

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỰC TRỊ CỦA HÀM TRỊ TUYỆT ĐỐI

Các bài toán về hàm trị tuyệt đối đã bắt đầu xuất hiện trong đề tham khảo năm 2018 của bộ và sau đó cũng đã trở thành trào lưu trên các diễn đàn, các nhóm, đồng thời xuất hiện nhiều hơn trong các đề thi thử với các dạng và mức độ khác nhau. Một số có thể chưa phù hợp với kì thi THPT Quốc Gia, nhưng tuy nhiên trong chuyên đề lần này tôi và các bạn sẽ cùng nhau bắt tay giải quyết một số dạng toán tiêu biểu đó. Cũng nói thêm để hoàn thành chuyên đề này tôi rất cảm ơn bên Vted đã có những đề thi vô cùng hay, các bài toán ở đây đề bài hầu hết được lấy từ Vted và lời giải được thực hiện bởi những người bạn của tôi – Ngô Nguyên Quỳnh và Nguyễn Hải Linh. Mặt khác cũng vì công việc và thời gian không có nhiều nên tôi không thể đưa thêm nhiều dạng hay khác xuất hiện trong một số đề thi của các thầy trên mạng được, mong bạn đọc bỏ qua. Mọi ý kiến đóng góp xin gửi về địa chỉ sau:

NGUYỄN MINH TUẤN – K14 ĐẠI HỌC FPT

Email: tuangenk@gmail.com

Nào bây giờ chúng ta cùng bắt đầu nhé!

I. MỞ ĐẦU.

Bài toán mở đầu

Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng 3. Số phần tử của S là?

A. 1

B. 2

C. 0

D. 6

Câu 36 – Đề tham khảo THPT Quốc Gia môn toán 2018

Lời giải

Ta có $|x^3 - 3x + m| \leq 3, \forall x \in [0; 2] \Leftrightarrow -3 \leq x^3 - 3x + m \leq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -x^3 + 3x + 3 \\ m \geq -x^3 + 3x - 3 \end{cases}, \forall x \in [0; 2]$

Xét hàm số $f(x) = -x^3 + 3x$ trên đoạn $[0; 2]$ thì $f'(x) = 3x^2 - 3$ nên $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

So sánh các số $f(0), f(1), f(2)$ ta có $\min_{[0; 2]} f(x) = -2, \max_{[0; 2]} f(x) = 2$ ta có :

$$\min_{[0; 2]} \{-x^3 + 3x - 3\} \leq m \leq \max_{[0; 2]} \{-x^3 + 3x - 3\} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 1$$

Đây chỉ là các điều kiện cần của m , ta thử lại như sau

- Với $m = 1$ thì với $x = 2$ ta sẽ có $y = |f(2) + 1| = 3$
- Với $m = -1$ thì với $x = 1$ ta sẽ có $y = |f(1) - 1| = 3$
- Với $m = 0$ thì với $y = |f(x)| \leq 2$ nên không thể có giá trị lớn nhất là 3.

Vậy $S = \{-1; 1\}$ nên có tất cả 2 giá trị thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Nhận xét: Đây là một câu trong đề tham khảo thi THPT Quốc Gia 2018 của Bộ , nhìn chung thì đây là một câu vận dụng cao cần phải có kiến thức về bất đẳng thức trị tuyệt đối cũng như những phép biến đổi có liên quan.

Bất đẳng thức trị tuyệt đối.

Cho 2 số thực a, b khi đó ta có $|a| + |b| \geq |a + b| \geq |a| - |b|$

Dấu “=” thứ nhất khi a, b cùng dấu, dấu “=” thứ 2 khi a, b trái dấu.

I. CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN TỚI ĐIỂM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A. CÁC TÍNH CHẤT LIÊN QUAN TỚI CỰC TRỊ CỦA HÀM TRỊ TUYỆT ĐỐI

Trước khi đi vào các bài toán ta cần nhớ những kiến thức sau.

- Số điểm cực trị của hàm số $|f(x)|$ bằng tổng số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ và số lần đổi dấu của hàm số $f(x)$.
- Số điểm cực trị của hàm số $f(|mx + n|)$ bằng $2a + 1$, trong đó a là số điểm cực trị lớn hơn $-\frac{n}{m}$ của hàm số $f(x)$
- Số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ bằng $2a + 1$, trong đó a là số điểm cực trị dương của hàm số.
- Cho hàm số có dạng $y = |ax^2 + bx + c| + mx$, tìm điều kiện của tham số m để giá trị cực tiểu của hàm số đạt giá trị lớn nhất, khi đó ta có
$$\begin{cases} \max(y_{ct}) = c \\ m = -b \end{cases}$$

Câu 1: Biết phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ($a \neq 0$) có đúng hai nghiệm thực. Hàm số $y = |ax^3 + bx^2 + cx + d|$ có bao nhiêu điểm cực trị.

- A. 3. B. 5. C. 4. D. 2.

Lời giải

Vì phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ($a \neq 0$) có đúng hai nghiệm thực nên hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị.

Mặt khác $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)^2(x - x_2)$. Do đó phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có một nghiệm đơn và một nghiệm kép.

Vậy số điểm cực trị của hàm số $y = |ax^3 + bx^2 + cx + d|$ bằng $2 + 1 = 3$. Chọn đáp án A.

Câu 2: Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-20; 20)$ để hàm số $y = |x^2 - 2x + m| + 2x + 1$ có ba điểm cực trị.

- A. 17. B. 16. C. 19. D. 18.

Lời giải

Nếu $x^2 - 2x + m \geq 0, \forall x$ thì $y = x^2 - 2x + m + 2x + 1 = x^2 + m + 1$ có đúng một điểm cực trị $x = 0$ (loại).

Nếu $x^2 - 2x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \Delta' = 1 - m > 0 \Leftrightarrow m < 1$.

$$y' = \frac{(2x-2)(x^2-2x+m)}{|x^2-2x+m|} + 2; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2x-2+2=0 \\ x^2-2x+m > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -(2x-2)+2=0 \\ x^2-2x+m < 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=0 \\ x^2-2x+m > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ x^2-2x+m < 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=0 \\ m > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ m < 0 \end{cases} \end{cases}$$

+) Với $0 < m < 1$ rõ ràng không có số nguyên nào

+) Với $m < 0$ ta có bảng xét dấu của y' như hình vẽ dưới đây

Lúc này hàm số có 3 điểm cực trị. Vậy $m \in \{-19, \dots, 1\}$. Chọn đáp án C

Câu 3: Biết phương trình $ax^4 + bx^2 + c = 0$ ($a \neq 0$) bốn nghiệm thực. Hàm số $y = |ax^4 + bx^2 + c|$ có bao nhiêu điểm cực trị.

A. 7.

B. 5.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

Vì phương trình $ax^4 + bx^2 + c = 0$ ($a \neq 0$) bốn nghiệm thực nên hàm số

$$\begin{cases} \Delta = b^2 - 4ac > 0 \\ S = \frac{-b}{a} > 0 \\ P = \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \Rightarrow ab < 0 \text{ do đó hàm số } ax^4 + bx^2 + c = 0 \text{ có 3 điểm cực trị}$$

Mặt khác $ax^4 + bx^2 + cx + d = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$ nên phương trình

$ax^4 + bx^2 + c = 0$ có 4 nghiệm đơn. Vậy hàm số $y = |ax^4 + bx^2 + c|$ có $4 + 3 = 7$ cực trị.

Câu 4: Cho hàm số $y = |x^4 - 2(m-1)x^2 + 2m-3|$. Có bao nhiêu số nguyên không âm m để hàm số đã cho có ba điểm cực trị.

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = x^4 - 2(m-1)x^2 + 2m-3$

$m-1=0 \Leftrightarrow m=1 \Rightarrow f(x) = x^4 - 1$ có 1 điểm cực trị $x=0$ và phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt. do đó hàm số $y = |f(x)|$ có 3 điểm cực trị (thỏa mãn)

$m-1 < 0 \Rightarrow m=0 \Rightarrow f(x) = x^4 + 2x^2 - 3$ có 1 điểm cực trị $x=0$ và phương trình $f(x)=0$ có 2 nghiệm đơn phân biệt. do đó hàm số $y = |f(x)|$ có 3 điểm cực trị (thỏa mãn)

Ta có $m-1 > 0 \Rightarrow m > 1$ khi đó $f(x)$ có ba điểm cực trị. Vậy yêu cầu bài toán lúc này tương đương với $f(x)=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép, tức

$$\Delta' = (m-1)^2 - (2m-3) \leq 0 \Leftrightarrow (m-2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow m=2. \text{ Vậy } m \in \{0, 1, 2\}. \text{ Chọn đáp án A}$$

Câu 5: Cho hàm số $y = |x^4 - 2(m-1)x^2 + 2m - 3|$. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho có đúng 5 điểm cực trị là

- A. $\left(1; \frac{3}{2}\right)$. B. $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right) \setminus \{2\}$. C. $(1; +\infty) \setminus \{2\}$. D. $\left(1; \frac{3}{2}\right]$.

Lời giải

$$\text{Xét } f(x) = x^4 - 2(m-1)x^2 + 2m - 3 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 2m + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = 2m - 3 \end{cases}$$

TH1: Nếu $2m - 3 \leq 0 \Rightarrow$ Do vậy $f(x)$ có 2 điểm đổi dấu $x = -1; x = 1$. Hàm số $y = |f(x)|$ có 5 điểm cực trị $y = f(x)$ có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow ab < 0 \Leftrightarrow -2(m-1) < 0 \Leftrightarrow m > 1$

Vậy trường hợp này có $1 < m \leq \frac{3}{2}$

TH2: Nếu $0 < 2m - 3 \neq 1 \Leftrightarrow \frac{3}{2} < m \neq 2$. Khi đó $f(x)$ có bốn điểm đổi dấu

$x = \pm 1; x = \pm \sqrt{2m-3}$ do đó số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ bằng 3 và hàm số $y = |f(x)|$ có 7 cực trị(loại).

TH3: nếu $2m - 3 = 1 \Leftrightarrow m = 2 \Rightarrow f(x) = (x^2 - 1)^2$ khi đó $y = |f(x)| = (x^2 - 1)^2$ có 3 điểm cực trị (loại).

Chọn đáp án D

Câu 6: Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-20; 20)$ để hàm số $y = |x^4 - (m+1)x^2 + m|$ có 7 điểm cực trị.

- A. 18. B. 20. C. 19. D. 21.

Lời giải

Xét $x^4 - (m+1)x^2 + m \Leftrightarrow x^2 = 1; x^2 = m(1)$ vậy để hàm số $y = |x^4 - (m+1)x^2 + m|$ có 7 điểm

cực trị khi và chỉ khi phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \neq 1 \end{cases} \Rightarrow m \in \{2, \dots, 19\}$. có

18 số nguyên thỏa mãn. Chọn đáp án A

Câu 7: Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-20; 20)$ để hàm số $y = (x^2 + 2)|x^2 - m|$ có đúng 5 điểm cực trị.

- A. 1. B. 17. C. 2. D. 16.

Lời giải

$$\text{Có } y = (x^2 + 2)|x^2 - m| = |(x^2 + 2)(x^2 - m)| = |x^4 - (m-2)x^2 - 2m|.$$

Nếu $m \leq 0 \Rightarrow x^4 - (m-2)x^2 - 2m \geq 0, \forall x$ nên hàm số đã cho có tối đa ba điểm cực trị (loại).

Nếu $m > 0 \Rightarrow x^4 - (m-2)x^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow x^2 = m \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{m}$. Vậy điều kiện là hàm số

$y = x^4 - (m-2)x^2 - 2m$ có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow -(m-2) < 0 \Leftrightarrow m > 2 \Rightarrow m \in \{3, \dots, 19\}$. Có 17 số nguyên thỏa mãn.

Chọn đáp án B.

Câu 8: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = |x^3 + (2m-1)x^2 + (2m^2 - 2m - 9)x - 2m^2 + 9|$ có 5 điểm cực trị.

- A. 7. B. 5. C. 6. D. 4.

Lời giải

$$ycbt \Leftrightarrow x^3 + (2m-1)x^2 + (2m^2 - 2m - 9)x - 2m^2 + 9$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 2mx + 2m^2 - 9) \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2 + 2mx + 2m^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Có 3 nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - (2m^2 - 9) > 0 \\ 1 + 2m + 2m^2 - 9 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < m < 3 \\ m \neq \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \Rightarrow m \in \{-2, -1, 0, 1, 2\} \end{cases}$$

Câu 9: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = |x|^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 4)|x| + 1$ có đúng 3 điểm cực trị.

- A. 3. B. 5. C. 6. D. 4.

Lời giải

Ta có $ycbt \Leftrightarrow y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 4)x + 1$ có đúng một điểm cực trị dương

$$\Leftrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = m - 2; x = m + 2 \text{ có đúng một nghiệm dương}$$

$$\Leftrightarrow m - 2 \leq 0 < m + 2 \Leftrightarrow -2 < m \leq 2 \Rightarrow m \in \{-1, 0, 1, 2\}. \text{ Chọn đáp án D.}$$

Câu 10: Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-10; 10)$ để hàm số $y = |x|^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 4)|x| + 1$ có đúng 5 điểm cực trị.

- A. 3. B. 6. C. 8. D. 7.

Lời giải

Ta có $ycbt \Leftrightarrow y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 4)x + 1$ có hai điểm cực trị dương

$$\Leftrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = m - 2; x = m + 2 \text{ có hai nghiệm dương}$$

$$\Leftrightarrow m - 2 > 0 \Rightarrow m \in \{3, \dots, 9\}. \text{ Chọn đáp án D.}$$

Câu 11: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = |3x^5 - 15x^3 - 60x + m|$ có 5 điểm cực trị.

- A. 289. B. 287. C. 286. D. 288.

Lời giải

$$\text{Xét } y = 3x^5 - 15x^3 - 60x \text{ có } y' = 0 \Leftrightarrow 15x^4 - 45x^2 - 60 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

$$\text{Vậy hàm số } y = 3x^5 - 15x^3 - 60x \text{ có đúng 2 điểm cực trị } x = 2; x = -2$$

Bảng biến thiên

Vậy để hàm số có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow 3x^5 - 15x^3 - 60x + m = 0 \Leftrightarrow -m = 3x^5 - 15x^3 - 60x$ có tổng số nghiệm đơn và bội lẻ bằng 3, tức $-144 < -m < 144 \Leftrightarrow -144 < m < 144 \Rightarrow m \in \{-143, \dots, 143\}$.

Có 287 số nguyên thỏa mãn. Chọn đáp án B

Câu 12: Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-2019; 2019)$ để hàm số $y = |x^2 - 4x + m| + 6x + 1$ có ba điểm cực trị.

- A. 2014. B. 2016. C. 2013. D. 2015.

Lời giải

Nếu $x^2 - 4x + m \geq 0, \forall x \Rightarrow y = x^2 - 4x + m + 6x + 1 = x^2 + 2x + m + 1$ có đúng 1 điểm cực trị $x = -1$ (loại).

Nếu $x^2 - 4x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \Delta' = 4 - m > 0 \Leftrightarrow m < 4$

$$\text{Khi đó } y' = \frac{(2x-4)(x^2-4x+m)}{|x^2-4x+m|} + 6; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4+6=0 \\ x^2-4x+m>0 \\ -(2x-4)+6=0 \\ x^2-4x+m<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ m>-5 \\ x=5 \\ m<-5 \end{cases}$$

Với $-5 < m < 4$ ta có bằng xét dấu của y' như sau

Hàm số có đúng 1 cực trị $x = -1$ (loại).

Với $m < -5$ ta có bằng xét dấu của y' như sau

Hàm số có 3 điểm cực trị $x = x_1; x = 5; x = x_2$

Vậy $m \in \{-2018, \dots, -6\}$. Có 2013 số nguyên thỏa mãn. Chọn đáp án C

Câu 13: Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-20; 20)$ để hàm số $y = x^2 - 2m|x - m + 1| + 1$ có ba điểm cực trị.

- A. 17. B. 19. C. 18. D. 20.

Lời giải

$$\text{Ta có } y = \begin{cases} x^2 - 2m(x - m + 1)(x - m + 1 \geq 0) \\ x^2 + 2m(x - m + 1)(x - m + 1 \leq 0) \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} 2x - 2m(x - m + 1 > 0) \\ 2x + 2m(x - m + 1 < 0) \end{cases}$$

Vậy hàm số không có đạo hàm tại điểm $x = m - 1$ và

$$y' = \begin{cases} 2x - 2m = 0 \\ x - m + 1 > 0 \\ 2x + 2m = 0 \\ x - m + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ 1 < 0 \\ x = -m \\ -2m + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = -m \left(m > \frac{1}{2} \right) \end{cases}$$

Vậy để hàm số có 3 điểm cực trị trước tiên phải có $m > \frac{1}{2}$ và lúc này bằng xét dấu của y'

như sau

Điều này chứng tỏ với $m > \frac{1}{2}$ là các giá trị cần tìm, các số nguyên là $m \in \{1, \dots, 19\}$. Có tất cả 19 số nguyên thỏa mãn.

Câu 14: Có tất cả bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2017; 2017]$ để hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m|$ có 3 điểm cực trị?

- A. 4032. B. 4034. C. 4030. D. 4028.

Lời giải

Ta có $y = x^3 - 3x^2 + m$ có $y' = 3x^2 - 6x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow y(0) = m, y(2) = m - 4$

Yêu cầu đề bài tương đương với $y(0).y(2) \geq 0 \Leftrightarrow m(m-4) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 4 \\ m \leq 0 \end{cases}$

Do đó $m \in \{-2017, \dots, 2017\}$ có $2018 + 2014 = 4032$ số nguyên thỏa mãn.

Chọn đáp án A

Câu 15: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m|$ có 5 điểm cực trị.

- A. $-4 < m < 0$. B. $-4 \leq m \leq 0$. C. $0 < m < 4$. D. $m \geq 4$ hoặc $m \leq 0$.

Lời giải

Ta có $y = x^3 - 3x^2 + m$ có $y' = 3x^2 - 6x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow y(0) = m, y(2) = m - 4$

Yêu cầu đề bài tương đương với $y(0).y(2) \geq 0 \Leftrightarrow m(m-4) < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4$

Chọn đáp án C

Câu 16: Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = |x^4 - mx^2 + m|$ có 7 điểm cực trị.

- A. $(4; +\infty)$. B. $(0; 1)$. C. $(0; 4)$. D. $(1; +\infty)$.

Lời giải

Xét hàm số $y = x^4 - mx^2 + m$ có tối đa 3 điểm cực trị và phương trình $f(x) = 0$ có tối đa 4 nghiệm. Vì vậy hàm số $y = |f(x)|$ có 7 điểm cực trị khi và chỉ khi $f(x) = 0$ có 4 nghiệm

phân biệt và $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 4 > 0 \\ S = m > 0, P = m > 0 \Leftrightarrow m > 4 \\ ab = -m < 0 \end{cases}$

Chọn đáp án A

Câu 17: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ thỏa mãn

$a > 0, d > 2018, a + b + c + d - 2018 < 0$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x) - 2018|$.

- A. 3. B. 5. C. 2. D. 1.

Lời giải

Xét $g(x) = f(x) - 2018$ ta có $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \\ g(0) = f(0) - 2018 = d - 2018 > 0 \\ g(1) = f(1) - 2018 = a + b + c + d - 2018 < 0 \end{cases}$

Do đó đồ thị hàm số $y = g(x)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt và suy ra hàm số $y = g(x)$ có hai điểm cực trị

Do vậy số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = |g(x)|$ là $2 + 3 = 5$

Chọn đáp án B

Câu 18: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 7 điểm cực trị ?

- A. 3. B. 5. C. 6. D. 4

Lời giải

Hàm số $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m$ có ba điểm cực trị là nghiệm của phương trình

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^3 - 12x^2 - 24x = 0 \Rightarrow 12x(x^2 - x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Phương trình $f(x) = 0$ có tối đa 4 nghiệm thực. Do đó hàm số $y = |f(x)|$ có 7 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $f(x) = 0$ có 4 nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 = -m$ có 4 nghiệm thực phân biệt. Lập bảng biến thiên của hàm số $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$ ta có giá trị cần tìm $-5 < -m < 0 \Rightarrow 0 < m < 5 \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; 4\}$ có 4 số nguyên thỏa mãn.

Câu 19: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |x^4 - x^3 - 5x^2 + m|$ có 7 điểm cực trị.

- A. 8. B. 9. C. 3. D. 4

Lời giải

Hàm số $f(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 + m$ có ba điểm cực trị là $x = 0; x = 2; x = -\frac{5}{4}$.

Vậy hàm số $y = |f(x)|$ có 7 điểm cực trị $\Leftrightarrow f(x) = 0$ có bốn nghiệm phân biệt

$$-\frac{875}{256} < -m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < \frac{875}{256}. \text{ Vậy } m \in \{1; 2; 3\}. \text{ Chọn đáp án C.}$$

Câu 20: Cho hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$ có ba điểm cực trị $x = 1; x = 2; x = 3$. Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-10; 10)$ để hàm số $y = f(|x + m|)$ có 7 điểm cực trị.

- A. 8. B. 10. C. 2. D. 19.

Lời giải

Hàm số $y = f(|x + m|)$ có 7 cực trị $\Leftrightarrow f(x + m)$ có 3 điểm cực trị lớn hơn $-m$

$$\text{Các điểm cực trị của hàm số } \Leftrightarrow y = f(x + m) \text{ là } \begin{cases} x + m = 1 \\ x + m = 2 \\ x + m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - m \\ x = 2 - m \\ x = 3 - m \end{cases}$$

$$\text{Vậy ta có điều kiện là } \begin{cases} 1 - m > -m \\ 2 - m > -m \\ 3 - m > -m \end{cases} \Leftrightarrow \forall m \Rightarrow m \in \{-9, \dots, 9\}. \text{ Chọn đáp án D}$$

Câu 21: Cho hàm số $y = |x|^3 - mx + 5$. Gọi a là số điểm cực trị của hàm số đã cho. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. $a = 0$. B. $a \leq 1$. C. $1 < a \leq 3$. D. $a > 3$.

Lời giải

Ta có $y = \begin{cases} x^3 - mx + 5 & (x \geq 0) \\ -x^3 - mx + 5 & (x < 0) \end{cases} \Leftrightarrow y' = \begin{cases} 3x^2 - m & (x > 0) \\ -3x^2 - m & (x < 0) \end{cases}$ và hàm số không có đạo hàm tại điểm $x = 0$

Nếu $m = 0 \Rightarrow y' = \begin{cases} 3x^2 > 0 & (x > 0) \\ -3x^2 < 0 & (x < 0) \end{cases}$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua điểm $x = 0$ nên hàm số

có duy nhất 1 điểm cực trị là $x = 0$

Nếu $m > 0 \Rightarrow y' = \begin{cases} 3x^2 - m & (x > 0) \\ -3x^2 - m & (x < 0) \end{cases} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{m}{3}}$ chỉ đổi dấu khi đi qua

$x = \sqrt{\frac{m}{3}}$ nên có duy nhất 1 điểm cực trị là $x = \sqrt{\frac{m}{3}}$

Nếu $m < 0 \Rightarrow y' = \begin{cases} 3x^2 - m > 0 & (x > 0) \\ -3x^2 - m & (x < 0) \end{cases} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{m}{3}}$

Chỉ đổi dấu khi đi qua $x = -\sqrt{\frac{-m}{3}}$ nên có duy nhất 1 điểm cực trị là $x = -\sqrt{\frac{-m}{3}}$

Vậy với mọi m hàm số có duy nhất 1 điểm cực trị

Chọn đáp án B

Câu 22: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = |x|^3 - (2m+1)x^2 + 3m|x| - 5$ có 5 điểm cực trị.

A.

$$\left(-\infty; \frac{1}{4}\right) \cup (1; +\infty).$$

B.

$$\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right) \cup (1; +\infty).$$

C. $(1; +\infty).$

D. $\left(0; \frac{1}{4}\right) \cup (1; +\infty).$

Lời giải

yêu cầu bài toán tương đương hàm số $y = x^3 - (2m+1)x^2 + 3mx - 5$ có 2 điểm cực trị dương, tức $3x^2 - 2(2m+1)x + 3m = 0$ có 2 nghiệm dương phân biệt, tức

$$\begin{cases} \Delta' = (2m+1)^2 - 9m > 0. \\ S = \frac{2(2m+1)}{3} > 0 \\ P = \frac{3m}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ 0 < m < \frac{1}{4} \end{cases} \text{ chọn đáp án D}$$

Câu 23: Cho hàm số $f(x) = x^3 - (2m-1)x^2 + (2-m)x + 2$. Tìm tập hợp giá trị thực của tham số m để hàm số $y = f(|x|)$ có năm điểm cực trị.

A. $-\frac{5}{4} < m < 2.$

B. $\frac{5}{4} < m < 2.$

C. $\frac{1}{2} < m < 2.$

D. $-2 < m < \frac{5}{4}.$

Lời giải

Ta có $5 = 2a + 1 \Leftrightarrow a = 2$ là số điểm cực trị dương của hàm số $y = f(x)$

$$\text{Ta có } f'(x) = 3x^2 - 2(2m-1)x + 2-m \Rightarrow \begin{cases} \Delta' = (2m-1)^2 - 3(2-m) > 0 \\ S = \frac{2(2m-1)}{3} > 0 \\ P = \frac{2-m}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{4} < m < 2.$$

Chọn đáp án B

Câu 24: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = |x|^3 - (2m+1)x^2 + 3m|x| - 5$ có 3 điểm cực trị.

- A. $(-\infty; 0)$. B. $(1; +\infty)$. C. $(-\infty; 0]$. D. $\left[0; \frac{1}{4}\right)$.

Lời giải

xét $f(x) = x^3 - (2m+1)x^2 + 3mx - 5$ và $f(|x|) = |x|^3 - (2m+1)x^2 + 3m|x| - 5$

ta có $3 = 2a + 1 \Leftrightarrow a = 1$ là số điểm cực trị dương của hàm số $y = f(x)$

vậy yêu cầu tương đương với: $f(x)$ có đúng 1 điểm cực trị dương $\Leftrightarrow f'(x) = 0$ có 2 nghiệm thỏa mãn $x_1 \leq 0 < x_2 \Leftrightarrow m \leq 0$

Câu 25: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$) và $a > 0$.

Biết $f(-1) < 0, f(0) > 0, f(1) < 0$. Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ bằng

- A. 7. B. 6. C. 5. D. 9.

Lời giải

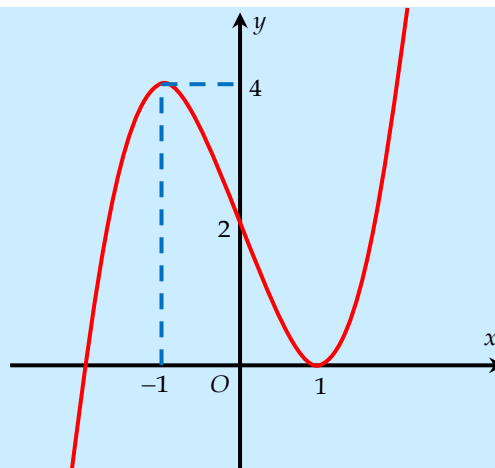
$$\text{Theo giả thiết ta có: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \\ f(-1) < 0 \\ f(0) > 0 \\ f(1) < 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \cdot f(1) < 0 \\ f(0) \cdot f(-1) < 0 \\ f(0) \cdot f(1) < 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot f(1) < 0 \end{cases} \Rightarrow \exists x_1 < -1 < x_2 < 0 < x_3 < 1 < x_4$$

Sao cho $f(x_1) = 0; f(x_2) = 0; f(x_3) = 0; f(x_4) = 0$. Điều đó chứng tỏ rằng phương

trình $f(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt, do đó hàm số $f(x)$ phải có 3 điểm cực trị. Vì vậy hàm số $y = |f(x)|$ có $4 + 3 = 7$ điểm cực trị. Chọn đáp án A

Câu 26: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ ở bên. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = f(|x| + m)$ có 5 điểm cực trị.

- A. $m < -1$.
- B. $m > -1$.
- C. $m > 1$.
- D. $m < 1$.



Lời giải

Hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị $x = -1; x = 1$. hàm số $f(|x| + m)$ luôn có 1 điểm cực trị $x = 0$

Phá trị tuyệt đối có $y = f(|x| + m) = \begin{cases} f(x + m) & (x \geq 0) \\ f(-x + m) & (x \leq 0) \end{cases}$

Hàm số $f(x + m)$ có 2 điểm cực trị là $x + m = -1; x + m = 1 \Leftrightarrow x = -1 - m; x = 1 - m$

Hàm số $f(-x + m)$ có 2 điểm cực trị là $-x + m = -1; -x + m = 1 \Leftrightarrow x = 1 + m; x = m - 1$

Vậy điều kiện là $\begin{cases} -m - 1 > 0 \\ -m + 1 > 0 \\ m - 1 < 0 \\ m + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -1$. Chọn đáp án A

Câu 27: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = |3x^5 - 25x^3 + 60x + m|$ có 7 điểm cực trị.

- A. 42.
- B. 21.
- C. 44.
- D. 22.

Lời giải

Hàm số $f(x) = 3x^5 - 25x^3 + 60x + m$ có 4 điểm cực trị là nghiệm của phương trình

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 15x^4 - 75x^2 + 60 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2; x = \pm 1.$$

Do đó hàm số $y = |f(x)|$ có 7 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $f(x) = 0$ có tổng số

nghiệm đơn và bội lẻ bằng 3. Khảo sát hàm số để có $\begin{cases} -38 < -m < -16 \\ 16 < -m < 38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 < m < 38 \\ -38 < m < -16 \end{cases}$

do đó có $21 + 21 = 42$ số nguyên thỏa mãn. Chọn đáp án A.

Câu 28: Cho hàm số $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$. Có bao nhiêu số nguyên $m > -10$ để hàm số $y = f(|x| + m)$ có 7 điểm cực trị.

- A. 9.
- B. 11.
- C. 10.
- D. 8.

Lời giải

có $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x; f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x(x^2 - x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$

do đó hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị $x=0; x=-1; x=2$

hàm số $f(|x|+m)$ luôn có 1 điểm cực trị $x=0$

phá trị tuyệt đối có $y = f(|x|+m) = \begin{cases} f(x+m) & (x \geq 0) \\ f(-x+m) & (x \leq 0) \end{cases}$.

Hàm số $f(x+m)$ có 3 điểm cực trị là

$$x+m=-1; x+m=0; x+m=2 \Leftrightarrow x=-m-1; x=-m; x=2-m.$$

Hàm số $f(-x+m)$ có 3 điểm cực trị là

$$-x+m=-1; -x+m=0; -x+m=2 \Leftrightarrow x=m+1; x=m; x=m-2.$$

Do đó hàm số $f(|x|+m)$ có tối đa 7 điểm cực trị là

$$x=0; x=m+1; x=m; x=m-2; x=-m-1; x=-m; x=2-m.$$

$$\text{Điều kiện bài toán tương đương với } \begin{cases} -m-1 > 0 \\ -m > 0 \\ -m+2 > 0 \\ m+1 < 0 \\ m < 0 \\ m-2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -1 \Rightarrow m \in \{-9, -8, \dots, -2\}$$

Có tất cả 8 số nguyên thỏa mãn. Chọn đáp án D

Câu 29: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = |x^4 - 4x^2 + m|$ có 7 điểm cực trị.

A. 5.

B. 15.

C. 3.

D. 13.

Lời giải

Hàm số $f(x) = x^4 - 4x^2 + m$ có 3 điểm cực trị. Vậy hàm số $|f(x)|$ có 7 cực trị khi và chỉ khi phương trình $f(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt, tức

$$\begin{cases} \Delta' = 4 - m > 0 \\ S = 4 > 0, P = m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 4 \Rightarrow m \in \{1; 2; 3\} \text{ có 3 số nguyên thỏa mãn. Chọn đáp án D}$$

Câu 30: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+1)(x^2+2mx+5)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m > -10$ để hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

A. 7.

B. 9.

C. 6.

D. 8.

Lời giải

Yêu cầu bài toán tương đương với $f(x)$ có đúng 2 điểm cực trị dương, tức

$x^2 + 2mx + 5 = 0$ có 2 nghiệm dương phân biệt, tức

$$\begin{cases} \Delta' = m^2 - 5 > 0 \\ S = -2m > 0, P = 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -\sqrt{5} \Rightarrow m \in \{-9, -8, \dots, -3\} \text{ có tất cả 7 số nguyên thỏa mãn.}$$

Chọn đáp án A

Câu 31: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x+m^2-3m-4)^3(x+3)^5, \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = f(|x|)$ có 3 điểm cực trị.

- A. 3. B. 6. C. 4 D. 5.

Lời giải

Yêu cầu bài toán tương đương $f(x)$ có một điểm cực trị dương, tức $x^2 + m^2 - 3m - 4 = 0$ có nghiệm dương, tức $-m^2 + 3m + 4 > 0 \Leftrightarrow -1 < m < 4 \Rightarrow m \in \{0, 1, 2, 3\}$. Chọn đáp án C.

Câu 32: Cho hàm số $f(x) = (m^{2018} + 1)x^4 - (2m^{2018} + 2m^2 + 3)x^2 + m^{2018} + 2020$. Hàm số $y = |f(x) - 2019|$ có bao nhiêu điểm cực trị.

- A. 7. B. 3. C. 5. D. 6.

Lời giải

Vì $f(x)$ là hàm số trùng phương có $ab = -(m^8 + 1)(2m^{2018} + 2m^2 + 3) < 0, \forall m$ nên hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị và hàm số $f(x) - 2019$ cũng có 3 điểm cực trị.

$$\begin{aligned} f(x) - 2019 = 0 &\Leftrightarrow (m^{2018} + 1)x^4 - (2m^{2018} + 2m^2 + 3)x^2 + m^{2018} + 2020 = 2019 \\ &\Leftrightarrow (m^{2018} + 1)x^4 - (2m^{2018} + 2m^2 + 3)x^2 + m^{2018} + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Phương trình này luôn có 4 nghiệm thực phân biệt vì } \begin{cases} \Delta = (2m^{2018} + 2m^2 + 3)^2 - 4(m^{2018} + 1)^2 > 0 \\ S = \frac{2m^{2018} + 2m^2 + 3}{m^{2018} + 1} > 0 \\ P = 1 > 0 \end{cases}$$

Do đó $f(x)$ có 4 nghiệm đối dấu. vậy số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = |f(x) - 2019|$ bằng $3 + 4 = 7$ chọn đáp án A

Câu 33: Cho hàm số $f(x) = x^3 - (2m+1)x^2 + (m+2)x + 1$. Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-5; 5]$ để hàm số $y = f(|x|)$ có đúng ba điểm cực trị.

- A. 4. B. 6. C. 5. D. 3.

Lời giải

Hàm số $y = f(|x|)$ có đúng 3 điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $y = f(x)$ có đúng một điểm cực trị dương. Điều này tương đương với $f'(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 3x^2 - 2(2m+1)x + m+2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$ thỏa mãn

$$x_1 \leq 0 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3.g(0) < 0 \\ g(0) = 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(m+2) < 0 \\ m+2 = 0 \\ \frac{2(2m+1)}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -2$$

Vậy $m \in \{-5, -4, -3\}$ có 3 số nguyên thỏa mãn. Chọn đáp án D

Câu 34: Cho hàm số $f(x) = x^3 - (2m+1)x^2 + (m+2)x + 1$. Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-5; 5]$ để hàm số $y = f(|x|)$ có năm điểm cực trị.

- A. 4. B. 6. C. 5. D. 3.

Lời giải

Hàm số $y = f(|x|)$ có đúng 5 điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị dương. Điều này tương đương với $f'(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 3x^2 - 2(2m+1)x + m+2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$ thỏa mãn

$$0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3.g(0) > 0 \\ \Delta' > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(m+2) > 0 \\ (2m+1)^2 - 3(m+2) > 0 \\ \frac{2(2m+1)}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$$

Vậy $m \in \{2, 3, 4, 5\}$ có 4 số nguyên thỏa mãn. Chọn đáp án A

Câu 35: Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-20; 20)$ để hàm số $y = x^2 - 2m|x - m + 6| + 1$ có ba điểm cực trị.

- A. 17. B. 16. C. 18. D. 15.

Lời giải

$$\text{Ta có } y = \begin{cases} x^2 - 2m(x - m + 6)(x - m + 6 \geq 0) \\ x^2 + 2m(x - m + 6)(x - m + 6 \leq 0) \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} 2x - 2m(x - m + 6 > 0) \\ 2x + 2m(x - m + 6 < 0) \end{cases}$$

Vậy hàm số không có đạo hàm tại điểm $x = m - 6$ và

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2m = 0 \\ x - m + 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = -m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = -m(m > 3) \end{cases}$$

Vậy để hàm số có 3 điểm cực trị trước tiên ta phải có $m > 3$ và lúc này bảng xét dấu của y' như sau: Điều này chứng tỏ với $m > 3$ là giá trị cần tìm, các số nguyên là $m \in \{4, \dots, 19\}$ có tất cả 16 số nguyên thỏa mãn.

Câu 36: Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = e^{|x^3 - 3x^2 + m|}$ có 5 điểm cực trị.

- A. $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$. B. $(0; 2)$. C. $(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$. D. $(0; 4)$.

Lời giải

Số điểm cực trị của hàm số $e^{|f(x)|}$ bằng số điểm cực trị của hàm số $|f(x)|$.

Do đó yêu cầu bài toán tương đương với $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + m = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m(m-4) < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4$. Chọn đáp án D.

Câu 37: Có bao nhiêu số nguyên $m < 10$ để hàm số $y = |x^3 - mx + 1|$ có 5 điểm cực trị.

A. 9.

B. 7.

C. 11.

D. 8.

Lời giải

yêu cầu bài toán tương đương hàm số $f(x) = x^3 - mx + 1$ có hai điểm cực trị và phương trình $f(x) = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt ta có

$$f'(x) = 3x^2 - m; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{m}{3}} (m > 0). \text{ và}$$

$$f\left(\sqrt{\frac{m}{3}}\right) = \frac{9 - 2\sqrt{3m^3}}{9}; f\left(-\sqrt{\frac{m}{3}}\right) = \frac{9 + 2\sqrt{3m^3}}{9}$$

khi đó điều kiện để có 3 nghiệm phân biệt là $f\left(\sqrt{\frac{m}{3}}\right) \cdot f\left(-\sqrt{\frac{m}{3}}\right) < 0 \Leftrightarrow 81 - 12m^3 < 0 \Leftrightarrow m > \sqrt[3]{4}$

chọn đáp án D. chú ý các em có thể đưa về xét hàm số $m = x^2 + \frac{1}{x}$. cho kết quả tương tự

Câu 38: Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-10; 10]$ để hàm số

$y = |mx^3 - 3mx^2 + (3m - 2)x + 2 - m|$ có 5 điểm cực trị.

A. 7.

B. 10.

C. 9.

D. 11.

Lời giải

Yêu cầu đề bài tương đương phương trình

$mx^3 - 3mx^2 + (3m - 2)x + 2 - m = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(mx^2 - 2mx + m - 2) = 0$ có ba nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - m(m - 2) > 0 \Leftrightarrow m > 0 \Rightarrow m \in \{1, 2, \dots, 10\} \text{ có tất cả 10 giá trị} \\ m - 2m + m - 2 \neq 0 \end{cases}$$

Chọn đáp án B

Câu 39: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^3 - 2x^2)(x^3 - 2x)$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = |f(1 - 2018x)|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị.

A. 9.

B. 2022.

C. 11.

D. 2018.

Lời giải

Có $f'(x) = x^3(x - 2)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$. Do đó hàm số $f(x)$ có 4 điểm cực trị là

$x = 0; x = 2; x = \pm\sqrt{2}$. Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ suy ra $f(x) = 0$ có tối đa 5 nghiệm phân biệt. Do đó hàm số $y = |f(x)|$ có tối đa $4 + 5 = 9$ điểm cực trị.

Mặt khác số điểm cực trị của hàm số $y = |f(1 - 2018x)|$ bằng số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$. Do đó hàm số $y = |f(1 - 2018x)|$ có tối đa 9 điểm cực trị. Chọn đáp án A.

II. CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN TỚI MIN MAX CỦA HÀM TRỊ TUYỆT ĐỐI

A. CÁC TÍNH CHẤT LIÊN QUAN TỚI CỰC TRỊ CỦA HÀM TRỊ TUYỆT ĐỐI

Bất đẳng thức trị tuyệt đối.

Cho 2 số thực a, b khi đó ta có $|a| + |b| \geq |a + b| \geq |a| - |b|$

Dấu “=” thứ nhất khi a, b cùng dấu, dấu “=” thứ 2 khi a, b trái dấu.

Tính chất hàm trị tuyệt đối $\max\{|a|, |b|\} = \frac{|a-b| + |a+b|}{2}$

Phương pháp chung

- Bước 1: Xét hàm số $y = f(x)$, trên $[a; b]$.

Tính đạo hàm: $y' = f'(x)$.

Giải phương trình $f'(x) = 0$ và tìm các nghiệm a_i thuộc $[a; b]$.

- Bước 2: Giải phương trình $f(x) = 0$ và tìm các nghiệm b_j thuộc đoạn $[a; b]$.
- Bước 3: Tính các giá trị: $|f(a)|; |f(b)|; |f(a_i)|; |f(b_j)|$. So sánh và kết luận.

Câu 1: Có bao nhiêu số thực m để hàm số $y = |3x^2 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-3; 2]$ bằng 150?

A. 4

B. 0

C. 2

D. 6

Lời giải

Xét $u = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m$ trên đoạn $[-3; 2]$ ta có:

$$u' = 0 \Leftrightarrow 12x^3 - 12x^2 - 24x = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = -1; x = 2.$$

$$\text{Khi đó} \begin{cases} A = \max_{[-3; 2]} u(x) = \max\{u(-3), u(-1), u(0), u(2)\} = u(-3) = m + 243 \\ a = \min_{[-3; 2]} u(x) = \min\{u(-3), u(-1), u(0), u(2)\} = u(2) = m - 32 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \max_{[-3; 2]} y = \max\{|m + 243|, |m - 32|\} = 150 \Leftrightarrow \begin{cases} |m + 243| = 150 \\ |m + 243| \geq |m - 32| \\ |m - 32| = 150 \\ |m - 32| \geq |m + 243| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -140 \\ m = -93 \end{cases}$$

Câu 2: Cho hàm số $y = |x^2 + x + m|$. Tổng tất cả các giá trị thực của tham số sao cho $\min_{[-2; 2]} y = 2$ bằng?

A. $-\frac{31}{4}$

B. -8

C. $-\frac{23}{4}$

D. $\frac{9}{4}$

Lời giải

Xét hàm số $u = x^2 + x + m$ trên đoạn $[-2; 2]$ ta có $u' = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

Do đó $A = \max_{[-2;2]} u = \max \left\{ u(-2), u\left(-\frac{1}{2}\right), u(2) \right\} = \max \left\{ m+2; m-\frac{1}{4}; m+6 \right\} = m+6$ và

$$a = \min_{[-2;2]} u = \min \left\{ u(-2), u\left(-\frac{1}{2}\right), u(2) \right\} = \min \left\{ m+2; m-\frac{1}{4}; m+6 \right\} = m-\frac{1}{4}.$$

Nếu $a \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{4} \Rightarrow \min_{[-2;2]} y = m - \frac{1}{4} = 2 \Leftrightarrow m = \frac{9}{4} (t/m)$.

Nếu $A \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -6 \Rightarrow \min_{[-2;2]} y = -(m-6) = 2 \Leftrightarrow m = -8 (t/m)$

Nếu $A.a < 0 \Leftrightarrow -6 < m < \frac{1}{4} \Rightarrow \min_{[-2;2]} y = 0 (l)$.

Vậy tổng các giá trị thực của tham số là $\frac{9}{4} - 8 = -\frac{23}{4}$.

Câu 3: Gọi α, β lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ trên đoạn $[-3;2]$. Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-2019; 2019)$ để $2\beta \geq \alpha$.

A. 3209

B. 3215

C. 3211

D. 3213

Lời giải

Xét $u = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m$ trên đoạn $[-3;2]$ ta có:

$$u' = 12x^3 - 12x^2 - 24x; u' = 0 \Leftrightarrow 12x^3 - 12x^2 - 24x = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = -1; x = 2.$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} A = \max_{[-3;2]} u(x) = \max \{ u(-3), u(-1), u(0), u(2) \} = u(-3) = m + 243 \\ a = \min_{[-3;2]} u(x) = \min \{ u(-3), u(-1), u(0), u(2) \} = u(2) = m - 32 \end{cases}$$

Nếu $a \geq 0 \Leftrightarrow m - 32 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 32 \Leftrightarrow \alpha = m + 243; \beta = m - 32$ khi đó giả thiết tương đương

$$2(m - 32) \geq m + 243 \Leftrightarrow m \geq 307$$

Nếu $A \leq 0 \Leftrightarrow m + 243 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -243 \Leftrightarrow \alpha = -(m - 32); \beta = -(m + 243)$ khi đó giả thiết tương đương $-2(m + 243) \geq -(m - 32) \Leftrightarrow m \leq -518$.

Nếu $-243 < m < 32 \Rightarrow A.a < 0 \Rightarrow \max \{ |m + 243|, |m - 32| \} = \max \{ m + 243, 32 - m \} > 0; \beta = 0$

trường hợp này không thỏa mãn $2\beta \geq \alpha$

Vậy $-2019 < m \leq -518 \vee 307 \leq m \leq 2019 \Rightarrow m \in \{-2018; \dots, -518, 307, \dots, 2018\}$.

Có tất cả 321 số nguyên thỏa mãn.

Câu 4: Cho hàm số $y = \left| \frac{x - m^2 - m}{x + 2} \right|$. Giá trị lớn nhất M của hàm số trên đoạn $[1;2]$ có giá trị nhỏ nhất bằng?

A. $\frac{1}{6}$

B. $\frac{1}{8}$

C. $\frac{1}{5}$

D. $\frac{1}{7}$

Lời giải

Xét hàm số $u = \frac{x-m^2-m}{x+2}$ ta có $u' = \frac{2+m^2+m}{(x+2)^2} > 0, \forall x \in [1;2], \forall m \in \mathbb{R}$.

Do đó $A = \max_{[1;2]} u = u(2) = -\frac{m^2+m-2}{4}; a = \min_{[1;2]} u = u(1) = -\frac{m^2+m-1}{3}$

Vậy $\max_{[1;2]} y = \max \left\{ \left| \frac{m^2+m-2}{4} \right|, \left| \frac{m^2+m-1}{3} \right| \right\}$.

Ta có $7M \geq 4 \left| \frac{m^2+m-2}{4} \right| + 3 \left| \frac{m^2+m-1}{3} \right| = |m^2+m-2| + |m^2+m-1| \geq 1 \Rightarrow M \geq \frac{1}{7}$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \left| \frac{m^2+m-2}{4} \right| = \left| \frac{m^2+m-1}{3} \right| = \frac{1}{7} \Leftrightarrow m = \frac{-7 \pm \sqrt{329}}{14}$.

Câu 5: Cho hàm số $y = \left| \frac{x-m^2-m}{x+2} \right|$. Giá trị lớn nhất M của hàm số trên đoạn $[1;2]$ có giá trị nhỏ nhất bằng?

A. 26

B. 18

C. 28

D. 26

Lời giải

Xét $u = x^3 + x^2 + (m^2 + 1)x + 27$ trên đoạn $[-3;-1]$ ta có $u' = 3x^2 + 2x + m^2 + 1 > 0, \forall x$.

Do đó $A = \max_{[-3;-1]} u = u(-1) = 26 - m^2; a = \min_{[-3;-1]} u = u(-3) = 6 - 3m^2$

Do đó $M = \max_{[-3;-1]} y = \max \left\{ |26 - m^2|, |6 - 3m^2| \right\}$ và $4M \geq 3|26 - m^2| + |6 - 3m^2| \geq 72 \Rightarrow M \geq 18$.

Dấu bằng xảy ra $|26 - m^2| = |6 - 3m^2| = 18 \Leftrightarrow m = \pm 2\sqrt{2}$.

Câu 6: Gọi S là tập hợp giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 3. Số phần tử của S là?

A. 1

B. 2

C. 0

D. 6

Lời giải

Xét $u = x^3 - 3x + m$ có $u' = 3x^2 - 3; u' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [0;2]$. Khi đó

$$A = \max_{[0;2]} u = \max \{u(0), u(1), u(2)\} = \max \{m, m-2, m+2\} = m+2$$

$$a = \min_{[0;2]} u = \min \{u(0), u(1), u(2)\} = \min \{m, m-2, m-2\} = m-2$$

$$\text{Suy ra } \max_{[0;2]} y = \max \{|m+2|, |m-2|\} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} |m+2| = 3 \\ |m+2| \geq |m-2| \\ |m-2| = 3 \\ |m-2| \geq |m+2| \end{cases} \Leftrightarrow m = 1, m = -1.$$

Câu 7: Cho hàm số $f(x) = |x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;2]$. Có bao nhiêu số nguyên $a \in [-3;3]$, sao cho $M \leq 2m$.

A. 6

B. 3

C. 7

D. 5

Lời giải

$$\text{Với } u = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a \Rightarrow u' = 4x^3 - 12x^2 + 8x; u' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1. \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} \max_{[-1;3]} u = \max\{u(0), u(1), u(2)\} = u(1) = a + 1 \\ \min_{[-1;3]} u = \min\{u(0), u(1), u(2)\} = u(0) = a \end{cases}$$

$$\text{Nếu } a \geq 0 \Rightarrow m = a, M = a + 1 \Rightarrow 2a \geq a + 1 \Leftrightarrow a \geq 1 \Rightarrow a \in \{1; 2; 3\}.$$

$$\text{Nếu } a \leq -1 \Rightarrow m = -(a + 1); M = -a \Rightarrow -2(a + 1) \geq -a \Leftrightarrow a \leq -2 \Rightarrow a \in \{-3; -2\}.$$

Vậy có tất cả 5 số nguyên thỏa mãn.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ.

Cho hàm số $f(x) = |x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[0; 2]$. Có bao nhiêu số nguyên $a \in [-4; 4]$ sao cho $M \leq 2m$?

Câu 8: Cho hàm số $y = |2x - x^2 - \sqrt{(x+1)(3-x)} + m|$. Khi đó lớn nhất của hàm số đạt giá trị nhỏ nhất. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. 1 B. 2 C. 0 D. 6

Lời giải

$$\text{Điều kiện xác định } (x+1)(3-x) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3.$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{(x+1)(3-x)} = \sqrt{3-x^2+2x} \in 2x-x^2 = t^2-3.$$

$$\text{Khi đó ta cần tìm giá trị lớn nhất của hàm số } y = |t^2 - t - 3 + m| \text{ trên đoạn } [0; 2]$$

$$\text{Ta có } \max_{[0;2]} u = \max\left\{u(0), u(2), u\left(\frac{1}{2}\right)\right\} = \max\left\{m-3; m-1; m-\frac{13}{4}\right\} = m-1; \max_{[0;2]} u = m-\frac{13}{4}.$$

$$\text{Do đó } \max y = \max\left\{|m-1|, \left|m-\frac{13}{4}\right|\right\} \geq \frac{|m-1| + \left|m-\frac{13}{4}\right|}{2} \geq \frac{(m-1) + \left(\frac{13}{4} - m\right)}{2} = \frac{9}{8}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } |m-1| = \left|m-\frac{13}{4}\right| = \frac{9}{8} \Leftrightarrow m = \frac{17}{8}.$$

Câu 9: Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên m để hàm số $y = \left|\frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m\right|$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[0; 2]$ không vượt quá 20. Tổng các phần tử của S bằng?

- A. -195 B. 210 C. 195 D. -210

Lời giải

$$\text{Xét } u = \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m \text{ trên đoạn } [0; 2] \text{ có } u' = x^3 - 19x + 30; u' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \notin [0; 2] \\ x = 3 \notin [0; 2] \\ x = 2 \in [0; 2] \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } \max_{[0;2]} u = \max\{u(0); u(2)\} = \max\{m, m+36\} = m+36 \text{ và } \min_{[0;2]} u = m$$

$$\text{Do đó } \max_{[0;2]} y = \max\{|m|, |m+26|\} \leq 20 \Leftrightarrow \begin{cases} |m| \leq |m+26| \leq 20 \\ |m+26| \leq |m| \leq 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -13 \leq m \leq -6 \\ -20 \leq m \leq -13 \end{cases} \Leftrightarrow -20 \leq m \leq -6$$

Vậy $m \in \{-20, -19, \dots, -6\}$. Vậy tổng các phần tử của S bằng $-\sum_6^{20} k = -195$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ.

Gọi a, b lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m \right|$ trên đoạn $[0; 2]$. Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-30; 30]$ để $2b \geq a$

Câu 10: Cho hàm số $f(x) = |x^3 - 3x^2 + m|$. Có bao nhiêu số nguyên m để $\min_{[1;3]} f(x) \leq 3$.

A. 4

B. 6

C. 11

D. 10

Lời giải

Với $u = x^2 - 3x^2 + m$ có $u' = 3x^2 - 6x; u' = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 2$.

$$\text{Do đó } \begin{cases} \min_{[1;3]} u = \min\{u(1), u(3), u(0), u(2)\} = \min\{m-2; m; m-4\} = m-4 \\ \max_{[1;3]} u = \max\{u(1), u(3), u(0), u(2)\} = \max\{m-2; m; m-4\} = m \end{cases}$$

Nếu $m-4 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 4 \Rightarrow \min_{[1;3]} f(x) = m-4 \leq 3 \Leftrightarrow m \leq 7 \Rightarrow m \in \{4; 5; 6; 7\}$.

Nếu $m \leq 0 \Rightarrow \min_{[1;2]} f(x) = -m \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq m \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1; 0\}$.

Nếu $0 < m < 4$ khi đó $\min_{[1;3]} u < 0; \max_{[1;3]} u > 0 \Rightarrow \min_{[1;3]} f(x) = 0$. (Thỏa mãn)

Vậy $m \in \{-3; \dots; 7\}$ có 11 số nguyên thỏa mãn

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ.

1. Cho hàm số $f(x) = |2x^3 - 3x^2 + m|$. Có bao nhiêu số nguyên m để $\min_{[-1;3]} f(x) \leq 3$.

2. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = |x^4 - 2x^2 + m|$ có $\min_{[-1;2]} y \leq 3$.

3. Cho hàm số $y = |x^4 - 2x^3 + x^2 + a|$. Có bao nhiêu số nguyên a để $\max_{[-1;2]} y \leq 100$.

4. Cho hàm số $y = |x^3 - x^2 + (m^2 + 1)x - 4m - 7|$. Có bao nhiêu số nguyên m để $\max_{[0;2]} y \leq 15$

5. Cho hàm số $y = |\sin 3x + \sin x + m|$. Có bao nhiêu số nguyên m để giá trị lớn nhất của hàm số lớn nhất của hàm số không vượt quá 30.

6. Cho hàm số $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Có bao nhiêu số nguyên m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |f(2 \sin x + 1) + m|$ không vượt quá 10?

7. Cho hàm số $y = \left| \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}(m^2 - 2)x^3 - m^2x^3 + m \right|$. Có bao nhiêu số nguyên m để $\max_{[0;2]} y \leq 5$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |f(\sin x + 1) + 2|$. Giá trị biểu thức $M + m$ bằng?

- A. 4 B. 6 C. 2 D. 8

Lời giải

Đặt $t = \sin x + 1 \in [0; 2]$, khi đó $y = |f(\sin x + 1) + 2| = |f(t) + 2| = |t^3 - 3t + 2|$

Xét $u = t^3 - 3t + 2$ trên đoạn $[0; 2]$ có $u' = 3t^2 - 3; u' = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1$.

$$\text{Do đó } \begin{cases} \max_{[0;2]} u = \max\{u(0), u(2), u(1)\} = \max\{2; 4; 0\} = 4 \\ \min_{[0;2]} u = \min\{u(0), u(2), u(1)\} = \min\{2; 4; 0\} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } M = \max_{[0;2]} |u| = 4; m = \min_{[0;2]} |u| = 0 \Rightarrow M + m = 4 + 0 = 4$$

Câu 12: Cho hàm số $y = |x^4 - 2x^3 + x^2 + a|$. Có bao nhiêu số thực a để $\min_{[-1;2]} y + \max_{[-1;2]} y = 10$.

- A. 2 B. 5 C. 3 D. 1

Lời giải

Xét $u = x^4 - 2x^3 + x^2 + a$ trên đoạn $[0; 2]$ có $u' = 4x^3 - 6x^2 + 2x; u' = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 1; x = \frac{1}{2}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} M = \max_{[-1;2]} u = \max\left\{u(-1), u(2), u(0), u\left(\frac{1}{2}\right), u(1)\right\} = u(-1) = u(2) = a + 4. \\ m = \min_{[-1;2]} u = \min\left\{u(-1), u(2), u(0), u\left(\frac{1}{2}\right), u(1)\right\} = u(0) = u(1) = a \end{cases}$$

Trường hợp 1: Nếu $m \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 0 \Rightarrow \min_{[-1;2]} y = m; \max_{[-1;2]} y = M$.

$$\text{Vậy ta có điều kiện } \begin{cases} a \geq 0 \\ a + a + 4 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow a = 3$$

Trường hợp 2: Nếu $M, m < 0 \Leftrightarrow a \leq -4 \Rightarrow \min_{[-1;2]} y = -M; \max_{[-1;2]} y = -m$.

$$\text{Vậy ta có điều kiện } \begin{cases} a \leq -4 \\ -(a + 4) - a = 10 \end{cases} \Leftrightarrow a = -7.$$

Trường hợp 3: $M, m < 0 \Leftrightarrow -4 < a < 0 \Rightarrow \min_{[-1;2]} y = 0; \max_{[-1;2]} y = \max\{|a + 4|, |a|\} = \max\{a + 4; -a\} < 10$.

Suy ra $\min_{[-1;2]} y + \max_{[-1;2]} y < 0 + 10 = 10$ (loại)

Câu 13: Cho hàm số $y = |2x^2 + (a + 4)x + b + 3|$. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 3]$. Khi đạt giá trị nhỏ nhất, tính giá trị biểu thức $a + 4b$.

- A. 41 B. -30 C. 30 D. -41

Lời giải

Xét $u = 2x^2 + (a + 4)x + b + 3$ trên đoạn $[-2; 3]$ có $u' = 0 \Leftrightarrow 4x + a + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{a + 4}{4}$

Trường hợp 1: Nếu $-\frac{a+4}{4} \notin [-2; 3] \Leftrightarrow (a < -16) \vee (a > 4)$ ta có

$$\begin{aligned} M &= \max \{ |u(-2)|, |u(3)| \} = \max \{ |2a - b - 3|, |3a + b + 33| \} \\ &\geq \frac{|2a - b - 3| + |3a + b + 33|}{2} \geq \frac{|(2a - b - 3) + (3a + b + 33)|}{2} = \frac{5|a + 6|}{2} > 25. \end{aligned}$$

Trường hợp 2: Nếu $-\frac{a+4}{4} \in [-2; 3] \Leftrightarrow -16 \leq a \leq 4$ ta có

$$\begin{aligned} M &= \max \left\{ |u(-2)|, |u(3)|, \left| u\left(-\frac{a+4}{4}\right) \right| \right\} = \max \left\{ |-2a + b + 3|, |3a + b + 33|, \left| \frac{a^2}{8} + a - b - 1 \right| \right\} \\ &\geq \frac{|-2a + b + 3| + |3a + b + 33| + 2 \left| \frac{a^2}{8} + a - b - 1 \right|}{4} \geq \frac{|(-2a + b + 3) + (3a + b + 33) + 2 \left(\frac{a^2}{8} + a - b - 1 \right)|}{4} \\ &= \frac{1}{16} (a + 6)^2 + \frac{25}{4} \geq \frac{25}{4}. \end{aligned}$$

So sánh hai trường hợp có $M_{\min} = \frac{25}{4}$.

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow |-2a + b + 3| = |3a + b + 33| = \left| \frac{a^2}{8} + a - b - 1 \right| = \frac{25}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -6 \\ b = -\frac{35}{4} \end{cases} \Rightarrow a + 4b = -41.$$

Câu 14: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 + ax + b|$ trên đoạn $[m, n]$ ($m < n$) có giá trị nhỏ nhất bằng?

- A. $\frac{1}{4}(m-n)^2$ B. $\frac{1}{8}(m-n)^2$ C. $\frac{1}{2}(m-n)^2$ D. $\frac{1}{16}(m-n)^2$

Lời giải

Gọi $M = \max_{[m, n]} y$.

- Nếu $-\frac{a}{2} \notin [m; n] \Leftrightarrow (a < -2n) \vee (a > -2m)$ ta có

$$\begin{aligned} M &= \max \{ y(m), y(n) \} = \max \{ |m^2 + am + b|, |n^2 + an + b| \} \\ &\geq \frac{|m^2 + am + b| + |n^2 + an + b|}{2} \geq \frac{|m^2 - n^2 + a(m - n)|}{2} = \frac{1}{2} |m - n| |m + n + a| > \frac{1}{2} (m - n)^2. \end{aligned}$$

- Nếu $-\frac{a}{2} \in [m; n]$ ta có

$$M = \max \left\{ y(m), y(n), y\left(-\frac{a}{2}\right) \right\} = \max \left\{ |m^2 + am + b|, |n^2 + an + b|, \left| \frac{a^2}{4} - b \right| \right\}$$

$$\text{Và } 4M \geq |m^2 + am + b| + |n^2 + an + b| + 2 \left| \frac{a^2}{4} - b \right| \geq \left| \frac{a^2}{2} + a(m + n) + m^2 + n^2 \right|$$

$$= \frac{1}{2} (a + m + n)^2 + \frac{1}{2} (m - n)^2 \Rightarrow M \geq \frac{1}{8} (m - n)^2.$$

Dấu bằng đạt tại $|m^2 + am + b| = |n^2 + an + b| = \left| \frac{a^2}{4} - b \right| = \frac{1}{8}(m-n)^2$.

Câu 15: Cho hàm số $y = \left| \frac{x^4 + ax + a}{x+1} \right|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[1; 2]$. Có bao nhiêu số nguyên a sao cho $M \geq 2m$.

A. 15

B. 14

C. 16

D. 13

Lời giải

Xét $u = \frac{x^4 + ax + a}{x+1}$ trên đoạn $u' = \frac{3x^4 + 4x^3}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in [1; 2]$.

Do đó $\max_{[1;2]} u = u(2) = a + \frac{16}{3}; \min_{[1;2]} u = u(1) = a + \frac{1}{2}$.

- Nếu $a + \frac{1}{2} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} M = a + \frac{16}{3} \\ m = a + \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + \frac{1}{2} \geq 0 \\ a + \frac{16}{3} \geq 2\left(a + \frac{1}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{13}{3}$.
- Nếu $a + \frac{16}{3} \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} M = -\left(a + \frac{1}{2}\right) \\ m = -\left(a + \frac{16}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + \frac{16}{3} \leq 0 \\ -\left(a + \frac{1}{2}\right) \geq -2\left(a + \frac{16}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{61}{6} \leq a \leq -\frac{16}{3}$.
- Nếu $\left(a + \frac{1}{2}\right)\left(a + \frac{16}{3}\right) < 0 \Rightarrow m = 0, M = \max\left\{\left|a + \frac{1}{2}\right|, \left|a + \frac{16}{3}\right|\right\} \Rightarrow M > 2m$ (thỏa mãn).

Vậy $-\frac{61}{6} \leq a \leq \frac{13}{3} \Rightarrow a \in \{-10; \dots; 4\}$. Có 15 số nguyên thỏa mãn.

Câu 16: Cho hàm số $f(x) = |x^2 + ax + b|$. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1; 3]$. Khi M đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị của biểu thức $a + 2b$ bằng?

A. 1

B. 2

C. -4

D. 6

Lời giải

Cách 1.

Xét $u = x^2 + ax + b \Rightarrow u' = 2x + a; u' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{a}{2}$.

Trường hợp 1: Nếu $-\frac{a}{2} \notin [-1; 3] \Leftrightarrow \begin{cases} a > 2 \\ a < -6 \end{cases}$, khi đó

$$M = \max\{f(-1), f(3)\} = \max\{|1 - a + b|, |9 + 3a + b|\} \geq \frac{1}{2}|8 + 4a| = 2|a + 2| > 4$$

Trường hợp 2: Nếu $-\frac{a}{2} \in [-1; 3] \Leftrightarrow -6 \leq a \leq 2$, khi đó

$$M = \max \left\{ f(-1), f(3), f\left(-\frac{a}{2}\right) \right\} = \max \left\{ |1-a+b|, |9+3a+b|, \left| b - \frac{a^2}{4} \right| \right\}$$

$$\geq \max \left\{ |a+b+5|, \left| b - \frac{a^2}{4} \right| \right\} \geq \frac{1}{2} \left| a + \frac{a^2}{4} + 5 \right| = \frac{1}{2} \left| \left(\frac{a}{2} + 1 \right)^2 + 4 \right| \geq 2.$$

So sánh 2 trường hợp suy ra $\min M = 2$ đặt tại $a = -2 \Rightarrow b = -1$

Cách 2. Theo giả thiết $M \geq f(-1) = |1-a+b|$, $M \geq f(1) = |1+a+b|$, $M \geq f(3) = |9+3a+b|$.

Suy ra sử dụng bất đẳng thức $|x| + |y| + |z| \geq |x+y+z|$ có

$$4M \geq f(-1) + 2f(1) + f(3) = |1-a+b| + 2|1+a+b| + |9+3a+b|.$$

$$\geq |(1-a+b) - 2(1+a+b) + (9+3a+b)| = 8 \Rightarrow M \geq 2.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-1;3]$ có giá trị nhỏ nhất bằng 2 đạt tại

$$\begin{cases} |1-a+b| = 2, |1+a+b| = 2, |9+3a+b| = 2 \\ (1-a+b)(9+3a+b) \geq 0 \\ (1-a-b)(-2-2a-2b) \geq 0 \\ (9+3a+b)(-2-2a-2b) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow a+2b = -4.$$

Câu 17: Cho hàm số $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Có bao nhiêu số nguyên m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |f(2\sin x + 1) + m|$ không vượt quá 10?

- A. 45 B. 41 C. 30 D. 43

Lời giải

Đặt $t = 2\sin x + 1 \in [-1;3]$ ta có $y = |f(t) + m| = |t^2 - 3t + m + 1|$.

Ta cần tìm m sao cho $\min_{t \in [-1;3]} y \leq 10$.

Xét $u = t^2 - 3t + m + 1$ trên đoạn $[-1;3]$ ta có $u' = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1$.

Vậy $A = \max_{t \in [-1;3]} u = \max \{u(-1), u(3), u(1)\} = \max \{m+3, m+19, m-1\} = m+19$ và $a = \min_{t \in [-1;3]} u = m-1$.

Trường hợp 1: Nếu $a \geq 0 \Rightarrow \min_{t \in [-1;3]} y = a \leq 10 \Leftrightarrow 0 \leq a \leq 10 \Leftrightarrow 0 \leq m-1 \leq 10 \Leftrightarrow 1 \leq a \leq 11$.

Trường hợp 2: Nếu

$$A \leq 0 \Rightarrow \min_{t \in [-1;3]} y = -A \leq 10 \Leftrightarrow -10 \leq A \leq 0 \Leftrightarrow -10 \leq m+19 \leq 0 \Leftrightarrow -29 \leq a \leq -19$$

Trường hợp 3: Nếu

$$A.a < 0 \Leftrightarrow (m-1)(m+19) < 0 \Leftrightarrow -19 < m < 1 \Rightarrow \min_{t \in [-1;3]} y = 0 \leq 10 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $a \in \{-29, \dots, 11\}$. Có tất cả 41 số nguyên thỏa mãn

Câu 18: Cho hàm số $f(x) = |x^3 - 3x + m|$. Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-20;20)$ để với mọi bộ số ba số thực $a, b, c \in [-2;1]$ thì $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài ba cạnh của một tam giác?

- A. 30 B. 24 C. 28 D. 26

Lời giải

Xét $u = x^3 - 3x + m$ trên đoạn $[-2;1]$ có $u' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} \max_{[-2;1]} u = \max \{u(-2), u(1), u(-1)\} = \max \{m-2, m-2, m+2\} = m+2 \\ \min_{[-2;1]} u = \min \{u(-2), u(1), u(-1)\} = \min \{m-2, m-2, m+2\} = m-2 \end{cases}$$

Để $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài ba cạnh tam giác ta phải có $f(a) + f(b) > f(c)$.

Chọn $f(a) = f(b) = \min_{[-2;1]} f(x); f(c) = \max_{[-2;1]} f(x)$ ta phải có $2 \min_{[-2;1]} f(x) > \max_{[-2;1]} f(x)$.

Ngược lại $2 \min_{[-2;1]} f(x) > \max_{[-2;1]} f(x)$, ta có $f(a) + f(b) - f(c) \geq 2 \min_{[-2;1]} f(x) - \max_{[-2;1]} f(x) > 0$.

Vậy điều kiện cần và đủ để $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài ba cạnh tam giác là

$$2 \min_{[-2;1]} f(x) > \max_{[-2;1]} f(x)$$

- Nếu $(m-2)(m+2) < 0 \Rightarrow 2 \min_{[-2;1]} f(x) = 0 \Rightarrow 2.0 > \max_{[-2;1]} f(x)$ (loại)
- Nếu $m-2 \geq 0 \Rightarrow \min_{[-2;1]} f(x) = m-2; \max_{[-2;1]} f(x) = m+2 \Rightarrow \begin{cases} m-2 \geq 0 \\ 2(m-2) > m+2 \end{cases} \Leftrightarrow m > 6.$
- $m+2 \leq 0 \Rightarrow \min_{[-2;1]} f(x) = -(m+2); \max_{[-2;1]} f(x) = -(m-2) \Rightarrow \begin{cases} m+2 \geq 0 \\ -2(m+2) > -(m-2) \end{cases} \Leftrightarrow m < -6.$

Vậy $m \in \{-19, \dots, -7, 7, \dots, 19\}$. Có 26 số nguyên thỏa mãn.

Câu 19: Cho hàm số $f(x) = |x^3 - 3x + m|$. Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-20; 20)$ để với mọi bộ ba số thực $a, b, c \in [-2; 1]$ thì $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài ba cạnh một tam giác nhọn?

A. 30

B. 16

C. 28

D. 12

Lời giải

Xét $u = x^3 - 3x + m$ trên đoạn $[-2; 1]$ có $u' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} \max_{[-2;1]} u = \max \{u(-2), u(1), u(-1)\} = \max \{m-2, m-2, m+2\} = m+2 \\ \min_{[-2;1]} u = \min \{u(-2), u(1), u(-1)\} = \min \{m-2, m-2, m+2\} = m-2 \end{cases}$$

Để $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài ba cạnh tam giác nhọn ta phải nhọn thì $f^2(a) + f^2(b) > f^2(c)$.

Chọn $f(a) = f(b) = \min_{[-2;1]} f(x); f(c) = \max_{[-2;1]} f(x)$ ta có điều kiện $2 \left(\min_{[-2;1]} f(x) \right)^2 > \left(\max_{[-2;1]} f(x) \right)^2$.

Ngược lại với $2 \left(\min_{[-2;1]} f(x) \right)^2 > \left(\max_{[-2;1]} f(x) \right)^2$, có

$$f^2(a) + f^2(b) - f^2(c) \geq 2 \left(\min_{[-2;1]} f(x) \right)^2 - \left(\max_{[-2;1]} f(x) \right)^2 > 0.$$

Vậy điều kiện cần và đủ để $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài ba cạnh của một tam giác nhọn là

$$2 \left(\min_{[-2;1]} f(x) \right)^2 > \left(\max_{[-2;1]} f(x) \right)^2$$

- Nếu $(m-2)(m+2) < 0 \Rightarrow 2 \min_{[-2;1]} f(x) = 0 \Rightarrow 2.0^2 > \left(\max_{[-2;1]} f(x) \right)^2$ (loại)

- Nếu $m - 2 \geq 0 \Rightarrow \min_{[-2;1]} f(x) = m - 2; \max_{[-2;1]} f(x) = m + 2$
 $\Rightarrow \begin{cases} m - 2 \geq 0 \\ 2(m + 2)^2 > (m - 2) \end{cases} \Leftrightarrow m > 6 + 4\sqrt{2}.$
- Nếu $m + 2 \leq 0 \Rightarrow \min_{[-2;1]} f(x) = -(m + 2); \max_{[-2;1]} f(x) = -(m - 2)$
 $\Rightarrow \begin{cases} m + 2 \geq 0 \\ 2(m + 2)^2 > (m - 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow m < -6 - 4\sqrt{2}.$

Vậy $m \in \{-19, \dots, -12, 12, \dots, 19\}$. Có 16 số nguyên thỏa mãn.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Cho hàm số $f(x) = |2x^3 - 9x^2 + 12x + m|$. Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-20; 20)$ để với mọi bộ ba số thực $a, b, c \in [-2; 1]$ thì $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài ba cạnh một tam giác nhọn.

Câu 20: Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = |4ax^3 + (1 - 3a)x|$ trên đoạn $[-1; 1]$. Giá trị nhỏ nhất của M bằng?

- A. 1 B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{8}{9}$ D. $\frac{1}{2}$

Lời giải

Xét $u = 4ax^3 + (1 - 3a)x$ ta có $u' = 0 \Leftrightarrow 12ax^2 + 1 - 3a = 0$.

- Nếu $a = 0 \Rightarrow y = |x| \Rightarrow M = \max_{[-1;1]} y = 1$.
- Nếu $a \neq 0 \Rightarrow u' = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3a - 1}{12}$.
- Nếu $\frac{3a - 1}{12a} \notin [-1; 1] \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3a - 1}{12a} > 1 \\ \frac{3a - 1}{12a} < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{9} < a < 0 \\ 0 < a < \frac{1}{15} \end{cases}$. Khi đó $M \geq y(1) = |1 + a| > \frac{8}{9}$.
- Nếu $\frac{3a - 1}{12a} \in [-1; 1] \Leftrightarrow -1 \leq \frac{3a - 1}{12a} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq \frac{1}{15} \\ a \leq -\frac{1}{19} \end{cases}$.

$$\text{Khi đó } M = \max \left\{ y(\pm 1), y\left(\pm \sqrt{\frac{3a - 1}{12a}}\right) \right\} = \max \left\{ |1 + a|, \sqrt{\frac{(3a - 1)^2}{27a}} \right\} \geq \sqrt{\frac{(3a - 1)^2}{27a}}.$$

Khảo sát hàm số $g(a) = \sqrt{\frac{(3a - 1)^2}{27a}}$ trên $D = \left(-\infty; -\frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{1}{15}; +\infty\right)$

Ta có $\min_{a \in D} g(a) = g\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Với $a = -\frac{1}{6} \Rightarrow M = \max \left\{ \frac{5}{6}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right\} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (thỏa mãn).

So sánh các trường hợp ta có $M_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ đạt tại $a = -\frac{1}{6}$.

Câu 21: Cho hàm số $|x^3 + ax^2 + b|$, gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-3; 2]$.

Khi M đạt giá trị nhỏ nhất thì $T = \log_{a-1} |b|$ có giá trị là ?

A. 0

B. 4026

C. 2

D. $\frac{1}{2}$

Lời giải

Xét hàm số $h(x) = x^3 + ax^2 + b$

Gọi m, n lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $h(x)$ trên đoạn $[-3; 2]$.

Suy ra $\begin{cases} m = |4a + b + 8| \\ n = |9a + b - 27| \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} m = |9a + b - 27| \\ n = |4a + b + 8| \end{cases}$

$$y_{\max} = \max \{ |m|; |n| \} = \frac{|m| + |n| + ||m| - |n||}{2}$$

$$y_{\max} = \frac{|4a + b + 8| + |9a + b - 27| + ||4a + b + 8| - |9a + b - 27||}{2}$$

Vì $|4a + b + 8| + |9a + b - 27| \geq 0$; $||4a + b + 8| - |9a + b - 27|| \geq 0$

Vậy $y_{\max} \geq 0$. Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} m = n \\ m = 0 \\ n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b = -36 \end{cases} \Rightarrow T = \log_{a-1} |b| = \log_6 36 = 2$.

Câu 22: Cho 2 số thực $x \geq 1, y \geq 0$ thỏa mãn điều kiện $\max \{ |x^2 + 1|; |2x - y + 1| \} = \frac{(x+y)^2}{x^2 + y^2}$.

Hỏi biểu thức $P = 3(x+1)(x^2 + 2y + 1)$ có tất cả bao nhiêu ước số nguyên dương?

A. 5

B. 6

C. 7

D. 8

Lời giải

Ta có một tính chất cơ bản của hàm trị tuyệt đối $\left| \frac{a+b}{2} \right| + \left| \frac{a-b}{2} \right| = \max \{ |a|; |b| \}$

Áp dụng ta có $\max \{ |x^2 + 1|; |2x - y + 1| \} = \left| \frac{x^2 + 2x - y + 2}{2} \right| + \left| \frac{x^2 - 2x + y}{2} \right|$

Sử dụng bất đẳng thức trị tuyệt đối ta có

$$\left| \frac{x^2 + 2x - y + 2}{2} \right| + \left| \frac{x^2 - 2x + y}{2} \right| \geq \left| \frac{2x^2 + 2}{2} \right| = \frac{2x^2 + 2}{2} \geq 2 \quad (x \geq 1)$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có $\frac{(x+y)^2}{x^2 + y^2} \leq \frac{\left(\sqrt{2(x^2 + y^2)} \right)^2}{x^2 + y^2} = 2$

Vậy $VT \geq 2 \geq VP$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$.

Khi đó $P = 24$ có tất cả 8 ước số nguyên dương.

III. ĐỌC THÊM - ỨNG DỤNG TOÁN CAO CẤP TRONG GIẢI TOÁN SỐ CẤP

A. ĐA THỨC CHEBYSHEV

Đa thức Chebyshev, được đặt theo tên nhà toán học Nga Pafnuty Chebyshev, là một dãy đa thức trực giao (tiếng Anh: orthogonal polynomials), và có liên quan đến công thức de Moivre (de Moivre's formula). Có thể xác định dãy đa thức này bằng công thức truy hồi, giống như số Fibonacci và số Lucas. Có hai loại: đa thức Chebyshev loại I (ký hiệu là T_n) và đa thức Chebyshev loại II (ký hiệu là U_n). Chữ T được dùng để ký hiệu vì, trong tiếng Pháp tên của Chebyshev viết là Tchebycheff và trong tiếng Đức là Tschebyscheff. Chữ n ký hiệu cho bậc của đa thức. Đa thức Chebyshev ý tưởng đơn giản (cũng như bản chất của nó) chỉ là biểu diễn $\cos(nx)$ là đa thức bậc n theo $\cos x$. Trong bài viết này ta sẽ cùng tìm hiểu định nghĩa các tính chất và ứng dụng của nó.

I. ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT ĐA THỨC CHEBYSHEV

1. ĐỊNH NGHĨA

Các đa thức $T_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ xác định như sau:
$$\begin{cases} T_0(x) = 1, T_1(x) = x \\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \end{cases}$$

Gọi là các đa thức Chebyshev loại I.

Các đa thức $U_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ xác định như sau:
$$\begin{cases} U_0(x) = 0, U_1(x) = 1 \\ U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x), \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Gọi là các đa thức Chebyshev loại II

2. CÁC TÍNH CHẤT CỦA ĐA THỨC LOẠI I

Đa thức Chebyshev có nhiều tính chất hay, được sử dụng rất nhiều trong việc giải quyết các bài toán đa thức. Sau đây xin được nêu một số tính chất quan trọng (việc chứng minh rất dễ dàng)

- Tính chất 1: $\forall x \in [-1, 1]$, ta có $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$
- Tính chất 2: $T_n(x)$ là đa thức bậc n, $n \in \mathbb{Z}$, hệ số cao nhất là 2^{n-1}
- Tính chất 3: $T_n(x)$ là hàm chẵn khi x chẵn và là hàm lẻ khi x lẻ.
- Tính chất 4: Đa thức $T_n(x)$ có đúng n nghiệm phân biệt trong $[-1, 1]$:

$$x_k = \cos \frac{2k+1}{2n} \pi, (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

- Tính chất 5:

a) $|T_n(x)| \leq 1, \forall x \in [-1, 1]$

b) $|T_n(x)| = 1$ chỉ tại $n+1$ điểm khác nhau trong $[-1, 1]$ là $\overline{x_k} = \cos \frac{k\pi}{n} (k = 1, 2, \dots, n)$

Chú ý là: $T_n(\overline{x_k}) = (-1)^k$

Các điểm $\overline{x_k}$ gọi là điểm luân phiên Chebyshev.

- Tính chất 6: $\forall P(x)$ bậc n , hệ số cao nhất bằng 1, ta có $\max|P(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow P(x) = T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}$

Một vài đa thức khởi đầu

1. $T_2 = 2x^2 - 1$

2. $T_3 = 4x^3 - 3x$

3. $T_4 = 8x^4 - 8x^2 + 1$

3. CÁC TÍNH CHẤT CỦA ĐA THỨC LOẠI II

- Tính chất 1: $\forall x \in (-1, 1)$ ta có $U_n(x) = \frac{\sin(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$

- Tính chất 2: $U_n(x) = \frac{1}{n} T_n'(x)$

- Tính chất 3:

a) $U_n(x)$ là đa thức hệ số nguyên, bậc $n-1$, hệ số cao nhất là 2^{n-1}

b) $U_n(x)$ là hàm chẵn nếu x lẻ và là hàm lẻ nếu x chẵn.

- Tính chất 4: $|U_n(x)| \leq n, \forall x \in (-1, 1)$

- Tính chất 5: Đa thức $U_n(x)$ có đúng $n-1$ nghiệm phân biệt khác nhau trong $[-1, 1]$

Đặc biệt: Từ tính chất 2 và 4, ta có: $|T_n'(x)| \leq n^2, \forall x \in (-1, 1)$

II. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA

Một trong những dấu hiệu để nhận biết bài toán đa thức có sử dụng tính chất của đa thức Chebyshev hay không đó là miền giá trị của đa thức. Các bài toán trên miền $[-1; 1]$ đều gợi ra cách giải bằng phương pháp sử dụng tính chất của đa thức Chebyshev. Sau đây ta xét lớp các bài toán về đa thức có sử dụng tính chất của đa thức Chebyshev.

Bài 1: Cho hàm số $y = 4x^3 + (a+3)x^2 + ax$. Tìm a để $|y| \leq 1$ khi $|x| \leq 1$.

Lời giải

Vì $|y| \leq 1$ khi $|x| \leq 1$ nên ta có :

$$\begin{cases} |y(1)| \leq 1 \\ |y(-1)| \leq 1 \\ \left| y\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq 1 \\ \left| y\left(-\frac{1}{2}\right) \right| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |7+2a| \leq 1 \\ |-1| \leq 1 \\ \left| -\frac{1}{2} + \frac{a+3}{4} - \frac{a}{2} \right| \leq 1 \\ \left| \frac{1}{2} + \frac{a+3}{4} + \frac{a}{2} \right| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq 7+2a \leq 1 \\ -1 \leq -\frac{a}{4} + \frac{1}{4} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{3a}{4} + \frac{5}{4} \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq 7+2a \leq 1 \\ -4 \leq -a+1 \leq 4 \\ -4 \leq 3a+5 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq a \leq 3 \\ -3 \leq a \leq 5 \\ -3 \leq a \leq \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow a = -3$$

Ngược lại, khi $a = -3$ thì $y = 4x^3 - 3x$. Đặt $x = \cos \varphi$ với $\varphi \in [0; \pi]$ thì $y = \cos 3\varphi$ rõ ràng thỏa mãn $|y| \leq 1$ khi $|x| \leq 1$.

Bình luận: Nếu chỉ xem lời giải và không hiểu rõ nguồn gốc, cội nguồn của bài toán thì học sinh sẽ thấy lời giải mất tự nhiên ở việc là tại sao ta chỉ xét giá trị của hàm số tại các giá trị của x là $\pm 1; \pm \frac{1}{2}$ mà không phải là các giá trị khác. Thực chất của việc xét giá trị của hàm số tại các điểm $\pm 1; \pm \frac{1}{2}$ chính là xét giá trị của hàm số tại các nghiệm của đa thức Chebyshev bậc ba.

Bài 2: Cho hàm số $y = 4x^3 + mx$. Tìm m để $|y| \leq 1$ khi $|x| \leq 1$.

Lời giải

Vì $|y| \leq 1$ khi $|x| \leq 1$ nên ta có :

$$\begin{cases} |y(1)| \leq 1 \\ |y(-1)| \leq 1 \\ \left| y\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq 1 \\ \left| y\left(-\frac{1}{2}\right) \right| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |4+m| \leq 1 \\ |-4-m| \leq 1 \\ \left| \frac{1}{2} + \frac{m}{2} \right| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq 4+m \leq 1 \\ -2 \leq m+1 \leq 2 \\ -1 \leq \frac{3a}{4} + \frac{5}{4} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq m \leq -3 \\ -3 \leq m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -3$$

Ngược lại, khi $m = -3$ thì $y = 4x^3 - 3x$. Đặt $x = \cos \varphi$ với $\varphi \in [0; \pi]$ thì $y = \cos 3\varphi$ rõ ràng thỏa mãn $|y| \leq 1$ khi $|x| \leq 1$.

Bài 3: Tìm a, b, c để $|4x^3 + ax^2 + bx + c| \leq 1$, với mọi x thỏa mãn $|x| \leq 1$.

Lời giải

Cách 1.

Điều kiện cần: Vì $|y| \leq 1$ khi $|x| \leq 1$ nên ta có :

$$\begin{cases} |y(1)| \leq 1 \\ |y(-1)| \leq 1 \\ \left| y\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq 1 \\ \left| y\left(-\frac{1}{2}\right) \right| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow (I) \begin{cases} -5 \leq a+b+c \leq -3(1) \\ 3 \leq a-b+c \leq 5(2) \\ -6 \leq a+2b+4c \leq 2(3) \\ -2 \leq a-2b+4c \leq 6(4) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) ta có: $\begin{cases} a-b+c \geq 3 \\ a+b+c \leq -3 \end{cases} \Rightarrow -2b \geq 6 \Leftrightarrow b \leq -3 \quad (5).$

Từ (3) và (4) ta có: $\begin{cases} a+2b+4c \geq -6 \\ a-2b+4c \leq 6 \end{cases} \Rightarrow 4b \geq -12 \Leftrightarrow b \geq -3 \quad (6)$

Từ (5) và (6) ta được $b = -3$

Thế $b = -3$ vào hệ (I) ta có: $\begin{cases} -2 \leq a+c \leq 0 \\ 0 \leq a+c \leq 2 \\ -8 \leq a+4c \leq 0 \\ 0 \leq a+4c \leq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+c=0 \\ a+4c=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=c=0$

Điều kiện đủ: Khi $a=c=0, b=-3$ thì $y = 4x^3 - 3x$. Đặt $x = \cos \varphi$ với $\varphi \in [0; \pi]$ thì $y = \cos 3\varphi$ rõ ràng thỏa mãn $|y| \leq 1$ khi $|x| \leq 1$.

Cách 2. Giả sử tồn tại các số a, b, c thỏa mãn điều kiện bài toán.

Đặt $f(x) = 4x^3 + ax^2 + bx + c, M = \max_{x \in [-1; 1]} |f(x)|$

Ta có $\begin{cases} |f(1)| = |4+a+b+c|, |f(-1)| = |-4+a-b+c|, \\ \left| f\left(\frac{1}{2}\right) \right| = \left| \frac{1}{2} + \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c \right|, \left| f\left(-\frac{1}{2}\right) \right| = \left| -\frac{1}{2} + \frac{a}{4} - \frac{b}{2} + c \right| \end{cases}$

$$\begin{aligned} 6M &\geq |f(1)| + |f(-1)| + \left| 2f\left(\frac{1}{2}\right) \right| + \left| 2f\left(-\frac{1}{2}\right) \right| \geq \left| f(1) - f(-1) - 2f\left(\frac{1}{2}\right) + 2f\left(-\frac{1}{2}\right) \right| \\ &\geq \left| 4+a+b+c - (-4+a-b+c) - 1 - \frac{a}{2} - b - 2c + \frac{a}{2} - 1 - b + 2c \right| \geq |8-2| = 6 \end{aligned}$$

Vậy $M \geq 1$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $|f(1)| = |f(-1)| = \left| f\left(\frac{1}{2}\right) \right| = \left| f\left(-\frac{1}{2}\right) \right| = M = 1$, đồng

thời $f(1), -f(-1), -f\left(\frac{1}{2}\right), f\left(-\frac{1}{2}\right)$ đôi một có tích không âm. Điều đó tương đương với

$$\begin{cases} f(1) = -f(-1) = -f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 \\ f(1) = -f(-1) = -f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 4+a+b+c=1 \\ 4-a+b-c=1 \\ -\frac{1}{2}-\frac{a}{4}-\frac{b}{2}-c=1 \\ -\frac{1}{2}+\frac{a}{4}-\frac{b}{2}+c=1 \end{cases} \\ \begin{cases} 4+a+b+c=-1 \\ 4-a+b-c=-1 \\ -\frac{1}{2}-\frac{a}{4}-\frac{b}{2}-c=-1 \\ -\frac{1}{2}+\frac{a}{4}-\frac{b}{2}+c=-1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2b+8=2 \\ a+c=0 \\ a-2b+4c-2=4 \\ a+4c+6-2=4 \\ a+4c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-3 \\ a=c=0 \end{cases}.$$

Mặt khác, từ giả thiết thì $M \leq 1$, do đó phải có $M = 1$ và xảy ra dấu bằng trong bất đẳng thức trên tức $a = c = 0, b = -3$. Ngược lại, khi $a = c = 0, b = -3$ thì $y = 4x^3 - 3x$. Đặt $x = \cos \varphi$ với $\varphi \in [0; \pi]$ thì $y = \cos 3\varphi$ rõ ràng thỏa mãn $|y| \leq 1$ khi $|x| \leq 1$.

Bài 4: Tìm a, b để $|8x^4 + ax^2 + b| \leq 1, \forall x \in [-1; 1]$.

Lời giải

Cách 1. Điều kiện cần: Vì $|y| \leq 1$ khi $|x| \leq 1$ nên ta có :

$$\begin{cases} |y(1)| \leq 1, |y(-1)| \leq 1 \\ |y(0)| \leq 1 \\ \left| y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right| \leq 1 \\ \left| y\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |b| \leq 1 \\ |8+a+b| \leq 1 \\ \left| 8 \cdot \frac{1}{4} + a \cdot \frac{1}{2} + b \right| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq b \leq 1 \\ -1 \leq a+b+8 \leq 1 \\ -2 \leq a+2b+4 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow (I) \begin{cases} -1 \leq b \leq 1 \\ -9 \leq a+b \leq -7 \\ -6 \leq a+2b \leq -2 \end{cases}.$$

Từ $\begin{cases} a+b \leq -7 \\ a+2b \geq -6 \end{cases} \Rightarrow b \geq 1$. Lại do $b \leq 1$ nên $b = 1$.

Thế $b = 1$ vào hệ (I) ta có $\begin{cases} -9 \leq a+1 \leq -7 \\ -6 \leq a+2 \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10 \leq a \leq -8 \\ -8 \leq a \leq -4 \end{cases} \Rightarrow a = -8$.

Điều kiện đủ: Khi $a = -8, b = 1$ thì $y = 8x^4 - 8x^2 + 1$. Đặt $x = \cos \varphi$ với $\varphi \in [0; \pi]$ thì $y = \cos 4\varphi$ rõ ràng thỏa mãn $|y| \leq 1$ khi $|x| \leq 1$.

Cách 2. Giả sử tồn tại các số a, b thỏa mãn điều kiện bài toán.

Đặt $f(x) = 8x^4 + ax^2 + b, M = \max_{x \in [-1; 1]} |f(x)|$ và theo giả thiết $M \leq 1$.

Ta có $|f(0)| = |b|, |f(1)| = |8+a+b|, \left| f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right| = \left| 8 \cdot \frac{1}{4} + \frac{a}{2} + b \right|$.

$$\text{Do } M = \max_{x \in [-1; 1]} |f(x)| \text{ nên } \begin{cases} M \geq |f(0)| \\ M \geq |f(1)| \\ M \geq \left| f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right| \end{cases}.$$

Từ đó ta có: $4 \geq 4M \geq |f(0)| + |f(1)| + \left| -2f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right| \geq |f(0) + f(1) - 2f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)| = 4$.

Vậy $M=1$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $|f(0)|=|f(1)|=\left|f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right|=1$, đồng thời $f(0), f(1), -f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ đôi một cùng dấu. Điều đó tương đương với:

$$\begin{cases} f(0)=f(1)=-f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-1 \\ f(0)=f(1)=-f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-8 \\ b=1 \end{cases}$$

Ngược lại: Khi $a=-8, b=1$ thì $y=8x^4-8x^2+1$. Đặt $x=\cos\varphi$ với $\varphi\in[0;\pi]$ thì $y=\cos 4\varphi$ rõ ràng thỏa mãn $|y|\leq 1$ khi $|x|\leq 1$.

Bình luận. Các giá trị của x mà ta xét ở trên chính là các nghiệm của đa thức Chebyshev bậc bốn, đó là các nghiệm $0; \pm 1; \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài 5: Chứng minh rằng nếu với mọi $x\in[-1;1]$ ta có $|ax^2+bx+c|\leq h$ thì $|a|+|b|+|c|\leq 4h$.

Lời giải

Đặt $f(x)=ax^2+bx+c$, khi đó theo giả thiết $|f(x)|\leq h$ và $\begin{cases} f(1)=a+b+c, |f(1)|\leq h \\ f(-1)=a-b+c, |f(-1)|\leq h \\ f(0)=c, |f(0)|\leq h \end{cases}$

Từ đó ta có $a=\frac{f(1)+f(-1)}{2}-f(0), b=\frac{f(1)-f(-1)}{2}, c=f(0)$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } |a|+|b|+|c| &= \left|\frac{f(1)+f(-1)}{2}-f(0)\right| + \left|\frac{f(1)-f(-1)}{2}\right| + |f(0)| \\ &\leq \left|\frac{f(1)}{2}\right| + \left|\frac{f(-1)}{2}\right| + |f(0)| + \left|\frac{f(1)}{2}\right| + \left|\frac{f(-1)}{2}\right| + |f(0)| \leq \frac{h}{2} + \frac{h}{2} + h + \frac{h}{2} + \frac{h}{2} + h = 4h \end{aligned}$$

Như vậy ta có điều phải chứng minh là $|a|+|b|+|c|\leq 4h$.

Bài 6: Cho $f(x)=ax^2+bx+c$ thỏa mãn điều kiện $|f(-1)|\leq 1, |f(0)|\leq 1, |f(1)|\leq 1$.

Chứng minh rằng $|f(x)|\leq \frac{5}{4}$ khi $|x|\leq 1$.

Lời giải

Đặt $A=a+b+c, B=a-b+c$, thế thì $a=\frac{A+B}{2}-c, b=\frac{A-B}{2}$.

Theo giả thiết: $|f(1)|=|A|\leq 1, |f(-1)|=|B|\leq 1, |f(0)|=|c|\leq 1$.

Ta có $f(x)=ax^2+bx+c=\left(\frac{A+B}{2}-c\right)x^2+\left(\frac{A-B}{2}\right)x+c=\frac{A}{2}(x^2+x)+\frac{B}{2}(x^2-x)+c(1-x^2)$

$$\text{Vậy } |f(x)|\leq \frac{1}{2}|x^2+x|+\frac{1}{2}|x^2-x|+|1-x^2|$$

- Với $0 \leq x \leq 1$, ta có

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2}|x^2 + x| + \frac{1}{2}|x^2 - x| + |1 - x^2| = \frac{1}{2}(x^2 + x) + \frac{1}{2}(x^2 - x) + (1 - x^2) = 1 + x - x^2$$

- Với $-1 \leq x \leq 0$, ta có

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2}|x^2 + x| + \frac{1}{2}|x^2 - x| + |1 - x^2| = -\frac{1}{2}(x^2 + x) + \frac{1}{2}(x^2 - x) + (1 - x^2) = 1 - x - x^2$$

Các kết quả trên chứng tỏ rằng với $|x| \leq 1$ thì $|f(x)| \leq 1 + |x| - x^2 = \frac{5}{4} - \left(|x| - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{5}{4}$.

Bài 7: Chứng minh rằng mọi đa thức $f(x)$ bậc $n \geq 1$ đều có thể biểu diễn dưới dạng

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i T_i(x), a_i \neq 0 \text{ và cách biểu diễn này là duy nhất.}$$

Lời giải

Ta có $T_n(x)$ là đa thức bậc n có hệ số cao nhất là 2^{n-1} nên ta có thể viết

$$T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \varphi(x) \text{ với } \varphi(x) \text{ là đa thức bậc nhỏ hơn } n.$$

$$\text{Suy ra } x^n = \frac{1}{2^{n-1}}T(x) - \frac{1}{2^{n-1}}\varphi(x)$$

Bằng quy nạp ta chứng minh được: $f(x) = a_0 + a_1T(x) + a_2T_2(x) + \dots + a_nT_n(x)$

Bây giờ ta chứng minh tính duy nhất của cách biểu diễn này

$$\text{Giả sử } f(x) = a_0 + a_1T(x) + a_2T_2(x) + \dots + a_nT_n(x) = a'_0 + a'_1T(x) + a'_2T_2(x) + \dots + a'_nT_n(x)$$

$$\text{Khi đó } \sum_{i=0}^n (a_i - a'_i)T_i(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Vậy } a_0 - a'_0 = a_1 - a'_1 = \dots = a_n - a'_n = 0$$

$$\text{Hay } a_0 = a'_0, a_1 = a'_1, \dots, a_n = a'_n$$

Một trong những dấu hiệu để nhận biết bài toán đa thức có sử dụng tính chất đa thức Chebyshev hay không đó là miền giá trị đa thức. Các bài toán trên miền $[-1, 1]$ đều gọi ra cách giải bằng phương pháp này.

Ta xét thêm một số ví dụ:

Bài 8: Cho đa thức hệ số thực $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \alpha > 0$. Biết rằng $\forall x \in [-1, 1]$ ta có $|f(x)| \leq \alpha$. Tìm max của $|a|, |b|, |c|, |d|$

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} A = f(-1) = -a + b - c + d \\ B = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{a}{8} + \frac{b}{4} - \frac{c}{2} + d \\ C = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{8} + \frac{b}{4} + \frac{c}{2} + d \\ D = f(1) = a + b + c + d \\ E = f(0) = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{3}A + \frac{4}{3}B - \frac{4}{3}C + \frac{2}{3}D \\ b = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}D - E \\ c = \frac{1}{6}A - \frac{8}{6}B + \frac{8}{6}C - \frac{1}{6}D \\ d = E \end{cases} \quad . \text{ Từ giả thiết: } \begin{cases} |a| \leq 4\alpha \\ |b| \leq 2\alpha \\ |c| \leq 3\alpha \\ |d| \leq \alpha \end{cases}$$

Bằng cách xét: $f(x) = \alpha(4x^3 - 3x)$ và $g(x) = \alpha(2x^2 - 1)$

$$\text{Thì ta có dấu đẳng thức xảy ra. Vậy: } \begin{cases} \max|a| = 4\alpha, \\ \max|b| = 2\alpha, \\ \max|c| = 3\alpha, \\ \max|d| = \alpha \end{cases}$$

Chú ý: $f(x), g(x)$ là xét dựa trên cơ sở $\cos 2x, \cos 3x$.

Bài 9: Cho đa thức $P_{n-1}(x)$ bậc không vượt quá $n-1$ có hệ số bậc cao nhất a_0 , thỏa mãn điều kiện $\sqrt{1-x^2}|P_{n-1}(x)| \leq 1, \forall x \in [-1, 1]$. Chứng minh rằng $|a_0| \leq 2^{n-1}$.

Lời giải

Ta viết đa thức đã cho dưới dạng nội suy Lagrange theo các nút nội suy $x_j = \cos \frac{2j-1}{2n}\pi$ là các nghiệm của đa thức Chebyshev $T_n(x)$:

$$P_{n-1}(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \sqrt{1-x_j^2} P_{n-1}(x_j) \frac{T_n(x)}{x-x_j} \Rightarrow a_0 = \frac{2^{n-1}}{n} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \sqrt{1-x_j^2} P(x_j)$$

$$\text{Vậy nên } |a_0| \leq \frac{2^{n-1}}{n} \sum_{j=1}^n \left| \sqrt{1-x_j^2} P(x_j) \right| \leq \frac{2^{n-1}}{n} \cdot n = 2^{n-1}$$

Bài 10: Giả thiết rằng đa thức $P_{n-1}(x)$ thỏa mãn các điều kiện của Bài 7. Chứng minh rằng $|P_{n-1}(x)| \leq n, \forall x \in [-1, 1]$

Lời giải

Với các x_j được chọn như ở bài toán trên thì do hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trong $(0; \pi)$ nên $-1 < x_n < x_{n-1} < \dots < x_2 < x_1 < 1$.

$$\text{Nếu } x_1 < x < 1 \text{ thì } |P_{n-1}(x)| \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left| \sqrt{1-x_j^2} P_{n-1}(x_j) \right| \frac{|T_n(x)|}{|x-x_j|} \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{T_n(x)}{(x-x_j)} \quad (2)$$

do $x-x_j > 0$ và $T_n(x)$ có dấu không đổi trên $(x_1; 1]$

Mặt khác thì $T_n(x) = 2^{n-1} \prod_{j=1}^n (x - x_j)$ Nên ta có $T'_n(x) = 2^{n-1} \sum_{k=1}^n \frac{\prod_{j=1}^n (x - x_j)}{(x - x_k)} = \sum_{k=1}^n \frac{T_n(x)}{x - x_k}$ (3)

Lại có $\left| \frac{T'_n(x)}{n} \right| = |U_n(x)| \leq n$. Nên từ (2) và (3) suy ra $|P_{n-1}(x)| \leq n, \forall x \in (x_1; 1]$

Hoàn toàn tương tự ta cũng có $|P_{n-1}(x)| \leq n, \forall x \in [-1, x_n)$

Xét $x_n \leq x \leq x_1$. Khi đó ta có $\sqrt{1-x^2} \geq \sqrt{1-x_1^2} = \sin(\arccos x_1) = \sin \frac{\pi}{2n}$

Do $1 \geq \frac{\sin x}{x} \geq \frac{2}{\pi}$, $\sin \frac{\pi}{2n} \geq \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{2}{n} = \frac{1}{n}$ và $\sqrt{1-x^2} \geq \frac{1}{n} \Rightarrow |P_{n-1}(x)| \leq \frac{1}{\frac{1}{n}} = n$

Tóm lại ta đã chứng minh được rằng $|P_{n-1}(x)| \leq n, \forall x \in [-1, 1]$

Bài 11: Cho đa thức lượng giác $P(t) = a_1 \sin t + a_2 \sin 2t + \dots + a_n \sin(nt)$ Thỏa mãn điều kiện $|P(t)| \leq 1, \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{\dots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \dots\}$ Chứng minh rằng

$$\left| \frac{P(t)}{\sin t} \right| \leq n, \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{\dots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \dots\}$$

Lời giải

Nhận xét rằng $\frac{P(t)}{\sin t} = P_{n-1}(\cos t)$ với $P_{n-1}(x)$ là đa thức dạng (1). Đặt $\cos t = x$. Khi đó $|x| \leq 1$

và $P(t) = \sin P_{n-1}(\cos t) = \sqrt{1-x^2} P_{n-1}(x)$

Ta thấy $P(x)$ thỏa mãn điều kiện của bài toán trước nên $|P_{n-1}(x)| \leq n, \forall x \in [-1, 1]$

Do đó $\left| \frac{P(t)}{\sin t} \right| \leq n, \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{\dots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \dots\}$

Bài 12: Cho đa thức lượng giác $P(x) = \sum_{j=0}^n (a_j \cos jx + b_j \sin jx)$ thỏa mãn điều kiện

$|P(x)| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng $|P'(x)| \leq n, \forall x \in \mathbb{R}$

Lời giải

Cho x_0 tùy ý. Do $\begin{cases} \cos(x_0 - x) - \cos(x_0 + x) = 2 \sin x_0 \sin x \\ \sin(x_0 + x) - \sin(x_0 - x) = 2 \cos x_0 \sin x \end{cases}$

Nên $g(x) = \frac{P(x_0 + x) - P(x_0 - x)}{2} = \sum_{j=0}^n c_j \sin jx \Rightarrow g'(x) = \frac{P'(x_0 + x) + P'(x_0 - x)}{2}$

Và $g'(0) = P'(x_0)$. Ta chứng minh rằng $|g'(0)| \leq n$. Thật vậy, $g(x)$ là đa thức lượng giác chứa thuần sin như trong Bài 9 và

$$|g(x)| = \left| \frac{P(x_0 + x) - P(x_0 - x)}{2} \right| \leq \frac{|P(x_0 + x)| + |P(x_0 - x)|}{2} \leq 1$$

Nên theo kết quả của bài 3 thì $\left| \frac{g(x)}{\sin x} \right| \leq n \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{ \dots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \dots \}$ (4)

Nhưng $g(0) = 0$ suy ra $\left| \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \cdot \frac{x}{\sin x} \right| \leq n \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{ \dots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \dots \}$

Nên khi $x \rightarrow 0$: $\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \rightarrow g'(0), \frac{x}{\sin x} \rightarrow 1$

Ta nhận được $|g'(0)| \leq n$

Từ đó ta có $|P'(x_0)| \leq n$. Nhưng x_0 được chọn tùy ý nên suy ra $|P'(x)| \leq n \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Bài 13 (Định lý Bernstein-Markov) Cho đa thức $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$. Thỏa mãn điều kiện $|P_n(x)| \leq 1, \forall x \in [-1; 1]$. Chứng minh rằng khi đó: $|P'_n(x)| \leq n^2, \forall x \in [-1; 1]$ (5)

Lời giải

Đặt $x = \cos a$. Khi đó theo giả thiết thì $|P_n(\cos a)| \leq 1$. Do $P_n(\cos a)$ có dạng

$$P_n(\cos a) = \sum_{j=0}^n (a_j \cos j\alpha + b_j \sin j\alpha)$$

Nên ta có thể áp dụng kết quả của Bài 10. Ta được

$$|\sin \alpha \cdot P'_n(\cos \alpha)| \leq n \Rightarrow \sqrt{1-x^2} \left| \frac{P'_n(x)}{n} \right| \leq 1$$

Cũng theo Bài 4, ta có $\left| \frac{P'_n(x)}{n} \right| \leq n$ suy ra $|P'(x)| \leq n^2$

Nhận xét: Dựa vào kết quả của Định lý Bernstein-Markov, sau khi áp dụng liên tiếp kết quả của định lý này, ta sẽ thu được kết quả sau:

Nếu $|P_n(x)| \leq 1, \forall x \in [-1; 1]$ thì $|P^{(k)}(x)| \leq [n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)]^2, \forall x \in [-1; 1]$

Bài 14: Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực không âm và không đồng thời bằng 0.

a) Chứng minh rằng phương trình $x^n - a_1x^{n-1} - \dots - a_{n-1}x - a_n = 0$ (6) có đúng một nghiệm dương duy nhất.

b) Giả sử R là nghiệm dương của phương trình (6) và $A = \sum_{j=1}^n a_j, B = \sum_{j=1}^n ja_j$. Chứng minh rằng khi đó $A^A \leq R^B$

Lời giải

a) Do $x > 0$ nên (6) $\Leftrightarrow 1 = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n}$

Đặt $f(x) = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n}$. Nhận xét rằng $f(x)$ liên tục và $f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(0, +\infty)$ nên tồn tại duy nhất $R > 0$ sao cho $f(R) = 1$.

b) Đặt $c_j = \frac{a_j}{A}$. Suy ra $c_j \geq 0$ và $\sum_{j=1}^n c_j = 1$. Do hàm số $y = -\ln x$ lõm trong khoảng $(0, +\infty)$

Nên theo BĐT Jensen thì $\sum_{j=1}^n c_j - \ln \frac{A}{R^j} \geq -\ln \left(\sum_{j=1}^n c_j \frac{A}{R^j} \right) = -\ln \left(\sum_{j=1}^n \frac{a_j}{R^j} \right) = -\ln f(R) = -\ln 1 = 0$

Suy ra $\sum_{j=1}^n (c_j \ln R^j - c_j \ln A)$ và $(\ln A) \sum_{j=1}^n c_j \leq (\ln R) \sum_{j=1}^n j c_j$

Hay $\frac{1}{A} \sum_{j=1}^n a_j (\ln A) \leq \frac{1}{A} \sum_{j=1}^n j a_j (\ln R) \left(\text{do } c_j = \frac{a_j}{A}; A > 0 \right)$

Vậy nên $\ln(A^A) \leq \ln(R^B) \Rightarrow A^A \leq R^B$

B. ỨNG DỤNG LÝ THUYẾT XẤP XÍ ĐỀU TRONG GIẢI TOÁN.

Lý thuyết xấp xỉ đều tốt nhất là một nhánh của lý thuyết xấp xỉ hàm, có vai trò đặc biệt quan trọng trong toán lý thuyết cũng như trong các toán ứng dụng. Đặc biệt, nó được dùng để tìm đa thức có "độ lệch" nhỏ nhất so với hàm số cho trước trên một đoạn xác định. Từ việc nghiên cứu kỹ lý thuyết xấp xỉ đều tốt nhất chúng ta có thể giải quyết được một số dạng bài toán tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất. Tuy nhiên không như đa thức Chebyshev, đây là một vấn đề khá khó của chương trình toán cao cấp, liên quan tới không gian mêtric, không gian Banach, không gian Hilbert mà ta sẽ được học trên chương trình đại học, do đó không thể giới thiệu được cho các bạn THPT. Vì lý do đó nên mình chỉ đưa ra các bài toán tổng quát từ nguyên lý này để các bạn áp dụng nhé!

Bài toán 1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Tìm m sao cho $\max_{x \in [a; b]} |f(x) - m|$ đạt giá trị nhỏ nhất?

Các bước làm

- Bước 1:** Tìm M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ và n là giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.
- Bước 2:** Khi đó $m = \frac{M+n}{2}$ là số cần tìm.

Ví dụ. Tìm m để $\max_{x \in [-1; 2]} |-9x^2 + 4x + a|$ đạt giá trị nhỏ nhất?

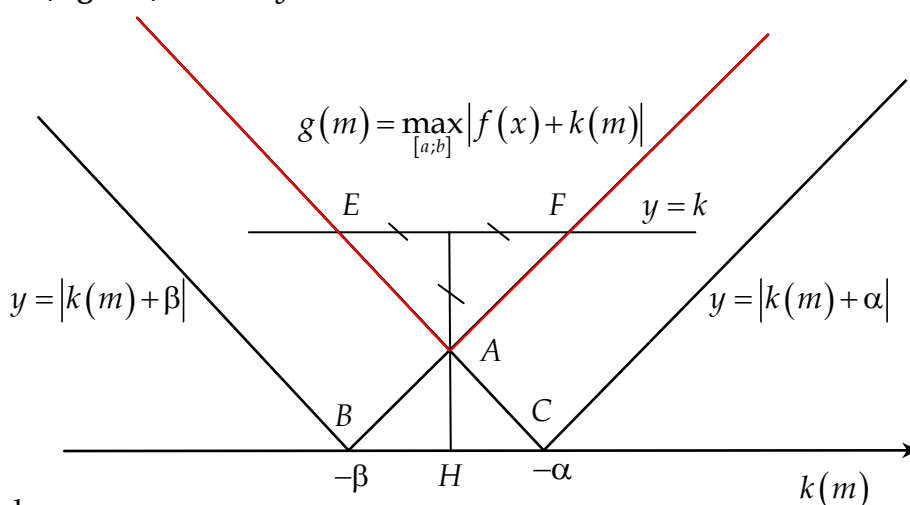
- Bước 1. Xét $f(x) = -9x^2 + 4x$, ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{18}$. Từ đây dễ dàng tìm được

$$M = \max_{x \in [-1; 2]} f(x) = \frac{4}{9}, n = \max_{x \in [-1; 2]} f(x) = -28.$$

- Bước 2. Khi đó ta có $-a = -\frac{124}{9} \Rightarrow a = \frac{124}{9}$

Rất đơn giản và nhanh gọn phải không nào ☺

Bài toán mở rộng – Lục Trí Tuyên



Tìm m sao cho

- $g(m) \geq k$ với k cho trước

2. $g(m) \leq k$ với k cho trước

Đặt $t = f(x)$ và gọi $\alpha = \min_{[a,b]} f(x), \beta = \max_{[a,b]} f(x)$. khi đó, do hàm số $y = t + k(m)$ đồng biến trên $[\alpha; \beta]$ nên ta có:

$$g(m) = \max_{[\alpha; \beta]} |t + k(m)| = \max \{ |k(m) + \alpha|; |k(m) + \beta| \}$$

Từ đây ta dễ dàng vẽ được đồ thị của hàm $g(x)$ theo biến m (ở đây là $k(m)$). Chú ý là lấy phần đồ thị nằm phía trên trong hai đồ thị

Từ đồ thị của $g(m)$ ta thấy ngay $g(m)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại A. do tam giác ABC vuông

cân tại A nên khi đó $k(m) = -\frac{\alpha + \beta}{2} = x_A$. Và $\min_R g(m) = \frac{1}{2}|\alpha - \beta| = y_A$

Cũng từ đồ thị ta dễ dàng giải được bất phương trình $g(m) \leq k$ hoặc $g(m) \geq k$. Chẳng hạn

$$g(m) = k \Leftrightarrow k(m) = x_A \pm (k - y_A)$$

Khi đó, $g(m) \leq k$ tương đương $k(m)$ nằm trong khoảng nghiệm trên, $g(m) \geq k$ tương đương $k(m)$ nằm ngoài khoảng nghiệm trên

Chú ý: trong trường hợp $k(m)$ có miền giá trị khác R thì hàm $y = g(k(m))$ xét trên miền giá trị tương ứng của $k(m)$

Bài toán 2. Cho $f(x)$ là hàm luôn lồi (lõm) trên $[\alpha; \beta]$. Tìm a, b để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(x) - ax - b|$ trên $[\alpha; \beta]$ đạt giá trị nhỏ nhất?

Các bước làm

- **Bước 1.** Xác định 2 điểm $A(\alpha, f(\alpha)), B(\beta, f(\beta))$, viết phương trình đường thẳng $AB: y = kx + m$
- **Bước 2.** Tìm phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và song song với AB (tiếp điểm là $x = c$ với $x = c$ là điểm cực trị của hàm số, khi đó tiếp tuyến có dạng $y = kx + n$)
- **Bước 3.** Đường thẳng cần tìm là đường song song cách đều 2 đường thẳng AB và tiếp tuyến trên là $y = kx + \frac{1}{2}(m + n)$
- **Bước 4.** Kết luận $a = k, b = \frac{1}{2}(m + n)$. Giá trị nhỏ nhất đạt được là

$$M_0 = \left| f(\alpha) - \left(k\alpha + \frac{1}{2}(m + n) \right) \right| = \left| f(\beta) - \left(k\beta + \frac{1}{2}(m + n) \right) \right|$$

Ví dụ.

Ngoài ra ta có thể tham khảo thêm một cách khác của thầy Lục Trí Tuyên

Gọi M là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |f(x) - ax - b|$ trên $[\alpha; \beta]$ thì ta có:

$$M \geq y(\alpha) = |\alpha.a + b - f(\alpha)|; \quad M \geq y(\beta) = |\beta.a + b - f(\beta)| \quad \text{và}$$

$$M \geq y\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \left| -\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot a - b + f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \right| \Rightarrow 2M \geq \left| -(\alpha+\beta) \cdot a - 2b + 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \right|$$

$$\text{Suy ra } 4M \geq \left| 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - (f(\alpha) + f(\beta)) \right| \text{ hay } M \geq \frac{1}{2} \left| f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - \frac{(f(\alpha) + f(\beta))}{2} \right| = m$$

Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} \alpha \cdot a + b - f(\alpha) = m(1) \\ \beta \cdot a + b - f(\beta) = m(2) \\ -\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot a - b + f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = m(3) \end{cases} \quad (I) \text{ hoặc } \begin{cases} \alpha \cdot a + b - f(\alpha) = -m(1) \\ \beta \cdot a + b - f(\beta) = -m(2) \\ -\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot a - b + f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = -m(3) \end{cases} \quad (II)$$

Giải (I): từ phương trình (1) và phương trình (2) của hệ (I) ta giải được

$$a = \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta}; b = m + \frac{\alpha f(\beta) - \beta f(\alpha)}{\alpha - \beta}. \text{ thay 2 giá trị này vào phương trình (3) ta được}$$

$$\begin{aligned} & -\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} - m - \frac{\alpha f(\beta) - \beta f(\alpha)}{\alpha - \beta} + f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = m \\ \Leftrightarrow & -\frac{\alpha f(\alpha) - \beta f(\beta) - \alpha f(\beta) + \beta f(\alpha)}{2(\alpha - \beta)} - \frac{\alpha f(\beta) - \beta f(\alpha)}{\alpha - \beta} + f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 2m \\ \Leftrightarrow & \frac{-\alpha f(\alpha) + \beta f(\beta) - \alpha f(\beta) + \beta f(\alpha)}{2(\alpha - \beta)} + f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 2m \\ \Leftrightarrow & \frac{-(\alpha - \beta)(f(\alpha) - f(\beta))}{2(\alpha - \beta)} + f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 2m \\ \Leftrightarrow & -\frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} + f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 2m(*) \end{aligned}$$

Giải (II): tương tự giải (I), ta chỉ cần thay m bởi $-m$ ta được

$$a = \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta}; b = -m + \frac{\alpha f(\beta) - \beta f(\alpha)}{\alpha - \beta}. \text{ thay hai giá trị này vào phương trình (3) ta được}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} + f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 2m(**)$$

$$\text{Mà ta thấy } M \geq \frac{1}{2} \left| f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - \frac{(f(\alpha) + f(\beta))}{2} \right| = m \Rightarrow -\frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} + f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \pm 2m(**).$$

Điều này có nghĩa là một trong hai đẳng thức (*) hoặc (**) luôn đúng, cũng có nghĩa là một trong hai hệ phương trình (I) hoặc (II) luôn có nghiệm.

Bình luận. Vậy giả thiết lồi(lõm) ở đây sử dụng ở chỗ nào? Liệu chẳng không cần điều kiện này bài toán vẫn đúng theo cách giải trên?

Câu trả lời như sau:

- Nếu M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[\alpha; \beta]$ thì nó lớn hơn hoặc bằng một trong số các giá trị $f(x_1)$ nào đó trong đoạn $[\alpha; \beta]$. Ở lời giải trên ta chỉ lấy ba điểm.

- Nhưng điều ngược lại không đúng. Có nghĩa là M lớn hơn giá trị của hàm số tại 3 điểm chưa chắc nó đã là giá trị lớn nhất.
- Điều kiện cần và đủ để cho M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[\alpha; \beta]$ là M lớn hơn hoặc bằng mọi $f(x)$ với x bất kì thuộc $[\alpha; \beta]$. Điều này tương đương với lời giải trên phải đảm bảo đúng cho mọi $\alpha_i; \beta_i \in [\alpha; \beta]$ thay cho $\alpha_i; \beta_i \in \text{ở trên}$. Cũng có nghĩa là điều kiện $f\left(\frac{\alpha_i + \beta_i}{2}\right) - \frac{f(\alpha_i) - f(\beta_i)}{2} \neq 0$ với mọi $\alpha_i; \beta_i \in [\alpha; \beta], \alpha \neq \beta$. Điều kiện này tương đương với $f(x)$ là hàm lồi hoặc lõm trên $[\alpha; \beta]$