

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1 (1,0 điểm). Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) hàm số $y = -x^3 + 3x$.

Câu 2 (1,0 điểm). Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x-1}{2x-1}$ trên đoạn $[2; 4]$.

Câu 3 (1,0 điểm).

a) Giải phương trình: $\log_3(x^2 - x) + \log_{\frac{1}{3}}(x + 4) = 1$.

b) Giải bất phương trình: $2^{2x+1} < \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{x^2-1}{3}}$.

Câu 4 (1,0 điểm). Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x - 1 - \sin x) dx$.

Câu 5 (1,0 điểm). Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - y - 2z - 1 = 0$ và hai điểm $A(2; 0; 0), B(3; -1; 2)$. Viết phương trình mặt cầu (S) tâm I thuộc mặt phẳng (P) và đi qua các điểm A, B và điểm gốc tọa độ O .

Câu 6 (1,0 điểm).

a) Cho góc lượng giác α , biết $\tan \alpha = 2$. Tính giá trị biểu thức $P = \frac{\cos 2\alpha - 3}{\sin^2 \alpha}$.

b) Trong kì thi học sinh giỏi cấp tỉnh của trường THPT Phù Cù có 10 học sinh đạt giải trong đó có 4 học sinh nam và 6 học sinh nữ. Nhà trường muốn chọn một nhóm 5 học sinh trong 10 học sinh trên để tham dự buổi lễ tuyên dương khen thưởng cuối học kỳ 1 năm học 2015 – 2016 do huyện uỷ Phù Cù tổ chức. Tính xác suất để chọn được một nhóm gồm 5 học sinh mà có cả nam và nữ, biết số học sinh nam ít hơn số học sinh nữ.

Câu 7 (1,0 điểm). Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a, AD = a\sqrt{3}$. Biết góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Tính thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau $B'C$ và $C'D$ theo a .

Câu 8 (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho tam giác ABC vuông cân tại A . Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Điểm D thuộc tia đối của tia AC sao cho $GD = GC$. Biết điểm G thuộc đường thẳng $d: 2x + 3y - 13 = 0$ và tam giác BDG nội tiếp đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 12y + 27 = 0$. Tìm tọa độ điểm B và viết phương trình đường thẳng BC , biết điểm B có hoành độ âm và tọa độ điểm G là số nguyên.

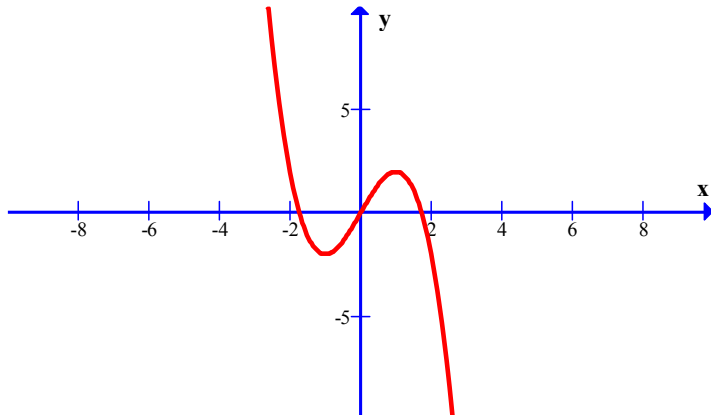
Câu 9 (1,0 điểm). Giải bất phương trình sau trên tập $\mathbb{R}$:

$$\frac{5x - 13 - \sqrt{57 + 10x - 3x^2}}{\sqrt{x + 3} - \sqrt{19 - 3x}} + 2\sqrt{x + 3} \geq x^2 + 2x + 9$$

Câu 10 (1,0 điểm). Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng:

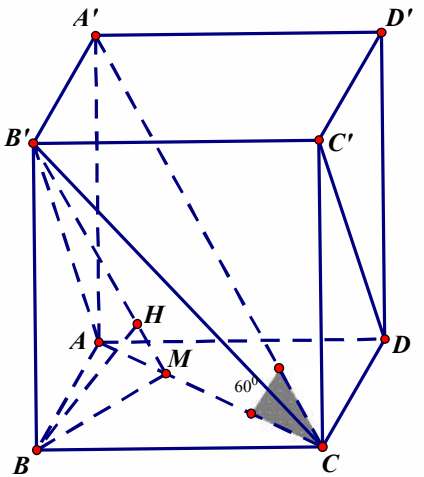
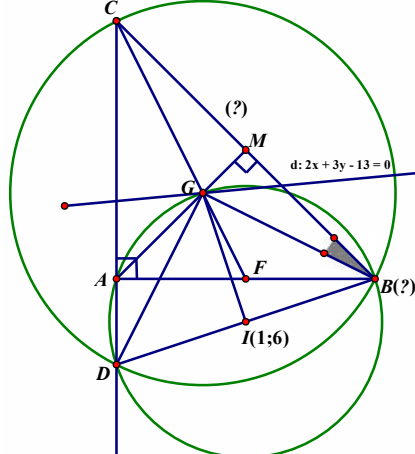
$$\frac{2a}{a+2} + \frac{3b}{b+3} + \frac{c}{c+1} \leq \frac{6(a+b+c)}{a+b+c+6}$$

-----Hết-----

Câu	Đáp án	Điểm																	
	Câu 1 (1,0 điểm). Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) hàm số $y = -x^3 + 3x$.																		
	Tập xác định: $D = \mathbb{R}$ Ta có $y' = -3x^2 + 3 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$	0,25																	
	Giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + 3x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(-1 + \frac{3}{x^2} \right) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 3x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(-1 + \frac{3}{x^2} \right) = +\infty$	0,25																	
	Bảng biến thiên <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-1</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$+\infty$</td><td></td><td>2</td><td></td><td>$-\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$f(x)$	$+\infty$		2		$-\infty$	0,25
x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$															
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$														
$f(x)$	$+\infty$		2		$-\infty$														
1	Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$ Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 1$ và $y_{CD} = 2$ Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = -1$ và $y_{CT} = -2$ Đồ thị: Bảng giá trị <table><tr><td>x</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>y</td><td>2</td><td>-2</td><td>0</td><td>2</td><td>-2</td></tr></table> 	x	-2	-1	0	1	2	y	2	-2	0	2	-2	0,25					
x	-2	-1	0	1	2														
y	2	-2	0	2	-2														

2	Câu 2 (1,0 điểm). Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x-1}{2x-1}$ trên đoạn $[2;4]$.		
	Hàm số liên tục trên đoạn $[2;4]$		0,25
	Ta có $y' = \frac{1}{(2x-1)^2} > 0, \forall x \in [2;4]$		0,25
	Có $y(2) = \frac{1}{3}; y(4) = \frac{3}{7}$		0,25
	Vậy	$\max_{[2;4]} y = \frac{3}{7}$ khi $x = 4$ và $\min_{[2;4]} y = \frac{1}{3}$ khi $x = 2$	0,25
3	Câu 3 (1,0 điểm). a) Giải phương trình $\log_3(x^2 - x) + \log_{\frac{1}{3}}(x + 4) = 1$.		
	Điều kiện: $\begin{cases} x > 1 \\ -4 < x < 0 \end{cases}$ $\log_3(x^2 - x) - \log_3(x + 4) = 1 \Leftrightarrow \log_3(x^2 - x) = \log_3(x + 4) + \log_3 3$ $\Leftrightarrow \log_3(x^2 - x) = \log_3[3(x + 4)] \Leftrightarrow x^2 - x = 3(x + 4)$		0,25
	$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 6 \end{cases}$ (thỏa mãn)		0,25
	Vậy phương trình có hai nghiệm $x = -2; x = 6$.		
	b) Giải bất phương trình $2^{2x+1} < \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{x^2-1}{3}}$.		
	Bất phương trình tương đương với $2^{2x+1} < \left(2^{-3}\right)^{\frac{x^2-1}{3}} \Leftrightarrow 2^{2x+1} < 2^{-x^2+1} \Leftrightarrow 2x+1 < -x^2+1$		0,25
4	Câu 4 (1,0 điểm). Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x - 1 - \sin x) dx$.		
	$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x - 1 - \sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = A - B - C$		0,25
	$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x dx = x^2 \Big _0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}; B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = x \Big _0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$		0,25
	$C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = (-\cos x) \Big _0^{\frac{\pi}{2}} = 1$		0,25
	Vậy $I = A - B + C = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2} - 1$		0,25
5	Câu 5 (1,0 điểm). Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng		

	$(P): x - y - 2z - 1 = 0$ và hai điểm $A(2; 0; 0), B(3; -1; 2)$. Viết phương trình mặt cầu (S) tâm I thuộc mặt phẳng (P) và đi qua các điểm A, B và điểm gốc tọa độ O.	
	Giả sử $I(x, y, z)$. Ta có $I \in (P) \Rightarrow x - y - 2z - 1 = 0$ (1) Do $A, B, O \in (S) \Rightarrow IA = IB = IO$. Suy ra $\begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ x = 1 \end{cases}$ (2)	0,25
	Từ (1) và (2) ta có hệ $\begin{cases} x - y - 2z - 1 = 0 \\ x - y + 2z = 5 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow I(1; -2; 1)$	0,25
	Bán kính mặt cầu (S) là $R = IA = \sqrt{6}$	0,25
	Vậy phương trình mặt cầu (S) là: $\boxed{(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 6}$	0,25
6	Câu 6 (1,0 điểm). a) Cho góc lượng giác α, biết $\tan \alpha = 2$. Tính giá trị biểu thức $P = \frac{\cos 2\alpha - 3}{\sin^2 \alpha}$.	
	$P = \frac{\cos 2\alpha - 3}{\sin^2 \alpha} = \frac{2\cos^2 \alpha - 4}{1 - \cos^2 \alpha}$	0,25
	$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{5}$. Suy ra $\boxed{P = -\frac{9}{2}}$	0,25
	b) Trong kì thi học sinh giỏi cấp tỉnh của trường THPT Phù Cù có 10 học sinh đạt giải trong đó có 4 học sinh nam và 6 học sinh nữ. Nhà trường muốn chọn một nhóm 5 học sinh trong 10 học sinh trên để tham dự buổi lễ tuyên dương khen thưởng cuối học kỳ 1 năm học 2015 – 2016 do huyện uỷ Phù Cù tổ chức. Tính xác suất để chọn được một nhóm gồm 5 học sinh mà có cả nam và nữ, biết số học sinh nam ít hơn số học sinh nữ.	
	Không gian mẫu $n(\Omega) = C_{10}^5 = 252$ Gọi A là biến cố 5 học sinh được chọn có cả nam và nữ đồng thời số học sinh nam ít hơn học sinh nữ. Trường hợp 1: Chọn 1 học sinh nam và 4 học sinh nữ nên ta có $C_4^1 \cdot C_6^4$ Trường hợp 2: Chọn 2 học sinh nam và 3 học sinh nữ nên ta có $C_4^2 \cdot C_6^3$	0,25
	Suy ra $n(A) = C_4^1 \cdot C_6^4 + C_4^2 \cdot C_6^3 = 180$ Vậy xác suất cần tìm là $\boxed{P(A) = \frac{5}{7}}$	0,25
7	Câu 7 (1,0 điểm). Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a, AD = a\sqrt{3}$. Biết góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60°. Tính thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau $B'C$ và $C'D$ theo a.	

Do $ABCD.A'B'C'D'$ là lăng trụ đứng nên $A'A \perp (ABCD)$. Suy ra góc giữa $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{A'CA} = 60^0$		0,25
Có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a \Rightarrow A'A = AC.\tan 60^0 = 2a\sqrt{3}$ $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a, AD = a\sqrt{3} \Rightarrow S_{ABCD} = AB.AD = a^2\sqrt{3}$ Vậy thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là $V = A'A.S_{ABCD} = 6a^3$		0,25
Do $C'D//AB'$ nên $C'D//(AB'C)$ Suy ra $d(C'D, B'C) = d(C'D, (A B' C)) = d(C', (A B' C)) = d(B, (A B' C))$ Do BC' giao với mp$(AB'C)$ tại trung điểm của BC' (vì $BCC'B'$ là hình chữ nhật)		0,25
Kê $BM \perp AC \Rightarrow AC \perp (BB'M) \Rightarrow (AB'C) \perp (BB'M)$ theo giao tuyến $B'M$ Kê $BH \perp B'M \Rightarrow BH \perp (AB'C)$ hay $d(B, (A B' C)) = BH$ Có $\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{B'B^2} + \frac{1}{BM^2} = \frac{1}{B'B^2} + \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{17}{12a^2} \Rightarrow BH = \frac{2a\sqrt{51}}{17}$ Vậy $d(C'D, B'C) = \frac{2a\sqrt{51}}{17}$		0,25
Câu 8 (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Điểm D thuộc tia đối của tia AC sao cho $GD = GC$. Biết điểm G thuộc đường thẳng $d: 2x + 3y - 13 = 0$ và tam giác BDG nội tiếp đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 12y + 27 = 0$. Tìm tọa độ điểm B và viết phương trình đường thẳng BC, biết điểm B có hoành độ âm và tọa độ điểm G là số nguyên.		
Tam giác ABC vuông cân tại A có G là trọng tâm nên $GB = GC$ Mà $GD = GC$ nên tam giác BCD nội tiếp đường tròn tâm G. Suy ra $\widehat{BGD} = 2\widehat{BCD} = 2\widehat{BCA} = 90^0 \Rightarrow BG \perp GD$ Hay tam giác BDG vuông cân tại G Đường tròn (C) tâm $I(1;6)$ bán kính $R = \sqrt{10}$ ngoại tiếp tam giác BDG nên I là trung điểm của BD Do đó $IG = \sqrt{10}$ và $IG \perp BD$		0,25

	Vì $G \in d : 2x + 3y - 13 = 0 \Rightarrow G\left(m; \frac{13 - 2m}{3}\right)$ Từ $IG = \sqrt{10} \Rightarrow \begin{cases} G(2; 3) \\ G\left(-\frac{28}{13}; \frac{75}{13}\right) \end{cases}$, do tọa độ điểm G là số nguyên nên $G(2; 3)$. BD đi qua $I(1; 6)$ và $IG \perp BD$ nên phương trình $x - 3y + 17 = 0$ $B, D \in BD \cap (C) \Rightarrow \begin{cases} B(-2; 5) \\ D(4; 7) \end{cases}$ (do hoành độ điểm B âm) Vậy $\boxed{B(-2; 5)}$	0,25
	Gọi M là trung điểm của BC ta có $AM = MB = MC$ (do ABC vuông cân tại A) Suy ra $AM \perp BC \Rightarrow GM \perp MB$ và $GM = \frac{1}{3}AM = \frac{1}{3}MB$ Nên $\tan \widehat{GBM} = \frac{MG}{MB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos \widehat{GBM} = \frac{3}{\sqrt{10}}$ Gọi $\vec{n} = (a, b)$ với $(a^2 + b^2 \neq 0)$ là VTPT của BC. Ta có VTCP của BG là $\overrightarrow{BG} = (4; -2) \Rightarrow \overrightarrow{n_{BG}} = (1; 2)$ là VTPT của BG Có $\cos(BG, BC) = \left \cos(\overrightarrow{n_{BG}}, \vec{n}) \right \Leftrightarrow \cos \widehat{GBM} = \left \cos(\overrightarrow{n_{BG}}, \vec{n}) \right \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{\left \overrightarrow{n_{BG}} \cdot \vec{n} \right }{\left \overrightarrow{n_{BG}} \right \cdot \left \vec{n} \right }$ $\Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{ a + 2b }{\sqrt{5(a^2 + b^2)}} \Leftrightarrow 35a^2 - 40ab + 5b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ 7a - b = 0 \end{cases}$	0,25
	Trường hợp 1: Với $a - b = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1; 1)$ nên phương trình $BC : x + y - 3 = 0$ Trường hợp 2: Với $7a - b = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1; 7)$ nên phương trình $BC : x + 7y - 33 = 0$ Do hai điểm D và G cùng nằm về một phía đối với đường thẳng BC nên phương trình BC thỏa mãn là $\boxed{x + y - 3 = 0}$ Vậy $\boxed{BC : x + y - 3 = 0}$ và $\boxed{B(-2; 5)}$	0,25
9	Câu 9 (1,0 điểm). Giải bất phương trình sau trên tập $\mathbb{R}$: $\frac{5x - 13 - \sqrt{57 + 10x - 3x^2}}{\sqrt{x + 3} - \sqrt{19 - 3x}} + 2\sqrt{x + 3} \geq x^2 + 2x + 9$	
	Điều kiện $\begin{cases} -3 \leq x \leq \frac{19}{3} \\ x \neq 4 \end{cases}$ Bất phương trình tương đương $\frac{(\sqrt{x + 3} - \sqrt{19 - 3x})(2\sqrt{x + 3} + \sqrt{19 - 3x})}{\sqrt{x + 3} - \sqrt{19 - 3x}} + 2\sqrt{x + 3} \geq x^2 + 2x + 9$	0,25
	$\Leftrightarrow 4\sqrt{x + 3} + \sqrt{19 - 3x} \geq x^2 + 2x + 9$ $\Leftrightarrow 4\left(\sqrt{x + 3} - \frac{x + 5}{3}\right) + \left(\sqrt{19 - 3x} - \frac{13 - x}{3}\right) \geq x^2 + x - 2$	0,25

	$\Leftrightarrow \frac{4(-x^2 - x + 2)}{9\left(\sqrt{x+3} + \frac{x+5}{3}\right)} + \frac{-x^2 - x + 2}{9\left(\sqrt{19-3x} + \frac{13-x}{3}\right)} \geq x^2 + x - 2$	
	$\Leftrightarrow (x^2 + x - 2) \left[\frac{4}{9\left(\sqrt{x+3} + \frac{x+5}{3}\right)} + \frac{1}{9\left(\sqrt{19-3x} + \frac{13-x}{3}\right)} \right] \leq 0 \quad (*)$ Vi $\frac{4}{9\left(\sqrt{x+3} + \frac{x+5}{3}\right)} + \frac{1}{9\left(\sqrt{19-3x} + \frac{13-x}{3}\right)} > 0$ với mọi $x \in \left[-3; \frac{19}{3}\right] \setminus \{4\}$	0,25
	Do đó $(*) \Leftrightarrow x^2 + x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 1$ (thỏa mãn) Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = [-2; 1]$.	0,25
10	Câu 10 (1,0 điểm). Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng: $\frac{2a}{a+2} + \frac{3b}{b+3} + \frac{c}{c+1} \leq \frac{6(a+b+c)}{a+b+c+6} \quad (1)$	
	Bất đẳng thức tương đương với $\left(\frac{a+2}{4} - \frac{2a}{a+2}\right) + \left(\frac{b+3}{4} - \frac{3b}{b+3}\right) + \left(\frac{c+1}{4} - \frac{c}{c+1}\right) \geq \frac{a+b+c+6}{4} - \frac{6(a+b+c)}{a+b+c+6}$	0,25
	$\Leftrightarrow \frac{(a-2)^2}{4(a+2)} + \frac{(b-3)^2}{4(b+3)} + \frac{(c-1)^2}{4(c+1)} \geq \frac{(a+b+c-6)^2}{4(a+b+c+6)}$	0,25
	$\Leftrightarrow \frac{(a-2)^2}{a+2} + \frac{(b-3)^2}{b+3} + \frac{(c-1)^2}{c+1} \geq \frac{(a+b+c-6)^2}{a+b+c+6} \quad (2)$	0,25
	Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có $VT(2) \geq \frac{\left[(a-2) + (b-3) + (c-1)\right]^2}{(a+2) + (b+3) + (c+1)} = \frac{(a+b+c-6)^2}{a+b+c+6} = VP(2)$ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = 2; b = 3; c = 1$. Vậy bất đẳng thức (2) đúng. Do đó bất đẳng thức (1) được chứng minh.	0,25