

CẤU TRÚC

PHẦN	TT	NỘI DUNG	CÁC DẠNG TOÁN	Trang
ĐẠI SỐ	1	DÃY SỐ CẤP SỐ CỘNG CẤP SỐ NHÂN	<i>Phương pháp chứng minh quy nạp.</i>	2 – 11
			<i>Xác định một dãy số: Tìm các số hạng của một dãy số cho trước, tìm các số hạng của cấp số nhân, cấp số cộng.</i>	
			<i>Xét tính tăng giảm và tính bị chặn của một dãy số.</i>	
			<i>Xét một dãy số có là một cấp số cộng hoặc cấp số nhân hay không. Xét xem một số cho trước có là một số hạng của cấp số cộng hoặc cấp số nhân không.</i>	
			<i>Tìm các số hạng đầu và công sai của cấp số cộng, tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân.</i>	
			<i>Giải các bài toán sử dụng tính chất của cấp số cộng và cấp số nhân.</i>	
			<i>Giải các bài toán thực tế áp dụng của cấp số cộng, cấp số nhân.</i>	
	2	GIỚI HẠN HÀM SỐ LIÊN TỤC	<i>Tìm giới hạn của dãy số.</i>	11 – 20
			<i>Tìm giới hạn của hàm số.</i>	
			<i>Giải quyết các bài toán áp dụng giới hạn.</i>	
			<i>Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm, xét tính liên tục của hàm số trên một khoảng.</i>	
			<i>Tìm điều kiện để hàm số liên tục tại một điểm hoặc liên tục trên một khoảng.</i>	
			<i>Áp dụng định lý về hàm số liên tục để xét số nghiệm của phương trình.</i>	
			<i>Các bài toán áp dụng.</i>	
	3	ĐẠO HÀM.	<i>Tìm đạo hàm tại một điểm của hàm số.</i>	
			<i>Tìm đạo hàm trên một khoảng của hàm số.</i>	
			<i>Tìm điều kiện để hàm số có đạo hàm.</i>	
			<i>Tìm đạo hàm cấp cao của một hàm số.</i>	
			<i>Bài toán tiếp tuyến của đạo hàm.</i>	
			<i>Bài toán ứng dụng thực tế của đạo hàm.</i>	
			<i>Một số bài toán khác về đạo hàm của hàm số.</i>	

HÌNH HỌC	4	VÉC TƠ TRONG KHÔNG GIAN QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN.	<i>Các bài toán về véc tơ trong không gian.</i>	20 -
			<i>Chứng minh hai đường thẳng vuông góc.</i>	27
			<i>Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.</i>	27 - 38
			<i>Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc.</i>	
			<i>Bài toán về góc: Góc giữa hai đường thẳng, góc giữa đường thẳng và mặt phẳng; góc giữa hai mặt phẳng.</i>	
			<i>Bài toán về khoảng cách: Khoảng cách từ một điểm đến 1 đường thẳng; khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng; khoảng cách từ một đường thẳng đến một mặt phẳng; khoảng cách giữa hai mặt phẳng; khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.</i>	
			<i>Bài toán về giao điểm của một đường thẳng và một mặt phẳng; bài toán về giao tuyến của hai mặt phẳng; bài toán về thiết diện.</i>	
			<i>Một số bài toán áp dụng quan hệ vuông góc trong không gian.</i>	

PHẦN I. GIẢI TÍCH.

Chương 3: Dãy số. Cấp số cộng. Cấp số nhân

I. Lý thuyết.

1. Kiến thức.

- Trình bày được phương pháp quy nạp toán học.
- Nêu được khái niệm dãy số; cách cho dãy (công thức TQ, hệ thức truy hồi); tính tăng, giảm, bị chặn.
- Trình bày được khái niệm cấp số cộng, tính chất, số hạng tổng quát u_n , tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số cộng S_n .
- Trình bày được khái niệm cấp số nhân, tính chất, số hạng tổng quát u_n , tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân S_n .

2. Kỹ năng.

- Cách giải một số bài toán đơn giản bằng phương pháp quy nạp toán học.
- Tìm được công thức số hạng tổng quát của dãy số đơn giản. Xét được tính tăng, giảm; bị chặn của một dãy số đơn giản cho trước.
- Tìm được các yếu tố còn lại khi cho biết 3 trong 5 yếu tố u_1, u_n, n, d, S_n .
- Tìm được các yếu tố còn lại khi cho biết 3 trong 5 yếu tố u_1, u_n, n, q, S_n .

II. Bài tập.

A. Bài tập trắc nghiệm.

1) Dãy số

Câu 1. Cho mệnh đề “ $2^{n+1} > 2n + 3 (*)$, $\forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*$ ”. Để chứng minh mệnh đề đúng bằng phương pháp quy nạp, bước đầu tiên cần làm là kiểm tra (*) đúng với n bằng bao nhiêu ?

A. $n = 2$

B. $n = 2$.

C. $n = 0$.

D. $n = 3$.

Câu 2. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = (-1)^{n+1} \sqrt{n+1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $u_8 = 3$. **B.** $u_8 = -3$. **C.** $u_8 = \sqrt{8}$. **D.** $u_8 = -\sqrt{8}$.

Câu 3. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \frac{n-1}{n+2}, (n \in \mathbb{N}^*)$. Số hạng thứ 100 của dãy số là

- A.** $u_{100} = \frac{33}{34}$. **B.** $u_{100} = \frac{37}{34}$. **C.** $u_{100} = \frac{39}{34}$. **D.** $u_{100} = \frac{35}{34}$.

Câu 4. Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $u_n = \frac{2^{n-1} + 1}{n}$. Tìm số hạng thứ 3 của dãy số đã cho.

- A.** 3. **B.** $\frac{5}{3}$. **C.** 1. **D.** $\frac{7}{3}$.

Câu 5. Số 7922 là số hạng thứ bao nhiêu của dãy số (u_n) , biết $u_n = n^2 + 1$

- A.** 79. **B.** 69. **C.** 89. **D.** 99

Câu 6. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn
$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{(n+1)u_n}{3n}; \forall n \geq 1 \end{cases}$$
.

Có bao nhiêu số nguyên dương n thỏa mãn $u_n < \frac{1}{2020}$

- A.** 0 **B.** 9 **C.** vô số **D.** 5

Câu 7. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n}{3^n}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** Số hạng thứ $n+1$ của dãy số là $u_{n+1} = \frac{n}{3^{n+1}}$. **B.** Số hạng thứ $n+1$ của dãy số là $u_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}}$.
C. Số hạng thứ $n+1$ của dãy số là $u_{n+1} = \frac{n-1}{3^{n-1}}$. **D.** Số hạng thứ $n+1$ của dãy số là $u_{n+1} = \frac{n+1}{3^n}$

Câu 8. Cho dãy số $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$. Tìm số hạng thứ 5 của dãy số.

- A.** 16. **B.** 14. **C.** 12. **D.** 15.

Câu 9. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = u_2 = 1$ và $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, với mọi $n \geq 3$. Số hạng thứ 4 của dãy có giá trị là

- A.** 4. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 10. Trong các dãy số sau, dãy số nào là dãy số giảm?

- A.** $u_n = 2n$. **B.** $u_n = \frac{2n+3}{n+1}$. **C.** $u_n = n^3 - 1$. **D.** $u_n = n^2$.

Câu 11. Trong các dãy số sau đây, dãy số nào là dãy số giảm?

- A.** Dãy (a_n) , với $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$. **B.** Dãy (b_n) với $b_n = \frac{n^2 + 1}{n}$.
C. Dãy (c_n) , với $c_n = \frac{1}{n^3 + 1}$. **D.** Dãy (d_n) , với $d_n = 3 \cdot 2^n$.

Câu 12. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = (2-a)n + a - 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Dãy số (u_n) là dãy tăng khi và chỉ khi

- A. $a \leq 2$. B. $a \geq 2$. C. $a < 2$. D. $a > 2$.

Câu 13. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số tăng

- A. $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$. B. $u_n = \frac{1}{n}$. C. $u_n = \frac{n+5}{3n+1}$. D. $u_n = \frac{1}{2^n}$.

Câu 14. Dãy số nào trong các dãy số sau đây là dãy số bị chặn trên?

- A. $(u_n), u_n = n \forall n \in \mathbb{N}^*$. B. $(u_n), u_n = 2n+1 \forall n \in \mathbb{N}^*$.
C. $(u_n), u_n = n^2 \forall n \in \mathbb{N}^*$. D. $(u_n), u_n = \frac{2n+3}{n+4} \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Câu 15. Dãy số nào trong các dãy số sau đây là dãy số bị chặn dưới?

- A. $(u_n), u_n = -n \forall n \in \mathbb{N}^*$. B. $(u_n), u_n = -n^2 \forall n \in \mathbb{N}^*$.
C. $(u_n), u_n = n-1 \forall n \in \mathbb{N}^*$. D. $(u_n), u_n = -2n \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Câu 16. Dãy số nào trong các dãy số sau đây là dãy số bị chặn?

- A. $(u_n), u_n = \frac{n}{n+1} \forall n \in \mathbb{N}^*$. B. $(u_n), u_n = n+1 \forall n \in \mathbb{N}^*$.
C. $(u_n), u_n = -n \forall n \in \mathbb{N}^*$. D. $(u_n), u_n = n^2 \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Câu 17. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_n = 9-2n$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. (u_n) bị chặn. B. (u_n) tăng.
C. (u_n) giảm và bị chặn dưới. D. (u_n) giảm và bị chặn trên.

Câu 18*. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^2 \end{cases}$ Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

- A. $u_n = 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. B. $u_n = 1 + \frac{n(n-1)(2n+2)}{6}$.
C. $u_n = 1 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$. D. $u_n = 1 + \frac{n(n+1)(2n-2)}{6}$.

Câu 19*. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $(n^2 + 3n + 2)u_n = 1$ với $\forall x \in \mathbb{N}^*$ và dãy số (v_n) thỏa mãn

$$\begin{cases} v_1 = u_1 \\ v_{n+1} - u_{n+1} - v_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \text{ . Biết số hạng tổng quát } v_n \text{ được biểu diễn dưới dạng } v_n = \frac{n+a}{b.n+c} \text{ với}$$

$a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $T = a^2 - b^2 - c^2$

- A. $T = -30$. B. $T = -20$. C. $T = 20$. D. $T = -21$.

Câu 20*. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^3, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Số nguyên dương n nhỏ nhất sao

cho $\sqrt{u_n - 1} \geq 2039190$ là

- A. $n = 2017$. B. $n = 2019$. C. $n = 2020$. D. $n = 2018$.

2) Cấp số cộng.

Câu 21. Trong các dãy số sau, dãy số nào là một cấp số cộng?

A. 1, 2, 4, 8, 16, ...

B. 1, 3, 9, 27, 81, ...

C. 2, 5, 8, 11, 14, 17, ...

D. -1, -5, -25, -125, -625, ...

Câu 22. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai**?

A. Dãy số có tất cả các số hạng bằng nhau là một cấp số nhân.

B. Một cấp số cộng có công sai dương là một dãy số dương.

C. Một cấp số cộng có công sai dương là một dãy số tăng.

D. Dãy số có tất cả các số hạng bằng nhau là một cấp số cộng.

Câu 23. Công thức nào sau đây là đúng với cấp số cộng có số hạng đầu u_1 , công sai d , $n \geq 2$?

A. $u_n = u_1 + d$.

B. $u_n = u_1 + (n+1)d$.

C. $u_n = u_1 - (n-1)d$.

D. $u_n = u_1 + (n-1)d$.

Câu 24. Cho một cấp số cộng $u_1 = -\frac{1}{2}, d = \frac{1}{2}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. Dạng khai triển: $-\frac{1}{2}; 0; 1; \frac{1}{2}; 1; \dots$

B. Dạng khai triển: $-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; \dots$

C. Dạng khai triển: $\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; 2; \frac{5}{2}; \dots$

D. Dạng khai triển: $-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; \dots$

Câu 25. Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số cộng.

A. $u_n = n^2$.

B. $u_n = (-1)^n \cdot n$.

C. $u_n = 2n$.

D. $u_n = \frac{n}{3^n}$.

Câu 26. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 2; u_5 = 14$. Công sai của cấp số cộng đã cho là

A. $d = 4$.

B. $d = 12$.

C. $d = 7$.

D. $d = 3$.

Câu 27. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -3$ và công sai $d = 2$. Số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng là

A. $u_n = 2n - 5$.

B. $u_n = 3n - 5$.

C. $u_n = -2n + 3$.

D. $u_n = -3n + 2$.

Câu 28. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_9 = 47$, công sai $d = 5$. Số 10092 là số hạng thứ mấy của cấp số cộng đó?

A. 2019.

B. 2018.

C. 2016.

D. 2017.

Câu 29. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 3$ và $u_{10} = 21$. Tính giá trị u_4 ?

A. 9.

B. 3.

C. 18.

D. 10.

Câu 30. Một cấp số cộng có hai số hạng đầu tiên lần lượt là 1 và 4, hỏi số hạng thứ 5 bằng bao nhiêu?

A. 13.

B. 16.

C. 7.

D. 10.

Câu 31. Cho 3 số $x, 3, 7$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Khi đó giá trị của x là

A. $x = -4$.

B. $x = 10$.

C. $x = 4$.

D. $x = -1$.

Câu 32. Biết bốn số $5; x; 15; y$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Giá trị của $3x + 2y$ bằng

A. 30.

B. 50.

C. 80.

D. 70.

Câu 33. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_{10} = 6, u_{14} = 18$. Tổng của số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng (u_n) là

A. -24.

B. 24.

C. -18

D. 17

Câu 34. Cho cấp số nhân (u_n) với công bội nhỏ hơn 2 thỏa mãn $\begin{cases} u_9 = 8u_6 \\ u_1 + u_7 = 195 \end{cases}$. Tính tổng 11 số hạng đầu của cấp số nhân này.

- A. 195. B. 19682. C. 6141. D. 3069.

Câu 35. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 2$ và công sai $d \neq 0$. Biết u_1, u_4, u_{16} lập thành một cấp số nhân. Tính u_{10} .

- A. $u_{10} = 10$. B. $u_{10} = 16$. C. $u_{10} = 18$. D. $u_{10} = 20$.

Câu 36. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_4 + u_6 = 26 \\ 2u_3 - u_9 = -11 \end{cases}$. Tính tổng S_{2020} .

- A. $S_{2020} = 12239180$. B. $S_{2020} = 6119590$. C. $S_{2020} = 6118580$. D. $S_{2020} = 4088480$.

Câu 37. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 11; u_2 = 13$. Tính tổng $S = \frac{1}{u_1 u_2} + \frac{1}{u_2 u_3} + \dots + \frac{1}{u_{99} u_{100}}$.

- A. $S = \frac{9}{209}$. B. $S = \frac{10}{211}$. C. $S = \frac{10}{209}$. D. $S = \frac{9}{200}$.

Câu 38. Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh là $a; b; c$. Gọi p là nửa chu vi của tam giác. Biết dãy số $a; b; c; p$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Tìm cosin của góc nhỏ nhất trong tam giác đó

- A. $\frac{4}{5}$. B. $\frac{3}{4}$. C. $\frac{5}{6}$. D. $\frac{3}{5}$.

Câu 39.** Một gia đình cần khoan một cái giếng để lấy nước. Họ thuê một đội khoan giếng nước. Biết giá của mét khoan đầu tiên là 80.000 đồng, kể từ mét khoan thứ hai giá của mỗi mét khoan tăng thêm 5.000 đồng so với giá của mét khoan trước đó. Biết cần phải khoan sâu xuống 50 m mới có nước. Hỏi phải trả bao nhiêu tiền để khoan cái giếng đó?

- A. 4.000.000 đồng. B. 10.125.000 đồng. C. 52.500.000 đồng. D. 52.000.000 đồng.

Câu 40.** Litva sẽ tham gia vào cộng đồng chung châu Âu sử dụng đồng Euro là đồng tiền chung vào ngày 01 tháng 01 năm 2015. Để kỷ niệm thời khắc lịch sử này, chính quyền đất nước này quyết định dùng 122550 đồng tiền xu Litas Lithuania cũ của đất nước để xếp một **mô hình kim tự tháp**. Biết rằng tầng dưới cùng có 4901 đồng và cứ lên thêm một tầng thì số đồng xu giảm đi 100 đồng. Hỏi mô hình Kim tự tháp này có tất cả bao nhiêu tầng?



- A. 54. B. 50. C. 49. D. 55.

3) Cấp số nhân

Câu 41. Dãy số nào sau đây không phải là cấp số nhân?

- A. 1; 2; 3; 4; 5. B. 1; 2; 4; 8; 16. C. 1; -1; 1; -1; 1. D. 1; -2; 4; -8; 16.

Câu 42. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

- A.** $u_n = 7 - 3^n$. **B.** $u_n = 7 \cdot 3^n$. **C.** $u_n = \frac{7}{3n}$. **D.** $u_n = 7 - 3n$.

Câu 43. Cho cấp số nhân (u_n) , biết $u_n = 81, u_{n+1} = 9$. Lựa chọn đáp án **đúng**.

- A.** $q = \frac{1}{9}$. **B.** $q = 9$. **C.** $q = -\frac{1}{9}$. **D.** $q = 9$.

Câu 44. Trong các dãy số sau đây, dãy số nào là cấp số nhân?

- A.** Dãy số (a_n) , với $a_n = 3n - 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$. **B.** Dãy số (b_n) , với $b_n = \frac{1}{2^n - 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
C. Dãy số (c_n) , với $c_n = 2 \cdot 3^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. **D.** Dãy số (d_n) , với $d_n = 2 + 5^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Câu 45. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2, u_6 = 486$. Công bội của cấp số nhân (u_n) là

- A.** $q = -\frac{1}{3}$. **B.** $q = \frac{1}{3}$. **C.** $q = -3$. **D.** $q = 3$.

Câu 46. Cho cấp số nhân (u_n) biết $u_n = 3^n$. Công bội q bằng

- A.** 3. **B.** ± 3 . **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** -3 .

Câu 47. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2$ và $q = 2$. Tính số hạng thứ 2020.

- A.** 2^{2020} . **B.** 2^{2021} . **C.** 2^{2022} . **D.** 2^{2019} .

Câu 48. Cho cấp số nhân (u_n) có công bội $q < 0$ và $u_2 = 8, u_6 = \frac{1}{2}$. Tìm u_1 .

- A.** $\frac{1}{2}$. **B.** -16 . **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** 16.

Câu 49. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 1$ và $u_{13} = 4096$. Tính u_7 .

- A.** 64. **B.** 62. **C.** 66. **D.** 65.

Câu 50. Cho dãy số: $-1; x; -0,36$. Tìm x để dãy số đã cho theo thứ tự lập thành cấp số nhân.

- A.** $x = \pm 0,18$. **B.** $x = \pm 0,06$.
C. Không có giá trị nào của x . **D.** $x = \pm 0,6$.

Câu 51. Có bao nhiêu cấp số nhân gồm bốn phần tử mà tổng của chúng bằng 45 và số hạng thứ tư bằng bốn lần số hạng thứ 2?

- A.** 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Câu 52*. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân: $x^3 - 7x^2 + 2(m^2 + 6m)x - 8 = 0$

- A.** $m = -1$ hoặc $m = 7$. **B.** $m = 1$ hoặc $m = -7$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = -7$.

Câu 53. Tính tổng vô hạn sau: $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$

- A.** 4. **B.** $\frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2^n} - 1}{\frac{1}{2} - 1}$. **C.** 2. **D.** $2^n - 1$.

Câu 54. Cấp số nhân 5; 10; ...; 1280 có bao nhiêu số hạng?

- A.** 9 **B.** 7 **C.** 8 **D.** 10

Câu 55. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2 = -2$ và $u_5 = 54$. Tính tổng 1000 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho.

A. $S_{1000} = \frac{3^{1000} - 1}{2}$. B. $S_{1000} = \frac{1 - 3^{1000}}{4}$. C. $S_{1000} = \frac{1 - 3^{1000}}{6}$. D. $S_{1000} = \frac{3^{1000} - 1}{6}$.

Câu 56. Cho (u_n) là cấp số nhân, đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Biết $S_2 = 4, S_3 = 13$ và $u_2 < 0$, giá trị của S_6 bằng

A. $\frac{481}{64}$. B. $\frac{181}{16}$. C. $\frac{35}{16}$. D. 121.

Câu 57. Biết tổng $S = 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots = \frac{a}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{Z}; \frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính tích $a.b$

A. 9 B. 60 C. 7 D. 10

Câu 58*. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 3 \\ 2u_{n+1} = u_n + 1, \forall n \geq 1 \end{cases}$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$,

$\forall n \geq 1$. Tính S_{2020} .

A. $S_{2020} = 2024 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2018}$. B. $S_{2020} = 2020 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2019}$.

C. $S_{2020} = 2024 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2020}$. D. $S_{2020} = 2020 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2018}$.

Câu 59.** Một cơ sở khoan giếng có đơn giá như sau: giá của mét khoan đầu tiên là 50000 đồng và kể từ mét khoan thứ hai, giá của mỗi mét khoan sau tăng thêm 7% so với giá của mét khoan ngay trước đó. Tính số tiền mà chủ nhà phải trả cho cơ sở khoan giếng để khoan được 50(m) giếng gần bằng số nào sau đây?

A. 20326446. B. 21326446. C. 22326446. D. 23326446.

Câu 60.** Năm 2020, một hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là 800.000.000 đồng và dự định trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm giảm 2% giá bán so với giá bán của năm liền trước. Theo dự định đó, năm 2025 hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng nghìn)?

A. 720.000.000 đồng. B. 723.137.000 đồng. C. 700.674.000 đồng. D. 737.895.000 đồng.

B. Bài tập tự luận.

Bài 1. Chứng minh rằng bằng phương pháp quy nạp toán học với các đẳng thức sau:

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

b) $1.4 + 2.7 + \dots + n(3n+1) = n(n+1)^2 \quad (\forall n \geq 1)$

c) $1.2 + 2.5 + 3.8 + \dots + n(3n-1) = n^2(n+1)$ với mọi n dương.

Bài 2. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} \end{cases}$

a) Tìm công thức của số hạng tổng quát.

Bài 13. Cho cấp số nhân (u_n) có công bội nguyên và các số hạng thỏa mãn
$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 31 \\ u_1 + u_3 = 26 \end{cases}$$

- Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân
- Tổng của bao nhiêu số hạng đầu tiên bằng 1365?
- Số 390625 là số hạng thứ mấy của cấp số nhân?

Bài 14.

- Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số cộng biết tổng của chúng bằng 20 và tổng các bình phương của chúng bằng 120.
- Tìm số hạng đầu tiên, công sai, số hạng thứ 50 và tổng của 20 số hạng đầu tiên của cấp số cộng u_n , biết rằng
$$\begin{cases} u_5 = 19 \\ u_9 = 35 \end{cases}$$

Bài 15. Cho các số dương $a; b; c$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}; \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}; \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \text{ theo thứ tự đó cũng lập thành cấp số cộng.}$$

Bài 16. Tìm x, y biết $5x - y; 2x + 3y; x + 2y$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng và các số $(y + 1)^2; xy + 1; (x - 1)^2$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân

Bài 17. Cho a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân. Chứng minh

$$\text{a) } (ab + bc + ca)^3 = abc(a + b + c)^3 \quad \text{b) } (a^2 + b^2)(b^2 + c^2) = (ab + bc)^2$$

Bài 18.**

- Số đo bốn góc của một tứ giác lập thành cấp số nhân và góc cuối gấp 9 lần góc thứ hai. Tìm số đo của góc thứ nhất.
- Cho 3 số dương có tổng là 65 lập thành một cấp số nhân tăng. Nếu bớt một đơn vị ở số hạng thứ nhất và 19 đơn vị ở số hạng thứ ba ta được một cấp số cộng. Tìm 3 số đó.
- Ba số $x; y; z$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân với công bội q khác 1; đồng thời các số $x; 2y; 3z$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng với công sai khác 0. Tìm giá trị của q .
- Cho ba số a, b, c là ba số liên tiếp của một cấp số cộng có công sai là 2. Nếu tăng số thứ nhất thêm 1, tăng số thứ 2 thêm 1 và tăng số thứ 3 thêm 3 thì được ba số mới là ba số liên tiếp của một cấp số nhân. Tính $a + b + c$

Bài 19.

- Tìm m để phương trình $x^4 - 20x^2 + (m - 1)^2 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng.
- Tìm giá trị của m để phương trình $(x^2 + 2x - 3)(x - 2m) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng có công sai lớn hơn 2.

Bài 20. Tìm m để phương trình $x^3 - (3m + 1)x^2 + (5m + 4)x - 8 = 0$ (1) có 3 nghiệm lập thành một cấp số nhân

Bài 21. Chứng minh rằng: Nếu phương trình $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ có ba nghiệm lập thành cấp số cộng thì $9ab = 2a^3 + 27c$.

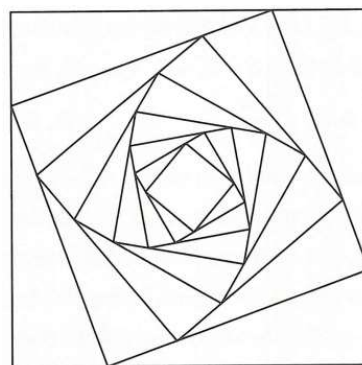
Bài 22. Tính các tổng sau

$$\text{a) } S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} \quad \text{b) } S_n = \left(3 + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(9 + \frac{1}{9}\right)^2 + \dots + \left(3^n + \frac{1}{3^n}\right)^2$$

c) $S_n = 1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{111\dots1}_{n \text{ số } 1}$ d) $S_n = 6 + 66 + 666 + \dots + \underbrace{666\dots6}_{n \text{ số } 6}$

Bài 23.** Cho hình vuông (C_1) có cạnh bằng a . Người ta chia mỗi

cạnh của hình vuông thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông (C_2) như hình vẽ. Từ hình vuông (C_2) lại tiếp tục làm như trên ta nhận được dãy các hình vuông $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$. Gọi S_i là diện tích của hình vuông C_i ($i \in \{1, 2, 3, \dots\}$). Đặt $T = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n + \dots$



Biết $T = \frac{32}{3}$, tìm giá trị của a .

Bài 24*. Cho $x^2; \frac{1}{2}; y^2$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ

nhất của biểu thức $P = \sqrt{3}xy + y^2$.

Chương 4: Giới hạn

I. Lý thuyết.

1. Kiến thức.

- Nêu được khái niệm giới hạn của dãy số (qua ví dụ). Biết các định lý về giới hạn hữu hạn của dãy số. Các qui tắc tìm giới hạn vô cực. Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn
- Nêu được khái niệm giới hạn của hàm số, giới hạn một bên. Ghi nhớ và vận dụng được các định lý về giới hạn hữu hạn của hàm số. Các dạng giới hạn vô định
- Nêu được khái niệm hàm số liên tục. Định lý về tổng, hiệu, tích, thương các hàm số liên tục. Tính liên tục hàm đa thức, phân thức hữu tỷ. Định lý (giá trị trung gian) và ý nghĩa hình học.

2. Kỹ năng.

- Sử dụng các kiến thức trên tìm giới hạn của dãy số. Tìm tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn.
- Trong một số trường hợp đơn giản, tính được:
 - +) Giới hạn của hàm số tại một điểm; Giới hạn một bên; Giới hạn của hàm số tại $\pm\infty$.
 - +) Giới hạn dạng $\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; \infty - \infty; 0 \cdot \pm\infty$.
- Ứng dụng các định lý nói trên xét tính liên tục của một hàm số đơn giản. Chứng minh một phương trình có nghiệm dựa vào định lý giá trị trung gian.

II. Bài tập.

A. Bài tập trắc nghiệm.

4) Giới hạn dãy số

Câu 61. Trong các dãy số sau, dãy số nào là dãy có giới hạn 0?

A. $u_n = \frac{n^3 + n}{n^2 + 2}$. B. $u_n = \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 2n + 3}$. C. $u_n = \frac{n^2 + 2n - 1}{n^2 - n^3}$. D. $u_n = \frac{3 - n^2}{n^2 + 1}$.

Câu 62. Cho dãy (u_n) có $\lim u_n = 3$, dãy (v_n) có $\lim v_n = 5$. Khi đó $\lim(u_n \cdot v_n) = ?$

A. 15. B. 8. C. 5. D. 3.

Câu 63. Cho $\lim u_n = a > 0$, $\lim v_n = 0$, ($v_n > 0, \forall n$). Giới hạn $\lim \frac{u_n}{v_n}$ bằng?

- A. 0. B. $+\infty$. C. $-\infty$. D. $\pm\infty$.

Câu 64. Tính $\lim \frac{\cos n}{n}$.

- A. 1. B. 0. C. $+\infty$. D. Không tồn tại

Câu 65. Cho $\lim u_n = -3$; $\lim v_n = 2$. Khi đó $\lim(u_n - v_n)$ bằng

- A. -5. B. -1. C. 5. D. 1.

Câu 66. Cho $\lim u_n = 5$, $\lim v_n = 13$ và $\lim(u_n + kv_n) = 2007$. Khi đó k bằng

- A. $\frac{2002}{5}$. B. 398. C. $\frac{2007}{13}$. D. 154.

Câu 67. Tính giới hạn sau đây $\lim \frac{2n^2 + 1}{n^3 - 3n + 3}$.

- A. $\frac{1}{3}$. B. 2. C. 0. D. $+\infty$.

Câu 68. Tính $\lim \frac{2^n - 3 \cdot 5^n}{4 \cdot 3^n - 5^n}$.

- A. $-\frac{3}{4}$. B. 3. C. $\frac{1}{4}$. D. $-\frac{2}{5}$.

Câu 69. Dãy nào sau đây có giới hạn khác $+\infty$?

- A. $\left(\frac{2020}{2019}\right)^n$. B. $(n)^{2019}$. C. $\left(\frac{2019}{2018}\right)^n$. D. $\frac{1}{n^{2020}}$.

Câu 70. Cho a, b là các số thực thỏa mãn $\lim \frac{an^3 + bn^2 + 2n + 4}{n^2 + 1} = 1$. Tổng $2a + b$ bằng

- A. 4. B. 1. C. 3. D. 5.

Câu 71. Biết $\lim \left(\sqrt{4n^2 + 5n - 2020} - \sqrt{4n^2 - 3n + 2019} \right) = a_0$. Giá trị biểu thức $T = \frac{a_0 + 2}{a_0 + 1}$ bằng

- A. $T = \frac{3}{2}$. B. $T = \frac{5}{3}$. C. $T = 2$. D. $T = \frac{4}{3}$.

Câu 72. Biết giới hạn $\lim \left[n \left(\sqrt{n^2 + 3} - \sqrt{n^2 + 2} \right) \right] = \frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó, giá trị $2a + b$ bằng

- A. 4. B. 3. C. 5. D. 8.

Câu 73*. Tính giới hạn: $\lim \left[\left(1 - \frac{1}{2^2} \right) \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \right]$.

- A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{1}{2}$. C. 1. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 74*. Tính $\lim \left(\frac{1}{n^2 + 4} + \frac{2}{n^2 + 4} + \frac{3}{n^2 + 4} + \dots + \frac{2n + 4}{n^2 + 4} \right)$.

- A. $\frac{1}{2}$. B. 0. C. 1. D. 2.

- Câu 75*.** Cho dãy số $\{u_n\}$: $\begin{cases} u_1 = 2020 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 5}{2(u_n + 2)} \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Khẳng định nào sau đây **sai** về dãy $\{u_n\}$:
- A.** $\{u_n\}$ là dãy số giảm. **B.** $\{u_n\}$ bị chặn dưới. **C.** $\lim u_n = \frac{5}{4}$. **D.** $\lim u_n = 1$.

5) Giới hạn của hàm số

Câu 76. Chọn khẳng định đúng:

- A.** $\lim_{x \rightarrow x_0} c = x_0$
B. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$
C. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$
D. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$
- Câu 77.** Giả sử ta có $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A.** $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = a \cdot b$. **B.** $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = a - b$.
C. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$. **D.** $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = a + b$.

Câu 78. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để $I < 12$ biết $I = \lim_{x \rightarrow -1} (x^4 - 2mx + m^2 + 3)$.

- A.** 6. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 7.

Câu 79. Cho giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 2ax + 3 + a^2) = 3$ thì a bằng bao nhiêu?

- A.** $a = 2$. **B.** $a = 0$ **C.** $a = -2$. **D.** $a = -1$.

Câu 80. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 7$ thì $\lim_{x \rightarrow 3} [10 - 2f(x)]$ bằng bao nhiêu?

- A.** -4. **B.** 4 **C.** 10. **D.** -14.

Câu 81. Cho a, b là các số nguyên và $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 + bx - 5}{x - 1} = 20$. Tính $P = a^2 + b^2 - a - b$

- A.** 400 **B.** 225 **C.** 325 **D.** 320

Câu 82. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 4x}$ bằng

- A.** 1. **B.** -1. **C.** $\frac{5}{4}$. **D.** $-\frac{5}{4}$.

Câu 83. Biết $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{2x+1} - 1} = \frac{a}{b}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.** $a + b = 3$. **B.** $a + b = -3$. **C.** $a + b = 2$. **D.** $a + b = 1$.

Câu 84. Tìm giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{5-2x} - \sqrt[3]{7-3x}}{(x-2)(x^2-4)}$ ta được giá trị của L là:

A. $L = \frac{1}{12}$

B. $L = \frac{1}{8}$

C. $L = -\frac{1}{8}$

D. $\frac{1}{4}$

Câu 85. Cho $f(x)$ là đa thức thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 8}{x - 3} = 6$. Tính $L = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{f(x) - 7} - 1}{x^2 - 2x - 3}$.

A. $L = \frac{3}{4}$.

B. $L = \frac{3}{2}$.

C. $L = \frac{1}{2}$.

D. $L = \frac{1}{4}$.

Câu 86. Cho đa thức $P(x)$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{P(x) - 2}{x - 3} = 2$. Tính $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{P(x) - 2}{(x^2 - 9)(\sqrt{P(x) + 2} + 1)}$

A. $\frac{1}{6}$.

B. $\frac{1}{12}$.

C. $\frac{1}{9}$.

D. $\frac{2}{9}$.

Câu 87. Giả sử $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2020}{1 - x^{2020}} - \frac{2019}{1 - x^{2019}} \right) = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản, khi đó $a + b$ có giá trị là

A. 3

B. 4

C. 2

D. 1

Câu 88. Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 3} + 5x}{3x + 10}$ ta được kết quả là

A. 2

B. $\frac{5}{3}$

C. $\frac{4}{3}$

D. $-\frac{1}{3}$

Câu 89. Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng -1 ?

A. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$.

B. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^2 + 3}{5x^2 - x^3}$.

C. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 3}{x^2 - 5x}$.

D. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x - 1}{3x + x^2}$.

Câu 90. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $c^2 + a = 18$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{ax^2 + bx - cx}) = -2$. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b + 5c$.

A. 9.

B. 5.

C. 18.

D. 12.

Câu 91. Biết rằng $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x^2 + x} - x\sqrt{2}) = a\sqrt{2} + b$. Tính $S = 4a + b$

A. $S = 5$.

B. $S = 1$.

C. $S = -1$.

D. $S = -5$.

Câu 92. Tính $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x + 7}{x - 3}$.

A. $+\infty$.

B. $-\infty$.

C. 0.

D. 2.

Câu 93. Chọn kết quả đúng của $\lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^5 - 3x^3 + x + 1)$

A. 4.

B. 0.

C. $+\infty$.

D. $-\infty$.

Câu 94. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 2x + 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$.

B. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3$.

C. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$.

D. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$.

Câu 95. Tính $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{|x^2-5x+6|}$?

- A. -1 . B. $\frac{-1}{2}$. C. $\frac{1}{2}$. D. 1

6) HÀM SỐ LIÊN TỤC

Câu 96. Chọn khẳng định sai:

- A. Hàm số đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$.
B. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a; b)$.
C. Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
D. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.

Câu 97. Hàm số nào sau đây liên tục tại $x = 2$?

- A. $f(x) = \frac{2x^2 + 6x + 1}{x + 2}$. B. $f(x) = \frac{x + 1}{x - 2}$. C. $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x - 2}$. D. $f(x) = \frac{3x^2 - x - 2}{x^2 - 4}$.

Câu 98. Cho hàm số $f(x) = \frac{2x+3}{x-2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

- A. Hàm số liên tục trên khoảng $(1; 5)$. B. Hàm số gián đoạn tại $x = 2020$
C. Hàm số liên tục tại $x = 2$ D. Hàm số gián đoạn tại $x = 2$

Câu 99. Trong các hàm số sau, hàm số nào liên tục trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 + 2}$. B. $y = \frac{x - 3}{1 - \cos x}$. C. $y = \frac{2x^3 - 5x^2 + 6}{|x + 1|}$. D. $y = \tan 3x$.

Câu 100. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 5x + 6}$. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-3; 2)$. B. $(-3; +\infty)$. C. $(-\infty; 3)$. D. $(2; 3)$.

Câu 101. Trong các hàm số sau đây, có bao nhiêu hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

1) $y = 3x^3 - x^2 + x - 1$. 2) $y = \cos 2x - \tan x$. 3) $y = \sin^2 x + x + 2020$. 4) $y = \frac{\sin x}{x}$.

5) $y = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 2}$. 6) $y = \sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+2}$. 7) $y = \frac{x-2}{2x^2 - x + 1}$.

- A. 1 . B. 2 . C. 3 . D. 4 .

Câu 102. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} 1-2x & \text{khi } x \neq 0 \\ 2 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 0$. B. Hàm số $f(x)$ liên tục tại -1 .
C. Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. D. Hàm số $f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$.

Câu 103. Hàm số $f(x) = \sqrt{3+x} + \sqrt{4-x}$ liên tục trên

A. $(-3;10)$.

B. $[-3;4]$.

C. $[-3;+\infty)$.

D. $(-\infty;4]$.

Câu 104. Cho các hàm số $y = x^2$; $y = \sin x$; $y = \tan x$; $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + x + 1}$. Có bao nhiêu hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

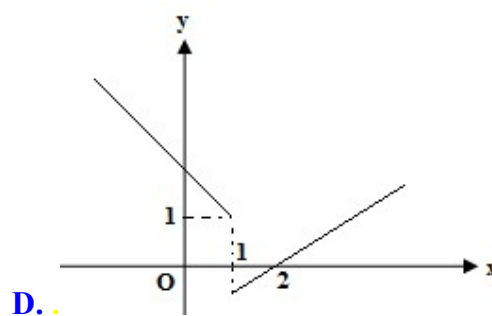
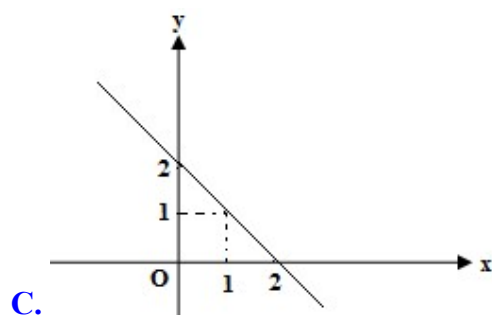
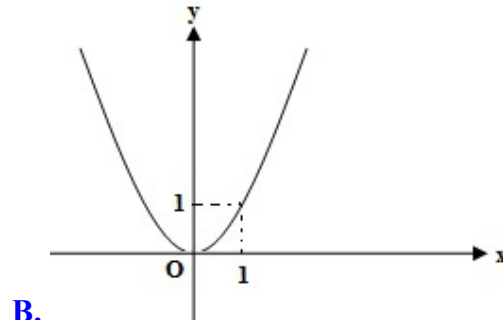
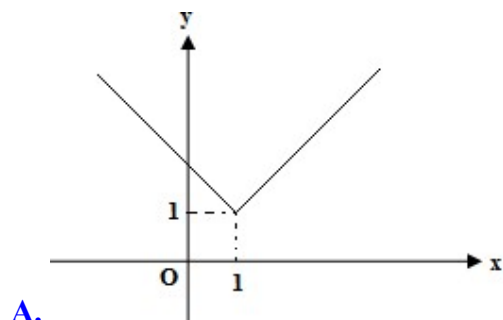
A. 4.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Câu 105. Hình nào trong các hình dưới đây là đồ thị của hàm số không liên tục tại $x = 1$?



Câu 106. Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 1 & \text{khi } x > 1 \\ 2x^2 - x + 3a & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $\frac{1}{2}$.

B. $-\frac{1}{2}$.

C. $-\frac{1}{6}$.

D. 1.

Câu 107. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 2a + 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Tìm giá trị của tham số a để hàm số $f(x)$

liên tục tại $x = 1$.

A. $a = 4$.

B. $a = 1$.

C. $a = 0$.

D. $a = 3$.

Câu 108. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ k & \text{khi } x = 2 \end{cases}$. Tìm k để hàm số liên tục trên tập $\mathbb{R}$.

A. $k = -2$.

B. $k = 0$.

C. $k = 2$.

D. $k = 4$.

Câu 109. Cho $f(x) = \begin{cases} a & \text{khi } x = 2 \\ x + 1 & \text{khi } x \in (2; 3) \\ b & \text{khi } x = 3 \end{cases}$. Giá trị của a, b để hàm số liên tục trên đoạn $[2; 3]$ là

A. $a = 2, b = 3$.

B. $b = 3, a = 4$.

C. $a = 3, b = 2$.

D. $a = 3, b = 4$.

Câu 110. Cho hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x + 3} - \sqrt[3]{13x + 1}}{x - 2}$ ($x \neq 2$). Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì phải

bổ sung thêm $f(2) = \frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}^+; (a, b) = 1$). Khi đó $H = b - a$ chia hết cho số nào sau đây?

- A. 8. B. 6. C. 4. D. 5.

Câu 111. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2, & x > 1 \\ 3x^2 + 6, & x < 1 \\ 4a^2 + 5, & x = 1 \end{cases}$. Tìm a để hàm số gián đoạn tại điểm $x_0 = 1$.

- A. 1. B. ± 1 . C. -1. D. ± 2 .

Câu 112. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

I. $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm.

II. $f(x)$ không liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a).f(b) \geq 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm.

- A. Chỉ I đúng. B. Chỉ II đúng. C. Cả I và II đúng. D. Cả I và II sai.

Câu 113. Cho phương trình $3x^3 + 2x - 2 = 0$. Xét phương trình $f(x) = 0$ (1), trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng?

- A. (1) vô nghiệm. B. (1) có nghiệm trên khoảng $(1; 2)$.
C. (1) có 4 nghiệm trên $\mathbb{R}$. D. (1) có ít nhất một nghiệm.

Câu 114. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 5]$ và $f(1) = 2, f(5) = 10$. Khẳng định nào sau đây **ĐÚNG** ?

- A. Phương trình $f(x) = 6$ vô nghiệm.
B. Phương trình $f(x) = 7$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(1; 5)$.
C. Phương trình $f(x) = 2$ có hai nghiệm $x = 1, x = 5$.
D. Phương trình $f(x) = 7$ vô nghiệm.

Câu 115. Cho phương trình: $(m^2 - 4)(x - 1)^{2020} = 2019.\sqrt{4 - x}$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình trên vô nghiệm?

- A. 5 B. 3 C. 4 D. 1

B. Bài tập tự luận.

Bài 26. Tính giới hạn của các dãy số sau

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n^2 + 4n + 1}{2n^2 - 3n + 7}$.

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin 2n}{2n^3 + 1}$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^2 + 2n} - 2n}{n} \right)$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n^2 + n) - n^2 + 1}{(n+1)(n^2 + 2) - 3n^3}$.

$$5) \lim \frac{3^n - 4^n}{3^n + 4^n}.$$

$$6) \lim \left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right)$$

$$7) \lim \frac{1+2+\dots+n}{n^2+3n}$$

$$8) \lim \frac{1+2+2^2+\dots+2^n}{1+3+3^2+\dots+3^n}$$

Bài 27. Tìm giới hạn của hàm số

$$1) A = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \tan x + 1}{\sin x + 1}$$

$$2) B = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$$

$$3) C = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^3 - 8}$$

$$4) D = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+5x)^3 - (1-6x)^4}{x}$$

$$5) E = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{x}$$

$$6) F = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\sqrt{3x+1} - 1)}{x}$$

$$7) G = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x}{\sqrt{4x+1} - 1}$$

$$8) H = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{3x+1} - 4}{3 - \sqrt{x+4}}$$

$$9) K = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x+1} + 1}{x+2}$$

$$10) L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+4x} - \sqrt[3]{1+6x}}{x^2}$$

Bài 28.** Tìm các giới hạn sau: (**Bài tập của chương 5**)

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan(x-1)}{x-1}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x \cdot \sin 5x}{x^2}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 4x}{\cos 5x - \cos 6x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1+2\sin 2x}}{\sin 3x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^4 2x}{\sin^4 3x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 5 \sin 2x + \cos^2 x}{x^2 + 2}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{2}{nx}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[n]{\cos ax}}{x^2}$$

Bài 29. Cho $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$. Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) + 1}{f^2(x) + 1}$.

Bài 30. Cho biết $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\sqrt{1+ax^2} - bx - 2}{4x^3 - 3x + 1} = c$, với c là một số nguyên và $a, b \in \mathbb{R}$. Phương trình

$ax^4 - 2bx^2 + c - 1 = 0$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm trên $\mathbb{R}$?

Bài 31. Tìm các giới hạn sau:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + 1})$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{3x^2 + 2}}{5x + \sqrt{x^2 + 2}}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{4x^2 + 1} - x)$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{1+x^4+x^6}}{\sqrt{1+x^3+x^4}}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^4 + x^2 - 3).$$

$$6) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x^2 + 2} - \sqrt{2x^2 - 3x}).$$

$$7) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 - x^2 + 3}}{2|x|\sqrt{4x^2 + 5}}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{4x^2 + x + 1} - 2x}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 3x - 2} + 2x)$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|1 - x|}{x^3 - 1}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{x^3 + x^2}}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 2^-} (x - 2) \sqrt{\frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 - 2x}}$$

Bài 32. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}, & \text{khi } x > 3 \\ m & \text{khi } x \leq 3 \end{cases}$ có giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x).$$

Bài 33. Xét tính liên tục của hàm số tại điểm tương ứng.

a) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 27}{x^2 - x - 6} & \text{khi } x \neq 3 \\ \frac{27}{5} & \text{khi } x = 3 \end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số tại điểm $x=3$.

b) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1} & \text{khi } x \neq -1 \\ 2, & \text{khi } x = -1 \end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số trên toàn bộ tập xác định.

c) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{\sqrt{2x+3}-3} & \text{khi } x < 3 \\ (x-1)^2 & \text{khi } x \geq 3 \end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số tại điểm $x=3$.

d) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 1 \\ \frac{2x^3}{1+x}, & 0 \leq x < 1 \\ x \sin x, & x < 0 \end{cases}$. Xét tính liên tục trên $\mathbb{R}$.

Bài 34. a) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} & \text{khi } x \neq 3 \\ 3m-2 & \text{khi } x = 3 \end{cases}$. Xác định m để hàm số liên tục tại điểm $x=3$.

b) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4} & \text{khi } x \neq 4 \\ a+2 & \text{khi } x = 4 \end{cases}$. Xác định a để hàm số liên tục tại điểm $x=4$.

c) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{a^2(x-2)}{\sqrt{x+2}-2} & \text{khi } x > 2 \\ (1-a)x & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$. Tìm a để hàm số liên tục trên tập xác định.

d) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^3 + 1} & \text{khi } x < -1 \\ m^2x^2 + 2mx - 5 & \text{khi } x \geq -1 \end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại $x = -1$

Bài 35. Chứng minh rằng mỗi phương trình sau thỏa mãn điều kiện chỉ ra

a) Phương trình $4x^4 + 2x^2 - x - 3 = 0$ có ít nhất hai nghiệm phân biệt thuộc $(-1; 1)$.

b) Phương trình $x^3 - 3x + 1 = 0$ có đúng ba nghiệm phân biệt.

c) Phương trình $x^4 - x - 3 = 0$ có một nghiệm thuộc khoảng $(1; 2)$.

d) Phương trình $x^3 + 2x = 4 + 3\sqrt{3-2x}$ có đúng một nghiệm.

e*) Phương trình $(m^2 - 5x + 6)(x + 5)^{2019} (x^{2020} + 2x) + 2x - 1 = 0$ có ít nhất 1 nghiệm với $\forall m$.

Chương 5: Đạo hàm

I. Lý thuyết.

1. Kiến thức.

- Nêu được định nghĩa đạo hàm (tại một điểm, trên một khoảng), ý nghĩa hình học và ý nghĩa cơ học. Nhớ và áp dụng được quy tắc tính đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương các hàm số; hàm hợp và đạo hàm của hàm hợp.

- Dãy số, cấp số cộng, cấp số nhân. Giới hạn của hàm số, hàm số liên tục. Đạo hàm của hàm số. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số.

- Nhớ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ và vận dụng trong một số giới hạn dạng $\frac{0}{0}$. Nhớ và vận dụng được công thức

tính đạo hàm của hàm số lượng giác vào làm bài tập.

- Nhớ được $dy = y'.dx$. Ghi nhớ định nghĩa đạo hàm cấp cao.

2. Kỹ năng.

- Tính được đạo hàm của hàm số. Viết được phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại một điểm thuộc đồ thị. Biết tìm tốc độ tức thời tại một thời điểm của một chuyển động có phương trình $S = f(t)$.

- Tính được đạo hàm của một số hàm số lượng giác và một số giới hạn của hàm số lượng giác.

- Tính được vi phân của một hàm số và giá trị gần đúng của hàm số tại một điểm nhờ vi phân. Tính được đạo hàm cấp cao của một số hàm số. Tính được gia tốc tức thời của một chuyển động có phương trình $S = f(t)$ cho trước.

II. Bài tập.

A. Bài tập trắc nghiệm.

Câu 116. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục tại x_0 . Đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại x_0 là

A. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ (nếu tồn tại giới hạn). **B.** $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

C. $f(x_0)$.

D. $\lim_{h \rightarrow x_0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ (nếu tồn tại giới hạn).

Câu 117. Nếu $f(x)$ là các hàm số có đạo hàm và $f'(1) = 2$, thì giá trị $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ bằng.

A. $\frac{1}{2}$.

B. 2.

C. 4.

D. $y = \frac{1}{4}$.

Câu 118. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ bởi $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - 3x + 2}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$. Tính $f'(1)$

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. Không tồn tại.

Câu 119. Cho $f(x) = \cos 3x$. Tính $f'\left(-\frac{\pi}{3}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

A. 3.

B. -3.

C. 0.

D. 6.

Câu 120. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{2x^2 + 1}$.

A. $y' = -\frac{2x}{2\sqrt{2x^2 + 1}}$.

B. $y' = \frac{2x}{2\sqrt{2x^2 + 1}}$.

C. $y' = -\frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 1}}$.

D. $y' = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 1}}$.

Câu 121. Tính đạo hàm của hàm số $y = 2x^2 + \frac{x^3 - 3x^2}{x - 3}$ với $x \neq 3$.

A. $4x$.

B. $2x$.

C. $6x$.

D. x^2 .

Câu 122. Hàm số $y = \frac{ax - b}{cx + d}$ (c, d không đồng thời bằng 0) có đạo hàm được tính bằng công thức:

A. $y' = \frac{ad + bc}{(cx + d)^2}$.

B. $y' = \frac{ab - cd}{(cx + d)^2}$.

C. $y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$.

D. $y' = \frac{a + b}{(cx + d)^2}$.

Câu 123. Cho $\left(\frac{x^2 - x - 3}{2x - 1}\right)'' = \frac{a}{(2x - 1)^b}$. Tính $S = a + b$?

A. $S = 29$.

B. $S = -23$.

C. $S = -22$.

D. $S = 30$.

Câu 124. Đạo hàm của hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 1}{-x^2 - 1}$ có dạng $\frac{ax^2 + bx + c}{(-x^2 - 1)^2}$. Tổng các nghiệm của

phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ bằng bao nhiêu?

A. 1.

B. -1.

C. 0.

D. 2.

Câu 125. Cho $\left(\frac{2 - 3x}{\sqrt{6x - 1}}\right)' = \frac{ax - b}{(6x - 1)\sqrt{6x - 1}}$, với $b \neq 0$. Tính $A = \frac{a}{b}$.

A. $A = 1$.

B. $A = -3$.

C. $A = \frac{1}{3}$.

D. $A = -\frac{1}{3}$.

Câu 126. Cho hàm số $y = x^2(2x + 1)(5x - 3)$ có đạo hàm $y' = ax^3 + bx^2 + cx$. Khi đó $a + 10b + c$ bằng

A. 4.

B. 31.

C. 51.

D. 34.

Câu 127. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(\pi) = 219$. Đạo hàm của hàm số $g(x) = \sin 2x \cdot f(x)$ tại $x = \pi$ bằng

A. 219.

B. 438.

C. 220.

D. 436.

Câu 128. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x+2}$ có đạo hàm là $f'(x)$, hàm số $g(x) = 4x + \sin \frac{\pi x}{4}$ có đạo hàm là $g'(x)$. Tính giá trị biểu thức $P = f'(2) \cdot g'(2)$.

A. $P = 1$.

B. $P = \frac{\pi+16}{16}$.

C. $P = \frac{1}{4}$.

D. $P = \frac{\pi}{16}$.

Câu 129. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{-2x^2 + 3x}{1-x}$. Tính đạo hàm cấp 2 của hàm số tại $x = 2$.

A. $y''(2) = 2$.

B. $y''(2) = -2$.

C. $y''(2) = 3$.

D. $y''(2) = -3$.

Câu 130. Cho $f(x) = (x-2)^5$. Tính $f''(3)$.

A. -20.

B. 20.

C. 27.

D. -27.

Câu 131. Cho hàm số $y = 2 \sin 2x - 2x + 1$. Tập nghiệm của phương trình $y' = 0$ trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là:

A. $S = \left\{\frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{12}\right\}$.

B. $S = \left\{\frac{\pi}{12}\right\}$.

C. $S = \left\{\frac{\pi}{6}\right\}$.

D. $S = \{\emptyset\}$.

Câu 132. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$. Gọi S là tập nghiệm của bất phương trình $f'(x) \geq f(x)$. Tập S có bao nhiêu phần tử là các số nguyên?

A. 2.

B. 0.

C. 3.

D. 1.

Câu 133. Cho hàm số $f(x) = 2x + \frac{5}{x} - \frac{2}{3x^3} + 2$. Phương trình $f'(x) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Câu 134. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - (m-2)x^2 - (2m-3)x + 2020$, biết rằng tồn tại giá trị m sao cho $f'(x) \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$, khi đó m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(0; 2)$.

B. $(-3; -1)$.

C. $(3; 6)$.

D. $(-4; -2)$.

Câu 135. Cho hàm số $f(x) = \sin x + \cos x + \sqrt{2}x - 2019$. Tập nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ là

A. $\left\{\frac{-3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. B. $\left\{\frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. C. $\left\{\frac{-\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. D. $\left\{\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 136. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1, & x \geq 0 \\ ax - b - 1, & x < 0 \end{cases}$. Khi hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x_0 = 0$. Hãy tính $T = a + 2b$.

A. $T = -4$.

B. $T = 0$.

C. $T = -6$.

D. $T = 4$.

Câu 137. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = t^3 - 3t^2$ (t tính bằng giây, s tính bằng mét). Tìm mệnh đề đúng.

- A. Vận tốc của chuyển động khi $t = 3s$ là 24 m/s .
B. Gia tốc của chuyển động khi $t = 4s$ là 9 m/s^2 .
C. Vận tốc của chuyển động khi $t = 3s$ là 12 m/s .
D. Gia tốc của chuyển động khi $t = 4s$ là 18 m/s^2 .

Câu 138. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ tại điểm có hoành độ $x = -3$ là

- A. $y = 3x + 13$. B. $y = -3x - 5$. C. $y = -3x + 13$. D. $y = 3x + 5$.

Câu 139. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-3}$ có đồ thị là (C) và điểm M thuộc (C) có hoành độ bằng 2.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M có dạng $y = ax + b$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Tính $P = a + 2b$.

- A. $P = -31$. B. $P = 31$. C. $P = 11$. D. $P = -5$.

Câu 140. Tìm phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = 8x + 2$.

- A. $y = 8x + \frac{11}{3}, y = 8x - \frac{97}{3}$. B. $y = 8x + \frac{1}{3}, y = 8x - \frac{7}{3}$.
C. $y = 8x + \frac{2}{3}, y = 8x$. D. $y = -\frac{1}{8}x + \frac{11}{3}, y = -\frac{1}{8}x - \frac{97}{3}$.

Câu 141. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ có đồ thị (C) . Tìm phương trình tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $A(-1; 0)$.

- A. $y = \frac{3}{4}(x+1)$. B. $y = \frac{3}{4}x$. C. $y = 3(x+1)$. D. $y = 3x + 1$.

Câu 142. Lập phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn

$$f^2(3-2x) = x-1-f^3(x) \text{ tại điểm có hoành độ } x=1.$$

- A. $y = \frac{1}{7}x - \frac{8}{7}$. B. $y = \frac{1}{7}x - 1$. C. $y = \frac{1}{7}x + 1$. D. $y = \frac{1}{7}x + \frac{8}{7}$.

Câu 143. Cho đồ thị hàm số $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có

hoành độ x_1, x_2, x_3 . Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} + \frac{1}{f'(x_3)}$.

- A. $P = 3 + 2b + c$. B. $P = 0$. C. $P = b + c + d$. D. $P = \frac{1}{2b} + \frac{1}{c}$.

Câu 144. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}}$, $x \geq -1$. Gọi $S = f'(1) + f'(2) + \dots + f'(2020)$.

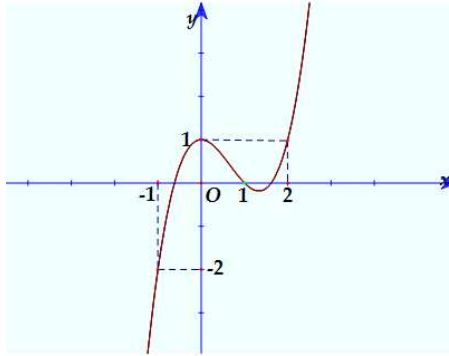
Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $0 < S < \frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{2} < S < 1$. C. $S > 1$. D. $S < 0$.

Câu 145. Cho đa thức $f(x) = (1+2x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Tìm hệ số a_2 , biết rằng $a_1 + 2a_2 + \dots + na_n = 13122n$.

- A. $a_2 = 756$. B. $a_2 = 252$. C. $a_2 = 2268$. D. $a_2 = 144$.

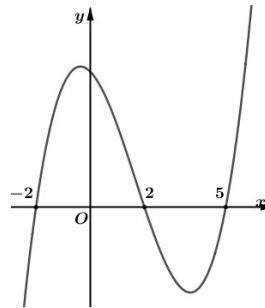
Câu 146. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới



Đặt $g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 2$. Số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ là

- A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.

Câu 147. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới



Đạo hàm của hàm số $g(x) = f(3-2x)$ nhận giá trị âm trên khoảng nào trong các khoảng sau?

- A. $(0; 2)$. B. $(1; 3)$. C. $(-\infty; -1)$. D. $(-1; +\infty)$.

Câu 148. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(3x-1) = x^2 - 4x + 4$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tính $f'(-4)$.

- A. 2. B. $-\frac{2}{3}$. C. -2. D. -12.

Câu 149. Cho hàm số $y = f(x)$ và tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x_A; x_B; x_C; x_D$ như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây là SAI?

A. $f'(x_A) < 0; f'(x_D) > 0$. **B.** $f'(x_A).f'(x_B).f'(x_C) = 0$.

C. $f'(x_A).f'(x_B).f'(x_D) > 0$.

D. $f'(x_A).f'(x_B).f'(x_C).f'(x_D) > 0$.

Câu 150. Cho hai hàm số $y = f(x)$, $y = f(f(x))$ có đồ thị lần lượt là (C) và (C') . Đường thẳng $x = 2$ cắt (C) , (C') lần lượt tại M và N . Biết phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm M là $y = 2x - 2$. Khi đó phương trình tiếp tuyến của (C') tại điểm N là

A. $y = 2x - 6$.

B. $y = 4x - 6$.

C. $y = 2x - 2$.

D. $y = 4x - 8$.

B. Bài tập tự luận.

Bài 36. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

1) $y = \frac{1}{2}x^5 + \frac{2}{3}x^4 - x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x - 5$.

2) $y = x^5 - 4x^3 + 2x - 3\sqrt{x}$.

3) $y = \frac{1 - 4x + x^2}{x^3}$

4) $y = (x - 2\sqrt{x})^3$

5) $y = (x^2 + x)(x^3 - 2)$.

6) $y = (x^2 + 2)(x^2 + 3)(x^2 + 4)(x^2 + 5)$

7) $y = \frac{2x + \sqrt{x}}{4 + 3\sqrt{x}}$.

8) $y = \frac{x^2 + 2x + 8}{2x + 3}$

9) $y = \frac{1}{(x^2 - x + 1)^5}$

10) $y = \sqrt{x^2 + 5x + 9}$

11) $y = \sqrt{\frac{x^3}{x+1}}$

12) $y = (4x + 3)\sqrt{x^2 - 2x + 2}$.

13) $y = \sin 2x + \cos 5x$

14) $y = \sin x \cdot \cos 4x$

15) $y = \cos^6 x + 2\sin^4 x \cdot \cos^2 x + 3\sin^2 x \cdot \cos^4 x + \sin^4 x$.

16) $f(x) = \sqrt{\tan x + \cot x}$

Bài 37. Tìm a, b để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{khi } x \geq 2 \\ ax + b & \text{khi } x < 2 \end{cases}$ có đạo hàm tại $x = 2$

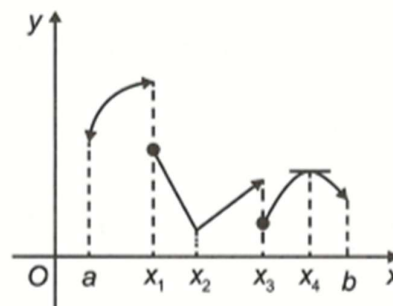
Bài 38.

Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ như hình vẽ.

Dựa vào hình vẽ hãy cho biết tại mỗi điểm x_1, x_2, x_3, x_4 .

a) Hàm số có liên tục không?

b) Hàm số có đạo hàm không?



Tính đạo hàm nếu có.

Bài 39.

- a) Cho hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$. Chứng minh $y^3 \cdot y'' + 1 = 0$.
- b) Cho hàm số $y = \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{1 - \sin x \cdot \cos x}$. Chứng minh $y'' + y = 0$.
- c) Cho hàm số $y = x \sin x$. Chứng minh $x \cdot y'' - 2(y' - \sin x) + xy = 0$.

Bài 40. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (2m+1)x^2 + mx - 4$. Tìm m để:

- a) $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.
- b) y' có thể viết được thành bình phương của nhị thức.
- c) $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- d) $y' < 0, \forall x \in (1; 2)$.
- e) $y' > 0, \forall x > 0$.

Bài 41.

- 1) Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$. Giải bất phương trình $f'(x) \leq f(x)$.
- 2) Giải phương trình $f'(x) = 0$ trong các trường hợp sau
 - a) $f(x) = \sin 3x - 3 \sin x + 7$;
 - b) $f(x) = \cos 2x + 2 \sin x - 1$.
- 3) Cho hàm số $y = \frac{2x+4}{x^2+4x+3}$. Giải phương trình $y'' = 0$.

Bài 42. Cho hàm số $y = x^3 + x^2 + 2x + 4$.

- Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x = -1$.
- Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có tung độ $y = 4$.
- Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số có hệ số góc bằng 2.

Bài 43.

- a) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C): $y = \frac{2x+1}{x+2}$ song song với đường thẳng $(\Delta): 3x - y + 2 = 0$.
- b) Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hệ số góc $k = 2$.
- c) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C): $y = \frac{2x-1}{x+1}$ đi qua điểm $A(-1; 4)$.

d) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C): $f(x) = \frac{x^2}{4} - x + 1$ đi qua điểm $M(2; -1)$.

Bài 44. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$ có đồ thị (C). Gọi M là điểm thuộc đồ thị (C) có hoành độ bằng 1. Tìm giá trị của tham số m để tiếp tuyến của (C) tại M song song với đường thẳng $d: y = (m^2 - 4)x + 2m - 1$.

Bài 45. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m + 2$ có đồ thị (C). Gọi A là điểm thuộc đồ thị hàm số có hoành độ bằng 1. Tìm giá trị của tham số m để tiếp tuyến với đồ thị (C) tại A vuông góc với đường thẳng $\Delta: x - 4y + 1 = 0$.

Bài 46.

a) Cho hàm số $y = \frac{2x+2}{x-1}$ có đồ thị là (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân.

b) Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị (C). Tìm các điểm trên đường thẳng $d: y = 9x - 14$ sao cho từ đó kẻ được hai tiếp tuyến với (C).

Bài 47.

a) Cho hàm số $f(x) = (2018+x)(2017+2x)(2016+3x)\dots(1+2018x)$. Tính $f'(1)$.

b) Cho hàm $f(x)$ thỏa mãn $f(\sin x + 1) + f(\cos x) = \cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Tính $f'(1)$.

II. Phần Hình học:

Chương 3: VÉC TƠ TRONG KHÔNG GIAN – QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN.

I. Lý thuyết.

1. Kiến thức.

- Ghi nhớ quy tắc hình hộp để cộng vector. Khái niệm, điều kiện đồng phẳng của ba vector.
- Nêu được vector chỉ phương của đường thẳng; Cách xác định góc giữa hai đường thẳng; khái niệm và điều kiện hai đường thẳng vuông góc với nhau.
- Trình bày được định nghĩa, điều kiện đường thẳng vuông góc mặt phẳng. Phép chiếu vuông góc; mặt phẳng trung trực của một đoạn thẳng, vector pháp tuyến của mặt phẳng.
- Trình bày được khái niệm góc giữa hai mặt phẳng; Khái niệm, điều kiện hai mp vuông góc. Tính chất hình lăng trụ đứng, lăng trụ đều, hình hộp đứng, hình hộp chữ nhật, hình lập phương; Khái niệm hình chóp đều, chóp cụt đều.
- Nêu được đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau; Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.
- Biết được: Khoảng cách từ điểm đến đường thẳng, mặt phẳng; Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau; Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau. Xác định được góc giữa đường thẳng và mặt phẳng. Xác định được góc giữa hai mặt phẳng.

2. Kỹ năng.

- Xác định được góc giữa hai vector. Vận dụng được: phép cộng, trừ; nhân vector với một số, tích vô hướng của hai vector; sự bằng nhau của hai vector. Biết cách xét sự đồng phẳng hoặc không đồng phẳng của ba vector.
 - Xác định được vector chỉ phương của đường thẳng; góc giữa hai đường thẳng. Biết chứng minh hai đường thẳng vuông góc.
 - Biết cách chứng minh: đường thẳng vuông góc với mặt phẳng; hai đường thẳng vuông góc. Xác định được hình chiếu vuông góc của một điểm, một đường thẳng, một tam giác. Xác định được góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.
- Biết xét mối liên hệ giữa tính song song và tính vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng.
- Xác định được góc giữa hai mặt phẳng. Biết chứng minh hai mặt phẳng vuông góc. Vận dụng được tính chất của lăng trụ đứng, hình hộp, hình chóp đều, chóp cụt đều vào giải một số bài tập.
 - Xác định được đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau; Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.
 - Biết và xác định được: Khoảng cách từ điểm đến đường thẳng, mặt phẳng; Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau; Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau. Xác định được góc giữa đường thẳng và mặt phẳng. Xác định được góc giữa hai mặt phẳng.

II. Bài tập.

A. Bài tập trắc nghiệm.

1) Vector trong không gian

Câu 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AC'}$. **B.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DD'} = \vec{0}$.
C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{A'C}$. **D.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{A'C'}$.

Câu 2. Chọn mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

- A.** Vì $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ nên I là trung điểm của đoạn AB .
B. Vì I là trung điểm của đoạn AB nên với điểm O bất kỳ, ta luôn có $\overrightarrow{IO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO})$.
C. Vì $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ nên A, B, C, D đồng phẳng.
D. Vì $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD} = \vec{0}$ nên A, B, C, D đồng phẳng.

Câu 3. Cho tứ diện $ABCD$, gọi G, G' lần lượt là trọng tâm tứ diện $ABCD$ và tam giác BCD .

Khẳng định nào dưới đây là sai?

- A.** $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GG'} = \vec{0}$.
C. A, G, G' thẳng hàng. **D.** G là trung điểm của đoạn AG' .

Câu 4. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, G lần lượt là trung điểm AB, CD, MN ; I là điểm bất kỳ trong không gian, đẳng thức nào dưới đây sai?

- A.** $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN})$. **B.** $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$
C. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 4\overrightarrow{GI}$. **D.** $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O, I là trung điểm của đoạn SO . Đẳng thức nào dưới đây là sai?

- A.** $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}$. **B.** $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$.
C. $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{SO}$. **D.** $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$.

Câu 6. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. G là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Đẳng thức nào dưới đây sai?

- A. $\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c})$. B. $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. C. $\overrightarrow{BG} = \vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$. D. $\overrightarrow{C'G} = \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{c}$.

Câu 7*. Cho tứ diện $ABCD$ và các điểm M, N xác định bởi $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DB} + x\overrightarrow{DC}$. Tìm x để các véc tơ $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

- A. $x = -1$. B. $x = -3$. C. $x = -2$. D. $x = 2$.

Câu 8. Trong không gian, cho ba đường thẳng phân biệt a, b, c . Chọn mệnh đề đúng:

- A. Nếu a vuông góc với b và b vuông góc với c thì a vuông góc với c .
 B. Nếu a vuông góc với b và b song song với c thì a vuông góc với c .
 C. Nếu a, b cùng vuông góc với c thì a vuông góc với b .
 D. a và b song song với nhau, c vuông góc với a thì c vuông góc với mọi đường nằm trong $mp(a, b)$.

Câu 9. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Khi đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A'C'}$ bằng:

- A. a^2 . B. $a^2\sqrt{2}$. C. 0 . D. $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a và $ABCD$ là hình vuông. Gọi M là trung điểm của đoạn CD . Giá trị $\overrightarrow{MS} \cdot \overrightarrow{CB}$ bằng

- A. $\frac{a^2}{2}$. B. $-\frac{a^2}{2}$. C. $\frac{a^2}{3}$. D. $\frac{\sqrt{2}a^2}{2}$.

2) Hai đường thẳng vuông góc.

Câu 11. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

- A. Góc giữa hai đường thẳng $B'D'$ và AA' bằng 60° .
 B. Góc giữa hai đường thẳng AC và $B'D'$ bằng 90° .
 C. Góc giữa hai đường thẳng AD và $B'C$ bằng 45° .
 D. Góc giữa hai đường thẳng BD' và AC bằng 90° .

Câu 12. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD = BD = a$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$, $\widehat{CAD} = 90^\circ$. Góc giữa $\overrightarrow{AB}$ & $\overrightarrow{CD}$ bằng

- A. 180° . B. 120° . C. 90° . D. 45° .

Câu 13. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD = BD = a$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$, $\widehat{CAD} = 90^\circ$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của đoạn AB, CD . Góc giữa $\overrightarrow{AB}$ & $\overrightarrow{IJ}$ bằng:

- A. 60° . B. 120° . C. 90° . D. 45° .

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 2a$, $BC = a$. Các cạnh bên của hình chóp cùng bằng $a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và SC .

- A. 45° . B. 30° . C. 60° . D. $\arctan 2$.

Câu 15. Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau, biết $AB = AC = AD = 1$. Góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

- A. 45° . B. 60° . C. 30° . D. 90° .

Câu 16. Trong không gian cho hai tam giác đều ABC, ABC' nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Góc giữa $\overline{AB}$ & $\overline{CC'}$ bằng:

- A. 60° . B. 120° . C. 90° . D. 45° .

Câu 17*. Gọi S là diện tích tam giác ABC . Khi đó $S = \frac{1}{2} \sqrt{\overline{AB}^2 \cdot \overline{AC}^2 - k(\overline{AB} \cdot \overline{AC})^2}$. Giá trị của k bằng:

- A. 0. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{4}$. D. 1.

Câu 18. Trong hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A. $BB' \perp BD$. B. $A'C' \perp BD$. C. $A'B \perp DC'$. D. $BC' \perp A'D$.

Câu 19. Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O . Qua O có mấy đường thẳng vuông góc với Δ ?

- A. 1. B. 3. C. Vô số. D. 2.

Câu 20. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $\overline{MA} = k \cdot \overline{MD'}$, $\overline{NA'} = l \cdot \overline{NB}$. Khi MN vuông góc với $A'C$ thì khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $k = 1, l \in \mathbb{R}$. B. $l = 1, k \in \mathbb{R}$. C. $k = -1, l \in \mathbb{R}$. D. $l = -1, k \in \mathbb{R}$.

3) Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.

Câu 21. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai:

- A. Đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng phân biệt trong mp (P) thì nó vuông góc với mp (P) .
 B. Một đường vuông góc với một trong hai mp song song thì nó cũng vuông góc với mp còn lại.
 C. Đường thẳng vuông góc với mp thì vuông góc với mọi đường nằm trong đó.
 D. Một đường thẳng vuông góc với một mp cho trước thì mọi đường thẳng song song với đường thẳng đó đều vuông góc với mp.

Câu 22. Dữ kiện nào dưới đây có thể khẳng định $d \perp (P)$.

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} d \perp (Q) \\ (P) // (Q) \end{array} \right\} \quad (II) \left\{ \begin{array}{l} d' \perp (P) \\ d // d' \end{array} \right\} \quad (III) \left\{ \begin{array}{l} d \perp d_1 \\ d \perp d_2 \\ \text{Trong } (P) : d_1 \cap d_2 = \{I\} \end{array} \right\} \quad (IV) (d, (P)) = 90^\circ$$

- A. Chỉ có (III). B. (I), (II), (III). C. (III), (IV). D. Cả 4 khẳng định.

Câu 23. Tìm các mệnh đề sai:

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} a // b \\ (\alpha) \perp a \end{array} \right\} \Rightarrow (\alpha) \perp b \quad (II) \left\{ \begin{array}{l} (\alpha) // (\beta) \\ a \perp (\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp (\beta)$$

$$(III) \left\{ \begin{array}{l} (\alpha) \perp a \\ (\beta) \perp a \end{array} \right\} \Rightarrow (\alpha) \perp (\beta) \quad (IV) \left\{ \begin{array}{l} a \perp (\alpha) \\ b \perp (\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow a // b$$

- A. (I). B. (II). C. (III). D. (III), (IV).

Câu 24. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng:

- A.** Là góc giữa vectơ chỉ phương của đường thẳng và vectơ khác không vuông góc với mặt phẳng.
- B.** Là góc giữa đường thẳng và hình chiếu vuông góc của nó trên mp.
- C.** Có thể là góc tù.
- D.** Luôn luôn là góc nhọn.

Câu 25. Cho tứ diện $ABCD$ có AB, BC, CD đôi một vuông góc với nhau. Khi đó CD vuông góc với

- A.** (ABD)
- B.** (ABC) .
- C.** mp trung trực của đoạn BC .
- D.** mp trung trực của BD .

Câu 26. Cho tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc nhau. Khi đó hình chiếu vuông góc của O lên mp (ABC) là:

- A.** Trọng tâm $\triangle ABC$.
- B.** Trực tâm $\triangle ABC$.
- C.** Tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.
- D.** Tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.

Câu 27. Cho tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc nhau. H là hình chiếu vuông góc của điểm O lên mặt phẳng (ABC) . Chọn kết luận sai:

- A.** $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.
- B.** $BC \perp (OAH)$.
- C.** H là trực tâm $\triangle ABC$.
- D.** Tam giác ABC có ít nhất một góc không nhỏ hơn 90° .

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, Tam giác ABC có ba góc nhọn. Gọi H, K lần lượt là trực tâm tam giác ABC và SBC . Chọn khẳng định sai trong các khẳng định dưới đây:

- A.** $HK \perp (SBC)$.
- B.** $CK \perp (SAB)$.
- C.** $BH \perp (SAC)$.
- D.** $CH \perp (SAB)$.

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{2}$. Góc giữa SC và (SAB) bằng:

- A.** 90° .
- B.** 30° .
- C.** 45° .
- D.** 60° .

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$, $SA = 2a$. Tính góc giữa SC và (SBD) .

- A.** $18^\circ 26'$.
- B.** $45^\circ 35'$.
- C.** $15^\circ 47'$.
- D.** $20^\circ 42'$.

Câu 31. Cho tứ diện $ABCD$, $AB \perp (BCD)$, $AB = a\sqrt{3}$, $\triangle BCD$ đều cạnh a . Góc giữa AC và (BCD)

- A.** 90° .
- B.** 30° .
- C.** 45° .
- D.** 60° .

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC vuông tại B , SA vuông góc với (ABC) . Khẳng định nào là sai?

- A.** $SB \perp AC$.
- B.** $SA \perp AB$.
- C.** $SB \perp BC$.
- D.** $SA \perp BC$.

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình vuông. Từ A kẻ $AM \perp SB$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $AM \perp (SBD)$. **B.** $AM \perp (SBC)$. **C.** $SB \perp (MAC)$. **D.** $AM \perp (SAD)$.

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và tam giác ABC vuông tại B . Vẽ $SH \perp (ABC)$, $H \in (ABC)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** H trùng với trực tâm tam giác ABC . **B.** H trùng với trọng tâm tam giác ABC .
C. H trùng với trung điểm AC . **D.** H trùng với trung điểm BC .

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$, $\widehat{ASB} = 90^\circ$, $\widehat{BSC} = 60^\circ$, $\widehat{ASC} = 120^\circ$. Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) .

- A.** 90° . **B.** 45° . **C.** 60° . **D.** 30° .

Câu 36. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $AC = a$, $BC = a\sqrt{2}$, $\widehat{ACB} = 135^\circ$. Hình chiếu vuông góc của C' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm M của AB . Tính góc tạo bởi đường thẳng $C'M$ với mặt phẳng $(ACC'A')$?

- A.** 90° . **B.** 60° . **C.** 45° . **D.** 30° .

Câu 37. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC$ và $DB = DC$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $AB \perp (ABC)$. **B.** $AC \perp BC$. **C.** $CD \perp (ABD)$. **D.** $BC \perp AD$.

Câu 38. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Kết luận nào dưới đây sai:

- A.** $AC' \perp (A'BD)$. **B.** $AC' \perp (B'CD')$.
C. $(A'BD) \parallel (B'CD')$. **D.** $(A'B, (AB'C'D)) = 45^\circ$.

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm của BO . Mặt phẳng (P) qua M và $(P) \perp BC$ cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là hình gì?

- A.** Hình thang cân. **B.** Hình thang vuông. **C.** Hình bình hành. **D.** Hình chữ nhật.

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AB = a$, $BC = 2a$. Điểm

H thuộc cạnh AC sao cho $CH = \frac{1}{3}CA$, SH là đường cao hình chóp $S.ABC$ và $SH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Gọi I là trung điểm BC . Tính diện tích thiết diện của hình chóp với mặt phẳng đi qua H và vuông góc với AI .

- A.** $\frac{\sqrt{2}a^2}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}a^2}{6}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a^2}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a^2}{6}$.

4) Hai mặt phẳng vuông góc

Câu 41. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng:

- A.** Hai mp phân biệt cùng vuông góc với một mp thứ ba thì song song với nhau.
B. Nếu hai mp vuông góc với nhau thì mọi đường trong mp này sẽ vuông góc với mp kia.

C. Nếu hai mp phân biệt (P), (Q) cùng vuông góc với mp (R) thì giao tuyến d của (P), (Q) sẽ vuông góc với (R).

D. Hai mặt phẳng (P), (Q) cắt nhau theo giao tuyến d, với mỗi điểm A thuộc (P), B thuộc (Q) thì AB vuông góc d.

Câu 42. Chọn mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A. Qua một đường thẳng d cho trước xác định được duy nhất một mp (P) vuông góc với (Q) cho trước.

B. Có duy nhất một mp đi qua một điểm cho trước và vuông góc với hai mp cắt nhau cho trước.

C. Các mp cùng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mp cho trước thì luôn đi qua một đường thẳng cố định.

D. Hai mp vuông góc nhau thì đường thẳng nằm trong mp này và vuông góc với giao tuyến sẽ vuông góc với mp còn lại.

Câu 43. Dữ kiện nào dưới đây không thể kết luận $(P) \perp (Q)$?

A. $\begin{cases} d \perp (Q) \\ d \subset (P) \end{cases}$

B. $\begin{cases} d_1 \perp (Q), d_2 \perp (P) \\ \widehat{(d_1, d_2)} = 90^\circ \end{cases}$

C. $\begin{cases} d \subset (Q), d_1, d_2 \subset (P) \\ d \perp d_1, d \perp d_2, d_1 \cap d_2 = I \end{cases}$

D. $\begin{cases} d_1 \subset (Q), d_2 \subset (P) \\ d_1 \perp d_2 \end{cases}$

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, $SA = 2BC$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Hình chiếu vuông góc của A lên các đoạn SB và SC lần lượt là M và N . Góc của hai mặt phẳng (ABC) và (AMN) bằng

A. 45° .

B. 60° .

C. 15° .

D. 30° .

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $SA = SB = SC = a$. Góc giữa $(ABCD)$ và (SBD) bằng:

A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Câu 46. Giả sử α là góc của hai mặt của một tứ diện đều có cạnh bằng a . Khẳng định đúng là

A. $\tan \alpha = \sqrt{8}$.

B. $\tan \alpha = 3\sqrt{2}$.

C. $\tan \alpha = 2\sqrt{3}$.

D. $\tan \alpha = 4\sqrt{2}$.

Câu 47. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng a . Tính góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(A'B'C')$.

A. $\frac{\pi}{6}$.

B. $\frac{\pi}{3}$.

C. $\arccos \frac{\sqrt{3}}{4}$.

D. $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Câu 48. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$, $SA = 2a$. Tính $\tan$ của góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$.

A. $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

B. $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

C. $\sqrt{5}$.

D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , $AD = DC = a$. Biết SAB là tam giác đều cạnh $2a$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) .

A. $\frac{2}{\sqrt{7}}$.

B. $\frac{2}{\sqrt{6}}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

D. $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$.

Câu 50. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , tam giác đều SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Ta có $\tan$ của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng:

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 51. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều và mặt bên (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC) . Gọi H là trung điểm của AB . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $AC \perp (SAB)$.

B. $CH \perp (SAB)$.

C. $BC \perp (SAB)$.

D. $SA \perp (ABC)$.

Câu 52. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của AC . Khẳng định nào sau đây sai?

A. $BM \perp AC$.

B. $(SBM) \perp (SAC)$.

C. $(SAB) \perp (SBC)$.

D. $(SAB) \perp (SAC)$.

Câu 53. Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) cùng vuông góc với (DBC) . Gọi BE và DF là hai đường cao của tam giác BCD , DK là đường cao của tam giác ACD . Chọn khẳng định *sai* trong các khẳng định sau?

A. $(ABE) \perp (ADC)$.

B. $(ABD) \perp (ADC)$.

C. $(ABC) \perp (DFK)$.

D. $(DFK) \perp (ADC)$.

Câu 54. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chọn khẳng định *sai* trong các khẳng định sau?

A. $(ABC') \perp (A'DC')$.

B. $(A'BD) \perp (BDC')$.

C. $(ABD') \perp (BCC'B')$.

D. $(A'BC) \perp (ADC'B')$.

Câu 55. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = AD = BC = BD = a$ và hai mặt phẳng (ACD) , (BCD) vuông góc với nhau. Tính độ dài cạnh CD sao cho hai mặt phẳng (ABC) , (ABD) vuông góc.

A. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$.

B. $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

C. $\frac{a}{2}$.

D. $a\sqrt{3}$.

5) Khoảng cách

Câu 56. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ cạnh đáy bằng $2a$ và chiều cao bằng $a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ tâm O của đáy ABC đến một mặt bên.

A. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

B. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

C. $a\sqrt{\frac{3}{10}}$.

D. $a\sqrt{\frac{2}{5}}$.

Câu 57. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 1. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách từ B đến (SCD) .

A. 1.

B. $\frac{\sqrt{21}}{3}$.

C. $\sqrt{2}$.

D. $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

Câu 58. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B ,

$AD = a, AB = 2a, BC = 3a, SA = 2a$, H là trung điểm cạnh AB , SH là đường cao của hình chóp $S.ABCD$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) .

A. $\frac{a\sqrt{30}}{7}$.

B. $\frac{a\sqrt{30}}{10}$.

C. $\frac{a\sqrt{13}}{10}$.

D. $\frac{a\sqrt{17}}{7}$.

Câu 59. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a , khoảng cách giữa AB và CD bằng:

A. $\frac{a}{2}$.

B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

D. a .

Câu 60. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a , SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SO = a$. Khoảng cách giữa SC và AB bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{15}$.

B. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

C. $\frac{2a\sqrt{3}}{15}$.

D. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 61. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, $AA' = 2a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và CD' .

A. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

B. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

C. $2a$.

D. $a\sqrt{2}$.

Câu 62. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, BC, SD . Tính khoảng cách giữa AP và MN .

A. $\frac{3a}{\sqrt{15}}$.

B. $4\sqrt{15}a$.

C. $\frac{3a\sqrt{5}}{10}$.

D. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 63. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $a\sqrt{7}$, đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Biết hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của BC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'$ bằng

A. $a\sqrt{\frac{3}{2}}$.

B. $\frac{3a}{\sqrt{2}}$.

C. $a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 64. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và có $AB = 4$ cm. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC) . Lấy M thuộc SC sao cho $CM = 2MS$. Khoảng cách giữa hai đường AC và BM là

A. $\frac{4\sqrt{21}}{7}$ cm.

B. $\frac{8\sqrt{21}}{21}$ cm.

C. $\frac{4\sqrt{21}}{21}$ cm.

D. $\frac{2\sqrt{21}}{3}$ cm.

Câu 65. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng 1 và các góc phẳng đỉnh A đều bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và $A'C'$.

A. $\frac{\sqrt{22}}{11}$.

B. $\frac{2}{11}$.

C. $\frac{\sqrt{2}}{11}$.

D. $\frac{3}{11}$.

B. Bài tập tự luận.

1) Véc tơ trong Không gian- Hai đường thẳng vuông góc

Bài 1. Cho hình chóp $SABCD$, có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $SA = SB$, AB vuông góc với SC

Gọi M là trung điểm SD .

1) Biểu diễn $\overline{AM}$ theo ba vector $\overline{SA}, \overline{SB}, \overline{SC}$.

2) Chứng minh: AM vuông góc với AB .

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a , góc $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Biết $SA = SC = a$, $SB = SD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Gọi M, I, J lần lượt là trung điểm AB, SD, CD ; G là trọng tâm tam giác SAB .

Tính góc giữa hai đường thẳng:

- 1) SA và DC 2) SB và AD 3) SM và BD 4) BG và IJ .

Bài 3. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 6; CD = 8$. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm BC, AC, BD . Biết $JK = 5$. CMR: AB vuông góc với CD ; IJ vuông góc với CD .

Bài 4. Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Các điểm M, N lần lượt là trung điểm AB, CD ;

O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD .

1) CMR: AO vuông góc với CD ; MN vuông góc với CD .

2) Tính góc giữa: AC và BN ; MN và BC .

Bài 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a .

1) Gọi I, J lần lượt là trung điểm $CD, A'D'$. CMR: $B'I$ vuông góc với $C'J$.

2) Trên các cạnh DC và BB' ta lần lượt lấy các điểm M, N không trùng với hai đầu mút sao cho $DM = BN$. Chứng minh AC' vuông góc với MN .

Bài 6. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng a , $\widehat{A'AD} = \widehat{A'AB} = \widehat{DAB} = 60^\circ$.

1) CMR: $DCB'A'$ và $BCD'A'$ là những hình vuông.

2) CMR: AC' vuông góc với DA' ; AC' vuông góc với BA' .

3) Tính độ dài đoạn AC' .

2) Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Bài 7. Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a , gọi H là chân đường vuông góc hạ từ A xuống mặt phẳng (BCD) .

1) Tính độ dài đường cao AH .

2) Tính độ dài đoạn nối trung điểm của một cặp cạnh đối.

3) Tính góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD) .

4) Tìm điểm O cách đều 4 đỉnh của tứ diện.

5) Gọi I là trung điểm của AH . Chứng minh IB, IC, ID đôi một vuông góc với nhau.

6) Chứng minh tứ diện $ABCD$ có các cặp cạnh đối vuông góc với nhau.

7) Tìm điểm M sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất, tính giá trị đó.

Bài 8. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = a\sqrt{2}, SA \perp (ABCD)$.

Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SD, SC .

1) Chứng minh tất cả các mặt bên của hình chóp đều là các tam giác vuông.

2) Tính góc giữa các cạnh bên và mặt đáy.

3) Chứng minh $BD \perp (SAC), BD \parallel (AMN)$.

4) CMR $SC \perp (AMN)$; AM, AN, AP đồng phẳng và $AP \perp MN$.

5) Tìm điểm J cách đều tất cả các đỉnh của hình chóp.

6) Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với SB .

Bài 9. Cho tứ diện $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B . Trong mặt phẳng (SAB) , kẻ AM vuông góc với SB tại M , trên cạnh SC lấy điểm N sao cho $\frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SC}$.

- 1) CMR: $BC \perp (SAB)$; $AM \perp (SBC)$; $SB \perp AN$.
- 2) Biết $SA = a\sqrt{2}$; $AB = BC = a$, tính diện tích tam giác AMN .
- 3) H là hình chiếu của A lên SC , K là giao của HM với (ABC) . CMR $AK \perp AC$.
- 4) E là điểm tùy ý trên cạnh AB , đặt $AE = x$ ($0 < x < a$). Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABC$ theo a và x khi cắt bởi mặt phẳng (α) qua E và vuông góc với AB . Tìm x để diện tích có giá trị lớn nhất.

Bài 10. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a$; $BC = a\sqrt{3}$, $SD = a\sqrt{5}$, mặt bên SBC là tam giác vuông tại B mặt bên SCD là tam giác vuông tại D .

- 1) CMR: $SA \perp (ABCD)$, tính SA .
- 2) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, đường thẳng qua A vuông góc với AC cắt các đường CB, CD lần lượt tại I, J . Gọi H là hình chiếu của A lên SC ; K, L lần lượt là giao điểm của SB, SD với mặt phẳng (HIJ) . CMR: $AK \perp (SBC)$; $AL \perp (SCD)$.
- 3) Tính diện tích tứ giác $AKHL$.

Bài 11. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ đáy ABC là tam giác vuông tại C , $CA = a$, $CB = a\sqrt{3}$, mặt bên $AA'B'B$ là hình vuông. Từ C kẻ $CH \perp AB'$, $HK \parallel A'B$ ($H \in AB'$, $K \in AA'$).

- 1) CMR: $BC \perp CK$, $AB' \perp (CHK)$.
- 2) Tính góc giữa $A'B$ và mặt phẳng $(BB'C'C)$.
- 3) Tính độ dài đoạn vuông góc hạ từ A đến mặt phẳng (CHK) .
- 4) M là trung điểm AB . Tính diện tích thiết diện của hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo a khi cắt bởi mặt phẳng (α) qua M và vuông góc với $A'B$.

Bài 12. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều, mặt bên SCD là tam giác vuông cân tại S . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, AD .

- 1) CMR: $SI \perp (SCD)$, $SJ \perp (SAB)$.
- 2) Gọi H là hình chiếu của S lên IJ . CMR: $SH \perp AC$.
- 3) Gọi M là điểm thuộc đường thẳng CD sao cho: $BM \perp SA$. Tính AM theo a .

3) Hai mặt phẳng vuông góc và khoảng cách

Bài 13. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a , gọi O là tâm hình vuông $ABCD$.

- 1) Tìm độ dài đoạn SO .
- 2) Gọi M là trung điểm của SC . CMR: $(MBD) \perp (SAC)$.
- 3) Xác định và tính góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và $(ABCD)$.
- 4) Xác định góc giữa cạnh bên và mặt đáy.

5) Xác định góc giữa mặt bên và mặt đáy.

6) Gọi (P) là mặt phẳng qua AM và song song với BD . Hãy tính diện tích thiết diện của hình chóp được cắt bởi (P) .

Bài 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm I , cạnh

$a, \hat{A} = 60^\circ, SC = \frac{a\sqrt{6}}{2}; (SBC)$ và (SCD) cùng vuông góc với $(ABCD)$.

1) CMR: $(SBD) \perp (SAC)$

2) Trong tam giác SCA kẻ IK vuông góc với SA tại K . Tính độ dài IK

3) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) , (SAD) và $(ABCD)$.

4) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi (α) là mặt phẳng qua C và vuông góc với SA .

Bài 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , có

$AB = 2a, AD = DC = a$, cạnh SA vuông góc với đáy, $SA = a$

1) CMR: $(SAD) \perp (SDC); (SAC) \perp (SBC)$.

2) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SDC) ; (SBC) và $(ABCD)$; (SBC) và (SAB)

3) Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (α) chứa SD và vuông góc với (SAC) .

Bài 16. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a

1) CMR: $AD' \perp DB'$; $B'D \perp (BA'C')$; $(BDA') \perp (AB'C'D)$.

2) Tính góc giữa BC' và CD' ; BC' và $(BB'D'D)$

3) Tính khoảng cách giữa BC' và $(AD'C)$.

Bài 17. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc, $OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}, OB = OC = a, I$ là trung điểm BC

1) CMR: $(OAI) \perp (ABC)$.

2) Tính góc giữa AB và mặt phẳng (AOI) .

3) Dựng và độ dài đoạn vuông góc chung giữa hai đường thẳng OC và AB ; AI và OC .

4) Xác định thiết diện của tứ diện khi cắt bởi mặt phẳng chứa OB và vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Tính diện tích của thiết diện đó.

Bài 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là nửa lục giác đều cạnh a ($AB \parallel CD, AB > CD$). Mặt bên SAB là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy.

1) CMR: $BD \perp SC$.

2) Tính khoảng cách giữa SD và AB ; khoảng cách giữa B và (SAD) .

3) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và $(ABCD)$.

----- HẾT -----