

CHỦ ĐỀ 9: CÔNG THỨC TỪNG PHẦN TÍCH PHÂN

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

Công thức tích phân từng phần: Nếu $u = u(x)$ và $v = v(x)$ là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên đoạn

$$[a; b] \text{ thì } \int_a^b u(x)v'(x)dx = \left[u(x)v(x) \right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

$$\text{Hay } \int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

II. CÁC DẠNG TOÁN TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1: Sử dụng công thức tích phân từng phần

Ví dụ 1: Cho tích phân $I = \int_0^\pi x^2 \cos x dx$ và $u = x^2$; $dv = \cos x dx$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $I = x^2 \sin x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi x \sin x dx$.

B. $I = x^2 \sin x \Big|_0^\pi + \int_0^\pi x \sin x dx$.

C. $I = x^2 \sin x \Big|_0^\pi + 2 \int_0^\pi x \sin x dx$.

D. $I = x^2 \sin x \Big|_0^\pi - 2 \int_0^\pi x \sin x dx$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} u = x^2 \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = \sin x \end{cases} \Rightarrow I = x^2 \sin x \Big|_0^\pi - 2 \int_0^\pi x \sin x dx. \text{ Chọn D.}$$

Ví dụ 2: Cho tích phân $\int_0^2 (2x+1)e^x dx = ae^2 + be + c$ ($a, b, c \in \mathbb{Q}$). Tính $S = a^2 + b^2 + c^2$

A. $S = 13$.

B. $S = 10$.

C. $S = 5$.

D. $S = 8$.

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 2x+1 \\ du = 2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2 dx \\ v = e^x \end{cases} \Rightarrow \int_0^2 (2x+1)e^x dx = (2x+1)e^x \Big|_0^2 - \int_0^2 e^x dx = (2x-1)e^x \Big|_0^2 = 3e^2 + 1$$

$$\text{Suy ra } a = 3; b = 0; c = 1 \Rightarrow S = a^2 + b^2 + c^2 = 10. \text{ Chọn B.}$$

Ví dụ 3: Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 + 1) \sin x dx = a\pi^2 + b\pi + c$ với $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Tính $T = a^2 + b^2 + c^2$

A. $T = 9$.

B. $T = 12$.

C. $T = 2$.

D. $T = 10$.

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x^2 + 1 \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = -\cos x \end{cases}$$

Khi đó $I = -(x^2 + 1)\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx - 1 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$

Xét tích phân $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$, ta đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$

Khi đó $J = x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{2} + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$

Vậy $I = \pi - 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases} \Rightarrow T = 2$. **Chọn C.**

Ví dụ 4: Cho tích phân $I = \int_2^3 (3x^2 + 1) \ln x dx = a \ln 3 + b \ln 2 + c$ với $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

- A. $a = 3b$. B. $a = -3b$. C. $a + b = 40$. D. $a - b = 20$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = (3x^2 + 1) dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = x^3 + x \end{cases} \Rightarrow I = (x^3 + x) \ln x \Big|_2^3 - \int_2^3 (x^2 + 1) dx$

$= 30 \ln 3 - 10 \ln 2 - \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_2^3 = 30 \ln 3 - 10 \ln 2 - \frac{22}{3} \Rightarrow a = 30; b = -10; c = -3b$. **Chọn B.**

Ví dụ 5: Cho $I = \int_1^4 \frac{\ln(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}} dx = a \ln 3 + b \ln 2 + c$, với $a, b, c \in \mathbb{Q}$, tổng $a + b + c$ bằng

- A. 8. B. 4. C. 12. D. 0.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u = \ln(\sqrt{x} + 1) \\ v = \frac{dx}{\sqrt{x}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} \\ v = 2(\sqrt{x} + 1) \end{cases}$, khi đó $I = 2(\sqrt{x} + 1) \ln(\sqrt{x} + 1) \Big|_1^4 - \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

$= 2(\sqrt{x} + 1) \ln(\sqrt{x} + 1) \Big|_1^4 - 2\sqrt{x} \Big|_1^4 = 6 \ln 3 - 4 \ln 2 - 2 = a \ln 3 + b \ln 2 + c \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = -4 \\ c = -2 \end{cases}$

Vậy tổng $a + b + c = 6 - 4 - 2 = 0$. **Chọn D.**

Ví dụ 6: Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{(1 + \cos x)^2} dx = \frac{a}{b} \pi - c$ với $a, b, c \in \mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $a + b = 3c$. B. $a + 2b = c$. C. $a + b = 2c$. D. $a + 2b = 3c$.

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \frac{x \sin x}{(1 + \cos x)^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{1 + \cos x} \end{cases} \Rightarrow I = \frac{x}{1 + \cos x} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \cos x}$$

$$= \frac{1}{2} \pi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \pi - \tan \frac{x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \pi - 1 \Rightarrow a = 1; b = 2; c = 1$$

Do đó $a + b = 3c$. **Chọn A.**

Dạng 2: Tích phân từng phần với hàm ẩn

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện $\int_0^1 (x+1) f'(x) dx = 10$ và $2f(1) - f(0) = 2$. Tính tích phân

$$\int_0^1 f(x) dx$$

- A. $I = -12$. B. $I = 8$. C. $I = 12$. D. $I = -8$.

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x+1 \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}, \text{ khi đó } \int_0^1 (x+1) f'(x) dx = (x+1) f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx$$

$$\Leftrightarrow 10 = 2f(1) - f(0) - I \Leftrightarrow I = 2f(1) - f(0) - 10 = 2 - 10 = -8. \text{ **Chọn D.**}$$

Ví dụ 2: Cho $\int_0^2 (1-2x) f'(x) dx = 3f(2) + f(0) = 2016$. Tích phân $\int_0^1 f(2x) dx$ bằng:

- A. 4032. B. 1008. C. 0. D. 2016.

Lời giải

$$\text{Xét tích phân } \int_0^2 (1-2x) f'(x) dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 1-2x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -2dx \\ v = f(x) \end{cases} \Rightarrow I = (1-2x) f(x) \Big|_0^2 + 2 \int_0^2 f(x) dx$$

$$= 3f(2) + f(0) + 2 \int_0^2 f(x) dx \Rightarrow 2016 = -2016 + 2 \int_0^2 f(x) dx \Rightarrow \int_0^2 f(x) dx = 2016$$

Xét $J = \int_0^1 f(2x) dx$, đặt $t = 2x \Rightarrow dt = 2dx$, đổi cận suy ra $J = \int_0^2 f(t) \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx = 1008$. **Chọn B.**

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn điều kiện $\int_0^1 \frac{f'(x)}{x+1} dx = 1$ và $f(1) - 2f(0) = 2$. Tính tích phân

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2} dx$$

A.

B.

C.

D.

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \frac{1}{x+1} \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = -\frac{dx}{(x+1)^2} \\ v = f(x) \end{cases}, \text{ khi đó } \int_0^1 \frac{f'(x)}{x+1} dx = \left. \frac{f(x)}{x+1} \right|_0^1 + \int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2} dx$$

$$\text{Suy ra } 1 = \left. \frac{f(x)}{x+1} \right|_0^1 + I \Rightarrow I = 1 - \left[\frac{f(1)}{2} - f(0) \right] = 1 - \frac{1}{2} [f(1) - 2f(0)] = 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 0. \text{ **Chọn A.**}$$

Ví dụ 4: Cho $F(x) = x^2 + \ln^3 x$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tính tích phân $\int_1^e f'(x) \ln x dx$

A. $I = e^2 + 3e$.

B. $I = e^2 + 3$.

C. $I = -e^2 + e$.

D. $I = e^2 + 4$.

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = f(x) \end{cases} \Rightarrow I = \ln x \cdot f(x) \Big|_1^e - \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx$$

$$\Rightarrow I = [\ln x f(x) - x^2 - \ln^3 x] \Big|_1^e = f(e) - e^2 - 2 + 2 = f(e) - e^2$$

$$\text{Mặt khác } f(x) = xF'(x) = x \left(2x + \frac{3\ln^2 x}{x} \right) \Rightarrow f(e) = 2e^2 + 3$$

Do đó $I = e^2 + 3$. **Chọn B.**

Ví dụ 5: Cho $F = (x^3 + x^2)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) \cdot e^{3x}$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f'(x) \cdot e^{3x} dx$

A. $I = e$.

B. $I = e + 1$.

C. $I = -e + 1$.

D. $I = -e$.

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = e^{3x} \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 3e^{3x} dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = e^{3x} f(x) \Big|_0^1 - 3 \int_0^1 e^{3x} f(x) dx = \left[e^{3x} f(x) - 3(x^3 + x^2) e^{3x} \right]_0^1$$

Trong đó $f(x) = \frac{F'(x)}{e^{3x}} = \frac{x^3 + 4x^2 + 2x}{e^{2x}} \Rightarrow I = e^x (-2x^3 + x^2 + 2x) \Big|_0^1 = e$. **Chọn A.**

Ví dụ 6: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và luôn dương trên $\mathbb{R}$. Biết rằng $f(1) = 2$, $\int_0^1 \frac{x dx}{f(x)} = \ln \sqrt{2}$. Tính tích

phân $I = \int_0^1 \frac{x^2 \cdot f'(x)}{f^2(x)} dx$

- A. $I = 2 + \ln 2$. B. $I = -\frac{1}{2} + \ln 2$. C. $I = -\frac{1}{2} - \ln 2$. D. $I = -2 + \ln 2$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = -\frac{1}{f(x)} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \frac{-x^2}{f(x)} \Big|_0^1 + 2 \int_0^1 \frac{x}{f(x)} = \frac{-1}{f(1)} + 2 \ln \sqrt{2} = -\frac{1}{2} + \ln 2. \text{ **Chọn B.**}$$

Dạng 3: Sử dụng bất đẳng thức tích phân

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 6$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{5}{2}$ và

$\int_0^1 x \cdot f(x) dx = \frac{5}{2}$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

- A. $\frac{23}{4}$ B. $\frac{5}{4}$ C. $\frac{5}{2}$ D. $\frac{19}{4}$

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$, khi đó $\int_0^1 x \cdot f(x) dx = \frac{x^2}{2} \cdot f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \cdot f'(x) dx$

Suy ra $\frac{5}{2} = \frac{f(1)}{2} - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \cdot f'(x) dx \Rightarrow \int_0^1 x^2 \cdot f'(x) dx = 1$

Ta chọn k sao cho: $\int_0^1 [f'(x) + kx^2]^2 dx = \int_0^1 [f'(x)]^2 dx + 2k \int_0^1 f'(x) x^2 dx + k^2 \int_0^1 x^4 dx = 0$

$$= 5 + 2k + \frac{k^2}{2} = 0 \Rightarrow k = -5 \Rightarrow \int_0^1 [f'(x) - 5x^2]^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) = 5x^2 \Rightarrow f(x) = \frac{5x^3}{3} + C$$

Do $f(1) = 6 \Rightarrow C = \frac{13}{3} \Rightarrow f(x) = \frac{5x^3}{3} + \frac{13}{3} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{19}{4}$. **Chọn D.**

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 1$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{9}{5}$ và

$\int_0^1 x.f(x) dx = \frac{1}{5}$. Tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx$ bằng

- A. $I = \frac{3}{5}$. B. $I = \frac{1}{4}$. C. $I = \frac{3}{4}$. D. $I = \frac{1}{5}$.

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\text{Do đó } \int_0^1 x.f(x) dx = \frac{x^2}{2} \cdot f(x) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 \cdot f'(x) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 f'(x) dx = \frac{1}{5}$$

$$\text{Suy ra } \int_0^1 x^2 \cdot f'(x) dx = \frac{3}{5}; \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5}$$

$$\text{Chọn } k \text{ sao cho: } \int_0^1 [f'(x) + kx^2]^2 dx = \frac{9}{5} + \frac{6k}{5} + \frac{k^2}{5} = 0 \Rightarrow k = -3$$

$$\text{Như vậy } \int_0^1 [f'(x) - 3x^2]^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f(x) = x^3 + C$$

$$\text{Do } f(1) = 1 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}. \text{ **Chọn B.}**$$

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = \frac{3}{5}$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{4}{9}$ và

$\int_0^1 x^3 f(x) dx = \frac{37}{180}$. Tích phân $I = \int_0^1 [f(x) - 1] dx$ bằng

- A. $\frac{1}{15}$. B. $-\frac{1}{15}$. C. $-\frac{1}{10}$. D. $\frac{1}{10}$.

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = x^3 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{x^4}{4} \end{cases}$$

$$\text{Do đó } \int_0^1 x^3 f(x) dx = \frac{x^4}{4} \cdot f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^4}{4} \cdot f'(x) dx = \frac{3}{20} - \int_0^1 \frac{x^4 f'(x)}{4} dx \Rightarrow \int_0^1 x^4 f'(x) dx = -\frac{2}{9}$$

Lại có: $\int_0^1 x^8 dx = \frac{1}{9}$ ta chọn k sao cho: $\int_0^1 [f'(x) + kx^4] dx = \frac{4}{9} + 2k \cdot \frac{-2}{9} + \frac{k^2}{9} = 0 \Rightarrow k = 2$

Như vậy $\int_0^1 [f'(x) + 2x^4] dx = 0 \Rightarrow f'(x) = -2x^4 \Rightarrow f(x) = \frac{-2x^5}{5} + C$

Do $f(1) = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{-2}{5} + C \Leftrightarrow C = 1 \Leftrightarrow f(x) - 1 = \frac{-2}{5}x^5 \Rightarrow \int_0^1 [f(x) - 1] dx = \frac{-1}{15}$. **Chọn B.**

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên đoạn $[0; 3]$ thỏa mãn $f(3) = 1$, $\int_0^3 [f'(x)]^2 dx = \frac{1}{27}$

và $\int_0^3 x^3 f(x) dx = \frac{42}{5}$. Tích phân $I = \int_0^3 f(x) dx$ bằng

- A. $\frac{5}{2}$. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{7}{2}$. D. 4.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = x^3 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{x^4}{4} \end{cases}$ khi đó $\int_0^1 x^3 f(x) dx = \frac{x^4}{4} \cdot f(x) \Big|_0^3 - \int_0^3 \frac{x^4}{4} f'(x) dx$

Suy ra $\frac{45}{2} = \frac{81f(3)}{4} - \int_0^3 \frac{x^4}{4} \cdot f'(x) dx \Rightarrow \int_0^3 x^4 f'(x) dx = -9$

Ta chọn k sao cho: $\int_0^3 [f'(x) + kx^4]^2 dx = \int_0^3 [f'(x)]^2 dx + 2k \int_0^3 f'(x) x^4 dx + k^2 \int_0^3 x^8 dx$

$= \frac{1}{27} - 2.9k + 2187k^2 = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{243} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{243}x^4 \Rightarrow f(x) = \frac{-x^5}{1215} + \frac{6}{5} \Rightarrow \int_0^3 f(x) dx = \frac{7}{2}$. **Chọn C.**

Ví dụ 5: [Đề tham khảo Bộ Giáo Dục và Đào Tạo 2018] Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên

đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn $f(1) = 0$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7$ và $\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

- A. $\frac{7}{5}$. B. 1. C. $\frac{7}{4}$. D. 4.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = 3x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = x^3 \end{cases}$, khi đó $\int_0^1 3x^2 f(x) dx = x^3 \cdot f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 x^3 \cdot f'(x) dx$

Suy ra $I = f(1) - \int_0^1 x^3 \cdot f'(x) dx \Rightarrow \int_0^1 x^3 \cdot f'(x) dx = -1 \Leftrightarrow \int_0^1 14x^3 \cdot f'(x) dx = -7$. Mà $\int_0^1 49x^6 dx = 7$ suy ra

$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx + \int_0^1 7x^3 f'(x) dx + \int_0^1 49x^6 dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 [f'(x) + 7x^3]^2 dx = 0$

$$\text{Vậy } f'(x) + 7x^3 = 0 \Rightarrow f(x) = -\frac{7}{4}x^4 + C$$

$$\text{Mà lại có: } f(1) = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{7}{4}(1 - x^4) \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{7}{5}. \text{ Chọn A.}$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Với u và v là các hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[a; b]$. Công thức biểu diễn tích phân từng phần được cho bởi công thức nào sau đây?

A. $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b u dv$

B. $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$

C. $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b + \int_a^b u dv$

D. $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b + \int_a^b v du$

Câu 2: Cho tích phân $I = \int_2^3 \ln x dx$, biểu thức nào sau đây thể hiện đúng cách tính I theo công thức tích phân từng phần

A. $I = (x \ln x) \Big|_2^3 - \int_2^3 dx$

B. $I = (x \ln x) \Big|_2^3 + \int_2^3 x dx$

C. $I = (x \ln x) \Big|_2^3 - \int_2^3 \ln x dx$

D. $I = (x \ln x) \Big|_2^3 + \int_2^3 \ln x dx$

Câu 3: Khi tính tích phân $\int_a^b x \sin 2x dx$ thì cách đặt nào sau đây phù hợp với phương pháp tích phân từng phần?

A. $\begin{cases} u = \sin 2x \\ dv = x dx \end{cases}$

B. $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin 2x dx \end{cases}$

C. $\begin{cases} u = \sin 2x \\ dv = x \end{cases}$

D. $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin x \end{cases}$

Câu 4: Khi tính tích phân $\int_a^b x \ln x dx$ thì cách đặt nào sau đây phù hợp với phương pháp tích phân từng phần?

A. $\begin{cases} u = x \\ dv = \ln x dx \end{cases}$

B. $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x \end{cases}$

C. $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases}$

D. $\begin{cases} u = x \\ dv = \ln x \end{cases}$

Câu 5: Khi tính tích phân $\int_a^b x \sin 2x dx$ thì cách đặt nào sau đây phù hợp với phương pháp tích phân từng phần?

A. $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin x \end{cases}$

B. $\begin{cases} u = \sin 2x \\ dv = x dx \end{cases}$

C. $\begin{cases} u = \sin 2x \\ v = x \end{cases}$

D. $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin 2x dx \end{cases}$

Câu 6: Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng khi nói về tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x dx$

A. $I = \frac{x \sin 2x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\cos 2x}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

B. $I = \frac{x \sin 2x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\cos 2x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$\text{C. } I = \frac{x \sin 2x}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\cos 2x}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{D. } I = \frac{x \sin 2x}{x} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\cos 2x}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

Câu 7: Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng khi nói về tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx$

$$\text{A. } I = \frac{x}{2} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4} \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{B. } I = -\frac{x}{2} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4} \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{C. } I = -\frac{x}{2} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{D. } I = -\frac{x}{2} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4} \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

Câu 8: Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng khi nói về tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$

$$\text{A. } I = -(x \tan x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \ln(\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{B. } I = (x \tan x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \ln(\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{C. } I = (x \tan x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \ln(\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{D. } I = -(x \tan x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \ln(\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

Câu 9: Cho tích phân $I = \int_1^e x \ln^2 x dx$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

$$\text{A. } I = \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x \Big|_1^e + \int_1^e x \ln x dx$$

$$\text{B. } I = x^2 \ln^2 x \Big|_1^e + \int_1^e x \ln x dx$$

$$\text{C. } I = x^2 \ln^2 x \Big|_1^e - \int_1^e x \ln x dx$$

$$\text{D. } \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x \Big|_1^e - \int_1^e x \ln x dx$$

Câu 10: Cho tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (x-1) \sin 2x dx$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

$$\text{A. } I = -(x-1) \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$$

$$\text{B. } I = -(x-1) \cos 2x - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$$

$$\text{C. } I = \frac{1}{2} (1-x) \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$$

$$\text{D. } I = \frac{1}{2} (1-x) \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$$

Câu 11: Cho tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2-x) \sin x dx$ và đặt $u = 2-x$, $dv = \sin x dx$. Hỏi khẳng định nào sau đây **đúng**?

$$\text{A. } I = -(2-x) \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$

$$\text{B. } I = -(2-x) \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$

C. $I = (2-x) \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$

D. $I = (2-x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$

Câu 12: Biết rằng $\int_0^1 \ln(x+1) dx = a + \ln b$ với a, b là các số nguyên. Tính $(a+3)^b$

A. 25

B. $\frac{1}{7}$

C. 16

D. $\frac{1}{9}$

Câu 13: Biết $\int_1^e (x+1) \ln x dx = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} e^2$ với $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$ là hai phân số tối giản. Tính $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$

A. $\frac{3}{2}$

B. $\frac{5}{4}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{5}{2}$

Câu 14: Biết $\int_0^2 (3x-1) e^{\frac{x}{2}} dx = a + be$ với a, b là các số nguyên. Tính $S = a + b$

A. $S = 12$

B. $S = 16$

C. $S = 8$

D. $S = 10$

Câu 15: Biết $\int_1^e x^2 \ln x dx = \frac{a}{b} e^3 + \frac{c}{d}$ với $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$ là hai phân số tối giản. Tính $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$

A. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = -\frac{1}{9}$

B. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{1}{9}$

C. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = -\frac{1}{3}$

D. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = -\frac{1}{3}$

Câu 16: Biết $4 \int_0^e x(1 + \ln x) dx = ae^2 + b$ với a, b là các số nguyên. Tính $M = ab + 4(a+b)$

A. $M = -5$

B. $M = -2$

C. $M = 5$

D. $M = -6$

Câu 17: Biết $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{b}{c} + a \ln 2$ với $a \in \mathbb{R}$ và $\frac{c}{d}$ là hai phân số tối giản. Tính $2a + 3b + c$

A. 4

B. -6

C. 6

D. 5

Câu 18: Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx = \frac{\pi}{a} + \frac{1}{b} \ln 4$ với a, b là các số thực khác 0. Tính $P = a + b$

A. $P = 2$

B. $P = 6$

C. $P = 0$

D. $P = 8$

Câu 19: Biết $\int_0^1 3xe^{2x} dx = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} e^2$ với $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$ là hai phân số tối giản. Tính $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$

A. $\frac{3}{2}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{5}{4}$

D. $\frac{7}{2}$

Câu 20: Biết $\int_0^1 x \ln(1+x^2) dx = -\frac{a}{b} + c \ln 2$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản

A. 9**B. 6****C. 15****D. 12**

Câu 21: Biết $\int_0^1 \ln(3x+1)dx = a \ln 2 + b$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $S = 3a - b$

A. $S = 7$ **B. $S = 11$** **C. $S = 8$** **D. $S = 9$**

Câu 22: Biết $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx = a\pi - \ln 2$ với $a \in \mathbb{R}$. Hỏi phần nguyên của $a - 1$ là bao nhiêu?

A. 1**B. -2****C. 0****D. -1**

Câu 23: Biết $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin^2 x} dx = m\pi + n \ln 2$ với $m, n \in \mathbb{R}$. Tính $P = 2m + n$

A. $P = 1$ **B. $P = 0,75$** **C. $P = 0,25$** **D. $P = 0$**

Câu 24: Biết $\int_1^2 \ln(x+1)dx = a \ln 3 + b \ln 2 + c$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính $S = a + b + c$

A. $S = 1$ **B. $S = 0$** **C. $S = 2$** **D. $S = -2$**

Câu 25: Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 (x+1)f'(x)dx = 10$ và $2f(1) - f(0) = 2$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$

A. $I = -12$ **B. $I = 8$** **C. $I = 1$** **D. $I = -8$**

Câu 26: Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(1) = 1$ và $\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{3}$. Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot f'(\sin x)dx$

A. $I = \frac{4}{3}$ **B. $I = \frac{2}{3}$** **C. $I = \frac{1}{3}$** **D. $I = \frac{-2}{3}$**

Câu 27: Cho hàm số $f(x)$ có nguyên hàm là $F(x)$ trên đoạn $[1;2]$, $F(2) = 1$ và $\int_1^2 F(x)dx = 5$. Tính

$$\int_1^2 (x-1)f(x)dx$$

A. $I = -3$ **B. $I = 6$** **C. $I = -4$** **D. $I = 1$**

Câu 28: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $[1;2]$ thỏa mãn $f(1) = 0, f(2) = 2$ và $\int_1^2 f(x)dx = 1$. Tính

$$\int_1^2 x \cdot f'(x)dx$$

A. $I = 2$ **B. $I = 1$** **C. $I = 3$** **D. $I = 8$**

Câu 29: Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2) = 16, \int_0^2 f(x)dx = 4$. Tính $\int_0^1 x \cdot f'(2x)dx$

A. $I = 13$

B. $I = 12$

C. $I = 20$

D. $I = 7$

Câu 30: Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện

$$f(1) = 6, \int_0^1 x \cdot f'(x) dx = 5. \text{ Tính } I = \int_0^1 f(x) dx$$

A. $I = 1$

B. $I = -1$

C. $I = 11$

D. $I = 3$

Câu 31: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 x^2 f''(x) dx = 12$ và $2f(1) - f'(1) = -2$. Tính $I = \int_0^1 f(x) dx$

A. $I = 10$

B. $I = 14$

C. $I = 8$

D. $I = 5$

Câu 32: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_1^3 x \cdot f'(x) e^{f(x)} dx = 8$ và $f(3) = \ln 3$. Tính $I = \int_0^3 e^{f(x)} dx$

A. $I = 1$

B. $I = 11$

C. $I = 8 - \ln 3$

D. $I = 8 + \ln 3$

Câu 33: Cho hàm số $G(x) = \int_0^{x^2} \cos \sqrt{t} dt$. Hỏi khẳng định nào sau đây đúng?

A. $G'(x) = 2x \cos |x|$

B. $G'(x) = 2x \cos x$

C. $G'(x) = x \cos x$

D. $G'(x) = 2x \sin x$

Câu 34: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^2 f(x) dx = 3$ và $f(2) = 2$. Tính $I = \int_0^4 f'(\sqrt{x}) dx$

A. $I = 2$

B. $I = 3$

C. $I = 5$

D. $I = 1$

Câu 35: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_a^b x \cdot f''(x) dx = 4$ và a, b là các số thực dương, đồng thời

$$f'(a) = -2; f'(b) = 3 \text{ và } f(a) = f(b). \text{ Tìm giá trị nhỏ nhất của } P = \frac{4a^2}{3b+1} + \frac{9b^2}{2a+3}$$

A. $\min P = \frac{23}{20}$

B. $\min P = 2$

C. $\min P = \frac{784}{391}$

D. $\min P = \frac{5}{2}$

Câu 36: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_1^2 f'(x) \ln[f(x)] dx = 1$ và $f(1) = 1, f(2) > 1$. Tính $f(2)$

A. $f(2) = 2$

B. $f(2) = 3$

C. $f(2) = e$

D. $f(2) = e^2$

Câu 37: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên đoạn $[0;2]$ thỏa mãn $f(2) = 3, \int_0^2 [f'(x)]^2 dx = \frac{2}{7}$ và

$$\int_0^2 x^2 f(x) dx = \frac{152}{21}. \text{ Tích phân } I = \int_0^2 f(x) dx \text{ bằng}$$

A. $I = 2$

B. $I = \frac{23}{5}$

C. $I = \frac{26}{5}$

D. $I = \frac{2}{5}$

Câu 38: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên đoạn $[0;3]$ thỏa mãn $f(3)=6$, $\int_0^3 [f'(x)]^2 dx = 3$ và

$\int_0^3 x^3 f(x) dx = \frac{567}{4}$. Tích phân $I = \int_0^3 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{2}{5}$

B. $\frac{45}{2}$

C. $\frac{5}{4}$

D. 2

Câu 39: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{1}{5}$ và

$\int_0^1 x.f(x) dx = \frac{2}{5}$. Tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. $I = \frac{5}{4}$

B. $I = \frac{7}{9}$

C. $I = \frac{1}{4}$

D. $I = \frac{4}{5}$

Câu 40: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên đoạn $[0;2]$ thỏa mãn $f(2)=7$, $\int_0^2 [f'(x)]^2 dx = 14$ và

$\int_0^2 x^2 f(x) dx = \frac{40}{3}$. Tích phân $I = \int_0^2 f(x) dx$ bằng

A. $I = \frac{19}{5}$

B. $I = \frac{6}{5}$

C. $I = \frac{42}{5}$

D. $I = \frac{29}{5}$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Ta có $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$. **Chọn D.**

Câu 2: $I = \int_2^3 \ln x dx = x \ln x \Big|_2^3 - \int_2^3 x d(\ln x) = x \ln x \Big|_2^3 - \int_2^3 dx$. **Chọn A.**

Câu 3: Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin 2x dx \end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 4: Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 5: Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin 2x dx \end{cases}$. **Chọn D.**

Câu 6: Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x d(\sin 2x) = \frac{1}{2} x \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = \frac{1}{2} x \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$. **Chọn A.**

Câu 7: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x d(\cos 2x) = -\frac{1}{2} x \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx = -\frac{x}{2} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4} \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$. **Chọn B.**

Câu 8: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x d(\tan x) = x \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = (x \tan x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \ln(\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$. **Chọn C.**

Câu 9: $\int_1^e x \ln^2 x dx = \frac{1}{2} \int_1^e \ln^2 x d(x^2) = \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x \Big|_1^e - \int_1^e x^2 d(\ln^2 x) = \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x \Big|_1^e - \int_1^e x \ln x dx$. **Chọn D.**

Câu 10: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (x-1) \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x-1) d(\cos 2x) = \frac{1}{2} (1-x) \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$. **Chọn C.**

Câu 11: Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2-x) \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-2) d(\cos x) = (x-2) \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$. **Chọn A.**

Câu 12: Đặt $\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 \ln(x+1) dx = x \ln(x+1) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x dx}{x+1} = \ln 2 - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx$

$= \ln 2 \Big[x - \ln|x+1| \Big]_0^1 = -1 + \ln 4$. Do đó suy ra $a = -1, b = 4 \Rightarrow (a+3)^b = 2^4 = 16$. **Chọn C.**

Câu 13: $\int_1^e (x+1) \ln x dx = \int_1^e \ln x d(x^2 + 2x) = \frac{1}{2} (x^2 + 2x) \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e (x+2) dx =$

$= \frac{e^2 + 2e}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} x^2 + 2x \right) \Big|_1^e = \frac{e^2 + 2e}{2} - \left(\frac{1}{4} e^2 + e \right) + \frac{5}{4} = \frac{5}{4} + \frac{1}{4} e^2$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{5}{4}, \frac{c}{d} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{3}{2}. \text{ Chọn A.}$$

Câu 14: $\int_0^2 (3x-1)e^{\frac{x}{2}} dx = 2 \int_0^2 (3x-1) d\left(e^{\frac{x}{2}}\right) = 2(3x-1)e^{\frac{x}{2}} \Big|_0^2 - 6 \int_0^2 e^{\frac{x}{2}} dx = 10e + 2 - 12e^{\frac{x}{2}} \Big|_0^2$
 $= 10e + 2 - 12e + 12 = 14 - 2e \Rightarrow a = 14, b = -2 \Rightarrow a + b = 12. \text{ Chọn A.}$

Câu 15: $\int_1^e x^2 \ln x dx = \frac{1}{3} \int_1^e \ln x d(x^3) = \frac{1}{3} x^3 \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{3} \int_1^e x^2 dx = \frac{1}{3} e^3 - \frac{1}{9} x^3 \Big|_1^e = \frac{1}{3} e^3 - \frac{1}{9} e^3 + \frac{1}{9} = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} e^3$

Do đó suy ra $\frac{a}{b} = \frac{1}{9}, \frac{c}{d} = \frac{2}{9} \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{1}{3}. \text{ Chọn C.}$

Câu 16: $4 \int_0^e x(1 + \ln x) dx = 2 \int_0^e (1 + \ln x) d(x^2) = 2x^2(1 + \ln x) \Big|_1^e - 2 \int_0^e x dx = 4e^2 - 2 - x^2 \Big|_1^e$
 $= 4e^2 - 2 - e^2 + 1 = 3e^2 - 1 \Rightarrow a = 3; b = -1 \Rightarrow M = ab + 4(a + b) = 5. \text{ Chọn C.}$

Câu 17: $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = - \int_1^2 \ln x d\left(\frac{1}{x}\right) = - \frac{\ln x}{x} \Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{dx}{x^2} = - \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{x} \Big|_1^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2$

Do đó suy ra $a = -\frac{1}{2}, b = 1, c = 2 \Rightarrow 2a + 3b + c = 4. \text{ Chọn A.}$

Câu 18: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x d(\tan x) = x \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_1^2 \tan x dx = \frac{\pi}{4} + \ln |\cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \ln 4$

Do đó suy ra $a = 4, b = -4 \Rightarrow P = a + b = 0. \text{ Chọn C.}$

Câu 19: $\int_0^1 3xe^{2x} dx = \frac{3}{2} \int_0^1 x d(e^{2x}) = \frac{3}{2} xe^{2x} \Big|_0^1 - \frac{3}{2} \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{3}{2} e^2 - \frac{3}{4} e^{2x} \Big|_0^1 = \frac{3}{2} e^2 - \frac{3}{4} e^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} e^2 + \frac{3}{4}$

Do đó suy ra $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}, \frac{c}{d} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{3}{2} \text{ Chọn A.}$

Câu 20: $\int_0^1 x \ln(1 + x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \ln(1 + x^2) d(x^2 + 1) = \frac{1}{2} (x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 2x dx$
 $= \ln 2 - \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 = -\frac{1}{2} \ln 2 \Rightarrow a = 1, b = 2, c = 1 \Rightarrow S = a + b + c + abc = 6. \text{ Chọn B.}$

Câu 21: Đặt $\begin{cases} u = \ln(3x+1) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{3dx}{3x+1} \\ v = x + \frac{1}{3} = \frac{3x+1}{3} \end{cases} \Rightarrow I = \frac{3x+1}{3} \ln(3x+1) \Big|_0^1 - \int_0^1 dx$

$= \frac{8}{3} \ln 2 - 1 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{8}{3} \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow S = 3a - b = 9. \text{ Chọn D.}$

Câu 22: Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \tan x \end{cases} \Rightarrow I = x \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx = \frac{\sqrt{3}}{3} \pi + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d(\cos x)}{\cos x}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \pi + \ln |\cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \pi + \ln \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \pi - \ln 2 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \text{phần nguyên của } a-1 \text{ là } -1. \text{ Chọn D.}$$

Câu 23: Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \frac{dx}{\sin^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cot x = \frac{-\cos x}{\sin x} \end{cases} \Rightarrow I = -x \cot x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x} dx = \frac{\pi}{4} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\sin x)}{\sin x}$

$$= \frac{\pi}{4} + \ln |\sin x| \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} - \ln \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 \Rightarrow m = \frac{1}{4}; n = \frac{1}{2}$$

Do đó $P = 2m + n = 1$ **Chọn A**

Câu 24: Đặt $\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x+1} \\ v = x+1 \end{cases} \Rightarrow I = (x+1) \ln(x+1) \Big|_1^2 - \int_1^2 dx$

$$= 3 \ln 3 - 2 \ln 2 - 1 \Rightarrow a = 3; b = -2; c = -1 \Rightarrow S = a + b + c = 0. \text{ Chọn B.}$$

Câu 25: Đặt $\begin{cases} u = x+1 \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$, khi đó $\int_0^1 (x+1) f'(x) dx = (x+1) f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx$

$$\Leftrightarrow 10 = 2f(1) - f(0) - I \Leftrightarrow I = 2f(1) - f(0) - 10 = 2 - 10 = -8. \text{ Chọn D.}$$

Câu 26: Ta có $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{3}$

Lại có: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot f'(\sin x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos x \cdot f'(\sin x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f'(\sin x) d(\sin x)$

$$\xrightarrow{u=\sin x} 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} u \cdot f'(u) du = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot f'(x) dx = 2I$$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases} \Rightarrow I = x \cdot f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = f(1) - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Do đó $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot f'(\sin x) dx = \frac{4}{3}. \text{ Chọn A.}$

Câu 27: Theo giả thiết ta có $F'(x) = f(x)$

Đặt $\begin{cases} u = x-1 \\ dv = f(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = F(x) \end{cases} \Rightarrow I = (x-1) F(x) \Big|_1^2 - \int_1^2 F(x) dx = F(2) - 5 = -4. \text{ Chọn C.}$

Câu 28: Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$

$$\Rightarrow I = x.f(x) \Big|_1^2 - \int_1^2 f(x) dx = 2f(2) - f(1) - 1 = 4 - 0 - 1 = 3. \text{ Chọn C.}$$

Câu 29: $I = \int_0^1 x.f'(2x) dx = \frac{1}{4} \int_0^1 2x.f'(2x) d(2x) \xrightarrow{t=2x} \frac{1}{4} \int_0^2 t.f'(t) dt = \frac{1}{4} \int_0^2 x.f'(x) dx$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases} \Rightarrow I = \frac{1}{4} x.f(x) \Big|_0^2 - \frac{1}{4} \int_0^2 f(x) dx = \frac{1}{2} f(2) - \frac{1}{4} \cdot 4$

$$= \frac{1}{2} \cdot 16 - 1 = 7. \text{ Chọn D.}$$

Câu 30: Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 x.f'(x) dx = x.f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = f(1) - I$

Suy ra $I = f(1) - \int_0^1 x.f'(x) dx = 6 - 5 = 1. \text{ Chọn A.}$

Câu 31: Đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = f''(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = f'(x) \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 x^2 f''(x) dx = x^2.f'(x) \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 x.f'(x) dx$

$$= f'(1) - 2 \int_0^2 x.f'(x) dx = 12 \Rightarrow \int_0^2 x.f'(x) dx = \frac{f'(1) - 12}{2}$$

Đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = f(x) \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 x.f'(x) dx = x.f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = f(1) - \int_0^1 f(x) dx$

Khi đó $\frac{f'(1) - 12}{2} = f(1) - \int_0^1 f(x) dx \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = f(1) - \frac{f'(1) - 12}{2} = \frac{2f(1) - f'(1) + 12}{2}$

$$= \frac{-2 + 12}{2} = 5. \text{ Chọn D.}$$

Câu 32: Ta có $\left[e^{f(x)} \right]' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f'(x) e^{f(x)} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^{f(x)} \end{cases} \Rightarrow \int_1^3 x.f'(x) e^{f(x)} dx = x e^{f(x)} \Big|_0^3 - \int_1^3 e^{f(x)} dx$

$$\Rightarrow 8 = 3e^{f(3)} = 3e^{\ln 3} - I = 9 - I \Rightarrow I = 1. \text{ Chọn A.}$$

Câu 33: Giả sử $F(t) = \int \cos \sqrt{t} dt \Rightarrow F'(t) = \cos \sqrt{t}$

Ta có: $G(x) = \int_0^{x^2} \cos \sqrt{t} dt = F(x^2) - F(0) \Rightarrow G'(x) = \left[F(x^2) \right]' = 2x.F'(x^2)$

$$= 2x \cdot \cos \sqrt{x^2} = 2x \cos |x|. \text{ Chọn A.}$$

Câu 34: Đặt $t = \sqrt{x} \Leftrightarrow t^2 = x \Leftrightarrow dx = 2t dt$ và $\begin{cases} x = 0 \rightarrow t = 1 \\ x = 4 \rightarrow t = 2 \end{cases}$

Do đó $I = \int_0^2 2t \cdot f'(t) dt$. Đặt $\begin{cases} u = t \\ dv = f'(t) dt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = f(t) \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{I}{2} = t \cdot f(t) \Big|_0^2 - \int_0^2 f(t) dt = 2f(2) - \int_0^2 f(x) dx = 2 \cdot 2 - 3 = 1 \Rightarrow I = 2. \text{ Chọn A.}$$

Câu 35: Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f''(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f'(x) \end{cases} \Rightarrow \int_a^b x \cdot f''(x) dx = x \cdot f'(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) dx$

$$= b \cdot f'(b) - a \cdot f'(a) - f(x) \Big|_a^b = 3b - (-2a) - [f(b) - f(a)] = 2a + 3b = 4 \Leftrightarrow u + v = 4$$

Ta có $P = \frac{(2a)^2}{3b+1} + \frac{(3b)^2}{2a+3} = \frac{u^2}{v+1} + \frac{v^2}{u+3} \geq \frac{(u+v)^2}{u+v+4} = \frac{4^2}{4+4} = 2$. Vậy $\min P = 2$. **Chọn B.**

Câu 36: Ta có $\begin{cases} u = \ln[f(x)] \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{f'(x)}{f(x)} dx \\ v = f(x) \end{cases}$

Suy ra $I = \int_1^2 f'(x) \ln[f(x)] dx = f(x) \cdot \ln[f(x)] \Big|_1^2 - \int_1^2 f'(x) dx$

$$= f(2) \cdot \ln[f(2)] - f(1) \cdot [\ln f(1)] - [f(2) - f(1)] = f(2) \cdot \ln[f(2)] - f(2) + 1$$

Mà $I = 1 \rightarrow f(2) \cdot \ln[f(2)] - f(2) = 0 \Leftrightarrow f(2) = e$. **Chọn C.**

Câu 37: Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{x^3}{3} \end{cases}$, khi đó $\int_0^2 x^2 f(x) dx = \frac{x^3}{3} \cdot f(x) \Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{x^3}{3} \cdot f'(x) dx$

Suy ra $\frac{152}{21} = \frac{8}{3} f(2) - \int_0^2 \frac{x^3}{3} \cdot f'(x) dx \Rightarrow \int_0^2 x^3 \cdot f'(x) dx = \frac{16}{7}$

Ta chọn k sao cho: $\int_0^2 [f'(x) + kx^3]^2 dx = \int_0^2 [f'(x)]^2 dx + 2k \int_0^2 f'(x) x^3 dx + k^2 \int_0^2 x^6 dx = 0$

$$= \frac{2}{7} + \frac{32}{7}k + \frac{128k^2}{7} = 0 \Rightarrow k = \frac{-1}{8} \Rightarrow \int_0^1 \left[f'(x) - \frac{1}{8}x^3 \right]^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{x^3}{8} \Rightarrow f(x) = \frac{x^4}{32} + C$$

Do $f(2) = 3 \Rightarrow C = \frac{5}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{x^4}{32} + \frac{5}{2} \Rightarrow \int_0^2 f(x) dx = \frac{26}{5}$. **Chọn C.**

Câu 38: Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = x^3 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{x^4}{4} \end{cases}$, khi đó $\int_0^3 x^3 f(x) dx = \frac{x^4}{4} \cdot f(x) \Big|_0^3 - \int_0^3 \frac{x^4}{4} \cdot f'(x) dx$

Suy ra $\frac{567}{4} = \frac{81f(3)}{4} - \int_0^3 \frac{x^4}{4} \cdot f'(x) dx \Rightarrow \int_0^3 x^4 \cdot f'(x) dx = -81$

Ta có: $\int_0^3 [f'(x) + kx^4]^2 dx = \int_0^3 [f'(x)]^2 dx + 2k \int_0^3 f'(x) x^4 dx + k^2 \int_0^3 x^8 dx$

$3 - 2.81k + 2187k^2 = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{27} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{27}x^4 \Rightarrow f(x) = \frac{-x^5}{135} + \frac{39}{5} \Rightarrow \int_0^3 f(x) dx = \frac{45}{2}$

. **Chọn B.**

Câu 39: Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$, khi đó $\int_0^1 x \cdot f(x) dx = \frac{x^2}{2} \cdot f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \cdot f'(x) dx$

Suy ra $\frac{2}{5} = \frac{f(1)}{2} - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \cdot f'(x) dx \Rightarrow \int_0^1 x^2 \cdot f'(x) dx = \frac{1}{5}$

Ta chọn k sao cho: $\int_0^1 [f'(x) + kx^2]^2 dx = \int_0^1 [f'(x)]^2 dx + 2k \int_0^1 f'(x) x^2 dx + k^2 \int_0^1 x^4 dx = 0$

$= \frac{1}{5} + \frac{2}{5}k + \frac{k^2}{5} = 0 \Rightarrow k = -1 \Rightarrow \int_0^1 [f'(x) - x^2]^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) = x^2 \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{3} + C$

Do $f(1) = 1 \Rightarrow C = \frac{2}{3} \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{7}{9}$. **Chọn B.**

Câu 40: Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{x^3}{3} \end{cases}$, khi đó $\int_0^2 x^2 f(x) dx = \frac{x^3}{3} \cdot f(x) \Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{x^3}{3} \cdot f'(x) dx$

Suy ra $\frac{40}{3} = \frac{8}{3}f(2) - \int_0^2 \frac{x^3}{3} \cdot f'(x) dx \Rightarrow \int_0^2 x^3 \cdot f'(x) dx = 16$

Ta chọn k sao cho: $\int_0^2 [f'(x) + kx^3]^2 dx = \int_0^2 [f'(x)]^2 dx + 2k \int_0^2 f'(x) x^3 dx + k^2 \int_0^2 x^6 dx = 0$

$= 14 + 32k + \frac{128k^2}{7} = 0 \Rightarrow k = \frac{-7}{8} \Rightarrow \int_0^2 \left[f'(x) - \frac{7}{8}x^3 \right]^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{7x^3}{8} \Rightarrow f(x) = \frac{7x^4}{32} + C$

Do $f(2) = 7 \Rightarrow C = \frac{7}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{7x^4}{32} + \frac{7}{2} \Rightarrow \int_0^2 f(x) dx = \frac{42}{5}$. **Chọn C.**