

CHỦ ĐỀ 8: THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

Công thức tính thể tích khối lăng trụ: $V = S.h$

Trong đó: S là diện tích đáy và h là chiều cao của khối lăng trụ.

II. CÁC DẠNG TOÁN TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

➤ Dạng 1: Thể tích khối lăng trụ đứng

Chú ý: Lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

Ví dụ 1: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Biết mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy một góc 60° . Thể tích khối lăng trụ đã cho là:

A. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{4}$

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$

C. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$

D. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$

Lời giải

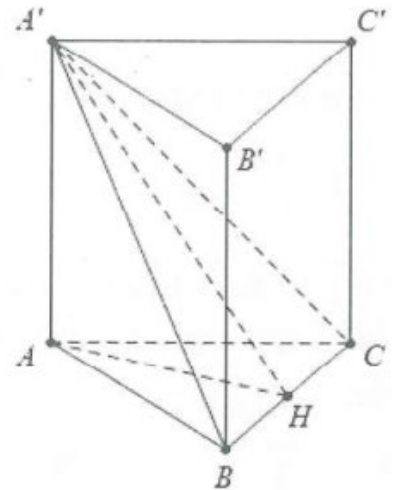
Diện tích đáy của lăng trụ là $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Dựng $AH \perp BC$, có $BC \perp AA' \Rightarrow BC \perp (A'HA)$

Do đó: $\widehat{((A'BC);(ABC))} = \widehat{A'HA} = 60^\circ$

Ta có: $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A'H = AH \tan 60^\circ = \frac{3a}{2}$.

Thể tích khối lăng trụ là: $V = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$. **Chọn C**



Ví dụ 2: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Đường thẳng $A'C$ tạo với mặt phẳng $(BCC'B')$ một góc 30° . Thể tích khối lăng trụ đã cho là

A. $\frac{a^3\sqrt{15}}{5}$

B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{8}$

C. $\frac{a^3\sqrt{15}}{8}$

D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$

Lời giải

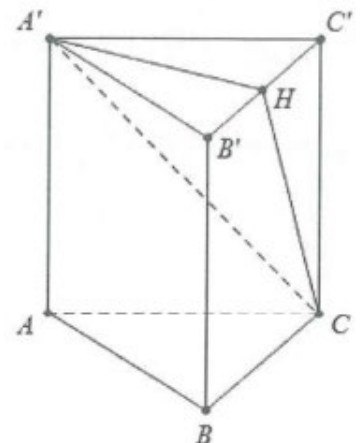
Dựng $A'H \perp B'C' \Rightarrow H$ là trung điểm của $B'C'$.

Mặt khác $A'H \perp BB' \Rightarrow A'H \perp (BCC'B')$.

Khi đó $\widehat{(A'C;(BCC'B'))} = \widehat{A'CH} = 30^\circ$

Ta có: $A'C \sin 30^\circ = A'H = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A'C = a\sqrt{3}$

Suy ra $AA' = \sqrt{A'C^2 - AC^2} = a\sqrt{2}$.



Thể tích khối lăng trụ là: $V = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^3 \sqrt{6}}{4}$

Chọn D.

Ví dụ 3: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại A có $AB = AC = a$. Biết diện tích tam giác $A'BC$ bằng $\frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$. Thể tích khối lăng trụ đã cho là

- A. $2a^3$ B. a^3 C. $3a^3$ D. $\frac{a^3}{2}$

Lời giải

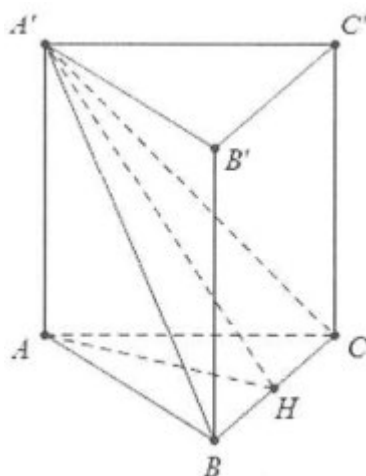
Diện tích đáy của lăng trụ là $S_{ABC} = \frac{a^2}{2}$.

Dựng $AH \perp BC$, có $BC \perp AA' \Rightarrow BC \perp (A'HA) \Rightarrow BC \perp A'H$.

Mặt khác $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = a\sqrt{2} \Rightarrow A'H = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \sqrt{\frac{3}{2}}a$.

Do $AH = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AA' = \sqrt{A'H^2 - AH^2} = a$.

Thể tích khối lăng trụ là: $V = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{a^3}{2}$. **Chọn D.**



Ví dụ 4: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$, mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với đáy một góc 60° . Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

- A. $V = \frac{3a^3}{8}$ B. $V = \frac{9a^3}{8}$ C. $V = \frac{a^3}{8}$ D. $V = \frac{3a^3}{4}$

Lời giải

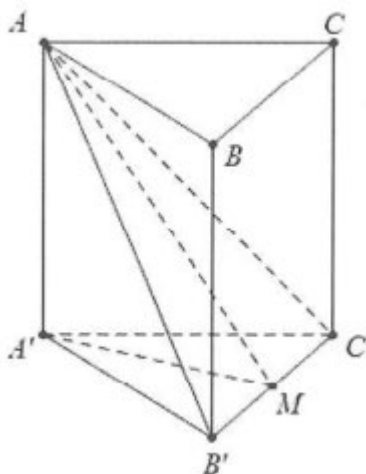
Gọi M là trung điểm của $B'C'$

Khi đó $\begin{cases} B'C' \perp A'M \\ B'C' \perp AA' \end{cases} \Rightarrow B'C' \perp (A'MA) \Rightarrow \widehat{A'MA} = 60^\circ$

Ta có: $BC^2 = 2a^2 - 2a^2 \cos 120^\circ = 3a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{3}$

$A'M = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a}{2} \Rightarrow AA' = h = A'M \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2}a^2 \sin 120^\circ = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \Rightarrow V = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{3a^3}{8}$. **Chọn A.**



Ví dụ 5: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại A có $AB = AC = 3a$. Biết

rằng $AA' = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy một góc 60° . Thể tích khối lăng trụ đã cho là:

- A. $a^3\sqrt{6}$ B. $6a^3\sqrt{6}$ C. $2a^3\sqrt{6}$ D. $\frac{2a^3\sqrt{6}}{3}$

Lời giải

Gọi M là trung điểm của BC, ta có $AM \perp BC$

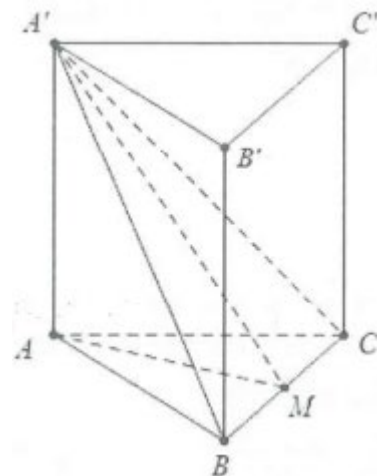
Mặt khác $BC \perp AA' \Rightarrow BC \perp (AA'M)$

Do đó $\widehat{A'MA} = 60^\circ$. Khi đó $AA' = AM \tan 60^\circ$

$$\Rightarrow AM = a \Rightarrow BM = \sqrt{AB^2 - AM^2} = 2a\sqrt{2}.$$

$$\text{Khi đó } S_{ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AM = BM \cdot AM = 2a^2\sqrt{2}.$$

$$\text{Do đó } V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{ABC} = a\sqrt{3} \cdot 2a^2\sqrt{2} = 2a^3\sqrt{6}. \text{ Chọn C.}$$



Ví dụ 6: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B có $AB = a\sqrt{3}, BC = a$.

Gọi M là trung điểm của AC, đường thẳng $B'M$ tạo với đáy một góc 45° . Thể tích khối lăng trụ đã cho là:

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a.$$

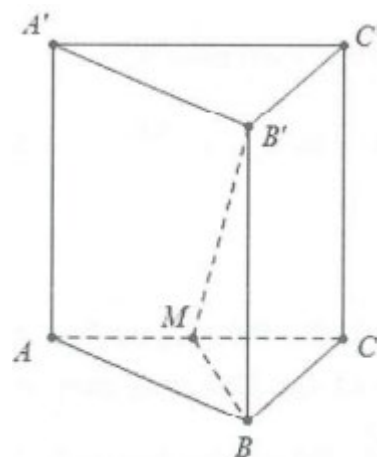
$$\text{Do vậy } BM = \frac{AC}{2} = a \text{ (tính chất trung tuyến trong tam giác vuông).}$$

$$\text{Lại có: } S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Mặt khác: } (\widehat{B'M; (ABC)}) = \widehat{B'MB} = 45^\circ.$$

$$\text{Suy ra } BB' = BM \tan 45^\circ = a.$$

$$\text{Vậy } V = BB' \cdot S_{ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}. \text{ Chọn A.}$$



Ví dụ 7: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tam giác ABC vuông tại B có $BC = 3a$. Gọi M là trung điểm của $A'C'$ và I là giao điểm của $A'C$ và AM . Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (ABC) bằng $2a$ và $A'B = 5a$. Thể tích khối lăng trụ đã cho là:

- A. $6a^3$ B. $2a^3$ C. $9a^3$ D. $18a^3$

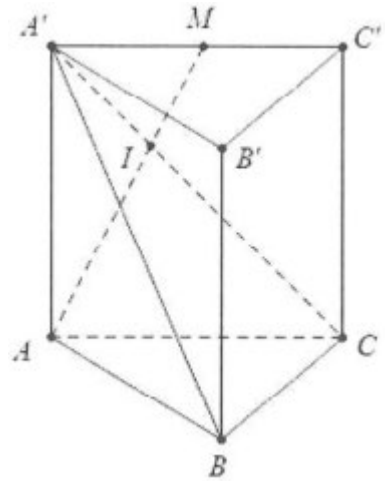
Lời giải

Do $AM \parallel AC$ nên $\frac{IA'}{IC} = \frac{MA'}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{A'C}{IC} = \frac{3}{2}$.

Do đó $d(A'; (ABC)) = \frac{3}{2}d(I; (ABC)) = 3a = AA'$.

Mặt khác $AB = \sqrt{A'B^2 - AA'^2} = 4a$.

Do đó $V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{ABC} = 3a \cdot \frac{4a \cdot 3a}{2} = 18a^3$. **Chọn D**



Ví dụ 8: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A có $AB = 5a, AC = 12a$.

Biết rằng mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy một góc 60° . Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

- A. $\frac{800a^3\sqrt{3}}{13}$. B. $\frac{3600a^3\sqrt{3}}{13}$. C. $\frac{900a^3\sqrt{3}}{13}$. D. $\frac{1800a^3\sqrt{3}}{13}$.

Lời giải

Dựng $AH \perp BC$. Mặt khác $AA' \perp BC$.

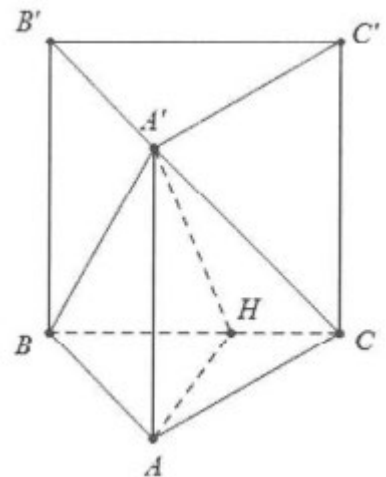
Do đó $(A'HA) \perp BC$.

Khi đó $\widehat{((A'BC); (ABC))} = \widehat{A'HA} = 60^\circ$.

Mặt khác $AH = \frac{AB \cdot AC}{\sqrt{AB^2 + AC^2}} = \frac{60}{13}a$.

Suy ra $AA' = AH \tan \widehat{A'HA} = \frac{60\sqrt{3}}{13}a$.

Vậy $V = AA' \cdot S_{ABC} = \frac{1800a^3\sqrt{3}}{13}$. **Chọn D.**



Ví dụ 9: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 60^\circ, AB = 3a$ và

$AC = 4a$. Gọi M là trung điểm của $B'C'$, biết khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(B'AC)$ bằng $\frac{3a\sqrt{15}}{10}$. Thể

tích khối lăng trụ đã cho là:

- A. a^3 B. $9a^3$ C. $4a^3$ D. $27a^3$

Lời giải

Ta có: $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \widehat{BAC} = 3a^2 \sqrt{3}$.

Dựng $BE \perp AC; BF \perp B'E$. Khi đó $\begin{cases} BC \perp B'B \\ BC \perp BE \end{cases}$

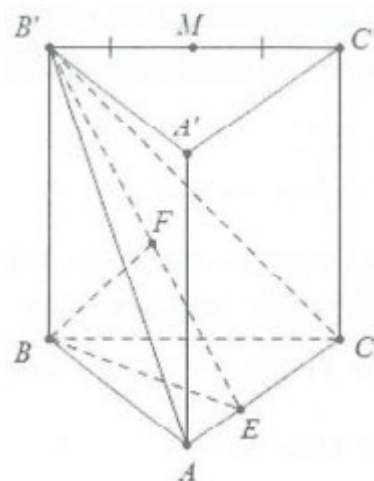
Suy ra $BC \perp BF \Rightarrow BF \perp (B'AC)$.

Do vậy $d(M; (B'AC)) = BF; BE = AB \sin A = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$.

Mặt khác $d(M; (B'AC)) = \frac{1}{2} d(C; (B'AC))$

$= \frac{1}{2} d(B; (B'AC)) = \frac{1}{2} BF = \frac{3a\sqrt{15}}{10} \Rightarrow BF = \frac{3a\sqrt{15}}{5}$

Mặt khác $\frac{1}{BF^2} = \frac{1}{BB'^2} + \frac{1}{BE^2} \Rightarrow BB' = 3a\sqrt{3} \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = BB' \cdot S_{ABC} = 27a^3$. **Chọn D.**



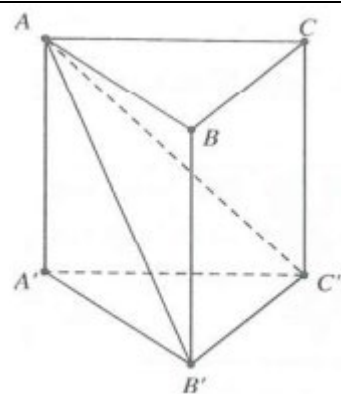
Ví dụ 10: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AB=BC=a$. Biết rằng góc giữa hai mặt phẳng (ACC') và $(AB'C')$ bằng 60° (tham khảo hình vẽ bên). Thể tích của khối chóp $B'.ACC'A'$ bằng

A. $\frac{a^3}{3}$.

B. $\frac{a^3}{6}$.

C. $\frac{a^3}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$.



Lời giải

Dựng $B'M \perp A'C' \Rightarrow B'M \perp (ACC'A')$

Dựng $MN \perp AC' \Rightarrow AC' \perp (MNB')$

Khi đó $\widehat{((AB'C'); (AC'A'))} = \widehat{(MNB')} = 60^\circ$

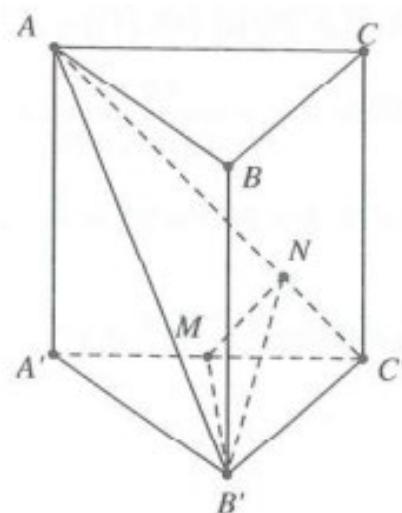
Ta có: $B'M = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow MN = \frac{B'M}{\tan \widehat{(MNB')}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

Mặt khác $\tan \widehat{AC'A'} = \frac{MN}{C'N} = \frac{AA'}{A'C'}$

Trong đó $MN = \frac{a\sqrt{6}}{6}, MC' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow C'N = \sqrt{C'M^2 - MN^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow AA' = a$

Thể tích lăng trụ $V = \frac{AB^2}{2} \cdot h = \frac{a^3}{2} \Rightarrow V_{B'.ACC'A'} = V - V_{B'.BAC} = V - \frac{V}{3} = \frac{2}{3}V = \frac{a^3}{3}$. **Chọn A.**



Ví dụ 11: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = a, \widehat{ACB} = 30^\circ$, đường thẳng $A'C$ tạo với mặt phẳng $(ABB'A')$ một góc 45° . Thể tích khối lăng trụ đã cho là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$

B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{8}$

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$

Lời giải

Ta có tam giác ABC cân tại A do đó $\widehat{B} = \widehat{C} = 30^\circ$

$\widehat{BAC} = 120^\circ$. Dựng $CH \perp AB$, có $CH \perp AA'$ suy ra

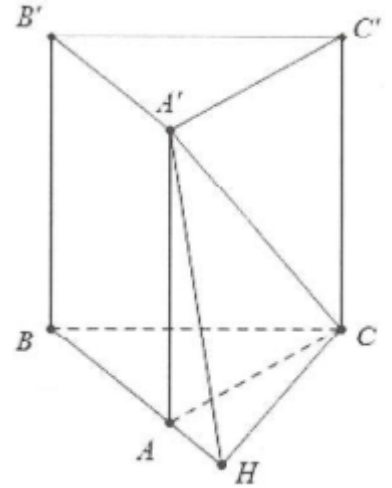
$CH \perp (ABB'A') \Rightarrow (\widehat{CA';(ABB'A')}) = \widehat{CA'H} = 45^\circ$

Mặt khác $CH = AC \sin \widehat{CAH} = a \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $CA' \sin 45^\circ = CH \Rightarrow A'C = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

$\Rightarrow AA' = \sqrt{A'C^2 - AC^2} = \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow V = AA' \cdot S_{ABC}$

$= AA' \cdot \frac{1}{2} AB \cdot \sin 120^\circ = \frac{a^3\sqrt{6}}{8}$. **Chọn B.**



Ví dụ 12: Cho khối lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình chữ nhật ABCD có $AB = a, AD = a\sqrt{3}$.

Mặt phẳng $(A'BD)$ tạo với đáy một góc 60° . Thể tích khối lăng trụ đã cho là:

A. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{3a^3}{2}$

C. $\frac{a^3}{3}$

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

Lời giải

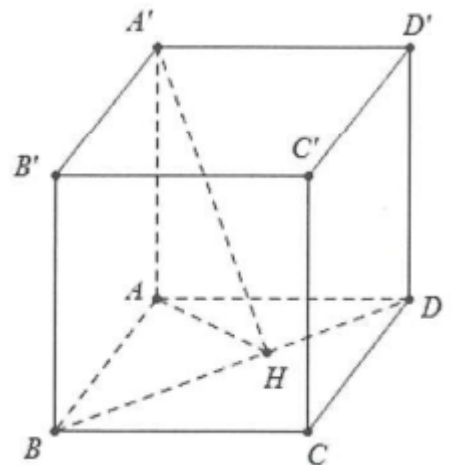
Dựng $AH \perp BD$, ta có $AH \perp AA' \Rightarrow (A'AH) \perp BD$

Do đó $(\widehat{(A'BD);(ABCD)}) = \widehat{A'HA} = 60^\circ$

Mặt khác $AH = \frac{AB \cdot AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Suy ra $A'A = AH \tan 60^\circ = \frac{3a}{2}, S_{ABCD} = AB \cdot AD = a^2\sqrt{3}$

$\Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = AA' \cdot S_{ABCD} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$. **Chọn A**



Ví dụ 13: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình chữ nhật ABCD có $AB = 3a, AD = 4a$.

Đường thẳng $A'C$ tạo với mặt phẳng $(A'B'BA)$ một góc 30° . Thể tích khối hộp chữ nhật đã cho là:

A. $2a^3\sqrt{39}$.

B. $18a^3\sqrt{39}$.

C. $a^3\sqrt{39}$.

D. $6a^3\sqrt{39}$.

Lời giải

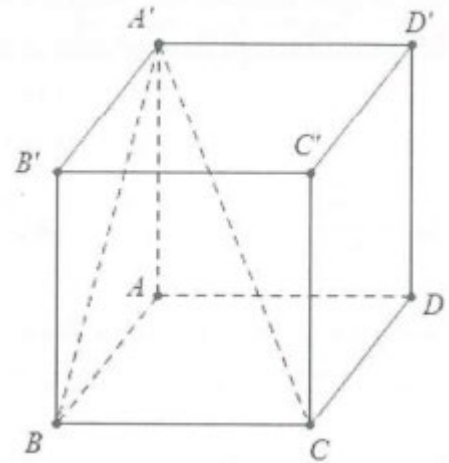
Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp B'B \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ABB'A')$

$\Rightarrow \widehat{(A'C; (ABB'A'))} = \widehat{CA'B} = 30^\circ$

Khi đó $A'B \cdot \tan 30^\circ = BC = 4a \Rightarrow A'B = 4a\sqrt{3}$

Do vậy $A'A = \sqrt{A'B^2 - AB^2} = a\sqrt{39}$

$\Rightarrow V = A'A \cdot A_{ABCD} = 6a^3\sqrt{39}$. **Chọn D.**



Ví dụ 14: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ đáy là hình chữ nhật có $AB = 2a, AD = 6a$. Gọi M là trung điểm của AD, biết khoảng cách từ C đến mặt phẳng $(A'BM)$ bằng $\frac{12a}{7}$. Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là:

A. $24a^3$

B. $12a^3$

C. $3a^3$

D. $8a^3$

Lời giải

Gọi $I = AC \cap BM$ ta có $\frac{IA}{IC} = \frac{AM}{BC} = \frac{1}{2}$

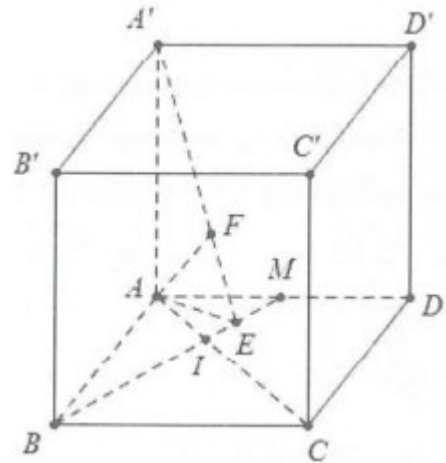
Do vậy $d(C; (A'BM)) = 2d(A; (A'BM)) = \frac{12}{7}a$.

Dựng $AE \perp BM, AF \perp A'E$ khi đó

$d(A; (A'BM)) = \frac{6a}{7} = AF$. Mặt khác

$\frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AA'^2} = \frac{1}{AF^2} \Leftrightarrow \frac{1}{AF^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AA'^2}$

$\Rightarrow AA' = a \Rightarrow V = AA' \cdot S_{ABCD} = 12a^3$. **Chọn B.**



➤ Dạng 2: Thể tích khối lăng trụ xiên

Ví dụ 1: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân $AC = BC = 3a$, hình chiếu vuông góc của B' lên mặt đáy trùng với trọng tâm tam giác ABC, mặt phẳng $(ABB'A')$ tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60° . Thể tích khối lăng trụ đã cho là:

A. $\frac{9a^3\sqrt{6}}{8}$

B. $\frac{9a^3\sqrt{6}}{4}$

C. $\frac{3a^3\sqrt{6}}{4}$

D. $\frac{9a^3}{4}$

Lời giải

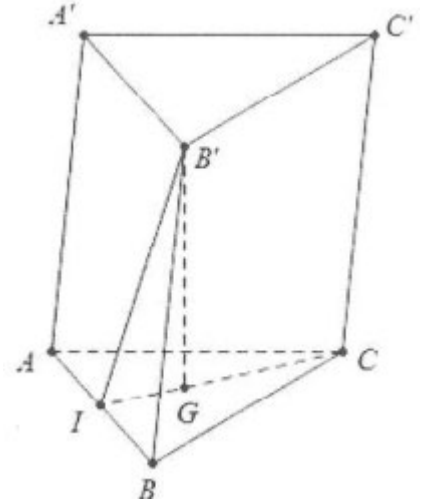
Dựng $CI \perp AB \Rightarrow I$ là trung điểm của AB .

Ta có: $(B'GI) \perp AB \Rightarrow \widehat{B'IG} = 60^\circ$.

$$\text{Lại có: } CI = \frac{1}{2}AB = \frac{3a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow GI = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow B'G = GI \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$V_{ABC.A'B'C'} = B'G.S_{ABC} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{9a^2}{2} = \frac{9a^3\sqrt{6}}{4}. \text{Chọn B.}$$



Ví dụ 2: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , hình chiếu vuông góc của B' lên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm H của cạnh AB , góc giữa mặt phẳng $(BCC'B')$ và mặt phẳng đáy bằng 60° . Thể tích khối lăng trụ đã cho là:

A. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$

B. $\frac{9a^3\sqrt{3}}{16}$

C. $\frac{3a^3\sqrt{6}}{16}$

D. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{16}$

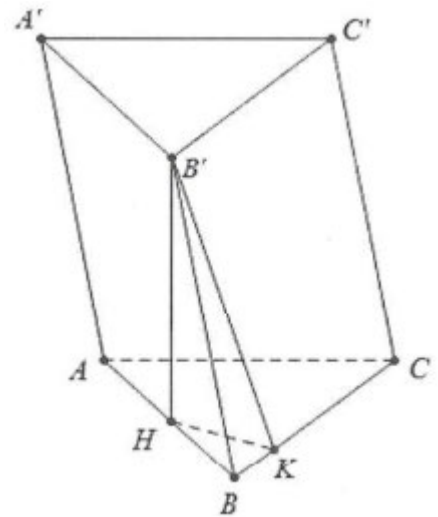
Lời giải

Kẻ $HK \perp BC \Rightarrow BC \perp (B'HK) \Rightarrow \widehat{B'KH} = 60^\circ$.

$$\text{Ta có: } HK = HB \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow B'H = HK \tan 60^\circ = \frac{3a}{4}$$

$$V_{ABC.A'B'C'} = B'H.S_{ABC} = \frac{3a}{4} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{16}.$$

Chọn D.



Ví dụ 3: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trùng với trọng tâm tam giác ABC , góc giữa đường thẳng AA' và mặt phẳng đáy (ABC) bằng 30° . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$

C. $\frac{5a^3\sqrt{3}}{12}$

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Lời giải

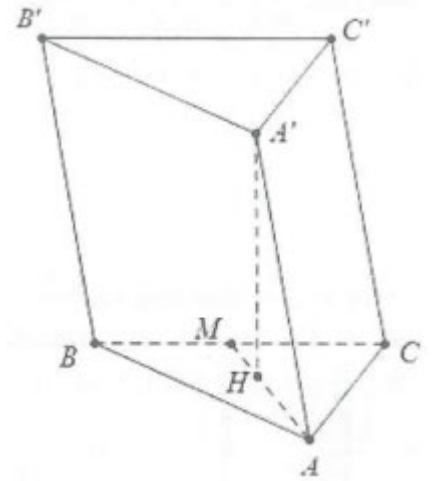
Gọi H là trọng tâm tam giác đều ABC và M là trung điểm của BC.

$$\text{Ta có: } AM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = \frac{2}{3} AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Khi đó: } A'H = HA \tan 30^\circ = \frac{a}{3}, S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Do vậy: } V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot A'H = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$$

Chọn D.



Ví dụ 4: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $4a$. Hình chiếu của A' trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HB = 3HA$. Góc tạo bởi đường thẳng $A'C$ và mặt đáy bằng 30° .

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

A. $4a^3\sqrt{13}$

B. $\frac{a^3\sqrt{13}}{8}$

C. $\frac{a^3\sqrt{13}}{4}$

D. $a^3\sqrt{13}$

Lời giải

Ta có: $HB = 3a$; $HA = a$. Gọi E là trung điểm của AB .

$$\text{Ta có: } CE = \frac{(4a)\sqrt{3}}{2} = 2a\sqrt{3}$$

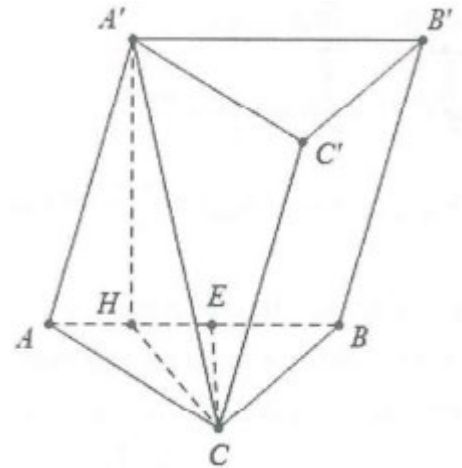
$$\Rightarrow CH^2 = HA^2 + AC^2 - 2HA \cdot AC \cos 60^\circ = 13a^2$$

$$\text{Hoặc } CH = \sqrt{CE^2 + HE^2} = a\sqrt{13}$$

$$\Rightarrow A'H = CH \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{13}}{\sqrt{3}}; S_{ABC} = 4a^2\sqrt{3}$$

$$\text{Khi đó } V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot A'H = 4a^3\sqrt{13}$$

Chọn A.



Ví dụ 5: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C có $AC = BC = 2a$, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt đáy trùng với trung điểm của AB . Biết khoảng cách giữa 2 đường thẳng

$A'C$ và AB bằng $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

A. $4a^3\sqrt{2}$

B. $8a^3$

C. $4a^3$

D. $2a^3$

Lời giải

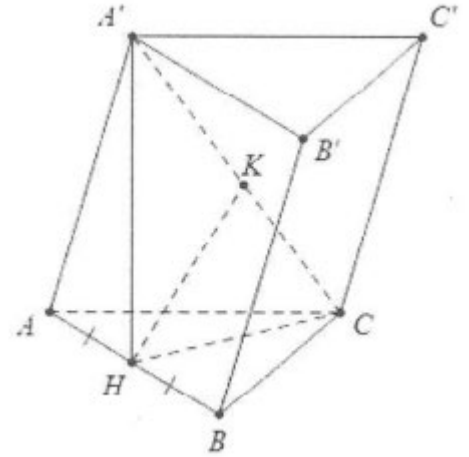
Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow CH = a\sqrt{2}$

Khi đó ta có: $\begin{cases} CH \perp AB \\ AB \perp A'H \end{cases} \Rightarrow AB \perp (A'HC)$

Dựng $HK \perp A'C \Rightarrow d(A'C; AB) = HK$

Mặt khác $\frac{1}{HK} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{HC^2} \Rightarrow A'H = 2a$

Do vậy $V_{ABC.A'B'C'} = A'H.S_{ABC} = 4a^3$. **Chọn C.**



Ví dụ 6: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Gọi M là trung điểm của AB , tam giác $C'MC$ cân tại C' và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Đường thẳng AC' tạo với đáy góc 60° . Thể tích khối lăng trụ là:

A. $\frac{3a^3\sqrt{7}}{16}$

B. $\frac{a^3\sqrt{21}}{16}$

C. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{16}$

D. $\frac{a^3\sqrt{21}}{4}$

Lời giải

Ta có: $CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}, S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Gọi H là trung điểm của CM suy ra $C'H \perp CM$.

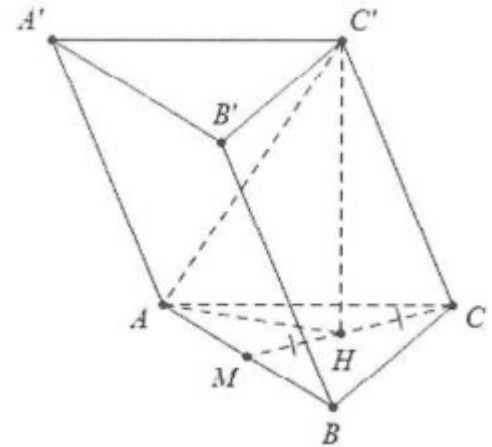
Mặt khác có $(C'MC) \perp (ABC) \Rightarrow C'H \perp (ABC)$

$\Rightarrow \widehat{(AC'; (ABC))} = \widehat{C'AH} = 60^\circ$.

Lại có $AH = \sqrt{MH^2 + AM^2} = \frac{a\sqrt{7}}{4}$.

Suy ra $C'H = AH \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{21}}{4}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = C'H.S_{ABC} = \frac{3a^3\sqrt{7}}{16}$. **Chọn A.**



Ví dụ 7: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tam giác ABC vuông tại B, có $AB = a, AC = 2a$. Tam giác $A'AC$ cân tại A' và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Mặt phẳng $(A'AC)$ tạo với đáy một góc 45° . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

A. $2a^3\sqrt{3}$

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

Lời giải

Gọi H là trung điểm của AC khi đó $AH \perp AC$.

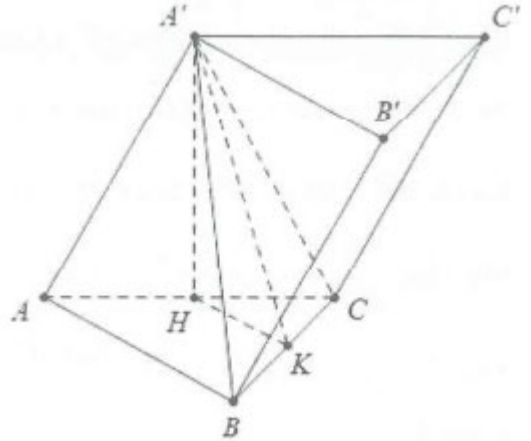
Mặt khác $(A'AC) \perp (ABC)$.

Do đó $A'H \perp (ABC)$. Dựng $HK \perp BC$

$$\Rightarrow (A'HK) \perp BC \Rightarrow \widehat{A'KH} = 45^\circ$$

$$\text{Ta có: } HK = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow A'H = HK = \frac{a}{2}$$

$$V_{ABC.A'B'C'} = A'H.S_{ABC} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$$



Chọn D.

Ví dụ 8: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B có $AB = BC = 2a$. Biết rằng hình chiếu của A' lên mặt đáy trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết $A'C = \frac{2a\sqrt{14}}{3}$. Thể tích khối lăng trụ đã cho là:

- A. $2a^3$ B. $4a^3$ C. $\frac{4a^3}{3}$ D. $8a^3$

Lời giải

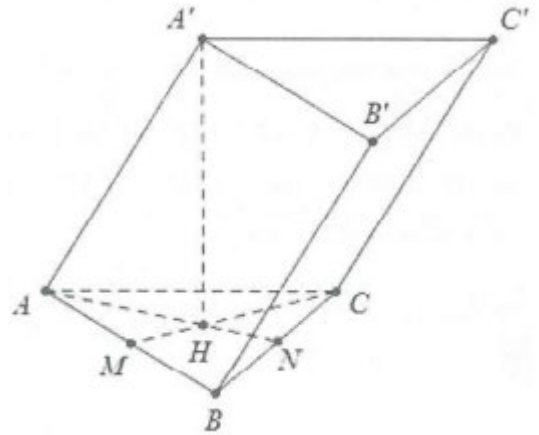
Gọi H là trọng tâm tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của

$$AB \text{ ta có: } CM = \sqrt{MB^2 + CB^2} = a\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow CH = \frac{2}{3}a\sqrt{5} \Rightarrow A'H = \sqrt{A'C^2 - CH^2} = 2a$$

$$\text{Do vậy } V_{ABC.A'B'C'} = A'H.S_{ABC} = 2a \cdot \frac{(2a)^2}{2} = 4a^3.$$

Chọn B.



Ví dụ 9: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC đều cạnh $6a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' xuống mặt đáy thuộc cạnh AC sao cho $HC = 2HA$. Biết khoảng cách từ C đến mặt phẳng $(ABB'A')$ bằng $\frac{9a}{2}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

- A. $18a^3\sqrt{3}$ B. $36a^3\sqrt{3}$ C. $54a^3\sqrt{3}$ D. $27a^3\sqrt{3}$

Lời giải

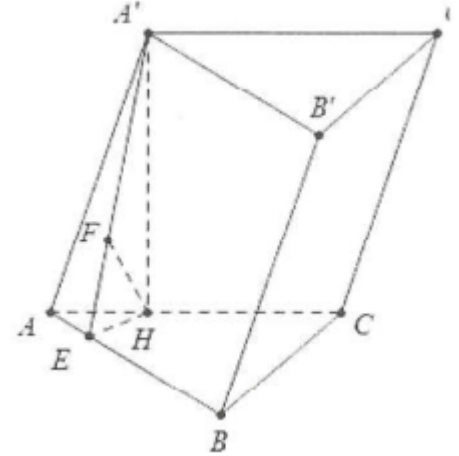
Dựng $HK \perp AC, HF \perp A'E \Rightarrow HF \perp (ABA')$

Ta có: $d(C; (ABA')) = 3d(H; (ABA')) = 3HF = \frac{9a}{2}$

Lại có: $HE = HA \sin 60^\circ = 2a \sin 60^\circ = a\sqrt{3}; HF = \frac{3a}{2}$.

Mặt khác: $\frac{1}{HE^2} + \frac{1}{A'H^2} = \frac{1}{HF^2} \Rightarrow A'H = 3a$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = A'H.S_{ABC} = 3a \cdot \frac{(6a)^2 \sqrt{3}}{4} = 27a^3 \sqrt{3}$



Chọn D.

Ví dụ 10: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Biết rằng hình chiếu vuông góc A' xuống đáy trùng với trung điểm của AB và $AC' = \frac{3a}{2}$. Thể tích khối lăng trụ đã cho là:

A. $\frac{a^3}{4}$

B. $\frac{a^3}{12}$

C. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{4}$

D. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{12}$

Lời giải

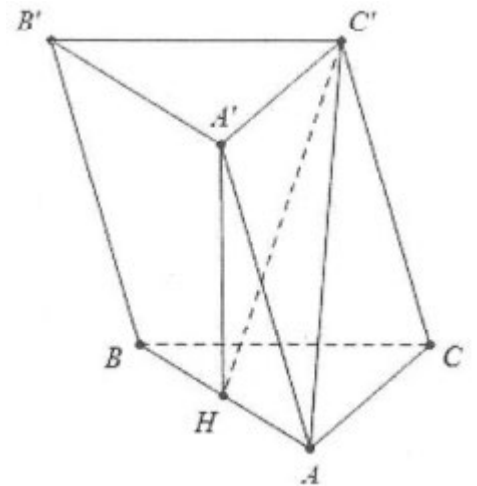
Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow AH = \frac{a}{2}$.

Ta có: $AB \perp A'H; AB \perp CH \Rightarrow C'H \perp AB$

$\Rightarrow AH^2 + HC'^2 = AC'^2 \Rightarrow HC'^2 = AC'^2 - AH^2 = 2a^2$

$\Rightarrow A'H = \sqrt{HC'^2 - AC'^2} = a$

$V_{ABC.A'B'C'} = A'H.S_{ABC} = a \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{4}$. **Chọn C.**



Ví dụ 11: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ biết $C'.ABC$ là hình chóp tam giác đều có đường cao bằng h . Đường thẳng AA' tạo với đáy một góc 60° . Thể tích khối lăng trụ đã cho tính theo h là:

A. $\frac{h^3 \sqrt{3}}{8}$

B. $\frac{h^3 \sqrt{3}}{4}$

C. $\frac{3h^3}{4}$

D. $\frac{h^3 \sqrt{3}}{2}$

Lời giải

Gọi H là trọng tâm tam giác đều ABC.

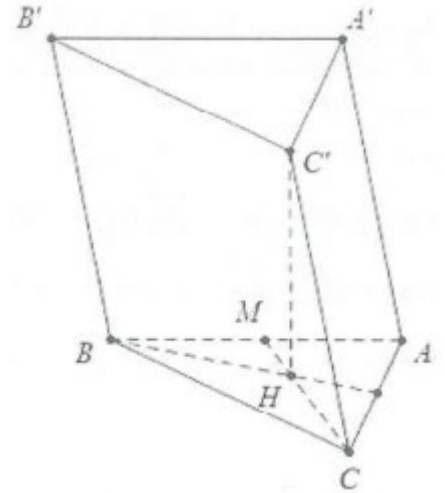
Khi đó $C'H \perp (ABC)$ và $C'H = h$.

Ta có: $AA' \parallel CC'$ suy ra CC' tạo với đáy một góc 60°

$$\Rightarrow \widehat{C'CH} = 60^\circ. \text{ Khi đó } CH \tan 60^\circ = h \Rightarrow CH = \frac{h}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Đặt } AB = a \Rightarrow CH = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{\sqrt{3}} \Rightarrow h = a.$$

$$\text{Do đó } V_{ABC.A'B'C'} = \frac{h^3 \sqrt{3}}{4}. \text{ Chọn B.}$$



Ví dụ 12: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của A' xuống đáy là trung điểm của AB . Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

A. $\frac{3a^3}{8}$

B. $\frac{3a^3}{4}$

C. $\frac{a^3}{8}$

D. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{8}$

Lời giải

Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow A'H \perp (ABC)$

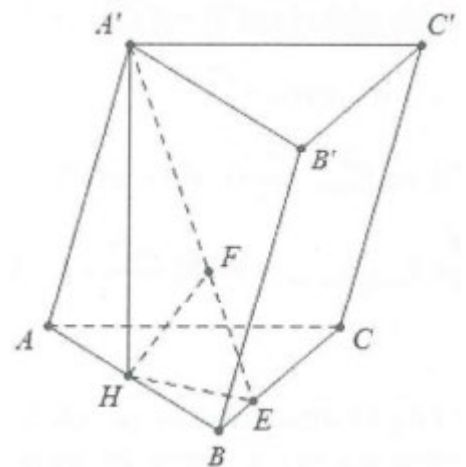
Dựng $HE \perp BC, HF \perp A'E$. Khi đó $d(H; (A'BC)) = HF$.

$$\text{Mặt khác } HE = HB \sin \widehat{ABC} = \frac{a}{2} \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Lại có } d(A; (A'BC)) = 2d(H; (A'BC)) = 2HF = \frac{a\sqrt{15}}{5}$$

$$\Rightarrow HF = \frac{a\sqrt{15}}{10}. \text{ Mặt khác: } \frac{1}{HF^2} = \frac{1}{HE^2} + \frac{1}{A'H^2}$$

$$\Rightarrow A'H = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V = A'H \cdot S_{ABC} = \frac{3a^3}{8}. \text{ Chọn A.}$$



Ví dụ 13: Cho hình chóp hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình chữ nhật có $AB = 3a, AD = 4a$. Biết

$A'A = A'B = A'C = A'D$ và mặt phẳng $(A'CD)$ tạo với đáy một góc 60° . Thể tích khối hộp đã cho là:

A. $4a^3\sqrt{3}$

B. $12a^3\sqrt{3}$

C. $8a^3\sqrt{3}$

D. $24a^3\sqrt{3}$

Lời giải

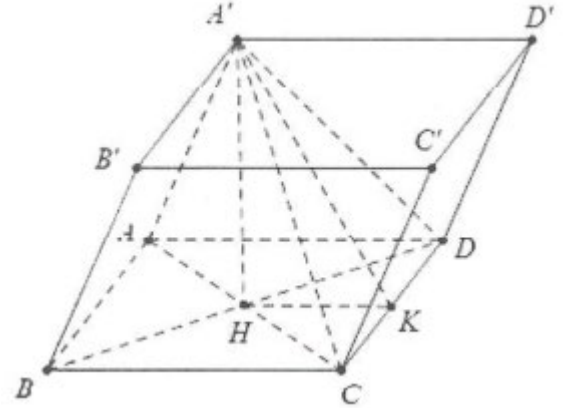
Ta có $A'A = A'B = A'C = A'D$ nên hình chiếu của A' xuống mặt đáy trùng với tâm H của hình chữ nhật ABCD. Dựng $HK \perp CD$.

Lại có $A'H \perp CD \Rightarrow CD \perp (A'CD)$

Do vậy $\widehat{((A'CD);(ABCD))} = \widehat{A'KH} = 60^\circ$.

Lại có $HK = \frac{AD}{2} = 2 \Rightarrow A'H = HK \tan 60^\circ = 2a\sqrt{3}$

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = A'H \cdot S_{ABCD} = 24a^3\sqrt{3}$. **Chọn D.**



Ví dụ 14: Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi ABCD tâm O có $AC = 2a$, $BD = 2a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của B' xuống đáy trùng với trung điểm của OB. Đường thẳng $B'C$ tạo với đáy góc 45° . Thể tích khối lăng trụ đã cho là:

A. $2a^3\sqrt{7}$.

B. $2a^3\sqrt{3}$.

C. $3a^3\sqrt{21}$.

D. $a^3\sqrt{21}$.

Lời giải

Gọi H là trung điểm của OB. Khi đó

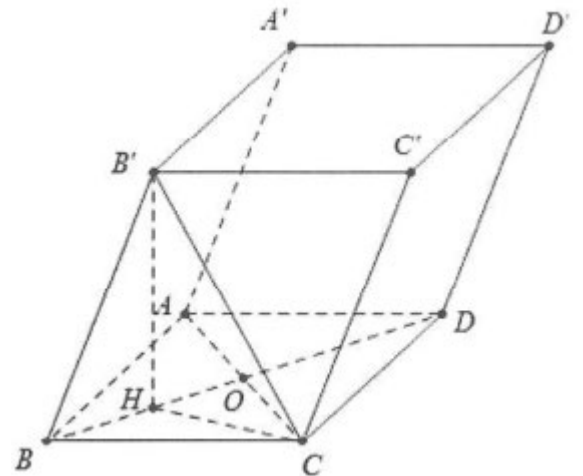
$$OC = a, OH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow CH = \sqrt{OC^2 + OH^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$$

Ta có: $\widehat{(B'C';(ABC))} = \widehat{B'CH} = 45^\circ$

$$\Rightarrow B'H = CH = \frac{a\sqrt{7}}{2}$$

$$\text{Lại có: } S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = 2a^2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = 2a^2\sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{7}}{2} = a^3\sqrt{21}. \text{ **Chọn D**}$$



Ví dụ 15: Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông ABCD cạnh $6a$. Hình chiếu vuông góc

của A' xuống đáy trùng với trọng tâm tam giác ABD. Biết tam giác $AA'C$ vuông tại A' . Thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là:

- A. $72a^3$ B. $144a^3$ C. $72a^3\sqrt{3}$ D. $48a^3$

Lời giải

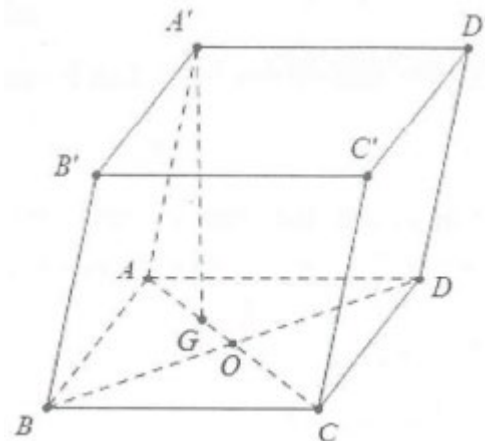
Gọi G là trọng tâm tam giác ABD khi đó ta có:

$$GA = \frac{1}{3} AC. \text{ Mặt khác } AC = 6a\sqrt{2}.$$

Suy ra $GA = 2a\sqrt{2}, GC = 4a\sqrt{2}$. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác ACA' vuông tại A' có đường cao $A'G$ nên ta có:

$$A'G = \sqrt{GA \cdot GC} = 4a$$

$$\Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = A'G \cdot S_{ABCD} = 144a^3. \text{ Chọn B.}$$



Ví dụ 16: Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy ABCD là hình chữ nhật có $AB = 2a, AD = 2a\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với tâm O của hình chữ nhật ABCD. Biết cạnh AA' tạo với đáy một góc 60° . Thể tích lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là:

- A. $8a^3$ B. $12\sqrt{3}a^3$ C. $24a^3$ D. $8\sqrt{3}a^3$

Lời giải

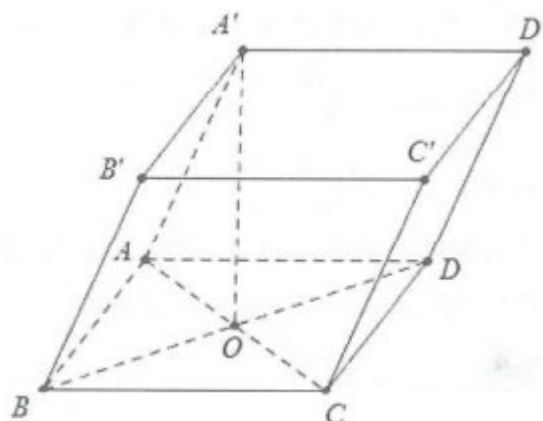
$$\text{Ta có: } (\widehat{AA';(ABCD)}) = \widehat{A'AO} = 60^\circ.$$

$$\text{Mặt khác: } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 4a \Rightarrow OA = 2a$$

$$\Rightarrow OA' = OA \tan 60^\circ = 2a\sqrt{3}$$

$$V_{ABCD.A'B'C'D'} = OA' \cdot S_{ABCD} = 2a\sqrt{3} \cdot 4a^2\sqrt{3} = 24a^3$$

Chọn C.



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Tính thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, biết $AC = a\sqrt{3}$.

- A. $V = a^3$ B. $V = \frac{3\sqrt{6}a^3}{4}$ C. $V = 3\sqrt{3}a^3$ D. $V = \frac{1}{3}a^3$

Câu 2: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , cạnh $BC = a\sqrt{2}$, $A_1B = 3a$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ là:

- A. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. B. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = a^3\sqrt{2}$
C. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = 6a^3$ D. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = 2a^3$

Câu 3: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , cạnh $BC = a\sqrt{2}$, A_1C tạo với mặt đáy một góc 60° . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ là:

- A. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$. B. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = 3a^3\sqrt{3}$.
C. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. D. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = 6a^3\sqrt{3}$.

Câu 4: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , cạnh $BC = a\sqrt{2}$, (A_1BC) hợp với mặt đáy một góc 30° . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ là:

- A. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. B. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.
C. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{a^3\sqrt{6}}{36}$. D. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Câu 5: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $BA = BC = 2a$, (A_1C) hợp với mặt đáy một góc 60° . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ là:

- A. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{4a^3\sqrt{6}}{3}$. B. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = 4a^3\sqrt{6}$
C. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{4a^3\sqrt{2}}{9}$. D. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{4a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 6: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC với $AB = a$, $AC = 2a$, và $\widehat{BAC} = 120^\circ$, mặt phẳng (A_1BC) hợp với đáy một góc 60° . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ là:

- A. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{a^3\sqrt{21}}{14}$. B. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{3a^3\sqrt{21}}{14}$.

$$\text{C. } V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = \frac{a^3\sqrt{7}}{14}.$$

$$\text{D. } V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = \frac{a^3\sqrt{7}}{42}.$$

Câu 7: Cho lăng trụ đứng $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 2a$, $AD = a$, đường chéo B_1D của lăng trụ với đáy $ABCD$ một góc 30° . Thể tích khối lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ là:

$$\text{A. } V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = \frac{2a^3\sqrt{15}}{9}.$$

$$\text{B. } V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = \frac{2a^3\sqrt{15}}{3}.$$

$$\text{C. } V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{D. } V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = \frac{a^3\sqrt{3}}{9}.$$

Câu 8: Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh đáy bằng a và mặt (DBC_1) tạo với đáy $ABCD$ một góc 60° . Thể tích khối lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ là:

$$\text{A. } V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{B. } V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = \frac{a^3\sqrt{3}}{9}.$$

$$\text{C. } V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}.$$

$$\text{D. } V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}.$$

Câu 9: Cho lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu của điểm A_1 lên (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC , $AA_1 = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ là:

$$\text{A. } V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}.$$

$$\text{B. } V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}.$$

$$\text{C. } V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$

$$\text{D. } V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}.$$

Câu 10: Cho lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $a\sqrt{3}$, cạnh bên có độ dài bằng $2a$. Hình chiếu của điểm A_1 lên (ABC) trùng với trung điểm của BC . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ là:

$$\text{A. } V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{3a^3\sqrt{21}}{8}.$$

$$\text{B. } V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{a^3\sqrt{21}}{24}.$$

$$\text{C. } V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{a^3\sqrt{14}}{12}.$$

$$\text{D. } V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{a^3\sqrt{14}}{8}.$$

Câu 11: Cho lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $a\sqrt{3}$. Hình chiếu của điểm A_1 lên (ABC) trùng với trung điểm của BC , cạnh bên hợp với đáy một góc 60° . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ là:

$$\text{A. } V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$

$$\text{B. } V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}.$$

$$\text{C. } V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{9a^3}{8}.$$

$$\text{D. } V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{27a^3}{8}.$$

Câu 12: Cho lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $a\sqrt{3}$. Hình chiếu của điểm A_1 lên (ABC) trùng với trung điểm của BC , mặt (A_1AB) hợp với đáy một góc α thỏa mãn $\tan \alpha = \frac{2}{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ là:

A. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

B. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.

C. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

D. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{a^3\sqrt{6}}{9}$.

Câu 13: Cho lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với $BA = BC = a$. Hình chiếu của điểm A_1 lên (ABC) trùng với trung điểm của AC , $S_{AA_1CC_1} = a^2\sqrt{2}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ là:

A. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{a^3}{2}$.

B. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{a^3}{6}$.

C. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

D. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Câu 14: Cho lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với $BA = BC = a$. Hình chiếu của điểm A_1 lên (ABC) trùng với trung điểm của AC , cạnh A_1B hợp với đáy một góc 45° . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ là:

A. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

B. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

C. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

D. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

Câu 15: Cho lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với $BA = BC = a$. Hình chiếu của điểm A_1 lên (ABC) trùng với trung điểm của AC , mặt (A_1AB) hợp với đáy một góc 60° . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ là:

A. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

B. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

C. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

D. $V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{a^3\sqrt{6}}{9}$.

Câu 16: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. Khi đó thể tích lăng trụ bằng:

- A. a^3 B. $3a^3$ C. $\frac{4a^3}{3}$ D. $\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$

Câu 17: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$, hình chiếu của điểm A' lên (ABC) trùng với trung điểm của AB . Biết góc giữa $(AA'C'C)$ và mặt đáy bằng 60° . Thể tích khối lăng trụ bằng:

- A. $2a^3\sqrt{3}$ B. $3a^3\sqrt{3}$ C. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$ D. $a^3\sqrt{3}$

Câu 18: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$, hình chiếu của điểm A' lên (ABC) trùng với trọng tâm ΔABC . Biết góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° . Thể tích khối lăng trụ bằng:

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ C. $2a^3\sqrt{3}$ D. $4a^3\sqrt{3}$

Câu 19: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là một hình thoi và hai mặt chéo $ACC'A'.BDD'B'$ đều vuông góc với mặt phẳng đáy. Hai mặt này có diện tích lần lượt bằng $100cm^2, 105cm^2$ và cắt nhau theo một đoạn thẳng có độ dài $10cm$. Khi đó thể tích của hình hộp đã cho là:

- A. $225\sqrt{5}cm^3$ B. $425cm^3$ C. $235\sqrt{5}cm^3$ D. $525cm^3$

Câu 20: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a tâm O. Khi đó thể tích khối tứ diện $A.A'BO$ là:

- A. $\frac{a^3}{8}$ B. $\frac{a^3}{9}$ C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{a^3}{12}$

Câu 21: Đáy của lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ là tam giác đều cạnh $a = 4$ và diện tích tam giác $A'BC$ bằng 8. Tính thể tích khối lăng trụ.

- A. $8\sqrt{3}$ B. $4\sqrt{3}$ C. Kết quả khác D. $2\sqrt{3}$

Câu 22: Cho lăng trụ xiên tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , biết cạnh bên là $a\sqrt{3}$ và hợp với đáy (ABC) một góc 60° . Tính thể tích lăng trụ.

- A. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$ B. Đáp án khác C. $\frac{2a^3}{9}$ D. $\frac{5a^3\sqrt{3}}{8}$

Câu 23: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của A' xuống (ABC) là trung điểm của AB . Mặt bên $(AA'C'C)$ tạo với đáy một góc bằng 45° . Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

- A. $\frac{3a^3}{8}$ B. $\frac{3a^3}{16}$ C. $\frac{a^3}{16}$ D. $\frac{a^3}{8}$

Câu 24: Đáy của một hình hộp đứng là một hình thoi có đường chéo nhỏ bằng d và góc nhọn bằng α . Diện tích của một mặt bên bằng S . Thể tích của hình hộp đã cho là:

- A. $2dS \sin \frac{\alpha}{2}$ B. $dS \sin \alpha$ C. $\frac{1}{2}dS \sin \alpha$ D. $dS \cos \frac{\alpha}{2}$

Câu 25: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích $V = 27a^3$. Gọi M là trung điểm của BB' , điểm N là điểm bất kỳ trên CC' . Tính thể tích khối chóp $AA'MN$

- A. $7a^3$ B. $18a^3$ C. $9a^3$ D. $8a^3$

Câu 26: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$. Đáy ABC là tam giác đều. Mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy góc 60° , tam giác $A'BC$ có diện tích bằng $2\sqrt{3}$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của BB' và CC' . Thể tích của khối tứ diện $A'APQ$ là:

- A. $2\sqrt{3}$. B. $\sqrt{3}$. C. $4\sqrt{3}$. D. $8\sqrt{3}$.

Câu 27: Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng a , đường chéo AC' tạo với mặt bên $(BCC'B')$ một góc α ($0 < \alpha < 45^\circ$). Khi đó, thể tích của khối lăng trụ bằng:

- A. $a^3 \sqrt{\cot^2 \alpha + 1}$ B. $a^3 \sqrt{\cos^2 \alpha}$ C. $a^3 \sqrt{\cot^2 \alpha - 1}$ D. $a^3 \sqrt{\tan^2 \alpha - 1}$

Câu 28: Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$, M là trung điểm của AA' . Mặt phẳng (MBC') chia khối lăng trụ thành hai phần. Tỉ số của hai phần đó bằng:

- A. $\frac{5}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. 1 D. $\frac{2}{5}$

Câu 29: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , cạnh bên bằng b và hợp với mặt đáy góc 60° . Thể tích của khối chóp $A'BCC'B'$ là:

- A. $\frac{a^2b}{2}$ B. $\frac{a^2b}{4}$ C. $\frac{a^2b\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{a^2b}{4\sqrt{3}}$

Câu 30: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. I là trung điểm của BB' . Mặt phẳng (DIC') chia khối lập phương thành 2 phần có tỉ số thể tích phần bé chia phần lớn bằng:

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{7}{17}$ C. $\frac{4}{14}$ D. $\frac{1}{2}$

Câu 31: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AC = a, BC = 2a, \widehat{ACB} = 120^\circ$ và đường thẳng $A'C$ tạo với mặt phẳng $(ABB'A')$ góc 30° . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

- A. $\frac{a^3\sqrt{15}}{4}$ B. $\frac{a^3\sqrt{105}}{14}$ C. $\frac{a^3\sqrt{15}}{14}$ D. $\frac{a^3\sqrt{105}}{4}$

Câu 32: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng (BDC') chia khối lập phương thành hai phần có tỉ số thể tích phần bé chia phần lớn bằng:

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{4}$

Câu 33: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AA' = a$. Tam giác ABC đều cạnh a . Gọi I là trung điểm của AA' . Tìm mệnh đề đúng.

A. $V_{I.ABC} = \frac{1}{2}V_{ABC.A'B'C'}$.

B. $V_{I.ABC} = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}$.

C. $V_{I.ABC} = \frac{1}{12}V_{ABC.A'B'C'}$.

D. $V_{I.ABC} = \frac{1}{6}V_{ABC.A'B'C'}$.

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Ta có $AB = \frac{AC}{\sqrt{3}} = a \Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = AB^3 = a^3$. **Chọn A.**

Câu 2: Ta có: $AB = AC = \frac{BC}{\sqrt{2}} = a \Rightarrow AA_1 = \sqrt{A_1B^2 - AB^2} = 2a\sqrt{2}$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{a^2}{2} \Rightarrow V_{ABC.A_1B_1C_1} = AA_1 \cdot S_{ABC} = 2a\sqrt{2} \cdot \frac{a^2}{2} = a^3\sqrt{2}. \text{ **Chọn B**}$$

Câu 3: $A_1C \cap (ABC) = \{C\}$ và $AA_1 \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{(A_1C, (ABC))} = \widehat{(A_1C, AC)} = \widehat{ACA_1} = 60^\circ$

$$\tan \widehat{ACA_1} = \frac{AA_1}{AC} \Rightarrow AA_1 = AC \tan \widehat{ACA_1} \text{ mà } AB = AC = \frac{BC}{\sqrt{2}} = a \Rightarrow AA_1 = a\sqrt{3}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{a^2}{2} \Rightarrow V_{ABC.A_1B_1C_1} = AA_1 \cdot S_{ABC} = a\sqrt{3} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}. \text{ **Chọn C.**}$$

Câu 4: Gọi M là trung điểm của BC . Ta có $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp AA_1 \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AMA_1)$

$$\Rightarrow \widehat{((A_1BC), (ABC))} = \widehat{(AM, A_1M)} = \widehat{AMA_1} = 30^\circ$$

$$\tan \widehat{AMA_1} = \frac{AA_1}{AM} \Rightarrow AA_1 = AM \tan \widehat{AMA_1} \text{ mà } AM = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AA_1 = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{a^2}{2} \Rightarrow V_{ABC.A_1B_1C_1} = AA_1 \cdot S_{ABC} = \frac{a\sqrt{6}}{6} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}. \text{ **Chọn D**}$$

Câu 5: $A_1C \cap (ABC) = \{C\}$ và $AA_1 \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{(A_1C, (ABC))} = \widehat{(A_1C, AC)} = \widehat{ACA_1} = 60^\circ$

$$\tan \widehat{ACA_1} = \frac{AA_1}{AC} \Rightarrow AA_1 = AC \tan \widehat{ACA_1} \text{ mà } AC = AB\sqrt{2} = 2a\sqrt{2} \Rightarrow AA_1 = 2a\sqrt{6}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC = 2a^2 \Rightarrow V_{ABC.A_1B_1C_1} = AA_1 \cdot S_{ABC} = 2a\sqrt{6} \cdot 2a^2 = 4a^3\sqrt{6}. \text{ **Chọn B**}$$

Câu 6: Kẻ $AM \perp BC$. Ta có $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp AA_1 \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AMA_1)$

$$\Rightarrow \widehat{((A_1BC), (ABC))} = \widehat{(AM, A_1M)} = \widehat{AMA_1} = 60^\circ$$

$$\tan \widehat{AMA_1} = \frac{AA_1}{AM} \Rightarrow AA_1 = AM \tan \widehat{AMA_1}$$

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 120^\circ} = a\sqrt{7} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin 120^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$AM = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \frac{a\sqrt{21}}{7} \Rightarrow AA_1 = \frac{3a\sqrt{7}}{7} \Rightarrow V_{ABC.A_1B_1C_1} = AA_1 \cdot S_{ABC} = \frac{3a^3\sqrt{21}}{14}. \text{ **Chọn B**}$$

Câu 7: $B_1D \cap (ABCD) = \{D\}$ và $BB_1 \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{(B_1D, (ABCD))} = \widehat{(B_1D, BD)} = \widehat{BDB_1}$

$$\tan \widehat{BDB_1} = \frac{BB_1}{BD} \Leftrightarrow BB_1 = BD \tan \widehat{BDB_1} \text{ mà } BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{5} \Rightarrow BB_1 = \frac{a\sqrt{15}}{3}$$

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD = 2a^2 \Rightarrow V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = BB_1 \cdot S_{ABCD} = \frac{a\sqrt{15}}{3} \cdot 2a^2 = \frac{2a^3\sqrt{15}}{3}. \text{ Chọn B}$$

Câu 8: Gọi O là giao điểm của AC và BD . Ta có $\begin{cases} BD \perp OC \\ BD \perp CC_1 \end{cases} \Rightarrow BD \perp (OCC_1)$

$$\Rightarrow \widehat{((DBC_1), (ABCD))} = \widehat{(OC, OC_1)} = \widehat{COC_1} = 60^\circ$$

$$\tan \widehat{COC_1} = \frac{CC_1}{CO} \Rightarrow CC_1 = CO \tan \widehat{COC_1} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$S_{ABCD} = a^2 \Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = CC_1 \cdot S_{ABCD} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}. \text{ Chọn C}$$

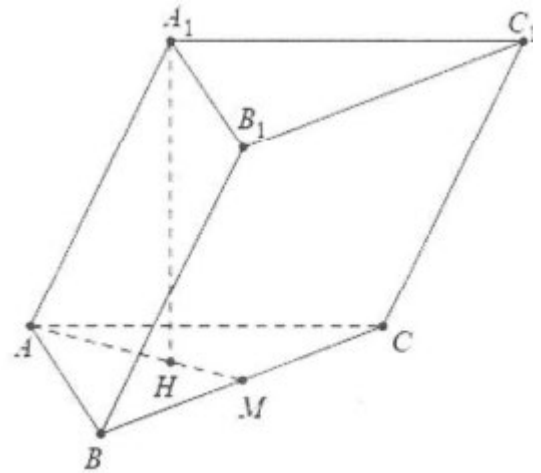
Câu 9: Gọi M là trung điểm của BC , H là trọng tâm của tam giác $ABC \Rightarrow A_1H \perp (ABC)$

$$AH = \frac{2}{3} AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$A_1H = \sqrt{A_1A^2 - AH^2} = a \text{ và } S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow V_{ABC.A_1B_1C_1} = A_1H \cdot S_{ABC} = a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$$

Chọn D.



Câu 10: Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow A_1H \perp (ABC)$

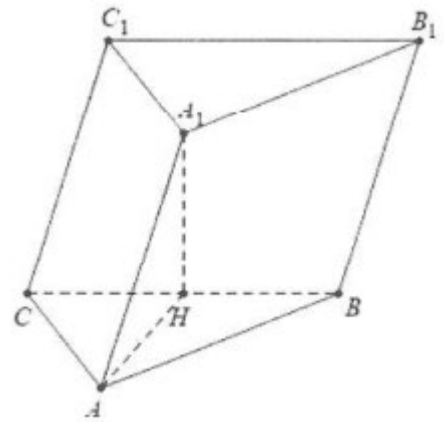
$$AH = \frac{a\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{2}$$

$$A_1H = \sqrt{AA_1^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{(a\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$V_{ABC.A_1B_1C_1} = A_1H \cdot S_{ABC} = \frac{a\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3\sqrt{21}}{8}$$

Chọn A.



Câu 11: Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow A_1H \perp (ABC)$

Ta có $AA_1 \cap (ABC) = \{A\}$ và $A_1H \perp (ABC)$

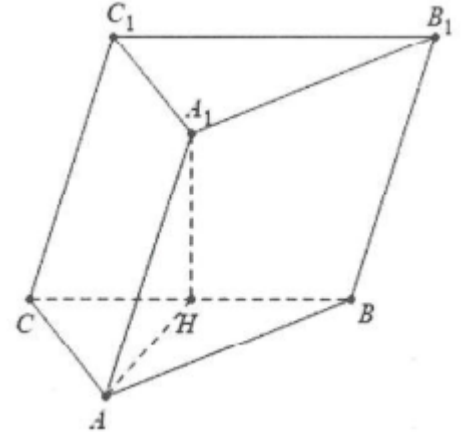
$$\Rightarrow \widehat{(AA_1, (ABC))} = \widehat{(AA_1, AH)} = \widehat{A_1AH} = 60^\circ$$

$$\blacksquare AH = \frac{a\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{2}$$

$$\blacksquare \tan \widehat{A_1AH} = \frac{A_1H}{AH} \Rightarrow A_1H = AH \tan \widehat{A_1AH} = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$$

$$\blacksquare S_{ABC} = \frac{(a\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$\blacksquare V_{ABC.A_1B_1C_1} = A_1H \cdot S_{ABC} = \frac{3a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{27a^3}{8}. \text{ Chọn D.}$$



Câu 12: Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow A_1H \perp (ABC)$

Kẻ $HK \perp AB$ ta có $\begin{cases} BC \perp HK \\ BC \perp A_1H \end{cases} \Rightarrow BC \perp (A_1HK)$

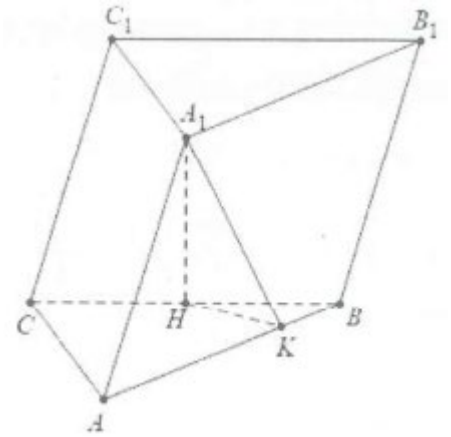
$$\Rightarrow \widehat{((A_1AB), (ABC))} = \widehat{(A_1K, HK)} = \widehat{A_1KH} = \alpha$$

$$\blacksquare \tan \alpha = \frac{A_1H}{HK} \Rightarrow A_1H = HK \tan \alpha = \frac{2}{3} HK$$

$$\blacksquare HK = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{4} \Rightarrow A_1H = \frac{a}{2}$$

$$\blacksquare S_{ABC} = \frac{(a\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{4}$$

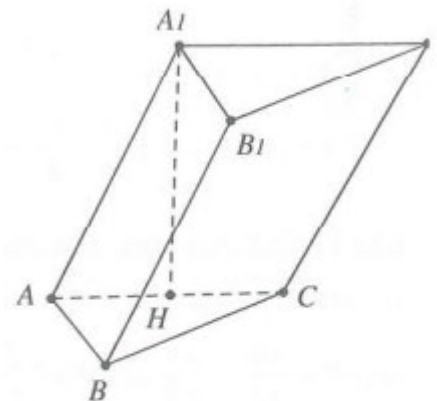
$$\blacksquare V_{ABC.A_1B_1C_1} = A_1H \cdot S_{ABC} = \frac{a}{2} \cdot \frac{3a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3 \sqrt{3}}{8}. \text{ Chọn B}$$



Câu 13: Gọi H là trung điểm của AC .

$$\blacksquare S_{AA_1CC_1} = a^2 \sqrt{2} = A_1H \cdot AC$$

$$\blacksquare AC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2} \Rightarrow A_1H = a$$



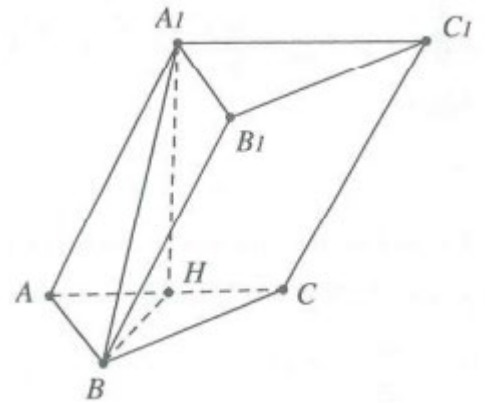
$$\Rightarrow V = A_1 H \cdot S_{ABC} = a \cdot \frac{1}{2} a^2 = \frac{1}{2} a^3. \text{ Chọn A}$$

Câu 14: Gọi H là trung điểm của AC .

$$\widehat{((A_1 B); (ABC))} = \widehat{A_1 B H} = 45^\circ$$

$$\Rightarrow A_1 H = B H = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow V = A_1 H \cdot S_{ABC} = \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} a^2 = \frac{a^3 \sqrt{2}}{4}. \text{ Chọn D}$$



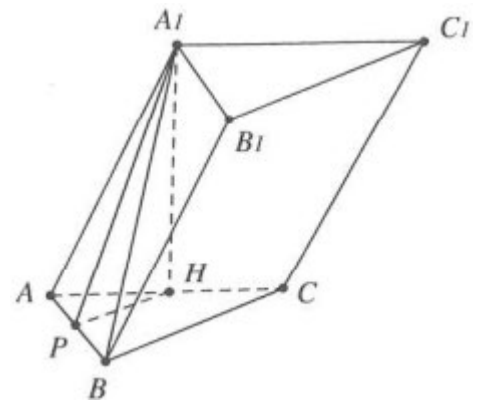
Câu 15: Gọi H là trung điểm của AC , kẻ $HP \perp AB$

$$\widehat{((A_1 AB); (ABC))} = \widehat{A_1 P H} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow A_1 H = P H \sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow V = A_1 H \cdot S_{ABC} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} a^2 = \frac{a^3 \sqrt{3}}{4}.$$

Chọn A.



Câu 16: Kẻ $AK \perp BC, AP \perp A'K$

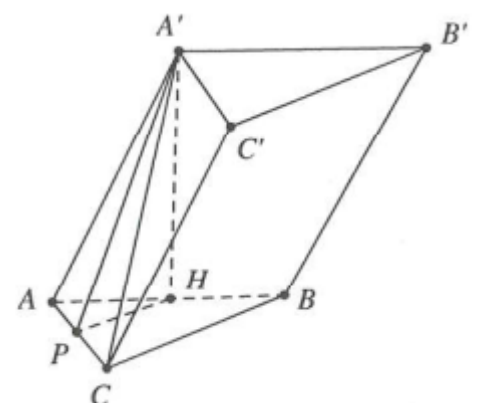
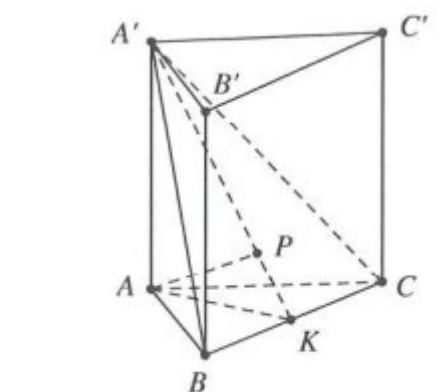
$$\Rightarrow AP = d(A; (A'BC)) = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{Cạnh } AK = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Từ } \frac{1}{AP^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{AK^2} \Rightarrow A'A = a\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow V = A'A \cdot S_{ABC} = a\sqrt{3} \cdot \frac{(2a)^2 \sqrt{3}}{4} = 3a^3. \text{ Chọn B}$$

Câu 17: Gọi H là trung điểm của AB , kẻ $HP \perp AC$



$$\widehat{((AA'C'C);(ABC))} = \widehat{A'PH} = 60^\circ \Rightarrow A'H = HP\sqrt{3}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{HP}{AH} = \frac{HP}{\frac{AB}{2}} \Rightarrow HP = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A'H = \frac{3a}{2}$$

$$\Rightarrow V = A'H.S_{ABC} = \frac{3a}{2} \cdot \frac{(2a)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3 \sqrt{3}}{2}.$$

Chọn C.

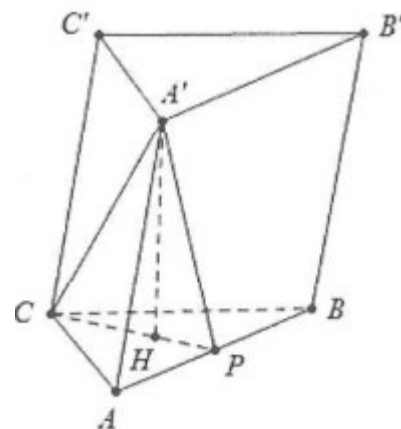
Câu 18: Gọi H là trọng tâm của tam giác ABC .

$$\widehat{(A'A, (ABC))} = \widehat{A'AH} = 60^\circ \Rightarrow A'H = AH\sqrt{3}$$

$$AH = \frac{AB}{\sqrt{3}} \Rightarrow A'H = 2a$$

$$\Rightarrow V = A'H.S_{ABC} = 2a \cdot \frac{(2a)^2 \sqrt{3}}{4} = 2a^3 \sqrt{3}$$

Chọn C.

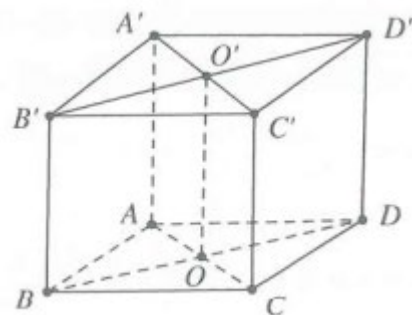


Câu 19: Ta có
$$\begin{cases} (ACC'A') \perp (ABCD) \\ (BDD'B') \perp (ABCD) \\ (ACC'A') \cap (BDD'B') = O'O \end{cases}$$

$$\Rightarrow O'O \perp (ABCD).$$

Lại có:
$$\begin{cases} 100 = O'O.AC \\ 105 = O'O.BD \\ O'O = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AC = 10 \\ BD = 10.5 \end{cases}$$

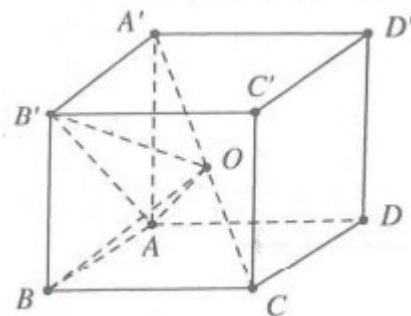
$$\Rightarrow V = O'O.S_{ABCD} = 10 \cdot \frac{1}{2} AC.BD = 525 \text{ cm}^3. \text{ Chọn D}$$



Câu 20: Ta có O là trung điểm của $A'C$

$$\begin{aligned} V_{AA'BO} &= V_{OABA'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} d(O; (ABB'A')) \cdot S_{ABA'} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^3}{12}. \end{aligned}$$

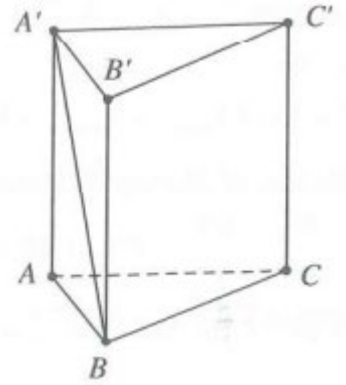
Chọn D.



Câu 21: Ta có $V = A'A.S_{ABC} = A'A.\frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}.A'A$

$$S_{A'BC} = \frac{1}{2}A'A.AB = 8 \Rightarrow A'A = 4 \Rightarrow V = 16\sqrt{3}.$$

Chọn C.

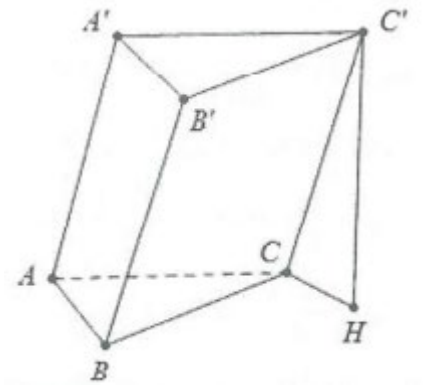


Câu 22: Kẻ $C'H \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{(CC';(ABC))} = \widehat{C'CH} = 60^\circ$

$$\Rightarrow \sin 60^\circ = \frac{C'H}{CC'} \Rightarrow C'H = \frac{3a}{2}$$

$$V = C'H.S_{ABC} = \frac{3a}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}.$$

Chọn A

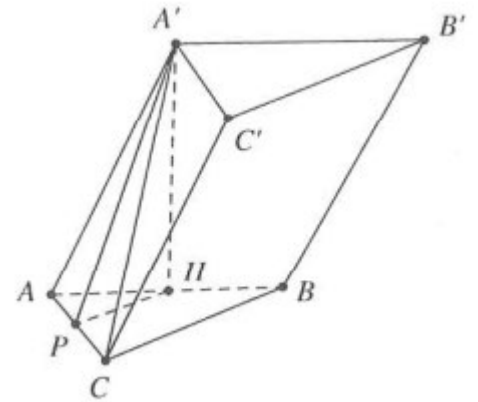


Câu 23: Gọi H là trung điểm của AB, $HP \perp AC$.

$$\widehat{(AA'C'C);(ABC)} = \widehat{A'PH} = 45^\circ \Rightarrow A'H = HP$$

$$\sin 60^\circ = \frac{HP}{AH} = \frac{HP}{\frac{AB}{2}} \Rightarrow HP = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A'H = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow V = A'H.S_{ABC} = \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3}{16}. \text{ Chọn B}$$



Câu 24: Giả sử đáy là hình thoi ABCD có 2 đường chéo cắt nhau tại O, $AC = d$

$$\text{Ta có } \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{OB}{\frac{d}{2}} \Rightarrow OB = \frac{d}{2} \tan \frac{\alpha}{2} \Rightarrow BD = d \tan \frac{\alpha}{2} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC.BD = d^2 \tan \frac{\alpha}{2}$$

$$\blacksquare AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2} \tan \frac{\alpha}{2}\right)^2} = \frac{d}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow h = \frac{S}{AB} = \frac{2S \cos \frac{\alpha}{2}}{d}$$

$$\blacksquare V = h.S_{ABCD} = \frac{2S \cos \frac{\alpha}{2}}{d} \cdot d^2 \tan \frac{\alpha}{2} = 2dS \sin \frac{\alpha}{2}. \text{ Chọn C}$$

Câu 25: Ta có $V_{AA'MN} = V_{C.AA'M} = V_{B.AA'C} = V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = 9a^3$. **Chọn C**

Câu 26: Gọi M là trung điểm của BC .

Ta có $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AMA')$

$$\Rightarrow \overbrace{\left((A'BC), (ABC) \right)} = \overbrace{(AM, A'M)} = \widehat{AMA'} = 60^\circ$$

Giả sử: $AB = a \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

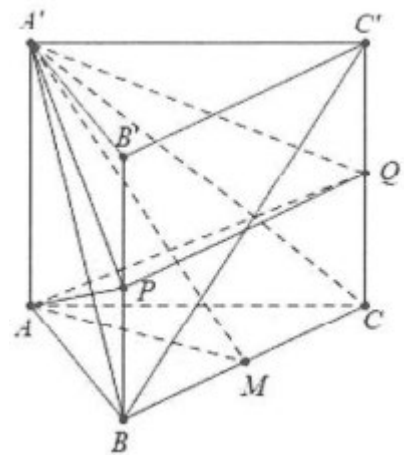
$$\blacksquare \tan \widehat{AMA'} = \frac{AA'}{AM} \Rightarrow AA' = AM \tan \widehat{AMA'} = \frac{3a}{2}$$

$$\Rightarrow A'M = \sqrt{AA'^2 + AM^2} = a\sqrt{3}$$

$$\blacksquare S_{A'BC} = \frac{1}{2} A'M.BC = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow a = 2$$

$$\blacksquare S_{ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{ABC} = 3.\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

▪ $V_{A'APQ} = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \sqrt{3}$. **Chọn B.**



Câu 27: Ta có $AC' \cap (BCC'B') = \{C'\}$ và $AB \perp (BCC'B')$

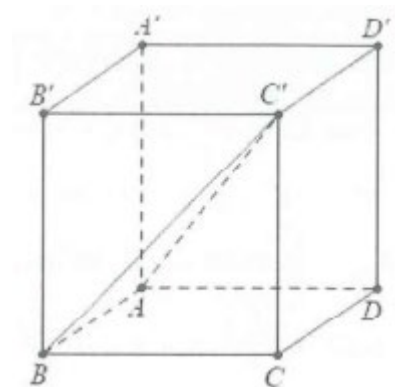
$$\Rightarrow \widehat{(AC', (BCC'B'))} = \widehat{(AC', BC')} = \widehat{AC'B} = \alpha$$

$$\blacksquare \tan \widehat{AC'B} = \frac{AB}{BC'} \Rightarrow BC' = \frac{AB}{\tan \widehat{AC'B}} = a \cot \alpha$$

- $CC' = \sqrt{BC'^2 - BC^2} = a\sqrt{\cot^2 \alpha - 1}$

- $S_{ABCD} = a^2 \Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = CC'.S_{ABCD} = a^3 \sqrt{\cot^2 \alpha - 1}$

Chọn C.

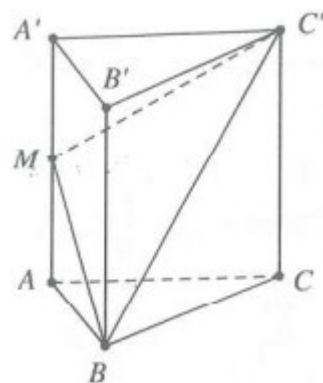


Câu 28: $S_{ABM} = \frac{1}{4}S_{ABB'A'} \Rightarrow S_{A'B'BM} = \frac{3}{4}S_{ABB'A'} = \frac{3}{2}S_{A'B'B}$

$$\Rightarrow V_{C'.A'B'BM} = \frac{3}{2}V_{C'.A'B'B} = \frac{1}{2}V_{ABC.A'B'C'}$$

$$\Rightarrow V_{B.ACC.M} = \frac{1}{2}V_{ABC.A'B'C'} \Rightarrow \frac{V_{C'.A'B'BM}}{V_{B.ACC.M}} = 1$$

Chọn C

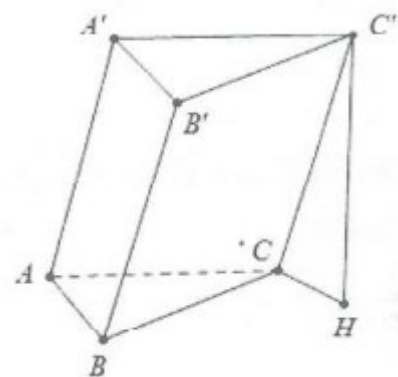


Câu 29: Kẻ $C'H \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{(CC';(ABC))} = \widehat{C'CH} = 60^\circ$

$$\Rightarrow \sin 60^\circ = \frac{C'H}{CC'} \Rightarrow C'H = \frac{b\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow V_{A'BCC'B'} = \frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{2}{3}C'H.S_{ABC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{b\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2b}{4}$$

Chọn B.



Câu 30: Ta có (DIC') cắt AB tại P như hình vẽ

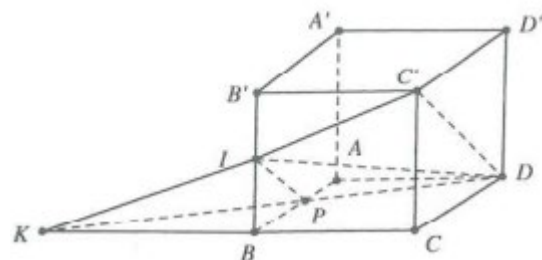
Đặt $V_{ABCD.A'B'C'D'} = V$.

Ta có $V_{C'DAPIB'} = V_{C'APIB'} + V_{C'APD}$

$$= \frac{3}{4}V_{C'ABB'} + \frac{1}{2}V_{C'ABD} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6}V + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}V = \frac{5}{24}V$$

$$\Rightarrow V_{IBP.C'D} = \frac{1}{2}V - \frac{5}{24}V = \frac{7}{24}V$$

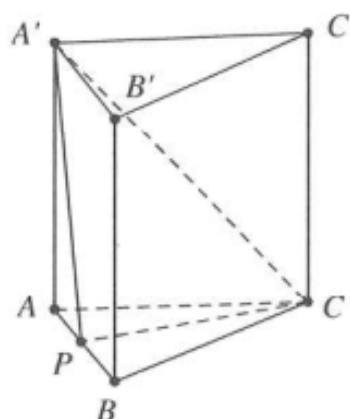
$$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{7}{24}V}{V - \frac{7}{24}V} = \frac{7}{17}. \text{ Chọn B}$$



Câu 31: Kẻ $CP \perp AB \Rightarrow \widehat{(A'C;(ABC))} = \widehat{A'CP} = 30^\circ$

$$\Rightarrow \sin 30^\circ = \frac{CP}{A'C} \Rightarrow A'C = 2CP.$$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC.BC \cos 120^\circ \Rightarrow AB = a\sqrt{7}.$$



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} CP.AB = \frac{1}{2} AC.BC.\sin 120^\circ$$

$$\Rightarrow CP = \frac{a\sqrt{21}}{7} \Rightarrow A'C = \frac{2a\sqrt{21}}{7}$$

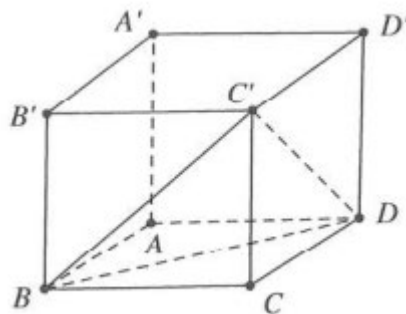
$$\Rightarrow A'A = \sqrt{A'C^2 - AC^2} = a\sqrt{\frac{5}{7}}$$

$$\Rightarrow V = A'A.S_{ABC} = a\sqrt{\frac{5}{7}} \cdot \frac{1}{2} AC.BC.\sin 120^\circ = \frac{a^3\sqrt{105}}{14}$$

Chọn B.

Câu 32: Ta có $V_{C'CBD} = \frac{1}{6}V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{1}{6}V$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{6}V}{V - \frac{1}{6}V} = \frac{1}{5}. \text{ Chọn B.}$$



Câu 33: $V_{I.ABC} = \frac{1}{2}V_{A'.ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{6}V_{ABC.A'B'C'}$

Chọn D

