SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
KHÁNH HÒA

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THPT CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2022 - 2023

Môn thi: TOÁN
Ngày thi: 07/12/2022
Thời gian: 180 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 1 (4,00 điểm): Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1$ có đồ thị (C_m).

a) Với $m = 1$, tính diện tích của tam giác có 3 đỉnh là 3 điểm cực trị của đồ thị (C_1).

b) Tìm tất cả các giá trị dương của tham số m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt và tiếp tuyến của (C_m) tại giao điểm có hoành độ lớn nhất hợp với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 24.

Câu 2 (2,00 điểm): Cho hàm số $f(t) = \log_{2022}\left(\dfrac{t}{a-t}\right)$ xác định trên $(0;a)$ với a là tham số thực dương. Tìm tất cả các giá trị của a để tồn tại hai số thực $x;y \in (0;a)$ thỏa mãn $f(x) + f(y) = 0$ và $e^{x+y} \le e(x+y)$.

Câu 3 (3,00 điểm):

1. Giải phương trình sau trên tập hợp số thực: $(x+1)^3 + 2 = 3\sqrt[3]{3x+1}$.
2. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình sau có nghiệm thực:

$$\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^6 + 3 - m = 3\sqrt[3]{3\sin x + m}.$$

Câu 4 (3,00 điểm):

1. Bạn An chọn ngẫu nhiên 3 quả cầu từ hộp gồm 19 quả cầu được đánh số thứ tự từ 1 đến 19. Hỏi có bao nhiêu cách chọn sao cho các số thứ tự ghi trên 3 quả cầu có tổng chia hết cho 4.
2. Biết rằng với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, luôn tồn tại duy nhất hai số nguyên dương a_n, b_n sao cho $\left(2+\sqrt{3}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{3}$. Chứng minh $(a_{n+2}+1)(a_n+1)$ là số chính phương, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Câu 5 (6,00 điểm): Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 2a, SB = 6a, SC = 3a$ và $\widehat{ASB} = 60^0$, $\widehat{BSC} = 90^0$, $\widehat{CSA} = 120^0$.

a) Gọi E, F lần lượt là các điểm thuộc cạnh SB, SC sao cho $\dfrac{SE}{SB} = \dfrac{1}{3}$, $\dfrac{SF}{SC} = \dfrac{2}{3}$. Chứng minh tam giác AEF vuông và tính thể tích khối chóp $S.AEF$ theo a. Từ đó suy ra thể tích của khối chóp $S.ABC$ theo a.

b) Qua điểm G thay đổi bên trong tam giác ABC, dựng các đường thẳng (d_1) song song với SA và cắt mp(SBC) tại điểm A', (d_2) song song với SB và cắt mp(SCA) tại điểm B', (d_3) song song với SC và cắt mp(SAB) tại điểm C'. Chứng minh $\dfrac{GA'}{SA} + \dfrac{GB'}{SB} + \dfrac{GC'}{SC}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm G. Xác định vị trí của điểm G để tứ diện $GA'B'C'$ có thể tích lớn nhất.

Câu 6 (2,00 điểm): Cho a, b là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+2}} - \frac{1}{(a+1)(b+1)}.$$

——— HẾT ———