của miếng tôn ban đầu là $S = \pi R^2$.

Gọi góc ở tâm của mảnh tôn còn lại là α^0 ($0^0 < \alpha^0 < 360^0$).

$\Rightarrow$ Diện tích phần tôn còn lại là: $S' = \frac{\alpha}{360} \cdot \pi R^2$.

Vậy $\frac{S'}{S} = \frac{\alpha}{360}$.

Mặt khác, xét hình nón đỉnh O có chu vi đáy là $C = \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi R = \frac{\alpha}{180} \cdot \pi R$.

$\Rightarrow$ Bán kính đáy của hình nón đỉnh O là $R' = \frac{\alpha R}{360}$ và chiều cao $OH = \sqrt{OA^2 - AH^2}$

$$= \sqrt{R^2 - R'^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{\alpha R}{360}\right)^2} = \frac{R}{360} \cdot \sqrt{360^2 - \alpha^2}.$$

$\Rightarrow$ Thể tích của khối nón đỉnh O là $V = \frac{1}{3} \cdot \pi R'^2 \cdot OH = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{\alpha R}{360}\right)^2 \cdot \frac{R}{360} \cdot \sqrt{360^2 - \alpha^2}$

$$= \frac{\pi R^3}{3 \cdot 360^3} \cdot \alpha^2 \cdot \sqrt{360^2 - \alpha^2}.$$

Xét hàm số $f(\alpha) = \alpha^2 \cdot \sqrt{360^2 - \alpha^2}$ với $0 < \alpha < 360$.

$$\text{Ta có } f'(\alpha) = 2\alpha \cdot \sqrt{360^2 - \alpha^2} - \frac{\alpha^3}{\sqrt{360^2 - \alpha^2}} = \frac{\alpha(2 \cdot 360^2 - 3\alpha^2)}{\sqrt{360^2 - \alpha^2}}.$$

$$f'(\alpha) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = \pm 120\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 120\sqrt{6} \text{ (Do } 0 < \alpha < 360).$$

Bảng biến thiên:

α	0	$120\sqrt{6}$	360	
$f'(\alpha)$		+	0	-
$f(\alpha)$			$f(120\sqrt{6})$	

Vậy $\max_{(0;360)} f(\alpha) = f(120\sqrt{6}) \Rightarrow V \text{ max khi và chỉ khi } \alpha = 120\sqrt{6} \Rightarrow \frac{S'}{S} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC .

Mặt phẳng (BMN) cắt SD tại P . Tỉ số $\frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}$ bằng:

A. $\frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{16}.$

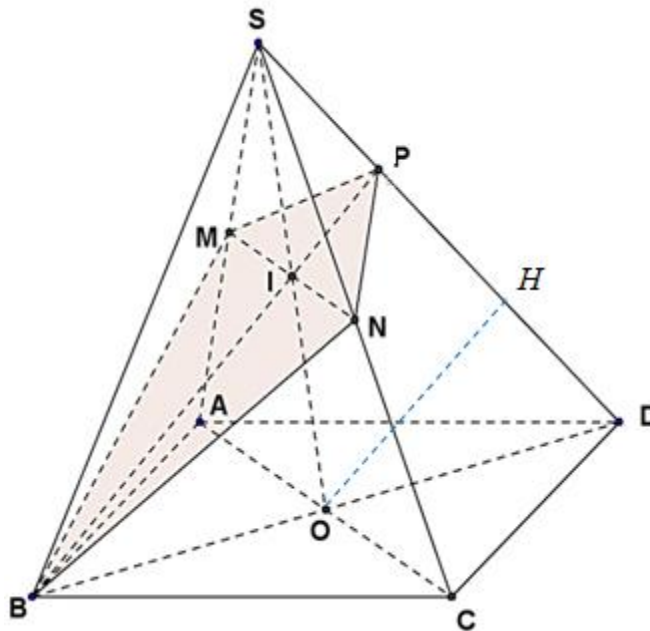
B. $\frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{6}.$

C. $\frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{12}.$

D. $\frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{8}.$

Lời giải

Chọn B



Ta có M, N là trung điểm của SA, SC nên $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SC} = \frac{1}{2}.$

Cách 1: Áp dụng định lý Menelaus cho $\triangle SOD$ ta có :

$$\frac{PS}{PD} \cdot \frac{BD}{BO} \cdot \frac{IO}{IS} = 1 \Rightarrow \frac{PS}{PD} \cdot 2 \cdot 1 = 1 \Rightarrow \frac{PS}{PD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{SP}{SD} = \frac{1}{3}.$$

Cách 2: Kẻ $OH \parallel BP$, ta có O là trung điểm của BD nên H là trung điểm của PD .

Ta có $OH \parallel IP$ mà I là trung điểm của SO nên P là trung điểm của SH .

Suy ra $SP = PH = HD \Rightarrow \frac{SP}{SD} = \frac{1}{3}.$

Theo công thức tỉ số thể tích ta có : $\frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{2V_{S.BMP}}{2V_{S.BAD}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SP}{SD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

Câu 45. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'B', AC$ và P là điểm thuộc cạnh CC' sao cho $CP = 2C'P$. Tính thể tích khối tứ diện $BMNP$ theo V .

A. $\frac{2V}{9}$.

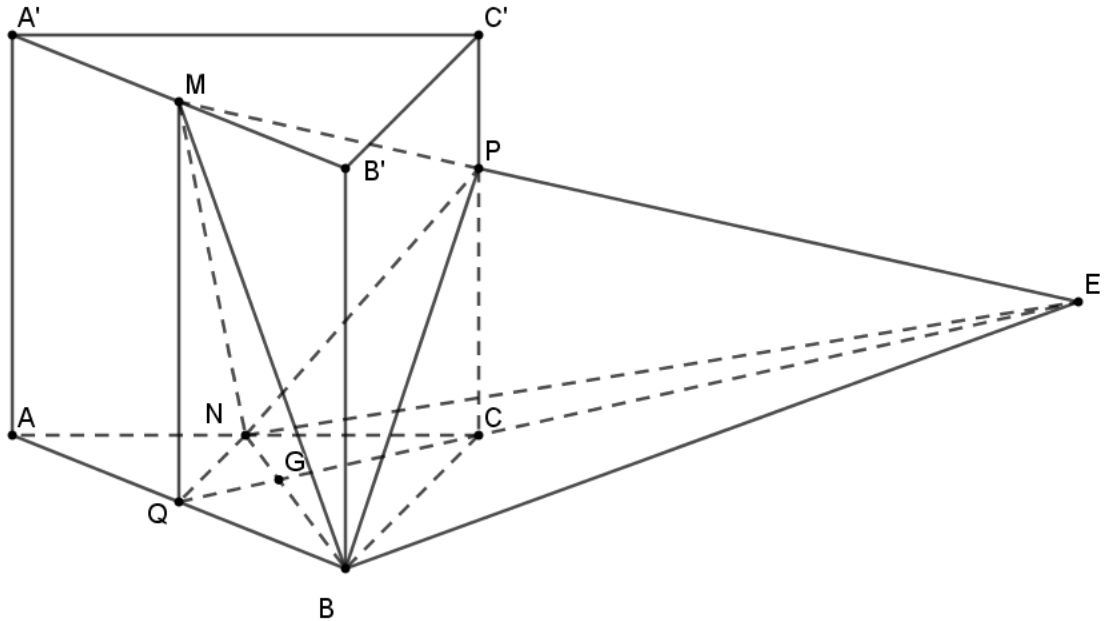
B. $\frac{V}{3}$.

C. $\frac{5V}{24}$.

D. $\frac{4V}{9}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi B là diện tích tam giác ABC , h là độ dài đường cao của hình lăng trụ, suy ra $V = B.h$. Gọi Q là trung điểm AB , G là trọng tâm tam giác ABC . Gọi V_1 là thể tích khối chóp $BMNP$, V_2 là thể tích khối chóp $MBNE$ với $E = QC \cap MP$.

Ta có $\frac{PE}{ME} = \frac{CE}{QF} = \frac{PC}{MQ} = \frac{2}{3}$ do $PC \parallel MQ$ và $PC = 2PC'$ nên $\frac{PC}{MQ} = \frac{PC}{CC'} = \frac{2}{3}$.

Ta có $\frac{V_1}{V_2} = \frac{MP}{ME} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_1 = \frac{1}{3}V_2$.

Do $GC = \frac{2}{3}QC, CE = 2QC \Rightarrow GE = GC + CE = \frac{8}{3}QC$.

Ta lại có $V_2 = \frac{1}{3}S_{BNE}.h$. Ta tính diện tích tam giác BNE theo diện tích tam giác ABC ta

có $S_{BNE} = S_{BGE} + S_{NGE} = \frac{8}{3}(S_{NQC} + S_{BQC}) = \frac{8}{3}S_{QBNC}$.

Mà $\frac{S_{AQN}}{S_{ABC}} = \frac{AQ}{AB} \cdot \frac{AN}{AC} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{QBCN} = \frac{3}{4}S_{ABC}$ do đó $S_{BNE} = \frac{8}{3}S_{QBNC} = 2B$.

Nên $V_2 = \frac{1}{3}S_{BNE}.h = \frac{1}{3}.2B.h = \frac{2V}{3} \Rightarrow V_1 = \frac{1}{3}V_2 = \frac{2V}{9}$.

Câu 46. Cho tứ diện $SABC$ có G là trọng tâm tứ diện, mặt phẳng quay quanh AG cắt các cạnh SB, SC lần lượt tại M, N . Giá trị nhỏ nhất của tỉ số $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}$ là?

A. $\frac{4}{9}$.

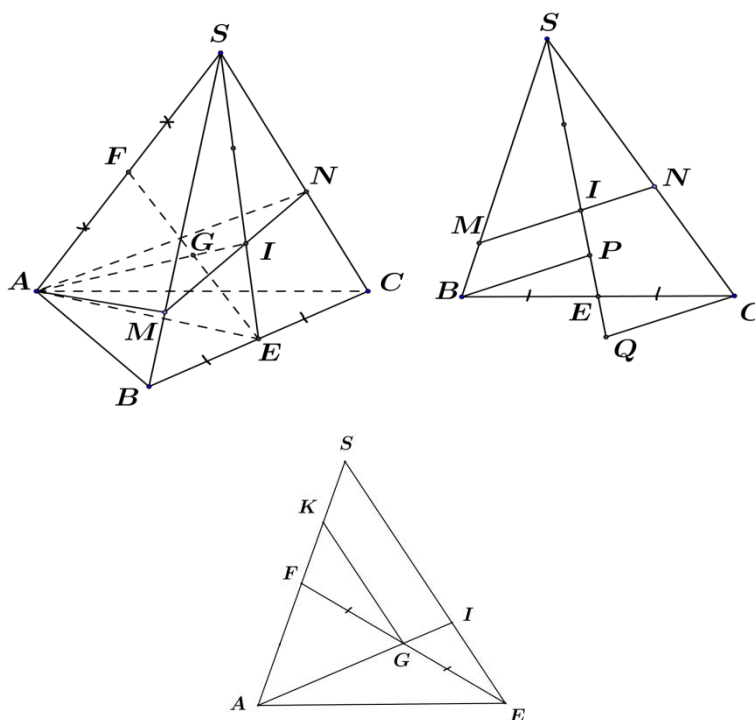
B. $\frac{3}{8}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm BC, SA, EF suy ra G là trọng tâm tứ diện $SABC$. Điểm I là giao điểm của AG và SE . Qua I dựng đường thẳng cắt các cạnh SB, SC lần lượt tại M, N . Suy ra (AMN) là mặt phẳng quay quanh AG thỏa mãn yêu cầu bài toán. Kẻ $GK \parallel SE, (K \in SA)$ suy ra K là trung điểm FS .

$$\Rightarrow \frac{KG}{SI} = \frac{AK}{AS} = \frac{3}{4}. \text{ Mà } \frac{KG}{SE} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{SI}{SE} = \frac{2}{3}.$$

Cách 1:

Kẻ $BP \parallel MN, CQ \parallel MN; (P, Q \in SE)$.

$$\text{Ta có: } \frac{SM}{SB} = \frac{SI}{SP}; \frac{SN}{SC} = \frac{SI}{SQ}.$$

$\Rightarrow \triangle BEP = \triangle CEQ \Rightarrow E$ là trung điểm $PQ \Rightarrow SP + SQ = 2SE$ (đúng cả trong trường hợp $P \equiv Q \equiv E$).

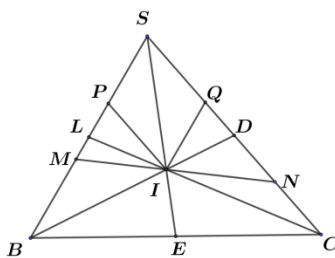
$$\text{Ta có: } \frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = 1 \cdot \frac{SI}{SP} \cdot \frac{SI}{SQ} \stackrel{AM-GM}{\geq} \frac{SI^2}{\frac{(SP+SQ)^2}{4}} = \frac{SI^2}{SE^2} = \left(\frac{SI}{SE}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $SP = SQ = SE$. Hay $P \equiv Q \equiv E \Leftrightarrow MN \parallel BC$.

Vậy tỉ số nhỏ nhất là $\frac{4}{9}$. **Chọn A**

Cách 2:

Ta chứng minh được $\frac{SB}{SM} + \frac{SC}{SN} = 3$.



Thật vậy, qua I kẻ các đường thẳng lần lượt song song SB, SC cắt SC, SB tương ứng tại D, L .

$$\text{Ta có: } \left. \begin{array}{l} \frac{SB}{IQ} = \frac{DB}{DI} = 3 \\ \frac{IQ}{SM} = \frac{NI}{NM} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{SB}{IQ} \cdot \frac{IQ}{SM} = 3 \cdot \frac{NI}{NM} \Leftrightarrow \frac{SB}{SM} = \frac{3NI}{NM}, (1).$$

$$\text{Lại có: } \left. \begin{array}{l} \frac{SC}{IP} = \frac{LC}{LI} = 3 \\ \frac{IP}{SN} = \frac{MI}{MN} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{SC}{IP} \cdot \frac{IP}{SN} = 3 \cdot \frac{MI}{MN} \Leftrightarrow \frac{SC}{SN} = \frac{3MI}{MN}, (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có: } \frac{SB}{SM} + \frac{SC}{SN} = 3 \left(\frac{NI}{NM} + \frac{MI}{MN} \right) = 3.$$

$$\text{Đặt } x = \frac{SB}{SM}; y = \frac{SC}{SN}. \text{ Suy ra } x + y = 3.$$

$$\text{Ta có: } \frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{1}{xy} \stackrel{AM-GM}{\geq} \frac{1}{\frac{(x+y)^2}{4}} = \frac{4}{9}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } x = y = \frac{3}{2} \Leftrightarrow MN \parallel BC.$$

Vậy tỉ số nhỏ nhất là $\frac{4}{9}$. **Chọn A**

Câu 47. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AC và $B'C'$. Gọi (P) là mặt phẳng qua M và song song với mặt phẳng $(A'NC)$. Mặt phẳng (P) chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành hai khối đa diện, gọi (H) là khối đa diện chứa đỉnh A . Thể tích của khối đa diện (H) bằng

A. $\frac{3}{5}$.

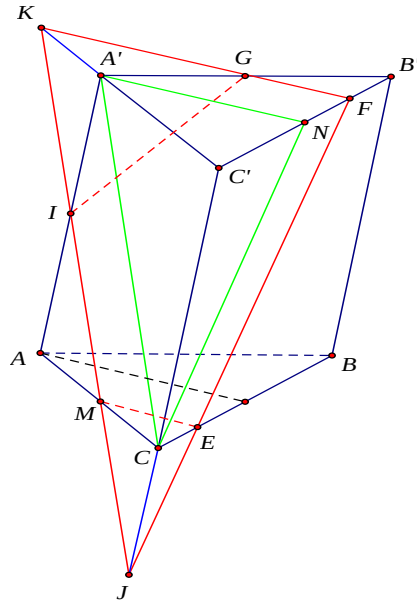
B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{2}{5}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V

- Mặt phẳng (P) qua M và song song với mặt phẳng $(A'NC)$ nên mặt phẳng (P) cắt các mặt phẳng $(ABC), (A'B'C')$ lần lượt theo các giao tuyến ME, GF ($E \in BC, G \in A'B', F \in B'C'$) cùng song song $A'N$

- Mặt phẳng (P) cắt các mặt phẳng $(AA'C'C), (BB'C'C)$ lần lượt theo các giao tuyến MI ($I \in AA'$) song song $A'C$, EF song song CN . Ba đường thẳng $MI, FG, A'C'$ đồng quy tại K , ba đường thẳng MI, EF, CC' đồng quy tại J .

- Mặt phẳng (P) chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành hai khối đa diện, gọi (T) là khối đa diện không chứa đỉnh A . Thể tích của khối đa diện (T) bằng

$$V_1 = V_{J.C'FK} - V_{J.CEM} - V_{I.A'GK}$$

$$= \frac{1}{3} S_{\Delta C'FK} \cdot JC' - \frac{1}{3} S_{\Delta CEM} \cdot JC - \frac{1}{3} S_{\Delta A'GK} \cdot IA' = \frac{9}{16} V - \frac{1}{48} V - \frac{1}{24} V = \frac{1}{2} V$$

Câu 48. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh $2a$. Gọi M là trung điểm của BB' và P thuộc cạnh DD' sao cho $DP = \frac{1}{4} DD'$. Biết mặt phẳng (AMP) cắt CC' tại N , thể tích của khối đa diện $AMNPBCD$ bằng

A. $2a^3$.

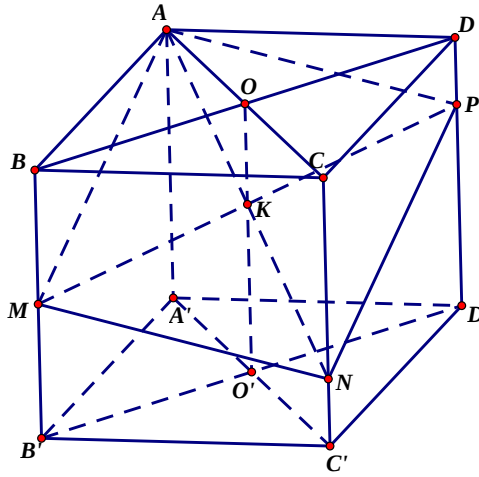
B. $3a^3$.

C. $\frac{11a^3}{3}$.

D. $\frac{9a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi O, O' lần lượt là tâm hai hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$.

Trong mặt phẳng $(BDD'B')$: gọi $K = OO' \cap MP$.

Trong mặt phẳng $(ACC'A')$: gọi $N = AK \cap CC'$. Khi đó $N = CC' \cap (AMP)$.

Ta có $OK = \frac{1}{2}(DP + BM) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a}{2}\right) = \frac{3a}{4}$. Do đó $CN = 2OK = \frac{3a}{2}$.

Diện tích hình thang $BMNC$ là: $S_{BMNC} = \frac{1}{2}(BM + CN).BC = \frac{1}{2}\left(a + \frac{3a}{2}\right).2a = \frac{5a^2}{2}$.

Thể tích khối chóp $A.BMNC$ là: $V_{A.BMNC} = \frac{1}{3}.S_{BMNC}.AB = \frac{1}{3}.\frac{5a^2}{2}.2a = \frac{5a^3}{3}$.

Diện tích hình thang $DPNC$ là: $S_{DPNC} = \frac{1}{2}(DP + CN).CD = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} + \frac{3a}{2}\right).2a = 2a^2$.

Thể tích khối chóp $A.DPNC$ là: $V_{A.DPNC} = \frac{1}{3}.S_{DPNC}.AD = \frac{1}{3}.2a^2.2a = \frac{4a^3}{3}$.

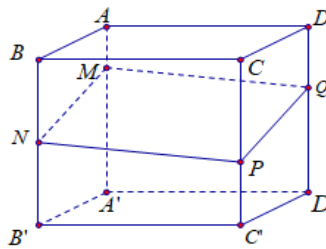
Thể tích khối đa diện $AMNPBCD$ bằng: $V = V_{A.BMNC} + V_{A.DPNC} = \frac{5a^3}{3} + \frac{4a^3}{3} = 3a^3$.

Chú ý: Công thức tính nhanh

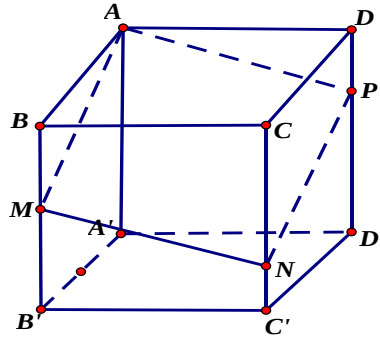
Cho mặt phẳng (α) cắt các cạnh AA', BB', CC', DD' lần lượt tại M, N, P, Q . Khi đó, ta

$$\text{có } \frac{V_{ABCD.MNPQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{1}{4}\left(\frac{AM}{AA'} + \frac{BN}{BB'} + \frac{CP}{CC'} + \frac{DQ}{DD'}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{AM}{AA'} + \frac{CP}{CC'}\right)$$

$$\text{và } \frac{AM}{AA'} + \frac{CP}{CC'} = \frac{BN}{BB'} + \frac{DQ}{DD'}.$$



Áp dụng



Áp dụng, ta có $\frac{V_{ABCDMPN}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{1}{2} \left(\frac{BM}{BB'} + \frac{DP}{DD'} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{8}$

và $\frac{AA'}{AA'} + \frac{CN}{CC'} = \frac{BM}{BB'} + \frac{DP}{DD'}$

Thể tích khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là $V = (2a)^3 = 8a^3$.

Suy ra $V_{ABCDMPN} = 3a^3$.

Câu 49. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng V . Gọi M, N, P, Q, E, F lần lượt là tâm các hình bình hành $ABCD, A'B'C'D', ABB'A', BCC'B', CDD'C', DAA'D'$. Thể tích khối đa diện có các đỉnh M, P, Q, E, F, N bằng

A. $\frac{V}{4}$.

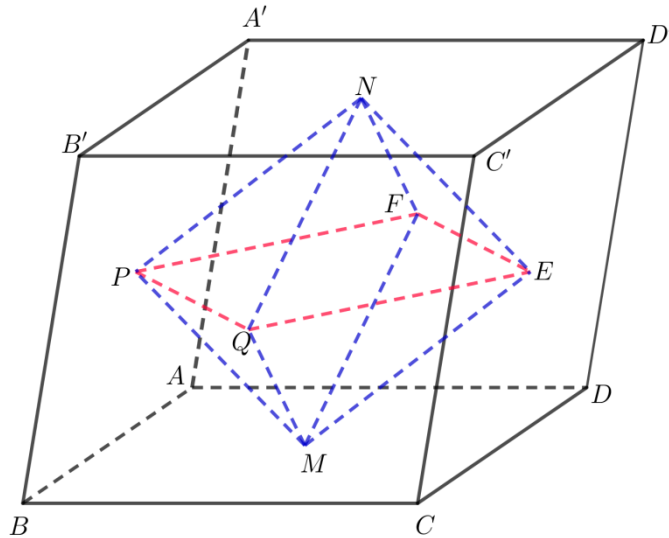
B. $\frac{V}{2}$.

C. $\frac{V}{6}$.

D. $\frac{V}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi h là chiều cao của hình hộp $ABCD.A'B'C'D' \Rightarrow V = h.S_{ABCD}$.

Thấy hình đa diện $MPQEFN$ là một bát diện nên

$$V_{MPQEFN} = 2.V_{N.PQEF} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot h.S_{PQEF} = \frac{1}{3} \cdot h.S_{PQEF}.$$

Lại có: $PQEF$ là hình bình hành và có $PQ = EF = \frac{1}{2}AC$; $QE = PF = \frac{1}{2}BD$ nên

$$S_{PQEF} = \frac{1}{2}S_{ABCD}. \text{ Do đó: } V_{MPQEFN} = \frac{1}{3}h.S_{PQEF} = \frac{1}{3}h \cdot \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{6}h.S_{ABCD} = \frac{V}{6}.$$

Câu 50. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = \sqrt{6}$, $AD = \sqrt{3}$, $A'C = 3$ và mặt phẳng $(AA'C'C)$ vuông góc với đáy. Biết mặt phẳng $(AA'C'C)$ và $(AA'B'B)$ tạo với nhau góc α , thỏa mãn $\tan \alpha = \frac{3}{4}$. Thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ bằng

A. $V = 10$.

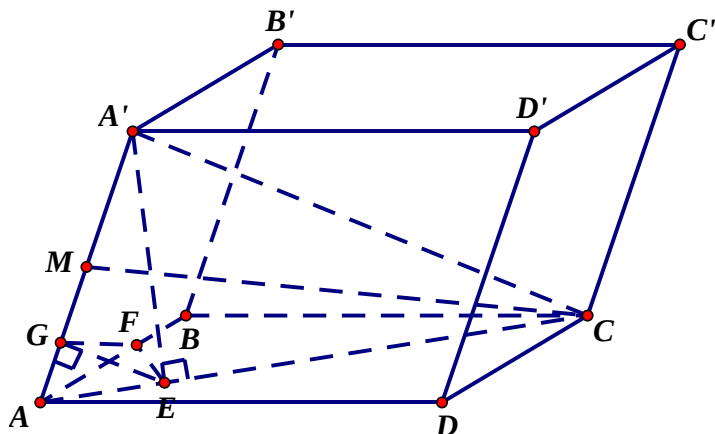
B. $V = 8$.

C. $V = 12$.

D. $V = 6$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm của AA' .

Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{6 + 3} = 3 = A'C$. Do đó tam giác $AA'C$ cân tại C .

Dựng $A'E \perp AC$, do $(AA'C'C)$ vuông góc với đáy nên $A'E \perp (ABCD)$.

Lấy $F \in AB$ sao cho $FE \perp AC$, mà $FE \perp A'E$ nên $FE \perp (ACC'A')$, suy ra $FE \perp AA'$.

Dựng $EG \perp AA'$ mà $FE \perp AA'$ nên $FG \perp AA'$. Do đó góc giữa mặt phẳng $(AA'C'C)$ và $(AA'B'B)$ là góc EGF .

$$\text{Ta có } \tan EGF = \frac{EF}{EG} = \frac{3}{4} \Rightarrow EG = \frac{4}{3}EF, \text{ mà } \tan EAF = \frac{EF}{EA} = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} \Rightarrow EA = \sqrt{2}EF.$$

$$\text{Từ đó suy ra } \sin GAE = \frac{GE}{AE} = \frac{\frac{4}{3}EF}{\sqrt{2}EF} = \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{MC}{AC} \Rightarrow MC = 2\sqrt{2}.$$

$$AM = \sqrt{AC^2 - MC^2} = \sqrt{9 - 8} = 1 \Rightarrow AA' = 2.$$

$$\text{Ta có } \sin GAE = \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{A'E}{AA'} = \frac{A'E}{2} \Rightarrow A'E = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{Vậy thể tích khối lăng trụ } ABCD.A'B'C'D' \text{ là } V = A'E \cdot AB \cdot BC = \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{3} = 8.$$

Câu 51. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi K là trung điểm của SC . Mặt phẳng qua AK cắt các cạnh SB , SD lần lượt tại M và N . Gọi V_1 , V theo thứ tự là thể tích khối chóp $S.AMKN$ và khối chóp $S.ABCD$. Giá trị nhỏ nhất của tỉ số $\frac{V_1}{V}$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

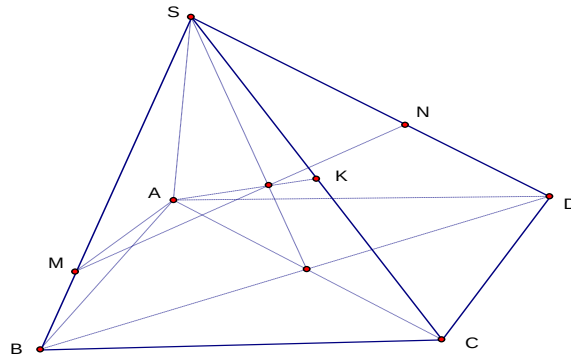
B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{3}{8}$.

Lời giải

Chọn C



Đặt $a = \frac{SA}{SM} = 1$, $b = \frac{SB}{SM}$, $c = \frac{SC}{SK} = 2$, $d = \frac{SD}{SN}$, có $a + c = 3$.

Áp dụng công thức tính nhanh tỉ lệ thể tích: $\frac{V_1}{V} = \frac{V_{S.AMKN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{a+b+c+d}{4abcd}$, với $a+c=b+d$.

Suy ra: $b+d=3$. Khi đó $\frac{V_1}{V} = \frac{6}{8bd} = \frac{3}{4bd} \geq \frac{3}{4\left(\frac{b+d}{2}\right)^2} = \frac{1}{3}$, dấu bằng xảy ra khi $b=d=\frac{3}{2}$.

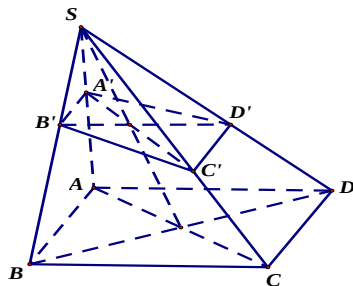
Vậy giá trị nhỏ nhất của tỉ số $\frac{V_1}{V}$ bằng $\frac{1}{3}$ khi $\frac{SB}{SM} = \frac{SD}{SN} = \frac{3}{2}$.

Chứng minh bài toán:

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Các điểm A' , B' , C' , D' lần lượt nằm trên các cạnh SA , SB , SC , SD . Đặt $a = \frac{SA}{SA'}$, $b = \frac{SB}{SB'}$, $c = \frac{SC}{SC'}$, $d = \frac{SD}{SD'}$.

Chứng minh rằng: $\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{a+b+c+d}{4abcd}$ và $a+c=b+d$.

Lời giải



Ta có: $ABCD$ là hình bình hành nên: $S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABD} \Rightarrow V_{S.ABCD} = 2V_{S.ABD}$.

Khi đó: $\frac{V_{S.A'B'D'}}{V_{S.ABD}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SD'}{SD} = \frac{1}{abd} \Rightarrow V_{S.A'B'D'} = \frac{1}{abd} \cdot V_{S.ABD} = \frac{1}{2abd} \cdot V_{S.ABCD}$.

$\frac{V_{S.B'C'D'}}{V_{S.BCD}} = \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{SD'}{SD} = \frac{1}{bcd} \Rightarrow V_{S.B'C'D'} = \frac{1}{bcd} \cdot V_{S.BCD} = \frac{1}{2bcd} \cdot V_{S.ABCD}$.

Suy ra: $V_{S.A'B'C'D'} = V_{S.A'B'D'} + V_{S.B'C'D'} = \frac{1}{2abd} \cdot V_{S.ABCD} + \frac{1}{2bcd} \cdot V_{S.ABCD} = \frac{(a+c)V_{S.ABCD}}{2abcd}$ (1).

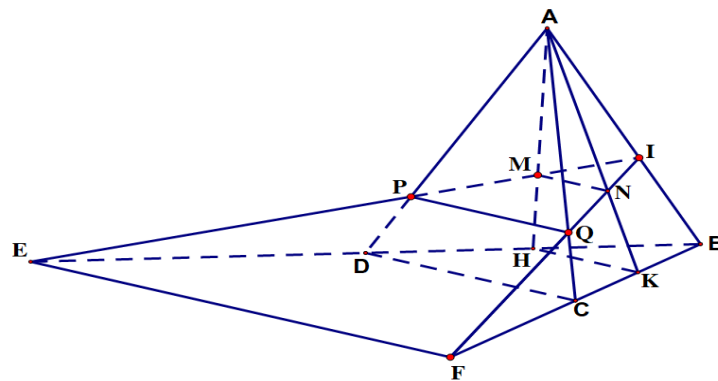
Chứng minh tương tự như trên ta cũng có: $V_{S.A'B'C'D'} = \frac{(b+d)V_{S.ABCD}}{2abcd}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $a+c=b+d$.

Vậy: $\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{a+b+c+d}{4abcd}$.

A. $V = \frac{9\sqrt{2}a^3}{320}$. **B.** $V = \frac{3\sqrt{2}a^3}{320}$. **C.** $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{96}$. **D.** $V = \frac{3\sqrt{2}a^3}{80}$.

Chọn A


$$\frac{AM}{MH} \cdot \frac{HE}{EB} \cdot \frac{BI}{IA} = 1 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{BI}{IA} = 1 \Leftrightarrow \frac{BI}{IA} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow AI = \frac{3}{5} AB$$

Gọi $P = EM \cap AD$. Vì $MN \parallel CD$ nên áp dụng định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng Ta có $PQ \parallel EF \parallel CD$.

$$\frac{AP}{PD} \cdot \frac{DE}{EB} \cdot \frac{BI}{IA} = 1 \Leftrightarrow \frac{AP}{PD} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1 \Leftrightarrow \frac{AP}{PD} = 3.$$

Có $ABCD$ là tứ diện đều cạnh bằng $a \Rightarrow V_{ABCD} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$

$$\frac{V_{APQI}}{V_{ABCD}} = \frac{AP}{AD} \cdot \frac{AQ}{AC} \cdot \frac{AI}{AB} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{27}{80} \Rightarrow V_{APQI} = \frac{27}{80} V_{ABCD} = \frac{27}{80} \cdot \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}.$$

Vậy $V_{APQI} = \frac{9\sqrt{2}a^3}{320}$.

Câu 53. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và có thể tích là V . Gọi P là điểm trên cạnh SC sao cho $SC = 5SP$. Một mặt phẳng (α) qua AP cắt hai cạnh SB và SD lần lượt tại M và N . Gọi V_1 là thể tích của khối chóp $S.AMPN$. Tìm giá trị lớn nhất của $\frac{V_1}{V}$.

A. $\frac{1}{15}$.

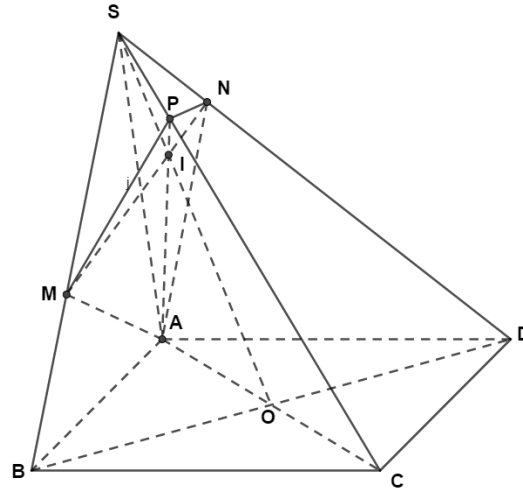
B. $\frac{1}{25}$.

C. $\frac{3}{25}$.

D. $\frac{2}{15}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\frac{V_1}{V} = \frac{V_{S.AMPN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.APN} + V_{S.APM}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.APN}}{2V_{S.ACD}} + \frac{V_{S.APM}}{2V_{S.ABC}} = \frac{1}{2} \left(\frac{SP}{SC} \cdot \frac{SN}{SD} + \frac{SP}{SC} \cdot \frac{SM}{SB} \right)$
 $= \frac{1}{10} \left(\frac{SN}{SD} + \frac{SM}{SB} \right)$. Đặt $a = \frac{SM}{SB}$, $b = \frac{SN}{SD}$, $0 < a, b \leq 1$.

Gọi O là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành ABCD.

Trong mặt phẳng (SAC), $AP \cap SO = I$.

Xét tam giác SOC có $\frac{PS}{PC} \cdot \frac{AC}{AO} \cdot \frac{IO}{IS} = 1 \Leftrightarrow \frac{IO}{IS} = 2 \Rightarrow \frac{SI}{SO} = \frac{1}{3}$.

Xét tam giác SBD có $\frac{S_{SMN}}{S_{SBD}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SD} = ab$.

Mặt khác, $\frac{S_{SMN}}{S_{SBD}} = \frac{S_{SMI} + S_{SNI}}{S_{SBD}} = \frac{S_{SMI}}{2S_{SBO}} + \frac{S_{SNI}}{2S_{SOD}} = \frac{1}{2} \left(\frac{SM}{SB} \cdot \frac{SI}{SO} + \frac{SN}{SD} \cdot \frac{SI}{SO} \right) = \frac{1}{6}(a+b)$

Vậy, $\frac{1}{6}(a+b) = ab$, do $a = \frac{1}{6}$ không thỏa mãn hệ thức nên $b = \frac{a}{6a-1}$, do $0 < b \leq 1$ nên

$0 < \frac{a}{6a-1} \leq 1 \Leftrightarrow a \geq \frac{1}{5}$. Từ đó, $\frac{V_1}{V} = \frac{1}{10}(a+b) = \frac{1}{10} \left(a + \frac{a}{6a-1} \right)$ với $\frac{1}{5} \leq a \leq 1$.

Xét hàm số $y = f(x) = x + \frac{x}{6x-1}$ với $x \in \left[\frac{1}{5}; 1 \right]$. $y' = 1 - \frac{1}{(6x-1)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow (6x-1)^2 = 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0(1) \\ x=\frac{1}{3} \end{cases}$. Ta có $f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{6}{5}$, $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$, $f(1) = \frac{6}{5}$. Vậy $\max_{x \in \left[\frac{1}{5}; 1 \right]} f(x) = f(1) = \frac{6}{5}$.

Từ đó, giá trị lớn nhất của $\frac{V_1}{V}$ bằng $\frac{3}{25}$ khi M trùng B hoặc N trùng D.

Cách 2:

* Đặt $a = \frac{SA}{SA} = 1$; $b = \frac{SB}{SM}$; $c = \frac{SC}{SP} = 5$; $d = \frac{SD}{SN}$.

* Ta có $a+c=b+d \Leftrightarrow 1+5=b+d \Leftrightarrow d=6-b$.

* $\frac{V_{S.AMPN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{a+b+c+d}{4abcd} = \frac{1+b+5+6-b}{4 \cdot 1 \cdot b \cdot 5 \cdot (6-b)} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{-b^2+6b}$.

* Xét $f(b) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{-b^2 + 6b}; b \in [1; 5]$ (do $b, d \geq 1$).

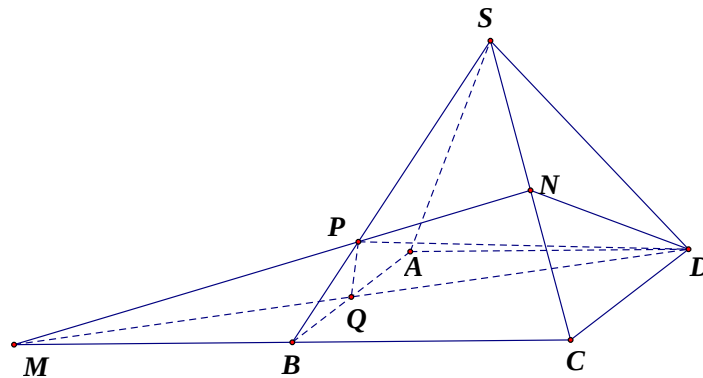
$f'(b) = -\frac{3}{5} \cdot \frac{-2b+6}{(-b^2+6b)^2}; f'(b) = 0 \Leftrightarrow b = 3.$

Bảng biến thiên:

b	1	3	5
$f'(b)$	-	0	+
$f(b)$	$\frac{3}{25}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{25}$

Kết luận: Giá trị lớn nhất của $\frac{V_1}{V} = \frac{3}{25}.$

Câu 54. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành, M là điểm đối xứng với C qua B . N là trung điểm SC . Mặt phẳng (MND) chia hình chóp thành hai khối đa diện (tham khảo hình vẽ bên). Gọi V_1 là thể tích khối đa diện chứa đỉnh S và V_2 là thể tích khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$?



A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{3}.$

B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{12}{7}.$

C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{5}.$

D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{5}.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $V_1 = V_{S.ADQ} + V_{S.PQD} + V_{S.DNP}.$

Mà $\frac{V_{S.ADQ}}{V_{S.ABCD}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot d(S, (ABCD)) \cdot S_{\Delta AQD}}{\frac{1}{3} \cdot d(S, (ABCD)) \cdot S_{ABCD}} = \frac{1}{4}.$

Và $\frac{V_{S.PQD}}{V_{S.BQD}} = \frac{SP \cdot SQ \cdot SD}{SB \cdot SQ \cdot SD} = \frac{SP}{SB}.$

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác SBC với cát tuyến MPN ta có:

$\frac{MB \cdot PS \cdot NC}{MC \cdot PB \cdot NS} = 1 \Rightarrow \frac{PS}{PB} = 2$ suy ra $\frac{SP}{SB} = \frac{2}{3}$

$$\text{Suy ra } \frac{V_{S.PQD}}{V_{S.BQD}} = \frac{2}{3} \text{ mà } \frac{V_{S.BDQ}}{V_{S.ABCD}} = \frac{\frac{1}{3}.d(S, (ABCD)).S_{\Delta BQD}}{\frac{1}{3}.d(S, (ABCD)).S_{ABCD}} = \frac{1}{4} \text{ nên } \frac{V_{S.PQD}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{6}.$$

$$\text{Ta lại có: } \frac{V_{S.PND}}{V_{S.BCD}} = \frac{SP.SN.SD}{SB.SC.SD} = \frac{1}{3} \text{ mà } \frac{V_{S.BCD}}{V_{S.ABCD}} = \frac{\frac{1}{3}.d(S, (ABCD)).S_{\Delta BCD}}{\frac{1}{3}.d(S, (ABCD)).S_{ABCD}} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{V_{S.PND}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{6}.$$

$$\text{Vậy } V_1 = \frac{7}{12} V_{S.ABCD} \text{ suy ra } \frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{5}$$

Câu 55. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 2. Gọi M, N lần lượt là hai điểm nằm trên hai cạnh AA' và BB' sao cho M là trung điểm của AA' và $B'N = \frac{2}{3}BB'$. Đường thẳng CM cắt đường thẳng $A'C'$ tại P và đường thẳng CN cắt đường thẳng $B'C'$ tại Q . Thể tích khối đa diện lồi $A'MPB'NQ$ bằng

A. $\frac{13}{18}$.

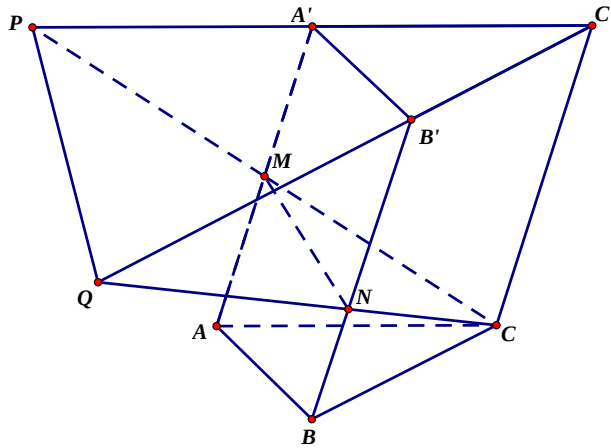
B. $\frac{23}{9}$.

C. $\frac{7}{18}$.

D. $\frac{5}{9}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $\Delta PA'M = \Delta CAM$ (g.c.g) $\Rightarrow PA' = A'C' \Rightarrow C'P = 2C'A'$.

$$\frac{QB'}{QC'} = \frac{B'N}{C'C} = \frac{2}{3} \Rightarrow QB' = \frac{2}{3}QC' \Rightarrow QC' = 3B'C'$$

$$\text{Ta có: } S_{C'PQ} = \frac{1}{2} C'P.C'Q.\sin C' = \frac{1}{2}.2C'A'.3B'C'.\sin C' = 3S_{C'A'B'}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{V_{C.C'PQ}}{V_{C.C'A'B'}} = \frac{S_{C'PQ}}{S_{C'A'B'}} = 3 \Rightarrow V_{C.C'PQ} = 3.V_{C.C'A'B'} = V_{ABC.A'B'C'} = 2$$

Mặt khác:

$$\frac{V_{A'B'C'.MNC}}{V_{A'B'C'.ABC}} = \frac{\frac{A'M}{A'A} + \frac{B'N}{B'B} + \frac{C'C}{C'C}}{3} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + 1}{3} = \frac{13}{18} \Rightarrow V_{A'B'C'.MNC} = \frac{13}{9}$$

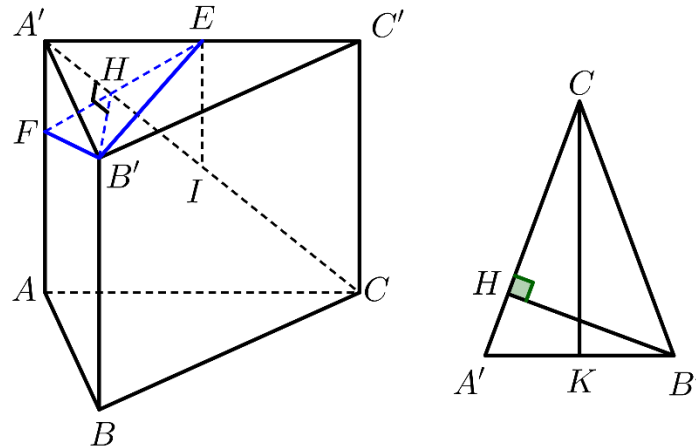
Ta có: $V_{A'MPB'NQ} = V_{C.C'PQ} - V_{A'B'C'.MNC} = 2 - \frac{13}{9} = \frac{5}{9}$. **Chọn D**

Câu 56. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ cạnh đáy bằng a , chiều cao bằng $2a$. Mặt phẳng (P) qua B' và vuông góc với $A'C$ chia lăng trụ thành hai khối. Biết thể tích của hai khối là V_1 và V_2 với $V_1 < V_2$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

- A. $\frac{1}{11}$. B. $\frac{1}{23}$. **C. $\frac{1}{47}$.** D. $\frac{1}{7}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi E, I, K lần lượt là trung điểm $A'C', A'C$ và $A'B'$.

Ta có: $B'E \perp (ACC'A') \Rightarrow B'E \perp A'C$ (1)

Trong $(A'B'C)$: từ B' kẻ $B'H \perp A'C$ tại H .

Trong $(AA'C'C)$: gọi $F = HE \cap AA'$.

Ta lại có $\begin{cases} B'H \perp A'C \\ B'E \perp A'C \end{cases} \Rightarrow (B'HF) \perp A'C \Rightarrow A'C \perp B'F$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra tam giác $B'EF$ là thiết diện của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ khi cắt bởi mặt phẳng (P) .

Tam giác $CA'B'$ cân tại C , ta có $CK \cdot A'B' = B'H \cdot A'C \Rightarrow B'H = \frac{CK \cdot A'B'}{A'C} = \frac{\frac{a\sqrt{19}}{2} \cdot a}{a\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{19}}{2\sqrt{5}}$

Tam giác $B'HC$ vuông tại H , ta có

$$CH = \sqrt{B'C^2 - B'H^2} = \frac{9a}{2\sqrt{5}} \Rightarrow CH = \frac{9}{10}CA' \Rightarrow A'H = \frac{1}{4}HI$$

$$\Delta HA'F \sim \Delta HIE \Rightarrow \frac{A'F}{IE} = \frac{A'H}{IH} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{A'F}{A'A} = \frac{1}{8}.$$

$$\text{Khi đó } \frac{V_{A'B'EF}}{V_{A'B'C'A}} = \frac{A'B'}{A'B'} \cdot \frac{A'E}{A'C'} \cdot \frac{A'F}{A'A} = \frac{1}{16} \Rightarrow V_{A'B'EF} = \frac{1}{16}V_{A'B'C'A} = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{48}V_{ABC.A'B'C'}.$$

$$\text{Nên } \frac{V_1}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{48} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{47}.$$

Câu 57. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và M, N là hai điểm lần lượt trên cạnh CA, CB sao cho MN song song với AB và $\frac{CM}{CA} = k$. Mặt phẳng $(MNB'A')$ chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành hai phần có thể tích V_1 (phần chứa điểm C) và V_2 sao cho $\frac{V_1}{V_2} = 2$. Khi đó giá trị của k là

A. $k = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

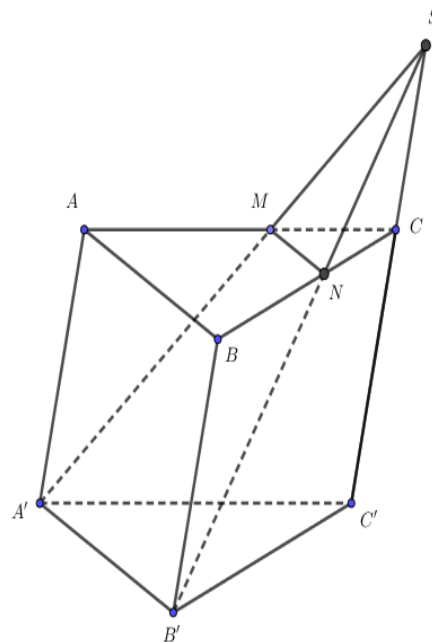
B. $k = \frac{1}{2}$.

C. $k = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

D. $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



+ Vì ba mặt phẳng $(MNB'A'), (ACC'A'), (BCC'B')$ đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt $A'M, B'N, CC'$ và $A'M, CC'$ không song song nên $A'M, B'N, CC'$ đồng qui tại S .

$$\text{Ta có } k = \frac{CM}{CA} = \frac{MN}{AB} = \frac{MN}{A'B'} = \frac{SM}{SA'} = \frac{SN}{SB'} = \frac{SC}{SC'}$$

$$+ \text{Từ đó } V_{S.MNC} = k^3 V_{S.A'B'C'} \Rightarrow V_1 = V_{MNC.A'B'C'} = (1-k^3) V_{S.A'B'C'}.$$

$$+ \text{Mặt khác } \frac{V_{ABC.A'B'C'}}{V_{S.A'B'C'}} = \frac{3CC'}{SC'} = \frac{3(SC' - SC)}{SC'} = 3(1-k) \Rightarrow V_{S.A'B'C'} = \frac{V_{ABC.A'B'C'}}{3(1-k)}$$

$$\text{Suy ra } V_1 = (1-k^3) \frac{V_{ABC.A'B'C'}}{3(1-k)} = \frac{(k^2 + k + 1) \cdot V_{ABC.A'B'C'}}{3}.$$

$$+ \text{Và } \frac{V_1}{V_2} = 2 \text{ nên } V_1 = \frac{2}{3} V_{ABC.A'B'C'} \Rightarrow \frac{k^2 + k + 1}{3} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow k^2 + k - 1 = 0 \Rightarrow k = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} (k > 0).$$

$$\text{Vậy } k = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

