

BÀI 2: TÍCH PHÂN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN

1. Định nghĩa tích phân

Định nghĩa

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$, với $a < b$.

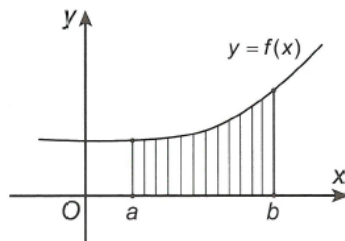
Nếu $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ thì giá trị $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

$$\text{Kí hiệu } \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad (1)$$

Công thức (1) còn được gọi là công thức Newton – Leibnitz; a và b được gọi là cận dưới và cận trên của tích phân.

Ý nghĩa hình học của tích phân

Giả sử hàm số $y = f(x)$ là hàm số liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$. Khi đó, tích phân $\int_a^b f(x) dx$ chính là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = f(x)$, trục hoành Ox và hai đường thẳng $x = a, x = b$, với $a < b$.



$$S = \int_a^b f(x) dx$$

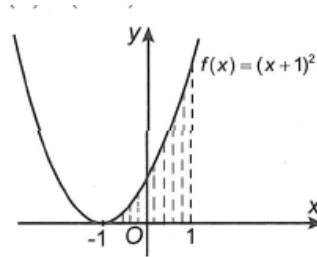
Chẳng hạn: $F(x) = x^3 + C$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2$ nên tích phân

$$\int_0^1 f(x) dx = F(x) \Big|_0^1 = F(1) - F(0) = (1^3 + C) - (0^3 + C) = 1.$$

Lưu ý: Giá trị của tích phân không phụ thuộc vào hằng số C .

Trong tính toán, ta thường chọn $C = 0$.

Chẳng hạn: Hàm số $f(x) = x^2 + 2x + 1$ có đồ thị (C) và $f(x) = (x+1)^2 \geq 0$, với $\forall x \in \mathbb{R}$.



Diện tích “tam giác cong” giới hạn bởi (C), trục Ox và hai đường thẳng $x = -1$ và

$$x = 1 \text{ là } S = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 (x^2 + 2x + 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{8}{3}.$$

Lưu ý: Ta còn gọi hình phẳng trên là “hình thang cong”.

2. Tính chất cơ bản của tích phân

Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên khoảng K , trong đó K có thể là khoảng, nửa khoảng hoặc đoạn và $a, b, c \in K$, khi đó:

a. Nếu $b = a$ thì $\boxed{\int_a^a f(x) dx = 0}$

b. Nếu $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì ta có:

$$\boxed{\int_a^b f'(x) dx = f(x) \Big|_a^b = f(b) - f(a)}$$

Chẳng hạn: Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên đoạn $[-1; 2]$ thỏa mãn $f(-1) = 8$ và $f(2) = -1$.

Khi đó

$$\int_{-1}^2 f'(x) dx = f(x) \Big|_{-1}^2 = f(2) - f(-1) = -9$$

Lưu ý: Từ đó ta cũng có

$$\boxed{f(b) = f(a) + \int_a^b f'(x) dx}$$

và $\boxed{f(a) = f(b) - \int_a^b f'(x) dx}$

c. Tính chất tuyến tính

$$\boxed{\int_a^b [k \cdot f(x) + h \cdot g(x)] dx = k \int_a^b f(x) dx + h \cdot \int_a^b g(x) dx}$$

Với mọi $k, h \in \mathbb{R}$.

d. Tính chất trung cận

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx}, \text{ với } c \in (a; b)$$

e. Đảo cận tích phân

$$\boxed{\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx}$$

f. Nếu $f(x) \geq 0, \forall x \in [a; b]$ thì $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ và

$$\int_a^b f(x) dx = 0 \text{ khi } f(x) = 0.$$

g. Nếu $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a; b]$ thì

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

h. Nếu $m = \min_{[a;b]} f(x)$ và $M = \max_{[a;b]} f(x)$ thì

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

i. Tích phân không phụ thuộc vào biến, tức là ta luôn có

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = \int_a^b f(y) dy = \dots$$

II. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

1. Phương pháp đổi biến số

Đổi biến dạng 1

Bài toán: Giả sử ta cần tính tích phân $I = \int_a^b f(x) dx$, trong

đó ta có thể phân tích $f(x) = g(u(x))u'(x)$ thì ta thực hiện phép đổi biến số.

Phương pháp:

+ Đặt $u = u(x)$, suy ra $du = u'(x) dx$.

+ Đổi cận:

x	a	b
u	$u(a)$	$u(b)$

+ Khi đó $I = \int_a^b f(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u) du = G(u) \Big|_{u(a)}^{u(b)}$, với

$G(u)$ là nguyên hàm của $g(u)$.

Đổi biến dạng 2

Dấu hiệu	Cách đặt
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin t; t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = \frac{ a }{\sin t}; t \in \left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan t; t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

Lưu ý: Phương pháp đổi biến số trong tích phân cơ bản giống như đổi biến số trong nguyên hàm, ở đây chỉ thêm bước **đổi cận**.

$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$	$x = a \cdot \cos 2t; t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$
$\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$	$x = a \cdot \cos 2t; t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$
$\sqrt{(x-a)(b-x)}$	$x = a + (b-a) \sin^2 t; t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

2. Phương pháp tích phân từng phần

Bài toán: Tính tích phân $I = \int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx$

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = u(x) \\ dv = v'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = u'(x) dx \\ v = v(x) \end{cases}$$

Khi đó $I = (u \cdot v) \Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du$ (công thức tích phân từng phần)

Chú ý: Cần phải lựa chọn u và dv hợp lý sao cho ta dễ dàng tìm được v và tích phân

$$\int_a^b v du \text{ dễ tính hơn } \int_a^b u dv.$$

III. TÍCH PHÂN CÁC HÀM SỐ ĐẶC BIỆT

1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-a; a]$. Khi đó

$$\text{Đặc biệt } \int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx \quad (1)$$

$$+ \text{ Nếu } f(x) \text{ là hàm số lẻ thì ta có } \int_{-a}^a f(x) dx = 0 \quad (1.1)$$

$$+ \text{ Nếu } f(x) \text{ là hàm số chẵn thì ta có } \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx \quad (1.2)$$

$$\text{và } \int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+b^x} dx = \frac{1}{2} \int_0^a f(x) dx \quad (0 < b \neq 1) \quad (1.3)$$

$$2. \text{ Nếu } f(x) \text{ liên tục trên đoạn } [a; b] \text{ thì } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$$

$$\text{Hệ quả: Hàm số } f(x) \text{ liên tục trên } [0; 1], \text{ khi đó: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$$

$$3. \text{ Nếu } f(x) \text{ liên tục trên đoạn } [a; b] \text{ và } f(a+b-x) = f(x) \text{ thì } \int_a^b xf(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx$$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Tính tích phân bằng cách sử dụng định nghĩa, tính chất

1. Phương pháp giải

Sử dụng các tính chất của tích phân.

Sử dụng bảng nguyên hàm và định nghĩa tích phân để tính tích phân.

2. Bài tập

Bài tập 1: Biết tích phân $I = \int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+x\sqrt{x+1}}} = a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Giá trị biểu thức

$P = a + b + c$ là

A. $P = 8$.

B. $P = 0$.

C. $P = 2$.

D. $P = 6$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} \neq 0, \forall x \in [1; 2]$ nên

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+1}} dx = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx - \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx = \left(2\sqrt{x} - 2\sqrt{x+1} \right) \Big|_1^2 \\ &= 4\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 2. \text{ Suy ra } a = 4, b = c = -2 \text{ nên } P = a + b + c = 0. \end{aligned}$$

Nhân liên hợp $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.

Bài tập 2: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{3}$ và $f'(x) = x[f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị

$f(1)$ bằng

A. $f(1) = \frac{2}{3}$.

B. $f(1) = \frac{3}{2}$.

C. $f(1) = -\frac{2}{3}$.

D. $f(1) = \frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Từ $f'(x) = x[f(x)]^2$ (1), suy ra $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in [1; 2]$.

Suy ra $f(x)$ là hàm không giảm trên đoạn $[1; 2]$ nên $f(x) \leq f(2) < 0, \forall x \in [1; 2]$.

Chia 2 vế hệ thức (1) cho $[f(x)]^2$ ta được $\frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = x, \forall x \in [1; 2]$. (2)

Lấy tích phân 2 vế trên đoạn $[1; 2]$ hệ thức (2), ta được

$$\int_1^2 \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} dx = \int_1^2 x dx \Leftrightarrow \left[\frac{-1}{f(x)} \right]_1^2 = \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 \Leftrightarrow \frac{1}{f(1)} - \frac{1}{f(2)} = \frac{3}{2}.$$

Do $f(2) = -\frac{1}{3}$ nên suy ra $f(1) = -\frac{2}{3}$.

Chú ý rằng đề bài cho $f(2)$, yêu cầu tính $f(1)$, ta có thể sử dụng nguyên hàm để tìm hằng số C .
Tuy nhiên ta cũng có thể dựa vào định nghĩa của tích phân để xử lí.

Bài tập 3: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{2}{2x-1}$ và $f(0) = 1, f(1) = -2$

. Khi đó $f(-1) + f(3)$ bằng

A. $-1 + \ln 15$.

B. $3 + \ln 5$.

C. $-2 + \ln 3$.

D. $-1 - \ln 15$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $\int_{-1}^0 f'(x) dx = f(0) - f(-1)$ nên suy ra $f(-1) = f(0) - \int_{-1}^0 f'(x) dx$.

$$= 1 - \int_{-1}^0 f'(x) dx.$$

Tương tự ta cũng có

$$f(3) = f(1) + \int_1^3 f'(x) dx$$

$$= -2 + \int_1^3 f'(x) dx.$$

$$\text{Vậy } f(-1) + f(3) = -1 - \int_{-1}^0 f'(x) dx + \int_1^3 f'(x) dx = -1 - \ln|2x-1| \Big|_{-1}^0 + \ln|2x-1| \Big|_1^3.$$

$$\text{Vậy } f(-1) + f(3) = -1 + \ln 15.$$

Bài tập 4: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 0$,

$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7$ và $\int_0^1 x^3 \cdot f'(x) dx = -1$. Giá trị $I = \int_0^1 f(x) dx$ là

A. 1.

B. $\frac{7}{4}$.

C. $\frac{7}{5}$.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7$ (1).

$$\int_0^1 x^6 dx = \frac{1}{7} \Rightarrow \int_0^1 49x^6 dx = 7$$
 (2).

và $\int_0^1 14x^3 \cdot f'(x) dx = -14$ (3).

Cộng hai vế (1), (2) và (3) suy ra

$$\int_0^1 [f'(x) + 7x^3]^2 dx = 0 \text{ mà } [f'(x) + 7x^3]^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = -7x^3.$$

Hay $f(x) = -\frac{7x^4}{4} + C.$

$$f(1) = 0 \Rightarrow -\frac{7}{4} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{7}{4}.$$

Do đó $f(x) = -\frac{7x^4}{4} + \frac{7}{4}.$

Vậy $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(-\frac{7x^4}{4} + \frac{7}{4}\right) dx = \frac{7}{5}.$

Bài tập 5: Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm số liên tục trên đoạn $[-1; 1]$ và $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$

là hàm số lẻ. Biết $\int_0^1 f(x) dx = 5; \int_0^1 g(x) dx = 7$. Giá trị của $A = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_{-1}^1 g(x) dx$ là

A. 12.

B. 24.

C. 0.

D. 10.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Vì $f(x)$ là hàm số chẵn nên $\int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx = 2 \cdot 5 = 10$

Vì $g(x)$ là hàm số lẻ nên $\int_{-1}^1 g(x) dx = 0$.

Vậy $A = 10$.

Bài tập 6: Cho $\int_0^1 \frac{xdx}{(2x+1)^2} = a + b \ln 3$ với a, b là các số hữu tỉ. Giá trị của $a + b$ bằng

A. $\frac{5}{12}$.

B. $-\frac{1}{3}$.

C. $\frac{1}{4}$.

D. $\frac{1}{12}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $\int_0^1 \frac{xdx}{(2x+1)^2} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x+1-1}{(2x+1)^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{2x+1} - \frac{1}{(2x+1)^2} \right) dx$

$$= \left(\frac{1}{4(2x+1)} + \frac{1}{4} \ln(2x+1) \right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{4} \ln 3.$$

Vậy $a = -\frac{1}{6}, b = \frac{1}{4} \Rightarrow a + b = \frac{1}{12}.$

Bài tập 7: Cho $\int_2^3 \frac{2x+3}{x^2+x} dx = a \ln 2 + b \ln 3$, với $a, b \in \mathbb{Z}$. Giá trị biểu thức $a^2 - ab - b$ là

A. 11.

B. 21.

C. 31.

D. 41.

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int_2^3 \frac{2x+3}{x^2+x} dx &= \int_2^3 \frac{2x+1+2}{x^2+x} dx = \int_2^3 \left(\frac{2x+1}{x^2+x} + \frac{2}{x^2+x} \right) dx \\ &= \int_2^3 \left(\frac{2x+1}{x^2+x} + \frac{2}{x} - \frac{2}{x+1} \right) dx = \left(\ln|x^2+x| + 2\ln|x| - 2\ln|x+1| \right) \Big|_2^3 = -5\ln 2 + 4\ln 3 \\ &\Rightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = 4 \end{cases} \rightarrow a^2 - ab - b = 41. \end{aligned}$$

Chọn D.

Bài tập 8. Biết rằng tích phân $\int_1^2 \frac{5x+6}{x^2+5x+6} dx = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$, với a, b, c là các số nguyên. Giá

trị biểu thức $S = a + bc$ là bao nhiêu?

A. $S = -62.$

B. $S = 10.$

C. $S = 20.$

D. $S = -10.$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int_1^2 \frac{5x+6}{x^2+5x+6} dx &= \int_1^2 \frac{5x+6}{(x+2)(x+3)} dx = \int_1^2 \left(\frac{9}{x+3} - \frac{4}{x+2} \right) dx \\ &= \left(9\ln|x+3| - 4\ln|x+2| \right) \Big|_1^2 = 9\ln 5 + 4\ln 3 - 26\ln 2. \end{aligned}$$

Suy ra $a = -26, b = 4, c = 9$. Vậy $S = a + bc = -26 + 4 \cdot 9 = 10$.

Bài tập 9: Cho $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x + 1}{\cos^4 x + \sin x \cdot \cos^3 x} dx = a + b \ln 2 + c \ln(1 + \sqrt{3})$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá

trị abc bằng

A. 0.

B. -2.

C. -4.

D. -6.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x + 1}{\cos^4 x + \sin x \cdot \cos^3 x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2 \cos^2 x + \sin x \cdot \cos x + \sin^2 x}{\cos^2 x (\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x)} dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2 + \tan x + \tan^2 x}{\cos^2 x (1 + \tan x)} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2 + \tan x + \tan^2 x}{(1 + \tan x)} d(\tan x)$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\tan x + \frac{2}{(1 + \tan x)} \right) d(\tan x) = \frac{\tan^2 x}{2} \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + 2 \ln |\tan x + 1| \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= 1 - 2 \ln 2 + 2 \ln(\sqrt{3} + 1). \text{ Suy ra } a = 1, b = -2, c = 2 \text{ nên } abc = -4.$$

Bài tập 10: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} e^x + m, & \text{khi } x \geq 0 \\ 2x\sqrt{3+x^2}, & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Biết $\int_{-1}^1 f(x) dx = ae + b\sqrt{3} + c$ ($a, b, c \in \mathbb{Q}$). Tổng $T = a + b + 3c$ bằng

A. 15.

B. -10.

C. -19.

D. -17.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Do hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số liên tục tại $x = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow 1 + m = 0 \Leftrightarrow m = -1.$$

$$\text{Ta có } \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \int_{-1}^0 2x\sqrt{3+x^2} dx = \int_{-1}^0 (3+x^2)^{\frac{1}{2}} d(3+x^2) = \frac{2}{3} (3+x^2) \sqrt{3+x^2} \Big|_{-1}^0 = 2\sqrt{3} - \frac{16}{3}.$$

$$I_2 = \int_0^1 (e^x - 1) dx = (e^x - x) \Big|_0^1 = e - 2.$$

$$\text{Suy ra } \int_{-1}^1 f(x) dx = I_1 + I_2 = e + 2\sqrt{3} - \frac{22}{3}. \text{ Suy ra } a = 1; b = 2; c = -\frac{22}{3}.$$

$$\text{Vậy } T = a + b + 3c = 1 + 2 - 22 = -19.$$

Bài tập 11: Biết $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+3^{-x}} dx = m$. Giá trị của $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+3^x} dx$ bằng

A. $\pi - m$.

B. $\frac{\pi}{4} + m$.

C. $\pi + m$.

D. $\frac{\pi}{4} - m$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+3^{-x}} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+3^x} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2x) dx = \pi.$

Suy ra $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+3^x} dx = \pi - m.$

Dạng 2: Tính tích phân bằng phương pháp đổi biến

1. Phương pháp giải

Nắm vững phương pháp đổi biến số dạng 1 và dạng 2, cụ thể:

Đổi biến dạng 1

Bài toán: Giả sử ta cần tính $I = \int_a^b f(x) dx$, trong đó ta có thể phân tích $f(x) = g(u(x))u'(x).$

Bước 1: Đặt $u = u(x)$, suy ra $du = u'(x) dx.$

Bước 2: Đổi cận

x	a	B
u	$u(a)$	$u(b)$

Bước 3: Tính

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u) du = G(u) \Big|_{u(a)}^{u(b)}$$

Với $G(u)$ là một nguyên hàm của $g(u).$

Đổi biến dạng 2

Bài toán: Giả sử ta cần tính $I = \int_a^b f(x) dx$, ta có thể đổi biến như sau:

Bước 1: Đặt $x = \varphi(t)$, ta có $dx = \varphi'(t) dt.$

Bước 2: Đổi cận

x	a	b
t	α	β

Bước 3:

Tính $I = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt = G(t) \Big|_{\alpha}^{\beta}$

Với $G(t)$ là một nguyên hàm của $g(t).$

Dấu hiệu	Cách đặt
-----------------	-----------------

$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = \frac{ a }{\sin t}, t \in \left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$	$x = a \cdot \cos 2t, t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$
$\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$	$x = a \cdot \cos 2t, t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$
$\sqrt{(x-a)(b-x)}$	$x = a + (b-a) \sin^2 t, t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

2. Bài tập mẫu

Bài tập 1: Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x + 3 \sin x + 2} dx = a \ln 2 + b \ln 3$, với a, b là các số nguyên.

Giá trị của $P = 2a + b$ là

A. 3.

B. 7.

C. 5.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x + 3 \sin x + 2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\sin x + 1)(\sin x + 2)} d(\sin x)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin x + 1} - \frac{1}{\sin x + 2} \right) d(\sin x) = \left(\ln |\sin x + 1| - \ln |\sin x + 2| \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \ln 2 - \ln 1 - (\ln 3 - \ln 2) = 2 \ln 2 - \ln 3$$

Suy ra $a = 2, b = -1 \Rightarrow 2a + b = 3$.

Bài tập 2: Biết $I = \int_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^x + 3e^{-x} + 4} = \frac{1}{c} (\ln a - \ln b + \ln c)$, với a, b, c là các số nguyên tố.

Giá trị của $P = 2a - b + c$ là

A. $P = -3$.

B. $P = -1$.

C. $P = 4$.

D. $P = 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $I = \int_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^x + 3e^{-x} + 4} = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x dx}{e^{2x} + 4e^x + 3}$.

Đặt $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 1, x = \ln 2 \Rightarrow t = 2$.

Khi đó

$$I = \int_1^2 \frac{1}{t^2 + 4t + 3} dt = \frac{1}{2} \int_1^2 \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+3} \right) dt = \frac{1}{2} \ln \frac{t+1}{t+3} \Big|_1^2 = \frac{1}{2} (\ln 3 - \ln 5 + \ln 2).$$

Suy ra $a = 3, b = 5, c = 2$. Vậy $P = 2a - b + c = 3$.

Bài tập 3: Biết $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{1 + \sin x} = \frac{a\sqrt{3} + b}{c}$, với $a, b \in \mathbb{Z}, c \in \mathbb{Z}^+$ và a, b, c là các số nguyên tố cùng nhau.

Giá trị của tổng $a + b + c$ bằng

A. 5.

B. 12.

C. 7.

D. -1.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{1 + \sin x} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\left(1 + \tan \frac{x}{2} \right)^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\left(1 + \tan^2 \frac{x}{2} \right)}{\left(1 + \tan \frac{x}{2} \right)^2} dx$.

Đặt $t = 1 + \tan \frac{x}{2} \Rightarrow 2dt = \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2} \right) dx$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 1; x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = 3 - \sqrt{3}$.

$$I = \int_1^{3-\sqrt{3}} \frac{2dt}{t^2} = -\frac{2}{t} \Big|_1^{3-\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3} + 3}{3}.$$

Suy ra $a = -1, b = 3, c = 3$ nên $a + b + c = 5$.

Lưu ý:

$$1 + \sin x = \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2. \text{ Chia tử và mẫu cho } \cos^2 \left(\frac{x}{2} \right).$$

Bài tập 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^1 f(2x) dx = 8$. Giá trị của $I = \int_0^{\sqrt{2}} xf(x^2) dx$ là

A. 4.

B. 8.

C. 16.

D. 64.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đặt $x^2 = 2u \Rightarrow 2x dx = 2du \Rightarrow x dx = du$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow u = 0, x = \sqrt{2} \Rightarrow u = 1$.

Khi đó $I = \int_0^1 f(2u) du = \int_0^1 f(2x) dx = 8$.

Bài tập 5: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $(0; +\infty)$ sao cho $x^2 + xf(e^x) + f(e^x) = 1$;

với mọi $x \in (0; +\infty)$. Giá trị của $I = \int_{\sqrt{e}}^e \frac{f(x) \cdot \ln x}{x} dx$ là

A. $I = -\frac{1}{8}$.

B. $I = -\frac{2}{3}$.

C. $I = \frac{1}{12}$.

D. $I = \frac{3}{8}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Với $x \in (0; +\infty)$ ta có $x^2 + xf(e^x) + f(e^x) = 1 \Rightarrow f(e^x) = \frac{1-x^2}{1+x} = 1-x$.

Đặt $\ln x = t \Leftrightarrow x = e^t \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$.

Đổi cận $x = \sqrt{e} \Rightarrow t = \frac{1}{2}; x = e \Rightarrow t = 1$.

Khi đó $I = \int_{\frac{1}{2}}^1 t \cdot f(e^t) dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 t(1-t) dt = \frac{1}{12}$.

Bài tập 6: Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3 \sin x - \cos x}{2 \sin x + 3 \cos x} dx = \frac{-11}{13} \ln 2 + b \ln 3 + c\pi, (b, c \in \mathbb{Q})$. Giá trị của $\frac{b}{c}$ là

A. $\frac{22}{3}$.

B. $\frac{22\pi}{3}$.

C. $\frac{22}{3\pi}$.

D. $\frac{22\pi}{13}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\begin{aligned} \text{Phân tích } \frac{3 \sin x - \cos x}{2 \sin x + 3 \cos x} &= \frac{m(2 \sin x + 3 \cos x) + n(2 \cos x - 3 \sin x)}{2 \sin x + 3 \cos x} \\ &= \frac{(2m - 3n) \sin x + (3m + 2n) \cos x}{2 \sin x + 3 \cos x} \end{aligned}$$

Đồng nhất hệ số ta có $\begin{cases} 2m - 3n = 3 \\ 3m + 2n = -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{3}{13}; n = -\frac{11}{13}$.

$$\text{Suy ra } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3 \sin x - \cos x}{2 \sin x + 3 \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{3}{13}(2 \sin x + 3 \cos x) - \frac{11}{13}(2 \cos x - 3 \sin x)}{2 \sin x + 3 \cos x} dx.$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{3}{13} - \frac{11}{13} \cdot \frac{2 \cos x - 3 \sin x}{2 \sin x + 3 \cos x} \right] dx = \frac{3}{13} (x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{11}{13} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos x - 3 \sin x}{2 \sin x + 3 \cos x} dx. \\
&= \frac{3\pi}{26} - \frac{11}{13} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(2 \sin x + 3 \cos x)}{2 \sin x + 3 \cos x} dx = \frac{3\pi}{26} - \frac{11}{13} \ln |2 \sin x + 3 \cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{3\pi}{26} - \frac{11}{13} \ln 2 + \frac{11}{13} \ln 3. \text{ Do đó } \begin{cases} b = \frac{11}{13} \\ c = \frac{3}{26} \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{11}{13} \cdot \frac{26}{3} = \frac{22}{3}
\end{aligned}$$

Bài tập 7: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \cdot f(\cos^2 x) dx = 2$ và

$$\int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x \ln x} dx = 2. \text{ Giá trị của } I = \int_{\frac{1}{4}}^2 \frac{f(2x)}{x} dx \text{ là}$$

A. 0.

B. 1.

C. 4.

D. 8.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\text{Đặt } A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \cdot f(\cos^2 x) dx = 2 \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x} \cdot f(\cos^2 x) dx = 2.$$

$$\text{Đặt } t = \cos^2 x \Rightarrow dt = -2 \sin x \cos x dx \Rightarrow -\frac{1}{2} dt = \sin x \cos x dx.$$

$$\text{Đổi cận } x=0 \Rightarrow t=1 \text{ và } x=\frac{\pi}{4} \Rightarrow t=\frac{1}{2}. \text{ Khi đó } A = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t} dt = 4.$$

$$\text{Đặt } B = \int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x \ln x} dx = 2 \Leftrightarrow \int_e^{e^2} \frac{\ln x \cdot f(\ln^2 x)}{x \ln^2 x} dx = 2.$$

$$\text{Tương tự ta có } B = \int_1^4 \frac{f(t)}{t} dt = 4.$$

$$\text{Giá trị của } I = \int_{\frac{1}{4}}^2 \frac{f(2x)}{x} dx. \text{ Đặt } t = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt.$$

$$\text{Đổi cận } x=\frac{1}{4} \Rightarrow t=\frac{1}{2} \text{ và } x=2 \Rightarrow t=4.$$

$$\text{Khi đó } I = \int_{\frac{1}{2}}^4 \frac{f(t)}{t} dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t} dt + \int_1^4 \frac{f(t)}{t} dt = 4 + 4 = 8$$

Bài tập 8: Cho $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(x+3)(x+1)^3}} dx = \sqrt{a} - \sqrt{b}$; với a, b là các số nguyên. Giá trị của biểu thức

$a^b + b^a$ bằng

A. 17.

B. 57.

C. 145.

D. 32.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Giá trị của $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(x+3)(x+1)^3}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\frac{x+3}{x+1}} (x+1)^2} dx$.

Đặt $t = \sqrt{\frac{x+3}{x+1}} \Rightarrow 2tdt = \frac{-2}{(x+1)^2} dx \Rightarrow \frac{dx}{(x+1)^2} = -tdt$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = \sqrt{3}, x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{2}$.

Ta có $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\frac{x+3}{x+1}} (x+1)^2} dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{t} (-t) dt = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} dt = t \Big|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

Mà $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(x+3)(x+1)^3}} dx = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ nên suy ra $a = 3, b = 2$.

Từ đó ta có giá trị $a^b + b^a = 3^2 + 2^3 = 17$.

Bài tập 9: Cho $\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{\frac{x}{x^3+1}} dx = \frac{1}{a} \ln\left(\frac{a}{b} + \sqrt{b}\right)$, với a, b là các số nguyên tố. Giá trị của biểu thức

$P = 2(a+b)$ bằng

A. 12.

B. 10.

C. 18.

D. 15.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Biến đổi $I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{\frac{x}{x^3+1}} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{\frac{x}{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}} \cdot \frac{1}{x^4} dx$.

Đặt $u = \sqrt{1+\frac{1}{x^3}} \Rightarrow u^2 = 1+\frac{1}{x^3} \Rightarrow 2udu = -\frac{3}{x^4} dx$ và $x^3 = \frac{1}{u^2-1}$.

Đổi cận $x = \frac{1}{2} \Rightarrow u = 3; x = 1 \Rightarrow u = \sqrt{2}$.

Ta có $I = \int_{\sqrt{2}}^3 \frac{2udu}{3(u^2-1)u} = \frac{2}{3} \int_{\sqrt{2}}^3 \frac{du}{u^2-1} = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| \Big|_{\sqrt{2}}^3 = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2} \right)$.

Suy ra $a = 3, b = 2$. Vậy $P = 2(a + b) = 10$.

Dạng 3: Tính tích phân bằng phương pháp tích phân từng phần

Bài tập 1. Cho tích phân $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx = \frac{b}{c} + a \ln 2$ với a là số thực b và c là các số dương, đồng thời

$\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Giá trị của biểu thức $P = 2a + 3b + c$ là

A. $P = 6$.

B. $P = 5$.

C. $P = -6$.

D. $P = 4$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{dx}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } I = \left. \frac{-\ln x}{x} \right|_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \left(\frac{-\ln x}{x} + \frac{-1}{x} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2}.$$

Suy ra $b = 1, c = 2, a = \frac{-1}{2}$. Do đó $P = 2a + 3b + c = 4$.

+ Ưu tiên logarit.

$$+ \text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{dx}{x^2} \end{cases}.$$

Bài tập 2: Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1 + \cos 2x} dx = a\pi + b \ln 2$, với a, b là các số hữu tỉ. Giá trị của $T = 16a - 8b$ là

A. $T = 4$.

B. $T = 5$.

C. $T = 2$.

D. $T = -2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\text{Đặt } A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1 + \cos 2x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{2 \cos^2 x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \frac{1}{\cos^2 x} dx \Rightarrow v = \tan x \end{cases}$$

Khi đó

$$A = \frac{1}{2} \left[x \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx \right] = \frac{1}{2} \left[\left(x \tan x + \ln |\cos x| \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 \right) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \ln 2.$$

Vậy $a = \frac{1}{8}, b = -\frac{1}{4}$ do đó $16a - 8b = 2 + 2 = 4$.

+ *Biến đổi* $1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$.

+ *Ưu tiên đa thức.*

+ *Đặt* $\begin{cases} u = x \\ dv = \frac{1}{\cos^2 x} dx \end{cases}$.

Bài tập 3: Cho $I = \int_0^1 x e^{2x} dx = a.e^2 + b$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Giá trị của tổng $a + b$ là

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{4}$.

C. 0.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Sử dụng phương pháp từng phần.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}$.

Khi đó $I = u.v \Big|_0^1 - \int_0^1 v.du = \frac{1}{2} x.e^{2x} \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{1}{2} x.e^{2x} \Big|_0^1 - \frac{1}{4} e^{2x} \Big|_0^1 = \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4}$.

Suy ra $a.e^2 + b = \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4}$.

Đồng nhất hệ số hai vế ta có $a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{4}$. Vậy $a + b = \frac{1}{2}$.

Chọn A.

+ *Ưu tiên đa thức.*

+ *Đặt* $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x} dx \end{cases}$.

Bài tập 4: Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $f(2) = 16$ và $\int_0^2 f(x) dx = 4$. Tích phân

$\int_0^4 x f' \left(\frac{x}{2} \right) dx$ bằng

A. 112.

B. 12.

C. 56.

D. 144.

Hướng dẫn giải**Chọn A.**

Đặt $t = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2t \Rightarrow dx = 2dt$.

Đổi cận $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=4 \Rightarrow t=2 \end{cases}$. Do đó $\int_0^4 xf' \left(\frac{x}{2} \right) dx = \int_0^2 4tf'(t) dt = \int_0^2 4xf'(x) dx$.

Đặt $\begin{cases} u = 4x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 4dx \\ v = f(x) \end{cases}$.

Suy ra

$$\int_0^2 4xf'(x) dx = \left[4xf(x) \right]_0^2 - \int_0^2 4f(x) dx = 8f(2) - 4 \int_0^2 f(x) dx = 8.16 - 4.4 = 112.$$

Bài tập 5. Cho $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\sin x + 2 \cos x)}{\cos^2 x} dx = a \ln 3 + b \ln 2 + c\pi$ với a, b, c là các số hữu tỉ.

Giá trị của abc bằng

A. $\frac{15}{8}$.B. $\frac{5}{8}$.C. $\frac{5}{4}$.D. $\frac{17}{8}$.**Hướng dẫn giải****Chọn A.**

Đặt $\begin{cases} u = \ln(\sin x + 2 \cos x) \\ dv = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{\cos x - 2 \sin x}{\sin x + 2 \cos x} dx \\ v = \tan x + 2 \end{cases}$.

Khi đó

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\sin x + 2 \cos x)}{\cos^2 x} dx &= (\tan x + 2) \ln(\sin x + 2 \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - 2 \sin x}{\cos x} dx \\ &= 3 \ln \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} \right) - 2 \ln 2 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - 2 \tan x) dx \\ &= 3 \ln 3 - \frac{7}{2} \ln 2 - \left(x + 2 \ln |\cos x| \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= 3 \ln 3 - \frac{7}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{4} - 2 \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = 3 \ln 3 - \frac{5}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Suy ra $a = 3, b = -\frac{5}{2}, c = -\frac{1}{4}$. Vậy $abc = 18$.

Bài tập 6. Biết $\int_1^2 (x+1)^2 e^{x-\frac{1}{x}} dx = me^{\frac{p}{q}} - n$, trong đó m, n, p, q là các số nguyên dương và $\frac{p}{q}$ là phân số tối giản. Giá trị của $T = m + n + p + q$ là

A. $T = 11$.

B. $T = 10$.

C. $T = 7$.

D. $T = 8$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có

$$I = \int_1^2 (x+1)^2 e^{x-\frac{1}{x}} dx = \int_1^2 (x^2 + 2x + 1) e^{x-\frac{1}{x}} dx = \int_1^2 (x^2 + 1) e^{x-\frac{1}{x}} dx + \int_1^2 2xe^{x-\frac{1}{x}} dx.$$

$$\text{Xét } I_1 = \int_1^2 (x^2 + 1) e^{x-\frac{1}{x}} dx = \int_1^2 x^2 \cdot e^{x-\frac{1}{x}} \cdot \frac{x^2 + 1}{x^2} dx = \int_1^2 x^2 \cdot e^{x-\frac{1}{x}} d\left(x - \frac{1}{x}\right) = \int_1^2 x^2 d\left(e^{x-\frac{1}{x}}\right)$$

$$= x^2 e^{x-\frac{1}{x}} \Big|_1^2 - \int_1^2 e^{x-\frac{1}{x}} d(x^2) = x^2 e^{x-\frac{1}{x}} \Big|_1^2 - \int_1^2 2xe^{x-\frac{1}{x}} dx$$

$$\Rightarrow I_1 + \int_1^2 2xe^{x-\frac{1}{x}} dx = x^2 e^{x-\frac{1}{x}} \Big|_1^2 \Rightarrow I = x^2 e^{x-\frac{1}{x}} \Big|_1^2 = 4e^{\frac{3}{2}} - 1$$

$$\Rightarrow m = 4, n = 1, p = 3, q = 2.$$

$$\text{Khi đó } T = m + n + p + q = 4 + 1 + 3 + 2 = 10.$$

Bài tập 7. Tìm số thực $m > 1$ thỏa mãn $\int_1^m (\ln x + 1) dx = m$.

A. $m = 2e$.

B. $m = e$.

C. $m = e^2$.

D. $m = e + 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$A = \int_1^m (\ln x + 1) dx = \int_1^m \ln x dx + \int_1^m dx$$

$$I = \int_1^m \ln x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = x \ln x \Big|_1^m - \int_1^m dx$$

$$A = x \ln x \Big|_1^m = m \ln m = m \Rightarrow \begin{cases} m = e \\ m = 0 \end{cases}$$

Bài tập 8. Đặt $I_k = \int_1^e \ln \frac{k}{x} dx$, k nguyên dương. Ta có $I_k < e - 2$ khi:

- A. $k \in \{1; 2\}$. B. $k \in \{2; 3\}$. C. $k \in \{4; 1\}$. D. $k \in \{3; 4\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln \frac{k}{x} \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\frac{1}{x} dx \\ v = x \end{cases} \Rightarrow I_k = \left(x \cdot \ln \frac{k}{x} \right) \Big|_1^e + \int_1^e dx = (e-1) \ln k - 1 \Rightarrow I_k < e - 2$$

$$\Leftrightarrow (e-1) \ln k - 1 < e - 2 \Leftrightarrow \ln k < \frac{e-3}{e-1} \Leftrightarrow \ln k < 1 - \frac{2}{e-1}$$

Do k nguyên dương nên $k \in \{1; 2\}$.

Bài tập 9. Tìm m để $\int_0^1 e^x (x+m) dx = e$.

- A. $m = 0$. B. $m = e$. C. $m = 1$. D. $m = \sqrt{e}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt

$$\begin{cases} u = x + m \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 e^x (x+m) dx = e^x (x+m) \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e^x (x+m-1) \Big|_0^1 = me - m + 1$$

Mặt khác: $I = e \Rightarrow me - m + 1 = e \Leftrightarrow m(e-1) = e-1 \Leftrightarrow m = 1$.

Dạng 4: Tích phân chứa dấu giá trị tuyệt đối

1. Phương pháp

Bài toán: Tính tích phân $I = \int_a^b g(x) dx$

(với $g(x)$ là biểu thức chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối)

PP chung:

Xét dấu của biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối trên $[a; b]$

Dựa vào dấu để tách tích phân trên mỗi đoạn tương ứng (sử dụng tính chất 3 để tách)

Tính mỗi tích phân thành phần.

Đặc biệt: Tính tích phân $I = \int_a^b |f(x)| dx$

Cách giải

Cách 1:

+) Cho $f(x) = 0$ tìm nghiệm trên $[a; b]$

+) Xét dấu của $f(x)$ trên $[a; b]$, dựa vào dấu của $f(x)$ để tách tích phân trên mỗi đoạn tương ứng (sử dụng tính chất 3 để tách)

+) Tính mỗi tích phân thành phần.

Cách 2:

+) Cho $f(x) = 0$ tìm nghiệm trên $[a; b]$ giả sử các nghiệm đó là $x_1; x_2; \dots; x_n$

(với $x_1 < x_2 < \dots < x_n$).

$$\text{Khi đó } I = \int_a^{x_1} |f(x)| dx + \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx + \int_{x_2}^{x_3} |f(x)| dx + \dots + \int_{x_n}^b |f(x)| dx$$

$$\Rightarrow I = \left| \int_a^{x_1} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^b f(x) dx \right|$$

+) Tính mỗi tích phân thành phần

2. Bài tập

Bài tập 1: $S = \int_{-1}^2 |x^2 - x - 2| dx = \frac{a}{b}, (a, b \in \mathbb{Z}^+), \frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị $a + b$ bằng

A. 11.

B. 25.

C. 100.

D. 50.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 |x^2 - x - 2| dx = - \int_{-1}^2 (x^2 - x - 2) dx = - \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_{-1}^2 \\ &= - \left[\left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 4 \right) - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) \right] = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Bài tập 2: $I = \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \sin 2x} dx = a\sqrt{a}, (a \in \mathbb{N}^+)$. Hỏi a^3 là bao nhiêu?

A. 27.

B. 64.

C. 125.

D. 8.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \sqrt{1 - \sin 2x} = \sqrt{(\sin x - \cos x)^2} = |\sin x - \cos x| = \sqrt{2} \left| \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right|.$$

Với $x \in [0; \pi] \Rightarrow x - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

+ Với $x - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$ thì $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < 0$

+ Với $x - \frac{\pi}{4} \in \left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$ thì $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0$

$$\Rightarrow I = -\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx + \sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx = 2\sqrt{2}.$$

Chọn 3: Biết $I = \int_1^5 \frac{2|x-2|+1}{x} dx = 4 + a \ln 2 + b \ln 5$, với a, b là các số nguyên. Giá trị $S = a - b$ bằng

A. 9.

B. 11.

C. 5.

D. -3.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } I &= \int_1^5 \frac{2|x-2|+1}{x} dx = \int_1^2 \frac{2|x-2|+1}{x} dx + \int_2^5 \frac{2|x-2|+1}{x} dx \\ &= \int_1^2 \frac{2(2-x)+1}{x} dx + \int_2^5 \frac{2(x-2)+1}{x} dx = \int_1^2 \frac{5-2x}{x} dx + \int_2^5 \frac{2x-3}{x} dx \\ &= \int_1^2 \left(\frac{5}{x} - x\right) dx + \int_2^5 \left(2 - \frac{3}{x}\right) dx = \left(5 \ln|x| - x\right)\Big|_1^2 + \left(2x - 3 \ln|x|\right)\Big|_2^5 \\ &= 8 \ln 2 - 3 \ln 5 + 4 \Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow a - b = 11. \end{aligned}$$

Bài tập 4: Cho tích phân $\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx = ab$ và $a + b = 2 + 2\sqrt{2}$. Giá trị của a và b lần lượt là

A. $\begin{cases} a = 2 \\ b = 2\sqrt{2} \end{cases}$.

B. $\begin{cases} a = 2\sqrt{2} \\ b = 2 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} a = 2\sqrt{2} \\ b = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 2 \\ b = 2\sqrt{2} \end{cases}$.

D. $\begin{cases} a = 2\sqrt{2} \\ b = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 2 \\ b = 2\sqrt{2} \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} |\sin x| dx = \sqrt{2} \int_0^{\pi} \sin x dx - \sqrt{2} \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx \\ &= -\sqrt{2} \cos x \Big|_0^{\pi} + \sqrt{2} \cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} = 4\sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ab = 4\sqrt{2} \\ a + b = 2 + 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow x^2 - (2 + 2\sqrt{2})x + 4\sqrt{2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2\sqrt{2} \\ b = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 2 \\ b = 2\sqrt{2} \end{cases}.$$

Bài tập 5: Tính tích phân $I = \int_0^1 x|x-a|dx, a > 0$ ta được kết quả $I = f(a)$. Khi đó tổng $f(8) + f\left(\frac{1}{2}\right)$

có giá trị bằng:

A. $\frac{24}{91}$.

B. $\frac{91}{24}$.

C. $\frac{17}{2}$.

D. $\frac{2}{17}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

TH1: Nếu $a \geq 1$ khi đó $I = -\int_0^1 x(x-a)dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{a}{2} - \frac{1}{3} \Rightarrow f(8) = \frac{8}{2} - \frac{1}{3} = \frac{11}{3}$

TH 2: Nếu $0 < a < 1$ khi đó $I = -\int_0^a x(x-a)dx + \int_a^1 x(x-a)dx$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2}\right)\Big|_0^a + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2}\right)\Big|_a^1 = \frac{a^3}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{3} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{24} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{8}$$

Khi đó $f(8) + f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{3} + \frac{1}{8} = \frac{91}{24}$.

Bài tập 6: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_0^1 f(2x)dx = 2$ và $\int_0^2 f(6x)dx = 14$. Giá trị

$\int_{-2}^2 f(5|x|+2)dx$ bằng

A. 30.

B. 32.

C. 34.

D. 36.

Lời giải

Chọn B

+ Xét $\int_0^1 f(2x)dx = 2$.

Đặt $u = 2x \Rightarrow du = 2dx$; $x = 0 \Rightarrow u = 0$; $x = 1 \Rightarrow u = 2$.

Nên $2 = \int_0^1 f(2x)dx = \frac{1}{2} \int_0^2 f(u)du \Rightarrow \int_0^2 f(u)du = 4$.

+ Xét $\int_0^2 f(6x)dx = 14$.

Đặt $v = 6x \Rightarrow dv = 6dx$; $x = 0 \Rightarrow v = 0$; $x = 2 \Rightarrow v = 12$.

Nên $14 = \int_0^2 f(6x)dx = \frac{1}{6} \int_0^{12} f(v)dv \Rightarrow \int_0^{12} f(v)dv = 84$.

+ Xét $\int_{-2}^2 f(5|x|+2)dx = \int_{-2}^0 f(5|x|+2)dx + \int_0^2 f(5|x|+2)dx$.

□ Tính $I_1 = \int_{-2}^0 f(5|x|+2)dx$.

Đặt $t=5|x|+2$.

Khi $-2 < x < 0$, $t = -5x + 2 \Rightarrow dt = -5dx$; $x = -2 \Rightarrow t = 12$; $x = 0 \Rightarrow t = 2$.

$$I_1 = \frac{-1}{5} \int_{12}^2 f(t)dt = \frac{1}{5} \left[\int_0^{12} f(t)dt - \int_0^2 f(t)dt \right] = \frac{1}{5}(84 - 4) = 16.$$

□ Tính $I_1 = \int_0^2 f(5|x|+2)dx$.

Đặt $t=5|x|+2$.

Khi $0 < x < 2$, $t = 5x + 2 \Rightarrow dt = 5dx$; $x = 2 \Rightarrow t = 12$; $x = 0 \Rightarrow t = 2$.

$$I_2 = \frac{1}{5} \int_2^{12} f(t)dt = \frac{1}{5} \left[\int_0^{12} f(t)dt - \int_0^2 f(t)dt \right] = \frac{1}{5}(84 - 4) = 16.$$

Vậy $\int_{-2}^2 f(5|x|+2)dx = 32$.

Bài tập 7: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0; 4]$ và $\int_0^2 f(x)dx = 1$; $\int_0^4 f(x)dx = 3$. Giá trị

$\int_{-1}^1 f(|3x-1|)dx$ bằng

A. 4.

B. 2.

C. $\frac{4}{3}$.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(|3x-1|)dx &= \int_{-1}^{1/3} f(1-3x)dx + \int_{1/3}^1 f(3x-1)dx. \\ &= -\frac{1}{3} \int_{-1}^{1/3} f(1-3x)d(1-3x) + \frac{1}{3} \int_{1/3}^1 f(3x-1)d(3x-1). \\ &= -\frac{1}{3} \int_4^0 f(t)dt + \frac{1}{3} \int_0^2 f(t)dt = -\frac{1}{3}(-3) + \frac{1}{3}.1 = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Bài tập 8. $S = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} |y^4 - 4y^2 + 3|dy = \frac{a-24\sqrt{3}}{b}$. Giá trị $A + 2B$ bằng

A. 80.

B. 83.

C. 142.

D. 79.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$|y^4 - 4y^2 + 3| = |(y^2 - 1)(y^2 - 3)|$$

Xét dấu $(y^2 - 1)(y^2 - 3)$, ta có:

y	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
y^2-1	+	+	0	-	+	+
y^2-3	+	0	-	-	0	+
$(y^2-1)(y^2-3)$	+	0	-	-	0	+

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left| (4 - 4y^2) - (1 - y^4) \right| dy = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} |y^4 - 4y^2 + 3| dy \\
 &= \int_{-\sqrt{3}}^{-1} -(y^4 - 4y^2 + 3) dy + \int_{-1}^1 (y^4 - 4y^2 + 3) dy + \int_1^{\sqrt{3}} -(y^4 - 4y^2 + 3) dy \\
 &= -\left(\frac{y^5}{5} - \frac{4y^3}{3} + 3y \right) \Big|_{-\sqrt{3}}^{-1} + \left(\frac{y^5}{5} - \frac{4y^3}{3} + 3y \right) \Big|_{-1}^1 - \left(\frac{y^5}{5} - \frac{4y^3}{3} + 3y \right) \Big|_1^{\sqrt{3}} \\
 &= \frac{112 - 24\sqrt{3}}{15}.
 \end{aligned}$$

Bài tập 9. $S = \int_0^1 \sqrt{4x^2 - 4x + 1} dx = \frac{a}{b}, (a, b \in \mathbb{Z}^+), \frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị $\sqrt{a + 4b}$ bằng

A. 1.

B. -3.

C. 35.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } I_7 = \int_0^1 \sqrt{(2x - 1)^2} dx = \int_0^1 |2x - 1| dx$$

$$\Rightarrow I_7 = \int_0^1 |2x - 1| dx = \int_0^{\frac{1}{2}} |2x - 1| dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 |2x - 1| dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - 2x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (2x - 1) dx = \frac{1}{2}.$$

Suy ra: $a = 1, b = 2$.

Bài tập 10. $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin x} dx = A\sqrt{B}$, biết $A = 2B$ Giá trị $A^3 + B^3$ bằng

A. 72.

B. 8.

C. 65.

D. 35.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } \sqrt{1 + \sin x} = \sqrt{\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2} = \left| \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right| = \sqrt{2} \left| \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$$

Với $x \in [0; 2\pi] \Rightarrow \frac{x}{2} \in [0; \pi] \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$.

+ Với $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}; \pi\right]$ thì $\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) > 0$

+ Với $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \in \left[\pi; \frac{5\pi}{4}\right]$ thì $\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) < 0$

$$\Rightarrow I = \sqrt{2} \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) dx - \sqrt{2} \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) dx = 4\sqrt{2}.$$

Bài tập 11. Cho tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sqrt{3} \sin 2x + 2 \cos^2 x} dx = a\sqrt{3} + b$. Giá trị $A = a - b - 4$ bằng

A. 2.

B. -5.

C. 5.

D. -8.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sqrt{3} \sin 2x + 2 \cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{(\sin x - \sqrt{3} \cos x)^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - \sqrt{3} \cos x| dx.$$

$$\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi.$$

Do $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên $x = \frac{\pi}{3}$.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} |\sin x - \sqrt{3} \cos x| dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - \sqrt{3} \cos x| dx = \left| \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x - \sqrt{3} \cos x) dx \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \sqrt{3} \cos x) dx \right| \\ &= \left| (-\cos x - \sqrt{3} \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} \right| + \left| (-\cos x - \sqrt{3} \sin x) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \right| = \left| -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 1 \right| + \left| -\sqrt{3} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \right| = 3 - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a = -1; b = 3 \Rightarrow A = -8$$

Dạng 5: Tính tích phân các hàm đặc biệt, hàm ẩn

1. Phương pháp giải

a. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-a; a]$.

Bài tập 1: Tích phân $I = \int_{-1}^1 \cos x \cdot \ln \frac{2+x}{2-x} dx$ bằng

Khi đó

$$\boxed{\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx} \quad (1)$$

Chúng minh

Ta có $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx.$

Xét $I = \int_{-a}^0 f(x) dx.$ Đổi biến

$$x = -t \Rightarrow dx = -dt.$$

Đổi cận $x = -a \Rightarrow t = a; x = 0 \Rightarrow t = 0$

Khi đó

$$I = \int_a^0 f(-t)(-dt) = \int_0^a f(-t) dt = \int_0^a f(-x) dx$$

Do đó (1) được chứng minh.

Đặc biệt

+ Nếu $f(x)$ là hàm số lẻ thì ta có

$$\boxed{\int_{-a}^a f(x) dx = 0} \quad (1.1).$$

+ Nếu $f(x)$ là hàm số chẵn thì ta có

$$\boxed{\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx} \quad (1.2)$$

+ Nếu $f(x)$ là hàm số chẵn thì ta cũng có

$$\boxed{\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+b^x} dx = \frac{1}{2} \int_{-a}^a f(x) dx} \quad (0 < b \neq 1) \quad (1.3).$$

Chứng minh (1.3):

Đặt $A = \int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+b^x} dx$ (*).

Đổi biến $x = -t \Rightarrow dx = -dt.$

Đổi cận $x = -a \Rightarrow t = a; x = a \Rightarrow t = -a$

Khi đó $A = \int_a^{-a} \frac{f(-t)}{1+b^{-t}} (-dt) = \int_{-a}^a \frac{b^t \cdot f(t)}{1+b^t} dt.$

A. -1.

B.

2.

C. 0.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Hàm số $f(x) = \cos x \cdot \ln \frac{2+x}{2-x}$ xác định và liên tục

trên đoạn $[-1; 1]$.

Mặt khác, với $\forall x \in [-1; 1] \Rightarrow -x \in [-1; 1]$ và

$$f(-x) = \cos(-x) \cdot \ln \frac{2-x}{2+x} = -\cos x \cdot \ln \frac{2+x}{2-x} = -f(x).$$

Do đó hàm số $f(x) = \cos x \cdot \ln \frac{2+x}{2-x}$ là hàm số lẻ.

Vậy $I = \int_{-1}^1 \cos x \cdot \ln \frac{2+x}{2-x} dx = 0.$

Chọn C.

Bài tập 2: Cho $y = f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên đoạn $[-6; 6]$.

Biết rằng $\int_{-1}^2 f(x) dx = 8$ và $\int_1^3 f(-2x) dx = 3.$

Tính $\int_{-1}^6 f(x) dx.$

A. $I = 11.$

B. $I = 5.$

C. $I = 2.$

D. $I = 14.$

Hướng dẫn giải

Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-6; 6]$ ta có

$$\int_1^3 f(-2x) dx = 3 \Leftrightarrow \int_1^3 f(2x) dx = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} F(2x) \Big|_1^3 = 3.$$

Do đó $F(6) - F(2) = 6$ hay $\int_2^6 f(x) dx = 6.$

Vậy $I = \int_{-1}^6 f(x) dx = \int_{-1}^2 f(x) dx + \int_2^6 f(x) dx = 14.$

Hay $A = \int_{-a}^a \frac{b^x \cdot f(x)}{1+b^x} dx$ (**).

Suy

$$2A = \int_{-a}^a f(x) dx \Leftrightarrow A = \frac{1}{2} \int_{-a}^a f(x) dx.$$

Chọn D.

Bài tập 3: Tích phân $I = \int_{-1}^1 \frac{x^{2020}}{e^x + 1} dx$ có giá trị là

- A. $I = 0$. B. $I = \frac{2^{2020}}{2019}$.
- C. $I = \frac{2^{2021}}{2021}$. D. $I = \frac{2^{2019}}{2019}$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng bài toán (1.3) ở cột bên trái cho hàm số

$f(x) = x^{2020}$ và $b = e$ ta có

Ta có

$$I = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^{2020} dx = \frac{x^{2021}}{2021} \Big|_{-1}^1 = \frac{2 \cdot 2^{2021}}{2021} \Rightarrow I = \frac{2^{2021}}{2021}.$$

Chọn C.

b. Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$$

Hệ quả: hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$, khi đó:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$$

Bài tập 4: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa điều

kiện $f(x) + f(-x) = 2 \cos x$, với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Giá trị của $N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ là

- A. $N = -1$. B. $N = 0$.
- C. $N = 1$. D. $N = 2$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x) dx$$

$$\text{Suy ra } 2N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + f(-x)] dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos x dx.$$

$$\text{Vậy } N = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2 \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2.$$

Chọn D.

Bài tập 5: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) + f(2-x) = x(2-x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Giá trị tích phân $G = \int_0^2 f(x) dx$ là

- A. $G = 2$. B. $G = \frac{1}{2}$.
C. $G = \frac{2}{3}$. D. $G = \frac{1}{3}$.

c. Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a+b-x) = f(x)$ thì

$$\int_a^b xf(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx$$

Hướng dẫn giải

Ta có $G = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 f(2-x) dx$

Suy ra $2G = \int_0^2 [f(x) + f(2-x)] dx = \int_0^2 x(2-x) dx$

Vậy $G = \frac{1}{2} \int_0^2 x(2-x) dx = \frac{2}{3}$.

Chọn C.

Bài tập 6: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn $f(1) = 0$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7$ và

$\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

- A. $\frac{7}{5}$. B. 1.
C. $\frac{7}{4}$. D. 4.

d. Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và **Hướng dẫn giải**

$f(x) \geq 0$ với $\forall x \in [a; b]$ thì $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ và Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{x^3}{3} \end{cases}$

$\int_a^b f(x) dx = 0$ khi $f(x) = 0$.

Ta có $\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{x^3 f(x)}{3} \Big|_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 x^3 f'(x) dx$

$\Rightarrow -\frac{1}{3} \int_0^1 x^3 f'(x) dx = \frac{1}{3} \Rightarrow \int_0^1 x^3 f'(x) dx = -1$.

Cách 1: Ta có $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7$ (1).

$$\int_0^1 x^6 dx = \frac{x^7}{7} \Big|_0^1 = \frac{1}{7} \Rightarrow \int_0^1 49x^6 dx = \frac{1}{7} \cdot 49 = 7$$
 (2).

$$\int_0^1 x^3 \cdot f'(x) dx = -1 \Rightarrow \int_0^1 14x^3 \cdot f'(x) dx = -14$$
 (3).

Cộng hai vế (1), (2) và (3) suy ra

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx + \int_0^1 49x^6 dx + \int_0^1 14x^3 \cdot f'(x) dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 [f(x) + 7x^3]^2 dx = 0.$$

$$\text{Do } [f'(x) + 7x^3]^2 \geq 0 \Rightarrow \int_0^1 [f'(x) + 7x^3]^2 dx \geq 0. \text{ Mà}$$

$$\int_0^1 [f'(x) + 7x^3]^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) = -7x^3.$$

$$f(x) = -\frac{7x^4}{4} + C.$$

$$\text{Mà } f(1) = 0 \Rightarrow -\frac{7}{4} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{7}{4}.$$

$$\text{Do đó } f(x) = -\frac{7x^4}{4} + \frac{7}{4}.$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(-\frac{7x^4}{4} + \frac{7}{4} \right) dx = \frac{7}{5}.$$

Một số kĩ thuật giải tích phân hàm ẩn

Loại 1: Biểu thức tích phân đưa về dạng: $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x)$

Cách giải:

$$+ \text{ Ta có } u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = [u(x)f(x)]'$$

$$+ \text{ Do đó } u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x) \Leftrightarrow [u(x)f(x)]' = h(x)$$

$$\text{Suy ra } u(x)f(x) = \int h(x) dx$$

$$\text{Suy ra được } f(x)$$

Loại 2: Biểu thức tích phân đưa về dạng: $f'(x) + f(x) = h(x)$

Cách giải:

+ Nhân hai vế với $e^x \Rightarrow e^x \cdot f'(x) + e^x \cdot f(x) = e^x \cdot h(x) \Leftrightarrow [e^x \cdot f(x)]' = e^x \cdot h(x)$

Suy ra $e^x \cdot f(x) = \int e^x h(x) dx$

Suy ra được $f(x)$

Loại 3: Biểu thức tích phân đưa về dạng: $f'(x) - f(x) = h(x)$

Cách giải:

+ Nhân hai vế với $e^{-x} \Rightarrow e^{-x} \cdot f'(x) + e^{-x} \cdot f(x) = e^{-x} \cdot h(x) \Leftrightarrow [e^{-x} \cdot f(x)]' = e^{-x} \cdot h(x)$

Suy ra $e^{-x} \cdot f(x) = \int e^{-x} h(x) dx$

Suy ra được $f(x)$

Loại 4: Biểu thức tích phân đưa về dạng: $f'(x) + p(x)f(x) = h(x)$

Cách giải:

+ Nhân hai vế với $e^{\int p(x)dx} \Rightarrow f'(x) \cdot e^{\int p(x)dx} + p(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \cdot f(x) = h(x) \cdot e^{\int p(x)dx}$
 $\Leftrightarrow \left[f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \right]' = h(x) \cdot e^{\int p(x)dx}$

Suy ra $f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} = \int e^{\int p(x)dx} \cdot h(x) dx$

Suy ra được $f(x)$

Công thức $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$

2. Bài tập

Bài tập 1: Cho số thực $a > 0$. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục và luôn dương trên đoạn $[0; a]$ thỏa mãn

$f(x) \cdot f(a-x) = 1$. Giá trị tích phân $I = \int_0^a \frac{1}{1+f(x)} dx$ là

A. $I = \frac{2a}{3}$.

B. $I = \frac{a}{2}$.

C. $I = \frac{a}{3}$.

D. $I = a$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đặt $t = a - x \Rightarrow dt = -dx$. Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = a; x = a \Rightarrow t = 0$.

Khi đó $I = \int_0^a \frac{1}{1+f(a-t)} dt = \int_0^a \frac{1}{1+f(a-x)} dx = \int_0^a \frac{1}{1+\frac{1}{f(x)}} dx = \int_0^a \frac{f(x)}{1+f(x)} dx$.

$$\Rightarrow 2I = \int_0^a \frac{1}{1+f(x)} dx + \int_0^a \frac{f(x)}{1+f(x)} dx = \int_0^a 1 dx = a. \text{ Vậy } I = \frac{a}{2}.$$

Ta có thể chọn hàm số $f(x) = 1$, với mọi $x \in [0; a]$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

$$\text{Khi đó } I = \int_0^a \frac{1}{1+f(x)} dx = \int_0^a \frac{1}{2} dx = \frac{a}{2}.$$

Bài tập 2: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1; 1]$ và $f(-x) + 2019f(x) = e^x, \forall x \in [-1; 1]$. Tích phân

$$M = \int_{-1}^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{e^2 - 1}{2019e}.$

B. $\frac{e^2 - 1}{e}.$

C. $\frac{e^2 - 1}{2020e}.$

D. 0.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } M = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 f(-x) dx.$$

$$\text{Do đó } 2020M = 2019 \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_{-1}^1 f(-x) dx = \int_{-1}^1 [f(-x) + 2019f(x)] dx.$$

$$\text{Suy ra } M = \frac{1}{2020} \int_{-1}^1 e^x dx = \frac{e^2 - 1}{2020e}.$$

$$\text{Nếu } f(x) \text{ liên tục trên đoạn } [a; b] \text{ thì } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$$

Bài tập 3. Cho $f(x)$ là một hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + f(-x) = \sqrt{2 - 2\cos 2x}$.

$$\text{Giá trị tích phân } P = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx \text{ là}$$

A. $P = 3.$

B. $P = 4.$

C. $P = 6.$

D. $P = 8.$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } P = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(-x) dx$$

$$\Rightarrow 2P = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} [f(x) + f(-x)] dx = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{2 - 2\cos 2x} dx = 4 \int_0^{\frac{3\pi}{2}} |\sin x| dx.$$

Hay $P = 2 \int_0^{\pi} \sin x dx - 2 \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sin x dx = -2 \cos x \Big|_0^{\pi} + 2 \cos x \Big|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} = 6.$

Bài tập 4: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) = \sin x$ với mọi x và $f(0) = 1$. Tích phân $e^x \cdot f(\pi)$ bằng

- A. $\frac{e^{\pi}-1}{2}.$ B. $\frac{e^{\pi}-1}{2}.$ C. $\frac{e^{\pi}+3}{2}.$ D. $\frac{\pi+1}{2}.$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $f(x) + f'(x) = \sin x$ nên $e^x f(x) + e^x f'(x) = e^x \cdot \sin x, \forall x \in \mathbb{R}.$

$$\Leftrightarrow [e^x f(x)]' = e^x \cdot \sin x \text{ hay } \int_0^{\pi} [e^x f(x)]' dx = \int_0^{\pi} e^x \cdot \sin x dx$$

$$\Leftrightarrow [e^x f(x)] \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2} [e^x (\sin x - \cos x)] \Big|_0^{\pi} \Leftrightarrow e^{\pi} f(\pi) - f(0) = \frac{1}{2} (e^{\pi} + 1)$$

$$\Leftrightarrow e^{\pi} f(\pi) = \frac{e^{\pi} + 3}{2}.$$

Để ý rằng $(e^x)' = e^x$ nên nếu nhân thêm hai vế của $f(x) + f'(x) = \sin x$ với e^x thì ta sẽ có ngay $(e^x \cdot f(x))' = e^x \cdot \sin x.$

Bài tập 5: Cho hàm số $f(x)$ tuần hoàn với chu kì $\frac{\pi}{2}$ và có đạo hàm liên tục thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [f'(x)]^2 dx = \frac{\pi}{4} \text{ và } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x) \cdot \cos x dx = \frac{\pi}{4}. \text{ Giá trị của } f(2019\pi).$$

- A. $-1.$ B. $0.$ C. $\frac{1}{2}.$ D. $1.$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Bằng phương pháp tích phân từng phần ta có

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x) \cdot \cos x dx = [f(x) \cdot \sin x] \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f'(x) \cdot \sin x dx. \text{ Suy ra } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f'(x) \cdot \sin x dx = -\frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Mặt khác } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 x dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \left[\frac{2x - \sin 2x}{4} \right] \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\pi}{4}.$$

Suy ra

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x)]^2 dx + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x f'(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x) + \sin x]^2 dx = 0.$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\sin x. \text{ Do đó } f(x) = \cos x + C. \text{ Vì } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ nên } C = 0.$$

$$\text{Ta được } f(x) = \cos x \Rightarrow f(2019\pi) = \cos(2019\pi) = -1.$$

Bài tập 6: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $3f(x) + xf'(x) = x^{2018}$ với mọi $x \in [0;1]$. Tính $I = \int_0^1 f(x) dx$.

$$\text{A. } I = \frac{1}{2018 \times 2021}.$$

$$\text{B. } I = \frac{1}{2019 \times 2020}.$$

$$\text{C. } I = \frac{1}{2019 \times 2021}.$$

$$\text{D. } I = \frac{1}{2018 \times 2019}.$$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Từ giả thiết $3f(x) + xf'(x) = x^{2018}$, nhân hai vế cho x^2 ta được

$$3x^2 f(x) + x^3 f'(x) = x^{2020} \Leftrightarrow [x^3 f(x)]' = x^{2020}.$$

$$\text{Suy ra } x^3 f(x) = \int x^{2020} dx = \frac{x^{2021}}{2021} + C.$$

$$\text{Thay } x=0 \text{ vào hai vế ta được } C=0 \Rightarrow f(x) = \frac{x^{2018}}{2021}.$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{2021} x^{2018} dx = \frac{1}{2021} \cdot \frac{1}{2019} x^{2019} \Big|_0^1 = \frac{1}{2021 \times 2019}.$$

Bài tập 7: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;4]$, thỏa mãn $f(x) + f'(x) = e^{-x} \sqrt{2x+1}$ với mọi $x \in [0;4]$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

$$\text{A. } e^4 f(4) - f(0) = \frac{26}{3}.$$

$$\text{B. } e^4 f(4) - f(0) = 3e.$$

$$\text{C. } e^4 f(4) - f(0) = e^4 - 1.$$

$$\text{D. } e^4 f(4) - f(0) = 3.$$

Lời giải

Chọn A

Nhân hai vế cho e^x để thu được đạo hàm đúng, ta được

$$e^x f(x) + e^x f'(x) = \sqrt{2x+1} \Leftrightarrow [e^x f(x)]' = \sqrt{2x+1}.$$

$$\text{Suy ra } e^x f(x) = \int \sqrt{2x+1} dx = \frac{1}{3} (2x+1) \sqrt{2x+1} + C.$$

Vậy $e^4 f(4) - f(0) = \frac{26}{3}$.

Bài tập 8: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'(x) - 2018f(x) = 2018x^{2017}e^{2018x}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2018$. Giá trị $f(1)$ bằng

- A. $2018e^{-2018}$. B. $2017e^{2018}$. C. $2018e^{2018}$. D. $2019e^{2018}$.

Lời giải

Chọn D

Nhân hai vế cho e^{-2018x} để thu được đạo hàm đúng, ta được

$$f'(x)e^{-2018x} - 2018f(x)e^{-2018x} = 2018x^{2017} \Leftrightarrow [f(x)e^{-2018x}]' = 2018x^{2017}.$$

$$\text{Suy ra } f(x)e^{-2018x} = \int 2018x^{2017} dx = x^{2018} + C.$$

$$\text{Thay } x=0 \text{ vào hai vế ta được } C = 2018 \Rightarrow f(x) = (x^{2018} + 2018)e^{2018x}.$$

$$\text{Vậy } f(1) = 2019e^{2018}.$$

Bài tập 9: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'(x) + xf(x) = 2xe^{-x^2}$ và $f(0) = -2$. Giá trị $f(1)$ bằng

- A. e . B. $\frac{1}{e}$. C. $\frac{2}{e}$. D. $-\frac{2}{e}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Nhân hai vế cho $e^{\frac{x^2}{2}}$ để thu được đạo hàm đúng, ta được

$$f'(x)e^{\frac{x^2}{2}} + f(x)xe^{\frac{x^2}{2}} = 2xe^{\frac{x^2}{2}} \Leftrightarrow \left[e^{\frac{x^2}{2}} f(x) \right]' = 2xe^{\frac{x^2}{2}}.$$

$$\text{Suy ra } e^{\frac{x^2}{2}} f(x) = \int 2xe^{\frac{x^2}{2}} dx = 2e^{\frac{x^2}{2}} + C.$$

$$\text{Thay } x=0 \text{ vào hai vế ta được } C = 0 \Rightarrow f(x) = 2e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

$$\text{Vậy } f(1) = 2e^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{e}.$$

Bài tập 10: Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $2f(x) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x}$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{2}{15}$. D. $\frac{3}{5}$.
-

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $2f(x) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x}$ (1).

Đặt $t = 1-x$, thay vào (1), ta được: $2f(1-t) + 3f(t) = \sqrt{t}$ hay $2f(1-x) + 3f(x) = \sqrt{x}$ (2).

Từ (1) & (2), ta được: $f(x) = \frac{3}{5}\sqrt{x} - \frac{2}{5}\sqrt{1-x}$.

Do đó, ta có: $\int_0^1 f(x) dx = \frac{3}{5} \int_0^1 \sqrt{x} dx - \frac{2}{5} \int_0^1 \sqrt{1-x} dx = \frac{2}{5} - \frac{4}{15} = \frac{2}{15}$.

Cách 2. Công thức $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$

Lấy tích phân 2 vế ta được $2 \int_0^1 f(x) dx + 3 \int_0^1 f(1-x) dx = \int_0^1 \sqrt{1-x} dx$

$$5 \int_0^1 f(x) dx = \frac{2}{3} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{2}{15}.$$

Chú ý: Ta có thể dùng công thức $\int_{x_1}^{x_2} f(ax+b) dx = \int_{ax_1+b}^{ax_2+b} f(x) dx$. Khi đó:

Từ $2f(x) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x}$ suy ra: $2 \int_0^1 f(x) dx + 3 \int_0^1 f(1-x) dx = \int_0^1 \sqrt{1-x} dx$

$$\Leftrightarrow 2 \int_0^1 f(x) dx - 3 \int_1^0 f(x) dx = \int_0^1 \sqrt{1-x} dx \Leftrightarrow 5 \int_0^1 f(x) dx = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{2}{15}.$$

$$I = \frac{1}{2} \int_1^2 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_1^2 f(x) dx = \frac{a}{2}.$$

Bài tập 11: Cho $y = f(x)$ là hàm số chẵn, có đạo hàm trên đoạn $[-6; 6]$. Biết rằng $\int_{-1}^2 f(x) dx = 8$ và

$$\int_1^3 f(-2x) dx = 3. \text{ Giá trị } \int_{-1}^6 f(x) dx \text{ bằng}$$

A. 1.

B. e.

C. -1.

D. 14.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $y = f(x)$ là hàm số chẵn nên $f(2x) = f(-2x)$ suy ra $\int_1^3 f(-2x) dx = \int_1^3 f(2x) dx = 3$.

$$\text{Mặt khác: } \int_1^3 f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_1^3 f(2x) d(2x) = \frac{1}{2} \int_2^6 f(x) dx = 3 \Rightarrow \int_2^6 f(x) dx = 6.$$

Vậy $I = \int_{-1}^6 f(x) dx = \int_{-1}^2 f(x) dx + \int_2^6 f(x) dx = 8 + 6 = 14.$

Bài tập 12: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số k để $\int_1^k (2x-1) dx = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}.$

A. $\begin{cases} k=1 \\ k=2 \end{cases}.$

B. $\begin{cases} k=1 \\ k=-2 \end{cases}.$

C. $\begin{cases} k=-1 \\ k=-2 \end{cases}.$

D. $\begin{cases} k=-1 \\ k=2 \end{cases}.$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $\int_1^k (2x-1) dx = \frac{1}{2} \int_1^k (2x-1) d(2x-1) = \frac{(2x-1)^2}{4} \Big|_1^k = \frac{(2k-1)^2}{4} - \frac{1}{4}$

Mà $4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = 2$

Khi đó $\int_1^k (2x-1) dx = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \Leftrightarrow \frac{(2k-1)^2-1}{4} = 2 \Leftrightarrow (2k-1)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} k=2 \\ k=-1 \end{cases}.$

Bài tập 13: Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[0; a]$ thỏa mãn $\begin{cases} f(x).f(a-x)=1 \\ f(x)>0, \forall x \in [0; a] \end{cases}$ và

$\int_0^a \frac{dx}{1+f(x)} = \frac{ba}{c}$, trong đó b, c là hai số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Khi đó b+c có giá

trị thuộc khoảng nào dưới đây?

A. (11; 22).

B. (0; 9).

C. (7; 21).

D. (2017; 2020).

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Đặt $t = a - x \Rightarrow dt = -dx$

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = a; x = a \Rightarrow t = 0$

Lúc đó $I = \int_0^a \frac{dx}{1+f(x)} = \int_a^0 \frac{-dt}{1+f(a-t)} = \int_0^a \frac{dx}{1+f(a-x)} = \int_0^a \frac{dx}{1+\frac{1}{f(x)}} = \int_0^a \frac{f(x) dx}{1+f(x)}$

Suy ra $2I = I + I = \int_0^a \frac{dx}{1+f(x)} + \int_0^a \frac{f(x) dx}{1+f(x)} = \int_0^a 1 dx = a$

Do đó $I = \frac{1}{2}a \Rightarrow b=1; c=2 \Rightarrow b+c=3.$

Cách 2: Chọn $f(x)=1$ là một hàm thỏa các giả thiết. Dễ dàng tính được

$$I = \frac{1}{2}a \Rightarrow b=1; c=2 \Rightarrow b+c=3.$$

Bài tập 14: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 4$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx = 2$. Giá trị của

tích phân $\int_0^3 f(x) dx$ bằng

A. 2 .

B. 6 .

C. 4 .

D. 10 .

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

● Xét $\int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 4$. Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x$, suy ra $2tdt = dx$.

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x=1 \rightarrow t=1 \\ x=9 \rightarrow t=3 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } 4 = \int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_1^3 f(t) 2dt \Rightarrow \int_1^3 f(t) dt = 2.$$

● Xét $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx = 2$. Đặt $u = \sin x$, suy ra $du = \cos x dx$.

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x=0 \rightarrow u=0 \\ x=\frac{\pi}{2} \rightarrow u=1 \end{cases}. \text{ Suy ra } 2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx = \int_0^1 f(t) dt.$$

$$\text{Vậy } I = \int_0^3 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx = 4.$$

Bài tập 15: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = 4$, $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1} dx = 2$. Giá trị của

tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. $I=6$.

B. $I=2$.

C. $I=3$.

D. $I=1$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

$$\text{Xét } \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = 4.$$

Đặt $t = \tan x$, suy ra $dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx = (\tan^2 x + 1) dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

Đổi cận: $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=\frac{\pi}{4} \Rightarrow t=1 \end{cases}$. Khi đó $4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = \int_0^1 \frac{f(t)}{t^2+1} dt = \int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1} dx$.

Từ đó suy ra $I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1} dx = 4 + 2 = 6$.

Bài tập 16: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \cdot f(\cos^2 x) dx = 1$,

$\int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x \ln x} dx = 1$. Giá trị của tích phân $I = \int_{\frac{1}{4}}^2 \frac{f(2x)}{x} dx$ bằng

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

• Xét $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \cdot f(\cos^2 x) dx = 1$. Đặt $t = \cos^2 x$.

Suy ra

$$dt = -2 \sin x \cos x dx = -2 \cos^2 x \tan x dx = -2t \cdot \tan x dx \longrightarrow \tan x dx = -\frac{dt}{2t}.$$

Đổi cận: $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=\frac{\pi}{4} \Rightarrow t=\frac{1}{2} \end{cases}$.

Khi đó $1 = A = -\frac{1}{2} \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{f(t)}{t} dt = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t} dt = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(x)}{x} dx \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(x)}{x} dx = 2$.

• Xét $B = \int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x \ln x} dx = 1$. Đặt $u = \ln^2 x$.

Suy ra $du = \frac{2 \ln x}{x} dx = \frac{2 \ln^2 x}{x \ln x} dx = \frac{2u}{x \ln x} dx \Rightarrow \frac{dx}{x \ln x} = \frac{du}{2u}$.

Đổi cận: $\begin{cases} x=e \Rightarrow u=1 \\ x=e^2 \Rightarrow u=4 \end{cases}$.

Khi đó $1 = B = \frac{1}{2} \int_1^4 \frac{f(u)}{u} du = \frac{1}{2} \int_1^4 \frac{f(x)}{x} dx \Rightarrow \int_1^4 \frac{f(x)}{x} dx = 2$.

- Xét tích phân cần tính $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(2x)}{x} dx$.

Đặt $v = 2x$, suy ra $\begin{cases} dx = \frac{1}{2} dv \\ x = \frac{v}{2} \end{cases}$. Đổi cận: $\begin{cases} x = \frac{1}{4} \Rightarrow v = \frac{1}{2} \\ x = 2 \Rightarrow v = 4 \end{cases}$.

Khi đó $I = \int_{\frac{1}{2}}^4 \frac{f(v)}{v} dv = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(x)}{x} dx + \int_1^4 \frac{f(x)}{x} dx = 2 + 2 = 4$.

Bài tập 17: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên $[0; 2]$. Biết $f(0) = 1$ và

$f(x)f(2-x) = e^{2x^2-4x}$ với mọi $x \in [0; 2]$. Giá trị tích phân $I = \int_0^2 \frac{(x^3 - 3x^2)f'(x)}{f(x)} dx$ bằng

A. $-\frac{14}{3}$. B. $-\frac{32}{5}$. C. $-\frac{16}{3}$. D. $-\frac{16}{5}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Từ giả thiết $f(x)f(2-x) = e^{2x^2-4x} \xrightarrow{x=2} f(2) = 1$.

Ta có $I = \int_0^2 \frac{(x^3 - 3x^2)f'(x)}{f(x)} dx$. Đặt $\begin{cases} u = x^3 - 3x^2 \\ dv = \frac{f'(x)}{f(x)} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (3x^2 - 6x) dx \\ v = \ln|f(x)| \end{cases}$.

Khi đó

$$I = (x^3 - 3x^2) \ln|f(x)| \Big|_0^2 - \int_0^2 (3x^2 - 6x) \ln|f(x)| dx$$

$$\stackrel{f(2)=1}{=} -3 \int_0^2 (x^2 - 2x) \ln|f(x)| dx = -3J.$$

Ta có $J = \int_0^2 (x^2 - 2x) \ln|f(x)| dx \stackrel{x=2-t}{=} \int_2^0 [(2-t)^2 - 2(2-t)] \ln|f(2-t)| d(2-t)$

$$= \int_2^0 [(2-x)^2 - 2(2-x)] \ln|f(2-x)| d(2-x) = \int_0^2 (x^2 - 2x) \ln|f(2-x)| dx.$$

Suy ra

$$2J = \int_0^2 (x^2 - 2x) \ln|f(x)| dx + \int_0^2 (x^2 - 2x) \ln|f(2-x)| dx$$

$$= \int_0^2 (x^2 - 2x) \ln|f(x)f(2-x)| dx$$

$$= \int_0^2 (x^2 - 2x) \ln e^{2x^2-4x} dx = \int_0^2 (x^2 - 2x)(2x^2 - 4x) dx = \frac{32}{15} \Rightarrow J = \frac{16}{15}.$$

Vậy $I = -3J = -\frac{16}{5}$.

Bài tập 18: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ và thỏa mãn $2f(x) + f(-x) = \cos x$. Giá

trị của tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ bằng

- A. $I = -2$. B. $I = \frac{2}{3}$. C. $I = \frac{3}{2}$. D. $I = 2$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Từ giả thiết, thay x bằng $-x$ ta được $2f(-x) + f(x) = \cos x$.

Do đó ta có hệ

$$\begin{cases} 2f(x) + f(-x) = \cos x \\ 2f(-x) + f(x) = \cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4f(x) + 2f(-x) = 2\cos x \\ f(x) + 2f(-x) = \cos x \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}\cos x.$$

Khi đó $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \frac{1}{3} \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$.

Bài tập 19: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ và thỏa mãn $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$. Giá trị của

tích phân $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{5}{2}$. D. $\frac{7}{2}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Từ giả thiết, thay x bằng $\frac{1}{x}$ ta được $f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f(x) = \frac{3}{x}$.

Do đó ta có hệ

$$\begin{cases} f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x \\ f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f(x) = \frac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x \\ 4f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{6}{x} \end{cases} \longrightarrow f(x) = \frac{2}{x} - x.$$

Khi đó $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{2}{x^2} - 1\right) dx = \left(-\frac{2}{x} - x\right) \Big|_{\frac{1}{2}}^2 = \frac{3}{2}$.

Cách khác. Từ $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x \Rightarrow f(x) = 3x - 2f\left(\frac{1}{x}\right)$.

$$\text{Khi đó } I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(3 - 2 \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \right) dx = 3 \int_{\frac{1}{2}}^2 dx - 2 \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x} dx.$$

$$\text{Xét } J = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x} dx. \text{ Đặt } t = \frac{1}{x}, \text{ suy ra } dt = -\frac{1}{x^2} dx = -t^2 dx \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2} dt.$$

$$\text{Đổi cận: } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \rightarrow t = 2 \\ x = 2 \rightarrow t = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } J = \int_2^{\frac{1}{2}} t f(t) \left(-\frac{1}{t^2} \right) dt = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(t)}{t} dt = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx = I.$$

$$\text{Vậy } I = 3 \int_{\frac{1}{2}}^2 dx - 2I \Rightarrow I = \int_{\frac{1}{2}}^2 dx = \frac{3}{2}.$$

Bài tập 20: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = 15x^4 + 12x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 1$. Giá trị của $f^2(1)$ bằng

A. $\frac{5}{2}$.

B. $\frac{9}{2}$.

C. 8.

D. 10.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$$\text{Nhận thấy được } [f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = [f(x) \cdot f'(x)]'.$$

$$\text{Do đó giả thiết tương đương với } [f(x) \cdot f'(x)]' = 15x^4 + 12x.$$

$$\text{Suy ra } f(x) \cdot f'(x) = \int (15x^4 + 12x) dx = 3x^5 + 6x^2 + C \xrightarrow{f(0)=f'(0)=1} C = 1$$

$$\Rightarrow f(x) \cdot f'(x) = 3x^5 + 6x^2 + 1$$

$$\Rightarrow \int f(x) \cdot f'(x) dx = \int (3x^5 + 6x^2 + 1) dx \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2} = \frac{x^6}{2} + 2x^3 + x + C'.$$

$$\text{Thay } x = 0 \text{ vào hai vế ta được } \frac{f^2(0)}{2} = C' \Rightarrow C' = \frac{1}{2}.$$

Vậy $f^2(x) = x^6 + 4x^3 + 2x + 1 \Rightarrow f^2(1) = 8$.

Bài tập 22: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(\tan x) = \cos^4 x, \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị

$I = \int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{2+\pi}{8}$.

B. 1.

C. $\frac{2+\pi}{4}$.

D. $\frac{\pi}{4}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

$$f(\tan x) = \cos^4 x \Leftrightarrow f(\tan x) = \left(\frac{1}{\tan^2 x + 1} \right)^2$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^2} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{2+\pi}{8}$$

Dạng 8: Bất đẳng thức tích phân**1. Phương pháp**

Áp dụng các bất đẳng thức:

+ Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ thì $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

+ Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $m \leq f(x) \leq M$ thì $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$

+ Nếu $f(x), g(x)$ liên tục trên $[a; b]$ thì $\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx$ dấu "=" xảy

ra khi và chỉ khi $f(x) = k \cdot g(x)$.

+ Bất đẳng thức AM-GM

2. Bài tập

Bài tập 1: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$, thỏa mãn $f(1) = 0$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7$

và $\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}$. Giá trị phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. 1.

B. $\frac{7}{5}$.

C. $\frac{7}{4}$.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Dùng tích phân từng phần ta có $\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{x^3}{3} f(x) \Big|_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 x^3 f'(x) dx$. Kết hợp với giả thiết

$f(1) = 0$, ta suy ra $\int_0^1 x^3 f'(x) dx = -1$.

Theo Holder $(-1)^2 = \left(\int_0^1 x^3 f'(x) dx \right)^2 \leq \int_0^1 x^6 dx \cdot \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{x^7}{7} \Big|_0^1 \cdot 7 = 1$.

Vậy đẳng thức xảy ra nên ta có $f'(x) = kx^3$, thay vào $\int_0^1 x^3 f'(x) dx = -1$ ta được $k = -7$.

Suy ra $f'(x) = -7x^3 \Rightarrow f(x) = -7x^4, \forall x \in [0; 1] \Rightarrow f(x) = -\frac{7}{4}x^4 + C$

$\xrightarrow{f(1)=0} C = \frac{7}{4} \Rightarrow f(x) = -\frac{7}{4}x^4 + \frac{7}{4} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{7}{5}$.

Chọn C

$$\text{Ta có } \int_0^1 \frac{dx}{f^2(x)} + \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{f^2(x)} + [f'(x)]^2 \right] dx \stackrel{\text{AM-GM}}{\geq} 2 \int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx$$

$$= 2 \ln |f(x)| \Big|_0^1 = 2 \ln |f(1)| - 2 \ln |f(0)| = 2 \ln \left| \frac{f(1)}{f(0)} \right| = 2 \ln e = 2.$$

$$\text{Mà } \int_0^1 \frac{dx}{f^2(x)} + \int_0^1 [f'(x)]^2 dx \leq 2 \text{ nên dấu "=" xảy ra, tức là } f'(x) = \frac{1}{f(x)} \Leftrightarrow f(x)f'(x) = 1$$

$$\Rightarrow \int f(x)f'(x)dx = \int xdx \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2} = x + C \Rightarrow f(x) = \sqrt{2x + 2C}.$$

$$\text{Theo giả thiết } f(1) = ef(0) \text{ nên ta có } \sqrt{2 + 2C} = e\sqrt{2C} \Leftrightarrow 2 + 2C = e^2 2C \Leftrightarrow C = \frac{1}{e^2 - 1}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{2x + \frac{2}{e^2 - 1}} \Rightarrow f(1) = \sqrt{2 + \frac{2}{e^2 - 1}} = \sqrt{\frac{2e^2}{e^2 - 1}}.$$

Bài tập 5: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương trên $[0;1]$, có đạo hàm dương và liên tục trên $[0;1]$,

thỏa mãn $f(0) = 1$ và $\int_0^1 [f^3(x) + 4[f'(x)]^3] dx \leq 3 \int_0^1 f'(x)f^2(x) dx$. Giá trị $I = \int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. $2(\sqrt{e} - 1).$

B. $2(e^2 - 1).$

C. $\frac{\sqrt{e} - 1}{2}.$

D. $\frac{e^2 - 1}{2}.$

Hướng dẫn giải**Chọn A**

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho ba số dương ta có

$$\begin{aligned} f^3(x) + 4[f'(x)]^3 &= 4[f'(x)]^3 + \frac{f^3(x)}{2} + \frac{f^3(x)}{2} \\ &\geq 3\sqrt[3]{4[f'(x)]^3 \cdot \frac{f^3(x)}{2} \cdot \frac{f^3(x)}{2}} = 3f'(x)f^2(x). \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \int_0^1 [f^3(x) + 4[f'(x)]^3] dx \geq 3 \int_0^1 f'(x)f^2(x) dx.$$

Mà $\int_0^1 [f^3(x) + 4[f'(x)]^3] dx \leq 3 \int_0^1 f'(x)f^2(x) dx$ nên dấu "=" xảy ra, tức là

$$4[f'(x)]^3 = \frac{f^3(x)}{2} = \frac{f^3(x)}{2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{2}f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \frac{1}{2} \int dx \Rightarrow \ln |f(x)| = \frac{1}{2}x + C \Rightarrow f(x) = e^{\frac{1}{2}x + C}.$$

Theo giả thiết $f(0)=1 \Rightarrow C=0 \Rightarrow f(x)=e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = 2(\sqrt{e}-1)$.

Bài tập 6: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;\pi]$, thỏa mãn $\int_0^\pi f'(x)\sin x dx = -1$ và

$\int_0^\pi f^2(x)dx = \frac{2}{\pi}$. Giá trị tích phân $\int_0^\pi xf'(x)dx$ bằng

A. $-\frac{6}{\pi}$.

B. $-\frac{4}{\pi}$.

C. $\frac{2}{\pi}$.

D. $\frac{4}{\pi}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Theo Holder $(1)^2 = \int_0^\pi f(x)\cos x dx \leq \int_0^\pi f^2(x)dx \int_0^\pi \cos^2 x dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 1$.

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{\pi} \cos x \Rightarrow \int_0^\pi xf'(x)dx = \int_0^\pi \frac{2x \cos x}{\pi} dx = -\frac{4}{\pi}.$$

Bài tập 7: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa $f(1)=0$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{\pi^2}{8}$ và

$\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)f(x)dx = \frac{1}{2}$. Giá trị của tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{1}{\pi}$.

B. $\frac{2}{\pi}$.

C. $\frac{\pi}{2}$.

D. π .

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Theo Holder

$$\left(-\frac{\pi}{4}\right)^2 = \left(\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)f'(x)dx\right)^2 \leq \int_0^1 \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx \cdot \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{8}.$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \Rightarrow f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + C \xrightarrow{f(1)=0} C = 0.$$

$$\text{Vậy } f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = \frac{2}{\pi}.$$

Bài tập 8: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương trên $[0;1]$, có đạo hàm dương liên và tục trên $[0;1]$,

thỏa mãn $\int_0^1 \sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}} dx \geq 1$ và $f(0)=1$, $f(1)=e^2$. Giá trị của $f\left(\frac{1}{2}\right)$ bằng

A. 1.

B. 4.

C. $\sqrt{e}$.

D. e .

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Hàm dưới dấu tích phân là $\sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{\frac{f'(x)}{f(x)}}$, $\forall x \in [0;1]$. Điều này làm ta liên tưởng đến đạo

hàm đúng $\frac{f'(x)}{f(x)}$, muốn vậy ta phải đánh giá theo AM – GM như sau:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} + mx \geq 2\sqrt{m} \cdot \sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}} \text{ với } m \geq 0 \text{ và } x \in [0;1].$$

Do đó ta cần tìm tham số $m \geq 0$ sao cho

$$\int_0^1 \left[\frac{f'(x)}{f(x)} + mx \right] dx \geq 2\sqrt{m} \cdot \int_0^1 \sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}} dx$$

hay

$$\begin{aligned} \ln|f(x)| \Big|_0^1 + m \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 &\geq 2\sqrt{m} \cdot 1 \Leftrightarrow \ln|f(1)| - \ln|f(0)| + \frac{m}{2} \\ &\geq 2\sqrt{m} \Leftrightarrow 2 - 0 + \frac{m}{2} \geq 2\sqrt{m}. \end{aligned}$$

Để dấu "=" xảy ra thì ta cần có $2 - 0 + \frac{m}{2} = 2\sqrt{m} \Leftrightarrow m = 4$.

Với $m = 4$ thì đẳng thức xảy ra nên $\frac{f'(x)}{f(x)} = 4x$

$$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int 4x dx \Leftrightarrow \ln|f(x)| = 2x^2 + C \Rightarrow f(x) = e^{2x^2+C}.$$

$$\text{Theo giả thiết } \begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=e^2 \end{cases} \Rightarrow C=0 \Rightarrow f(x)=e^{2x^2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}.$$

Cách 2. Theo Holder

$$1^2 \leq \left(\int_0^1 \sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}} dx \right)^2 = \left(\int_0^1 \sqrt{x} \cdot \sqrt{\frac{f'(x)}{f(x)}} dx \right)^2 \leq \int_0^1 x dx \cdot \int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{f(1)}{f(0)} = 1.$$

Vậy đẳng thức xảy ra nên ta có $\frac{f'(x)}{f(x)} = kx$, thay vào $\int_0^1 \sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}} dx = 1$ ta được $k = 4$.

Suy ra $\frac{f'(x)}{f(x)} = 4x$. (làm tiếp như trên)

Bài tập 9: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $\int_0^1 [f(x)f'(x)]^2 dx \leq 1$ và $f(0)=1, f(1)=\sqrt{3}$. Giá trị của $f\left(\frac{1}{2}\right)$ bằng

A. $\sqrt{2}$.

B. 3.

C. $\sqrt{e}$.

D. e .

Lời giải

ĐÁP ÁN A

Hàm dưới dấu tích phân là $[f(x)f'(x)]^2$. Điều này làm ta liên tưởng đến đạo hàm đúng $f(x)f'(x)$, muốn vậy ta phải đánh giá theo AM – GM như sau:

$$[f(x)f'(x)]^2 + m \geq 2\sqrt{m} \cdot f(x)f'(x) \text{ với } m \geq 0.$$

Do đó ta cần tìm tham số $m \geq 0$ sao cho

$$\int_0^1 ([f(x)f'(x)]^2 + m) dx \geq 2\sqrt{m} \int_0^1 f(x)f'(x) dx.$$

hay

$$1 + m \geq 2\sqrt{m} \cdot \frac{f^2(x)}{2} \Big|_0^1 \Leftrightarrow 1 + m \geq 2\sqrt{m}.$$

Để dấu "=" xảy ra thì ta cần có $1 + m = 2\sqrt{m} \Leftrightarrow m = 1$.

$$\text{Với } m = 1 \text{ thì đẳng thức xảy ra nên } [f(x)f'(x)]^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)f'(x) = 1 \\ f(x)f'(x) = -1 \end{cases}$$

$$\bullet f(x)f'(x) = -1 \Rightarrow \int_0^1 f(x)f'(x) dx = -\int_0^1 dx \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2} \Big|_0^1 = -x \Big|_0^1 \Leftrightarrow 1 = -1. \text{ (vô lý)}$$

$$\bullet f(x)f'(x) = 1 \Rightarrow \int f(x)f'(x) dx = \int dx \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2} = x + C \Rightarrow f(x) = \sqrt{2x + 2C}.$$

$$\text{Theo giả thiết } \begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow C = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = \sqrt{2x+1} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}.$$

$$\text{Cách 2. Ta có } \int_0^1 f(x)f'(x) dx = \frac{f^2(x)}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} [f^2(1) - f^2(0)] = 1.$$

$$\text{Theo Holder } 1^2 = \left(\int_0^1 1 \cdot f(x)f'(x) dx \right)^2 \leq \int_0^1 1^2 dx \cdot \int_0^1 [f(x)f'(x)]^2 dx \leq 1 \cdot 1 = 1.$$

Vậy đẳng thức xảy ra nên ta có $f'(x)f(x) = k$, thay vào $\int_0^1 f(x)f'(x) dx = 1$ ta được $k = 1$. Suy ra

$$f'(x)f(x) = 1. \text{ (làm tiếp như trên)}$$

Bài tập 10: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[1; 2]$, thỏa mãn $\int_1^2 \frac{[f'(x)]^2}{xf(x)} dx \leq 24$ và $f(1) = 1, f(2) = 16$. Giá trị của $f(\sqrt{2})$ bằng

A. 1.

B. $\sqrt{2}$.

C. 2.

D. 4.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Hàm dưới dấu tích phân là $\frac{[f'(x)]^2}{xf(x)} = \frac{1}{x} \cdot \frac{[f'(x)]^2}{f(x)}$. Điều này làm ta liên tưởng đến đạo hàm đúng

$\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$, muốn vậy ta phải đánh giá theo AM – GM như sau:

$$\frac{[f'(x)]^2}{xf(x)} + mx \geq 2\sqrt{m} \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} \text{ với } m \geq 0 \text{ và } x \in [1; 2].$$

Do đó ta cần tìm tham số $m \geq 0$ sao cho

$$\int_1^2 \left(\frac{[f'(x)]^2}{xf(x)} + mx \right) dx \geq 2\sqrt{m} \int_1^2 \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx$$

hay

$$24 + \frac{2m}{3} \geq 4\sqrt{m} \sqrt{f(x)} \Big|_1^2 \Leftrightarrow 24 + \frac{2m}{3} \geq 4\sqrt{m} [\sqrt{f(2)} - \sqrt{f(1)}] \Leftrightarrow 24 + \frac{2m}{3} \geq 12\sqrt{m} \Leftrightarrow m = 16.$$

Để dấu "=" xảy ra thì ta cần có $24 + \frac{2m}{3} = 12\sqrt{m} \Leftrightarrow m = 16$.

Với $m = 16$ thì đẳng thức xảy ra nên $\frac{[f'(x)]^2}{xf(x)} = 16x \Rightarrow \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = 2x$

$$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} dx = \int 2x dx \Leftrightarrow \sqrt{f(x)} = x^2 + C \Rightarrow f(x) = (x^2 + C)^2.$$

Theo giả thiết $\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(2) = 16 \end{cases} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = x^4 \Rightarrow f(\sqrt{2}) = 4$.

Cách 2. Ta có $\int_1^2 \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2 \cdot \int_1^2 \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} \Big|_1^2 = 2[\sqrt{f(2)} - \sqrt{f(1)}] = 6$.

Theo Holder $6^2 = \left(\int_1^2 \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx \right)^2 = \left(\int_1^2 \sqrt{x} \cdot \frac{f'(x)}{\sqrt{xf(x)}} dx \right)^2 \leq \int_1^2 x dx \cdot \int_1^2 \frac{[f'(x)]^2}{xf(x)} dx \leq \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 \cdot 24 = 36$.

Vậy đẳng thức xảy ra nên ta có $\frac{f'(x)}{\sqrt{xf(x)}} = k\sqrt{x} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = kx$, thay vào $\int_1^2 \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 6$ ta được

$k = 4$. Suy ra $\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = 4x$. (làm tiếp như trên)

Bài tập 11: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$, và $f(1) - f(0) = \frac{\sqrt{14}}{2}$. Biết

rằng $0 \leq f'(x) \leq 2\sqrt{2x}, \forall x \in [0;1]$. Khi đó, giá trị của tích phân $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx$ thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(2;4)$. B. $\left(\frac{13}{3}; \frac{14}{3}\right)$. C. $\left(\frac{10}{3}; \frac{13}{3}\right)$. D. $(1;3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Do $0 \leq f'(x) \leq 2\sqrt{2x}, \forall x \in [0;1]$ nên $0 \leq (f'(x))^2 \leq 8x, \forall x \in [0;1]$.

Suy ra $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx \leq \int_0^1 8x dx$ hay $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx \leq 4$ (1).

Mặt khác, áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz, ta có:

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 f'(x) dx \right)^2 &\leq \int_0^1 1^2 dx \cdot \int_0^1 [f'(x)]^2 dx \Leftrightarrow [f(1) - f(0)]^2 \leq \int_0^1 [f'(x)]^2 dx \\ &\Leftrightarrow \frac{7}{2} \leq \int_0^1 [f'(x)]^2 dx \end{aligned}$$

Vậy $\frac{7}{2} \leq \int_0^1 [f'(x)]^2 dx \leq 4$.