

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1 (2,0 điểm) Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

- Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.
- Xác định tọa độ giao điểm của đồ thị (C) với đường thẳng $y = x + 7$ và viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại các giao điểm ấy.

Câu 2 (1,0 điểm)

- Giải phương trình: $\sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4}) + \cos x + \cos 3x = \sin 2x$.
- Giải bất phương trình: $\log_3(x^2 - 5x + 7) + \log_{\frac{1}{3}}(x-1) \geq 0$.

Câu 3 (1,0 điểm)

- Tìm các số phức $3z + \bar{z}$ và $\frac{3+i}{z}$ biết $z = 1 + 2i$.
- Đề tham gia hội thi “Khi tôi 18” do Huyện đoàn tổ chức vào ngày 26/03, Đoàn trường THPT Đoàn Thượng thành lập đội thi gồm có 10 học sinh nam và 5 học sinh nữ. Từ đội thi, Đoàn trường chọn 5 học sinh để tham gia phần thi tài năng. Tính xác suất để 5 học sinh được chọn có cả nam và nữ.

Câu 4 (1,0 điểm) Tính tích phân $\int_0^1 [3x^2 - 2x + \ln(2x+1)] dx$.

Câu 5 (1,0 điểm) Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có phương trình lần lượt là $x - 2y + 2z - 3 = 0$; $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z - 16 = 0$. Tìm tọa độ tâm và tính bán kính của mặt cầu (S). Viết phương trình mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (P) và tiếp xúc với mặt cầu (S).

Câu 6 (1,0 điểm) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh $2a$, $\angle ABC = 60^\circ$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD), góc giữa mặt bên (SCD) và mặt đáy (ABCD) bằng 45° . Tính thể tích khối chóp S.ABCD và góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SCD).

Câu 7 (1,0 điểm) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có diện tích bằng $3\sqrt{3}$, đỉnh D thuộc đường thẳng $d: \sqrt{3}x - y = 0$, $\angle ACB = 30^\circ$. Giao điểm của đường phân giác trong góc ABD và đường cao của tam giác BCD kẻ từ C là điểm $H(\sqrt{3}; 3)$. Tìm tọa độ các đỉnh B, D biết hoành độ của B và D đều nhỏ hơn $\sqrt{3}$.

Câu 8 (1,0 điểm) Giải hệ
$$\begin{cases} (4-y)\sqrt{x-2} + \sqrt{7-2y} = \sqrt{85-50x-7y+13y^2-x^3} \\ \sqrt{2x^2+3xy+4y^2} + \sqrt{4x^2+3xy+2y^2} = 3(x+y) \end{cases}$$

Câu 9 (1,0 điểm) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{ab}{3+c^2} + \frac{bc}{3+a^2} - \frac{a^3b^3+b^3c^3}{24a^3c^3}$.

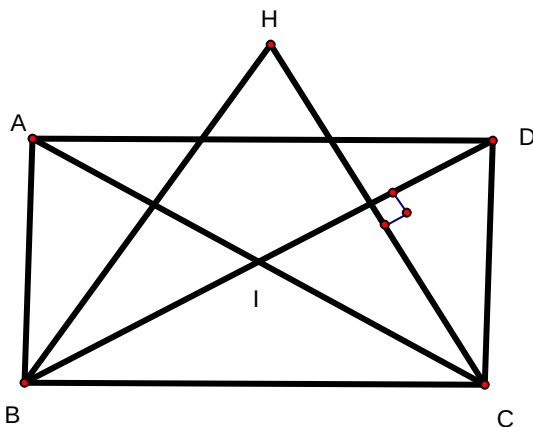
-----Hết-----

Họ và tên thí sinh:.....SBD:.....

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu	Nội dung	Điểm
1a	Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$	1,00
	- TXĐ : $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.	0,25
	- $y' = \frac{3}{(x+1)^2} > 0, \forall x \neq -1$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng của TXĐ.	
	- Hàm số không có cực trị.	0,25
	- Giới hạn : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{x+1} = 2 \Rightarrow y = 2$ là TCN.	
	- $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x-1}{x+1} = +\infty; \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x-1}{x+1} = -\infty \Rightarrow x = -1$ là TCD.	
	- Vẽ BBT	0,25
	- Vẽ đồ thị.	0,25
1b	Xác định tọa độ giao điểm của đồ thị (C) với đường thẳng $y = x + 7$ và viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại các giao điểm ấy.	1,00
	- Phương trình hoành độ giao điểm : $\frac{2x-1}{x+1} = x + 7 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 8 = 0, x \neq -1$	0,25
	- $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \Rightarrow y = 5 \\ x = -4 \Rightarrow y = 3 \end{cases}$. Các giao điểm là $A(-2;5), B(-4;3)$	0,25
	- $y'(-2) = 3 \Rightarrow$ tiếp tuyến tại A là $y = 3x + 11$.	0,25
	- $y'(-4) = \frac{1}{3} \Rightarrow$ tiếp tuyến tại B là $y = \frac{1}{3}x + \frac{13}{3}$.	0,25
2a	Giải phương trình : $\sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4}) + \cos x + \cos 3x = \sin 2x$	0,50
	- Phương trình $\Leftrightarrow \cos 2x + (\cos x + \cos 3x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x(2 \cos x + 1) = 0$.	0,25
	Giải được nghiệm : $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$	0,25
2b	Giải bất phương trình: $\log_3(x^2 - 5x + 7) + \log_{\frac{1}{3}}(x-1) \geq 0$	0,50
	- BPT $\Leftrightarrow \log_3(x^2 - 5x + 7) \geq \log_3(x-1) \Leftrightarrow x^2 - 5x + 7 \geq x-1 > 0$	0,25
	- $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x^2 - 6x + 8 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow T = (1; 2] \cup [4; +\infty)$.	0,25
3a	Tìm các số phức $3z + \bar{z}$ và $\frac{3+i}{z}$ biết $z = 1 + 2i$.	0,50
	- $3z + \bar{z} = 3(1 + 2i) + 1 - 2i = 4 + 4i$	0,25
	- $\frac{3+i}{z} = \frac{3+i}{1+2i} = \frac{(3+i)(1-2i)}{5} = 1 - i$.	0,25
3b	Đội có 10 nam và 5 nữ. chọn lấy 5 học sinh. Tính xác suất có cả nam và nữ.	0,50

	- Mỗi cách chọn là một tổ hợp chập 5 của 15 nên $n(\Omega) = C_{15}^5 = 3003$ - Số cách chọn là $n(A) = C_{10}^1 C_5^4 + C_{10}^2 C_5^3 + C_{10}^3 C_5^2 + C_{10}^4 C_5^1 = 2750$	0,25
	Xác suất cần tìm là : $P = \frac{2750}{3003} = \frac{250}{273}$	0,25
4	Tính tích phân : $\int_0^1 [3x^2 - 2x + \ln(2x+1)] dx$.	1,00
	$I = \int_0^1 [3x^2 - 2x + \ln(2x+1)] dx = \int_0^1 (3x^2 - 2x) dx + \int_0^1 \ln(2x+1) dx$	0,25
	$I_1 = \int_0^1 (3x^2 - 2x) dx = (x^3 - x^2) \Big _0^1 = 0$	0,25
	$I_2 = \int_0^1 \ln(2x+1) dx$	
	Đặt $\begin{cases} u = \ln(2x+1) \\ dv = dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{2}{2x+1} dx \\ v = x \end{cases}$ nên $I_2 = x \ln(2x+1) \Big _0^1 - \int_0^1 \frac{2x}{2x+1} dx$	0,25
	$I_2 = \ln 3 - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2x+1}\right) dx = \frac{3}{2} \ln 3 - 1$. Vậy $I = I_2 = \frac{3}{2} \ln 3 - 1$.	0,25
5	mp(P): $x - 2y + 2z - 3 = 0$; mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z - 16 = 0$	1,00
	Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; 2)$; $R = 5$.	0,25
	Mặt phẳng (α) song song với mp(P): $x - 2y + 2z - 3 = 0$ nên phương trình mặt phẳng (α) có dạng : $x - 2y + 2z + c = 0$ ($c \neq -3$).	0,25
	Vì mp(α) tiếp xúc với mặt cầu (S) $\Rightarrow d(I; (\alpha)) = R \Leftrightarrow \frac{ 1 + 4 + 4 + c }{3} = 5$	0,25
	$\begin{cases} c = 6 \\ c = -24 \end{cases}$ nên phương trình mp(α) là : $\begin{cases} x - 2y + 2z + 6 = 0 \\ x - 2y + 2z - 24 = 0 \end{cases}$	0,25
6		1,00

	- Kẻ $AE \perp CD$, thì $mp(SAE) \perp CD \Rightarrow SE \perp CD$, nên góc giữa $mp(SCD)$ và $mp(ABCD)$ là góc $SEA = 45^\circ$. - ΔACD đều cạnh $2a$ nên $AE = \sqrt{3}a \Rightarrow SA = \sqrt{3}a$ - Diện tích đáy $S_{ABCD} = 2.S_{ACD} = AE.CD = 2\sqrt{3}a^2$.	0,25
	- Thể tích khối chóp : $V = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = 2a^3$.	0,25
	- Gọi K là hình chiếu của B trên (SCD) thì SK là hình chiếu của SB trên (SCD) nên góc giữa SB và $mp(SCD)$ là góc BSK. - Gọi H là hình chiếu của A trên SE, thì $AH \perp (SCD)$, và $AH = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. - Do $AB // mp(SCD) \Rightarrow BK = AH = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính được $SB = \sqrt{7}a$.	0,25
	- Xét tam giác vuông SBK ta có $\sin BSK = \frac{BK}{SB} = \frac{\sqrt{42}}{14}$.	0,25
7	Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có diện tích bằng $3\sqrt{3}$, đỉnh D thuộc đường thẳng $d: \sqrt{3}x - y = 0$, $ACB = 30^\circ$. Giao điểm của đường phân giác trong góc ABD và đường cao tam giác BCD kẻ từ C là điểm $H(\sqrt{3}; 3)$. Tìm tọa độ các đỉnh B, D biết hoành độ B và D đều nhỏ hơn $\sqrt{3}$.	1,00
		0,25
	- Gọi $I = AC \cap BD$. Đặt $AB = x \Rightarrow BC = x\sqrt{3}$, có $S = AB.BC = 3\sqrt{3}$ nên $x = \sqrt{3}$.	
	Ta có $DBC = ACB = 30^\circ \Rightarrow ABD = 60^\circ \Rightarrow HBD = 30^\circ \Rightarrow BD$ là phân giác trong của góc HBC và cũng là đường cao nên BD là trung trực của $HC \Rightarrow HD = CD = \sqrt{3}$; $BHD = BCD = 90^\circ$ và $BH = BC = 3$.	0,25
	$D \in d \Rightarrow D(t; \sqrt{3}t); HD = \sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (T/M)} \\ t = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ (Loại)} \end{cases} \Rightarrow D\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}\right).$	0,25
	Đường thẳng HB đi qua $H(\sqrt{3}; 3)$, có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{DH} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}\right)$ nên có phương trình: $\frac{\sqrt{3}}{2}(x - \sqrt{3}) + \frac{3}{2}(y - 3) = 0 \Leftrightarrow x + \sqrt{3}y - 4\sqrt{3} = 0$.	0,25

	$B \in HD \Rightarrow B\left(b; 4 - \frac{b}{\sqrt{3}}\right) \quad (b < \sqrt{3}).$ $HB = 3 \Leftrightarrow \left(b - \sqrt{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{b}{\sqrt{3}}\right)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ (Loai)} \\ b = \frac{-\sqrt{3}}{2} \text{ (T/M)} \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}; \frac{9}{2}\right).$ Vậy tọa độ các điểm B, D là : $B\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}; \frac{9}{2}\right); D\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}\right)$	
8	• Giải hệ : $\begin{cases} (4-y)\sqrt{x-2} + \sqrt{7-x-y} = \sqrt{85-50x-7y+13y^2-x^3} \\ \sqrt{2x^2+3xy+4y^2} + \sqrt{4x^2+3xy+2y^2} = 3(x+y) \end{cases}$ - Ta có $2x^2 + 3xy + 4y^2 = \left(\frac{7}{6}x + \frac{11}{6}y\right)^2 + \frac{23}{36}(x-y)^2 \geq \left(\frac{7}{6}x + \frac{11}{6}y\right)^2$. - Nên $\sqrt{2x^2 + 3xy + 4y^2} \geq \sqrt{\left(\frac{7}{6}x + \frac{11}{6}y\right)^2} = \left \frac{7}{6}x + \frac{11}{6}y\right \geq \frac{7}{6}x + \frac{11}{6}y$. - Tương tự $\sqrt{4x^2 + 3xy + 2y^2} \geq \sqrt{\left(\frac{11}{6}x + \frac{7}{6}y\right)^2} = \left \frac{11}{6}x + \frac{7}{6}y\right \geq \frac{11}{6}x + \frac{7}{6}y$ - Cộng lại ta được : $\sqrt{2x^2 + 3xy + 4y^2} + \sqrt{4x^2 + 3xy + 2y^2} \geq 3(x+y)$ dấu bằng xảy ra khi $x = y \geq 0$. Chú ý : Cách tìm các hệ số $\frac{7}{6}; \frac{11}{6}; \frac{23}{36}$ trên như sau : Do tính đối xứng nên giả sử : $\begin{cases} 2x^2 + 3xy + 4y^2 = (ax + by)^2 + c.(x-y)^2 \\ 4x^2 + 3xy + 2y^2 = (bx + ay)^2 + c.(x-y)^2 \end{cases}$ Khai triển và đồng nhất hệ số ta có hệ số của x là $\begin{cases} a^2 + c = 2 \\ b^2 + c = 4 \\ a + b = 3 \text{ do VP} = 3(x+y) \end{cases}$ Trừ từng vế (1) cho (2) và kết hợp với (3), ta được $a = \frac{7}{6}; b = \frac{11}{6}; c = \frac{23}{36}$.	1,00
	- PT (1) $\Leftrightarrow (4-x)\sqrt{x-2} + \sqrt{7-2x} = \sqrt{85-57x+13x^2-x^3}$ $\Leftrightarrow (4-x)\sqrt{x-2} + \sqrt{7-2x} = \sqrt{(5-x)\left[(x-4)^2 + 1\right]}$ - Áp dụng bất đẳng thức bunhia copki ta có : $VT^2 \leq \left[(4-x)^2 + 1^2\right] \cdot \left[(x-2) + (7-2x)\right] = \left[(4-x)^2 + 1^2\right] \cdot (5-x)$ $\Leftrightarrow (4-x)\sqrt{x-2} + \sqrt{7-2x} \leq \sqrt{(5-x)\left[(x-4)^2 + 1\right]}$ - Dấu bằng xảy ra khi $\Leftrightarrow \frac{4-x}{\sqrt{x-2}} = \frac{1}{\sqrt{7-2x}} \Leftrightarrow x = 3$, nghiệm $(x; y) = (3; 3)$ Có thể chia hai vế cho $x \geq 2 \Rightarrow \sqrt{2+3\frac{y}{x}+4\left(\frac{y}{x}\right)^2} + \sqrt{4+3\frac{y}{x}+2\left(\frac{y}{x}\right)^2} \geq 3\left(1+\frac{y}{x}\right)$	0,25
		0,25

9

- Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức : $P = \frac{ab}{3+c^2} + \frac{bc}{3+a^2} - \frac{a^3b^3+b^3c^3}{24a^3c^3}$.

- Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có :

$$\begin{aligned} \frac{ab}{3+c^2} + \frac{bc}{3+a^2} &= \frac{ab}{(c^2+a^2)+(c^2+b^2)} + \frac{bc}{(a^2+b^2)+(a^2+c^2)} \\ &\leq \frac{ab}{2\sqrt{(c^2+a^2)(c^2+b^2)}} + \frac{bc}{2\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{a^2}{c^2+a^2} + \frac{b^2}{c^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{a^2+c^2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{b^2}{c^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} \right) \leq \frac{1}{4} \left(1 + \frac{b^2}{2bc} + \frac{b^2}{2ab} \right) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{b}{2c} + \frac{b}{2a} \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \left(\frac{b}{c} + \frac{b}{a} \right). \end{aligned}$$

- Xét bất đẳng thức : $x^3 + y^3 \geq \frac{1}{4}(x+y)^3$ (phải chứng minh bất này)

Áp dụng : $\frac{a^3b^3+b^3c^3}{c^3a^3} \geq \frac{(ab+bc)^3}{4c^3a^3} = \frac{1}{4} \left(\frac{b}{c} + \frac{b}{a} \right)^3 \Rightarrow P \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \left(\frac{b}{c} + \frac{b}{a} \right) - \frac{1}{96} \left(\frac{b}{c} + \frac{b}{a} \right)^3$.

Đặt $t = \frac{b}{c} + \frac{b}{a}$, khi đó $t > 0$ và $P \leq -\frac{1}{96}t^3 + \frac{1}{8}t + \frac{1}{4}$.

Xét hàm số $f(t) = -\frac{1}{96}t^3 + \frac{1}{8}t + \frac{1}{4}$ với $t > 0$.

Ta có $f'(t) = -\frac{1}{32}t^2 + \frac{1}{8}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$, vì $t > 0$.

Suy ra bảng biến thiên:

t	0	2	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$		$\frac{5}{12}$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có $P \leq \frac{5}{12}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t = 2$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{5}{12}$, đạt được khi $a = b = c = 1$