

Gv: TRẦN QUỐC NGHĨA

☎: 098 373 4349

Trường THPT.....

Họ và tên học sinh:

Lớp:..... STT:

Tài liệu tự học

TOÁN

LỚP 10 - NH 17-18

Chủ đề 7

TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VÉCTƠ

VÀ ỨNG DỤNG

- *Tóm tắt lý thuyết*
- *Các dạng toán thường gặp*
- *Phương pháp giải toán*
- *Toán mẫu*
- *Bài tập cơ bản*
- *Bài tập nâng cao*
- *Bài tập tổng ôn*
- *Bài tập trắc nghiệm - Đáp án*

Năm học 2017 - 2018

Lưu hành nội bộ

Chủ đề 7 TÍCH VÔ HƯỚNG & ỨNG DỤNG

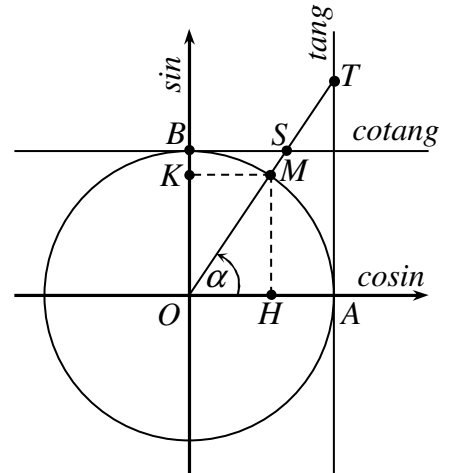
Vấn đề 1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC BẤT KÌ TỪ 0° ĐẾN 180°

A - TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa các giá trị lượng giác

Cho $(OA, OM) = \alpha$ với $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$. Giả sử $M(x; y)$.

- $\cos \alpha = x = \overline{OH}$
- $\sin \alpha = y = \overline{OK}$
- $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \overline{AT} \quad (\alpha \neq 90^\circ)$
- $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \overline{BS} \quad (\alpha \neq 180^\circ)$



➤ Nhận xét:

- $\forall \alpha, -1 \leq \cos \alpha \leq 1; 0 \leq \sin \alpha \leq 1$
- $\tan \alpha$ xác định khi $\alpha \neq 90^\circ$
- $\cot \alpha$ xác định khi $\alpha \neq 180^\circ$
- Các số $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$ được gọi là các giá trị lượng giác của góc α .

2. Dấu của các tỉ số lượng giác:

	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$
$0^\circ < \alpha < 90^\circ$	+	+	+	+
$90^\circ < \alpha < 180^\circ$	+	-	-	-

3. Quan hệ giữa các góc phụ nhau, bù nhau:

- Hai góc phụ nhau: α và $90^\circ - \alpha$
 - $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$
 - $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$
 - $\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha$
 - $\cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$
- Hai góc bù nhau: α và $180^\circ - \alpha$
 - $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$
 - $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$
 - $\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$
 - $\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$

4. Các giá trị lượng giác của một số góc (cung) đặc biệt

Độ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\parallel$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot$	$\parallel$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\parallel$

5. Một số hệ thức cơ bản

① $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

② $\tan x \cdot \cot x = 1$

③ $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

④ $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

⑤ $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

⑥ $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$

B - PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN**Dạng 1. Góc và dấu của các giá trị lượng giác****A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI****1. Xét dấu các giá trị lượng giác**

Dựa vào bảng trong phần tóm tắt lý thuyết

🔍 Lưu ý: với ΔABC : $0^\circ < \frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2} < 90^\circ$ và $0^\circ < A, B, C < 180^\circ$

2. Tìm góc α khi biết giá trị lượng giác:

Sử dụng bảng các giá trị đặc biệt để tìm.

🔍 Lưu ý: $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$, $0 \leq \sin \alpha \leq 1$.

II - BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Với những giá trị nào của góc α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$) thì:

a) $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$ cùng dấu ?

b) $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$ khác dấu ?

c) $\sin \alpha$ và $\tan \alpha$ cùng dấu ?

d) $\sin \alpha$ và $\tan \alpha$ khác dấu ?

III - BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Với những giá trị nào của góc α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$) thì:

a) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ có giá trị âm ?

b) $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ có giá trị âm

Bài 2. Cho tam giác ABC . Xét dấu: a) $\cos \frac{A}{2} \cdot \cos B$ b) $\tan \frac{B}{2} \cdot \cot \frac{C}{3}$

Bài 3. Tìm góc α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$) trong mỗi trường hợp sau:

a) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos \alpha = 0$

c) $\tan \alpha = -\sqrt{3}$

d) $\cot \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Bài 4. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = 2 \sin 30^\circ + 3 \cos 45^\circ - \sin 60^\circ$

b) $B = 2 \cos 30^\circ + 3 \sin 45^\circ - \cos 60^\circ$

Bài 5. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = a \sin 0^\circ + b \cos 0^\circ + c \sin 90^\circ$

b) $B = a \cos 90^\circ + b \sin 90^\circ + c \sin 180^\circ$

c) $C = a^2 \sin 90^\circ + b^2 \cos 90^\circ + c^2 \cos 180^\circ$

d) $D = 3 - \sin^2 90^\circ + 2 \cos 60^\circ - 3 \tan^2 45^\circ$

e) $E = 4a^2 \sin^2 45^\circ - 3(a \tan 45^\circ)^2 + (2a \cos 45^\circ)^2$

Bài 6. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $\sin x + \cos x$ khi x bằng $0^\circ, 135^\circ, 120^\circ$.

b) $2 \sin x + \cos 2x$ khi x bằng $60^\circ, 45^\circ, 30^\circ$.

c) $\sin^2 x + \cos^2 x$ khi x bằng $30^\circ, 75^\circ, 90^\circ, 145^\circ, 180^\circ$.

Dạng 2. Cho một giá trị lượng giác, tính các giá trị lượng giác còn lại

I - PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Sử dụng các hệ thức cơ bản trong điều kiện xác định của x

2. Chú ý khi biến đổi

✎ Lựa chọn hệ thức cơ bản thích hợp để từ giả thiết cho, suy dần ra các giá trị lượng giác còn lại. Chú ý dấu giá trị lượng giác, góc nhọn, góc tù.

✎ Dùng tính chất cùng bậc n (đẳng cấp), để chia cho $\sin^n \alpha$, $\cos^n \alpha$ đưa về $\tan \alpha$, $\cot \alpha$.

II - BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 2. Cho biết một giá trị lượng giác của một góc, tính các giá trị lượng giác còn lại:

a) $\cos \alpha = \frac{-3}{5}$

b) $\sin \alpha = \frac{1}{4}$, α nhọn

c) $\tan \alpha = 2\sqrt{2}$

d) $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

e) $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $0^\circ < \alpha < 180^\circ$

f) $\cot \alpha = -\frac{1}{2}$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

Ví dụ 3. Chứng minh rằng trong ΔABC , ta có:

a) $\sin A = \sin(B + C)$

b) $\cos A = -\cos(B + C)$

III - BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 7. Biết $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$. Tính $\cos 15^\circ$, $\tan 15^\circ$, $\cot 15^\circ$, $\cos 105^\circ$

Bài 8. Cho ΔOAB cân tại O có $OA = a$ và các đường cao OH , AK . Giả sử $\widehat{AOH} = \alpha$. Tính AK và OK theo a và α .

Bài 9. a) Cho $\sin \alpha = \frac{1}{4}$, với $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Tính $\cos \alpha$ và $\tan \alpha$.

b) Cho $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}$. Tính $\sin \alpha$ và $\tan \alpha$.

c) Cho $\tan \alpha = 2\sqrt{2}$, với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Tính $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$.

d) Cho $\tan \alpha = \sqrt{2}$. Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{3 \sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$

e) Cho $\sin \alpha = \frac{2}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $B = \frac{\cot \alpha - \tan \alpha}{\cot \alpha + \tan \alpha}$

f) Cho $\tan \alpha = \sqrt{2}$. Tính giá trị của biểu thức $B = \frac{2 \sin^2 \alpha + 1}{3 \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha}$

Bài 10. a) Cho $\cos x = \frac{1}{2}$. Tính $P = 3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x$

b) Cho $\cos x = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$. Tính $Q = 3 \sin x + 4 \cos x$

Bài 11. Chứng minh rằng:

a) $\sin 105^\circ = \sin 75^\circ$ b) $\cos 170^\circ = -\cos 10^\circ$ c) $\cot 122^\circ = -\cot 58^\circ$ d) $\tan 12^\circ = -\tan 168^\circ$

Bài 12. Tính và so sánh giá trị của từng cặp biểu thức sau đây:

$A = \cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ$ và $B = \cos 60^\circ + \sin 45^\circ$

$C = \frac{2 \tan 30^\circ}{1 - \tan^2 30^\circ}$ và $D = -\tan 135^\circ \cdot \tan 60^\circ$

Bài 13. Biết $\sin \alpha = \frac{2}{5}$. Tính giá trị các biểu thức $C = \frac{\cot \alpha - \tan \alpha}{\cot \alpha + \tan \alpha}$

Bài 14. Biết $\sin x + \cos x = m$. Tính: a) $\sin x \cdot \cos x$ b) $\sin^4 x \cdot \cos^4 x$

Dạng 3. Chứng minh, rút gọn một biểu thức

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Sử dụng các hệ thức cơ bản trong điều kiện xác định của x:

$$\textcircled{1} \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\textcircled{2} \tan x \cdot \cot x = 1$$

$$\textcircled{3} \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\textcircled{4} \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\textcircled{5} 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\textcircled{6} 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

2. Những hằng đẳng thức:

$$\blacklozenge (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\blacklozenge (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\blacklozenge a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$$

$$\blacklozenge a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$$

$$\blacklozenge (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

$$\blacklozenge (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 + 3ab(a-b)$$

$$\blacklozenge a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)^2 - 3ab(a+b)$$

$$\blacklozenge a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) = (a-b)^2 + 3ab(a-b)$$

$$\blacklozenge a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 \quad \blacklozenge a^6 + b^6 = (a^2)^3 + (b^2)^3 = (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4)$$

II - BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 4. Chứng minh các đẳng thức sau trên điều kiện xác định của chúng:

a) $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

b) $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$

c) $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$

d) $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2 \sin x \cos x$

a) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$ b) $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$

a) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$

b) $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$

a) $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x = 2\sin^2 x - 1 = 1 - 2\cos^2 x$

b) $\sin x \cdot \cos x (1 + \tan x)(1 + \cot x) = 1 + 2 \sin x \cos x$

c) $\frac{\sin^2 x}{\cos x(1+\tan x)} - \frac{\cos^2 x}{\sin x(1+\cot x)} = \sin x - \cos x$

$$\text{d) } \left(\tan x + \frac{\cos x}{1 + \sin x} \right) \left(\cot x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} \right) = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

a) $C = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x \cos^2 x$

b) $D = \cos^2 x (\cos^2 x + 2\sin^2 x + \sin^2 x \tan^2 x)$

c) $E = \sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x}$

d) $F = 3(\sin^8 x - \cos^8 x) + 4(\cos^6 x - 2\sin^6 x) + 6\sin^4 x$

C – BÀI TẬP TỔNG HỢP VẤN ĐỀ 1

Bài 17. Rút gọn các biểu thức lượng giác sau:

$$A = \frac{2\cos^2 x - 1}{\sin x + \cos x}$$

$$B = \frac{\sin x + \tan x}{\tan x} - \sin x \cdot \cos x$$

$$C = \tan x + \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

$$D = \frac{\cos x \cdot \tan x}{\sin^2 x} - \cos x \cdot \cot x$$

$$E = (1 + \sin x) \tan^2 x (1 - \sin x)$$

$$F = 1 - \frac{\sin^2 x}{1 + \cot x} - \frac{\cos^2 x}{1 + \tan x}$$

$$G = (\cot x + \tan x)^2 - (\tan x - \cot x)^2$$

$$H = \sin^3 x (1 + \cot x) + \cos^3 x (1 + \tan x)$$

$$I = (1 - \sin^2 x) \cot^2 x + 1 - \cot^2 x$$

$$J = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x} - 1$$

Bài 18. Chứng minh các đẳng thức lượng giác sau:

a) $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \cdot \sin^2 x$

b) $\cot^2 x - \cos^2 x = \cot^2 x \cdot \cos^2 x$

c) $\sin^4 x - \cos^4 x = 2\sin^2 x - 1$

d) $\frac{\cot^2 x - \sin^2 x}{\cot^2 x - \tan^2 x} = \sin^2 x \cdot \cos^2 x$

e) $\frac{1 - \sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

f) $\frac{\tan x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cot x} = \cos x$

g) $\frac{\tan x}{1 - \tan^2 x} \cdot \frac{\cot^2 x - 1}{\cot x} = 1$

h) $\frac{\sin x + \cos x - 1}{\sin x - \cos x + 1} = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

i) $\frac{1 + 2\sin x \cdot \cos x}{\sin^2 x - \cos^2 x} = \frac{\tan x + 1}{\tan x - 1}$

j) $\frac{1 + \sin^2 x}{1 - \sin^2 x} = 1 + 2\tan^2 x$

Bài 19. Chứng minh rằng giá trị của các biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của x, y:

a) $(\cot x + \tan x)^2 - (\cot x - \tan x)^2$

b) $\cos^2 x \cdot \cot^2 x + 3\cos^2 x - \cot^2 x + 2\sin^2 x$

c) $2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x)$

d) $\sin^2 x \cdot \tan^2 x + 2\sin^2 x - \tan^2 x + \cos^2 x$

e) $2\cos^4 x - \sin^4 x + \sin^2 x \cdot \cos^2 x + 3\sin^2 x$

f) $2(\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x \cdot \cos^2 x)^2 - (\sin^8 x + \cos^8 x)$

g) $\sin^2 x (1 + \cot x) + \cos^2 x (1 - \tan x)$

h) $\sin^6 x + \cos^6 x - 2\sin^4 x - \cos^4 x + \sin^2 x$

i) $\sin^8 x + \cos^8 x + 6\sin^4 x \cdot \cos^4 x + 4\sin^2 x \cdot \cos^2 x (\sin^4 x + \cos^4 x) + 1$

D – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VẤN ĐỀ 1

- Câu 1.** [0H2-1] Giá trị của $E = \sin 36^\circ \cos 6^\circ - \sin 126^\circ \cos 84^\circ$ là
- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. 1. D. -1.
- Câu 2.** [0H2-1] Cho α và β là hai góc khác nhau và bù nhau. Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào sai?
- A. $\sin \alpha = \sin \beta$. B. $\cos \alpha = -\cos \beta$. C. $\tan \alpha = -\tan \beta$. D. $\cot \alpha = \cot \beta$.
- Câu 3.** [0H2-1] Cho α là góc tù. Điều khẳng định nào sau đây là đúng?
- A. $\sin \alpha < 0$. B. $\cos \alpha > 0$. C. $\tan \alpha < 0$. D. $\cot \alpha > 0$.
- Câu 4.** [0H2-1] Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào sai?
- A. $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ$. B. $\cos 45^\circ = \sin 135^\circ$. C. $\cos 30^\circ = \sin 120^\circ$. D. $\sin 60^\circ = \cos 120^\circ$.
- Câu 5.** [0H2-1] Tam giác ABC vuông ở A có góc $\widehat{B} = 30^\circ$. Khẳng định nào sau đây là sai?
- A. $\cos B = \frac{1}{\sqrt{3}}$. B. $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\cos C = \frac{1}{2}$. D. $\sin B = \frac{1}{2}$.
- Câu 6.** [0H2-1] Điều khẳng định nào sau đây là đúng?
- A. $\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$. B. $\cos \alpha = \cos(180^\circ - \alpha)$.
C. $\tan \alpha = \tan(180^\circ - \alpha)$. D. $\cot \alpha = \cot(180^\circ - \alpha)$.
- Câu 7.** [0H2-1] Tìm khẳng định sai trong các khẳng định sau đây
- A. $\cos 35^\circ > \cos 10^\circ$. B. $\sin 60^\circ < \sin 80^\circ$. C. $\tan 45^\circ < \tan 60^\circ$. D. $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ$.
- Câu 8.** [0H2-1] Cho hai góc nhọn α và β phụ nhau. Hệ thức nào sau đây là sai?
- A. $\sin \alpha = -\cos \beta$. B. $\cos \alpha = \sin \beta$. C. $\cos \beta = \sin \alpha$. D. $\cot \alpha = \tan \beta$.
- Câu 9.** [0H2-1] Giá trị $\cos 45^\circ + \sin 45^\circ$ bằng bao nhiêu?
- A. 1. B. $\sqrt{2}$. C. $\sqrt{3}$. D. 0.
- Câu 10.** [0H2-1] Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?
- A. $\sin(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$. B. $\sin(180^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$.
C. $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$. D. $\sin(180^\circ - \alpha) = \cos \alpha$.
- Câu 11.** [0H2-1] Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào sai?
- A. $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 0$. B. $\sin 90^\circ + \cos 90^\circ = 1$.
C. $\sin 180^\circ + \cos 180^\circ = -1$. D. $\sin 60^\circ + \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$.
- Câu 12.** [0H2-1] Tính giá trị biểu thức: $\sin 30^\circ \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cos 30^\circ$.
- A. 1. B. 0. C. $\sqrt{3}$. D. $-\sqrt{3}$.
- Câu 13.** [0H2-1] Tính giá trị biểu thức: $\sin 30^\circ \cos 15^\circ + \sin 150^\circ \cos 165^\circ$
- A. 1. B. 0. C. $\frac{1}{2}$. D. $-\frac{3}{4}$.
- Câu 14.** [0H2-1] Tính giá trị biểu thức: $\cos 30^\circ \cos 60^\circ - \sin 30^\circ \sin 60^\circ$
- A. $\sqrt{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. 1. D. 0.

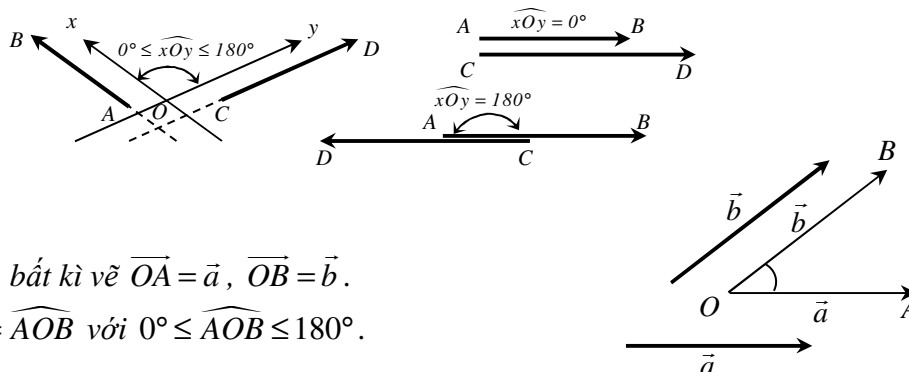
- Câu 15. [0H2-1]** Cho hai góc α và β với $\alpha + \beta = 90^\circ$. Tìm giá trị của biểu thức:
 $\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$
 A. 0. B. 1. C. -1. D. 2.
- Câu 16. [0H2-1]** Cho hai góc α và β với $\alpha + \beta = 90^\circ$, tìm giá trị của biểu thức:
 $\cos \alpha \cos \beta - \sin \beta \sin \alpha$
 A. 0. B. 1. C. -1. D. 2
- Câu 17. [0H2-1]** Cho hai góc α và β với $\alpha + \beta = 180^\circ$, tìm giá trị của biểu thức:
 $\cos \alpha \cos \beta - \sin \beta \sin \alpha$
 A. 0. B. 1. C. -1. D. 2.
- Câu 18. [0H2-2]** Cho $\sin \alpha = \frac{1}{3}$. Tính giá trị biểu thức $P = 3\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$.
 A. $P = \frac{25}{9}$. B. $P = \frac{9}{25}$. C. $P = \frac{11}{9}$. D. $P = \frac{9}{11}$.
- Câu 19. [0H2-2]** Cho α là góc tù và $\sin \alpha = \frac{5}{13}$. Giá trị của biểu thức $3\sin \alpha + 2\cos \alpha$ là
 A. 3. B. $-\frac{9}{13}$. C. -3. D. $\frac{9}{13}$.
- Câu 20. [0H2-2]** Trong các đẳng thức sau đây đẳng thức nào là đúng?
 A. $\sin 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\cos 150^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\tan 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. D. $\cot 150^\circ = \sqrt{3}$.
- Câu 21. [0H2-2]** Cho hai góc nhọn α và β trong đó $\alpha < \beta$. Khẳng định nào sau đây là sai?
 A. $\cos \alpha < \cos \beta$. B. $\sin \alpha < \sin \beta$.
 C. $\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \cos \alpha = \sin \beta$. D. $\tan \alpha + \tan \beta > 0$.
- Câu 22. [0H2-2]** Tam giác đều ABC có đường cao AH . Khẳng định nào sau đây là đúng?
 A. $\sin \widehat{BAH} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\cos \widehat{BAH} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. C. $\sin \widehat{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\sin \widehat{AHC} = \frac{1}{2}$.
- Câu 23. [0H2-2]** Bất đẳng thức nào dưới đây là đúng?
 A. $\sin 90^\circ < \sin 150^\circ$. B. $\sin 90^\circ 15' < \sin 90^\circ 30'$.
 C. $\cos 90^\circ 30' > \cos 100^\circ$. D. $\cos 150^\circ > \cos 120^\circ$.
- Câu 24. [0H2-2]** Trong các hệ thức sau, hệ thức nào **không** đúng?
 A. $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2\sin \alpha \cos \alpha$. B. $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - 2\sin \alpha \cos \alpha$.
 C. $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$. D. $\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha = 1$.
- Câu 25. [0H2-2]** Cho tam giác ABC . Hãy tính $\sin A \cdot \cos(B+C) + \cos A \cdot \sin(B+C)$
 A. 0. B. 1. C. -1. D. 2.
- Câu 26. [0H2-2]** Cho tam giác ABC . Hãy tính $\cos A \cos(B+C) - \sin A \sin(B+C)$
 A. 0. B. 1. C. -1. D. 2.
- Câu 27. [0H2-2]** Nếu $\tan \alpha = 3$ thì $\cos \alpha$ bằng bao nhiêu?
 A. $\pm \frac{\sqrt{10}}{10}$. B. $\frac{\sqrt{10}}{10}$. C. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$. D. $\frac{1}{3}$.
- Câu 28. [0H2-2]** $\cos \alpha$ bằng bao nhiêu nếu $\cot \alpha = -\frac{1}{2}$?
 A. $\pm \frac{\sqrt{5}}{5}$. B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. C. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$. D. $-\frac{1}{3}$.

Vấn đề 2. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VÉCTƠ

A - TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Góc giữa hai vectơ:

- Góc của hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ là góc tạo bởi hai tia Ox , Oy lần lượt cùng hướng với hai tia AB và CD . Nghĩa là: $\widehat{xOy} = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.



- Cho $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$.

Từ một điểm O bất kì vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

Khi đó $(\vec{a}, \vec{b}) = \widehat{AOB}$ với $0^\circ \leq \widehat{AOB} \leq 180^\circ$.

Lưu ý: Các trường hợp đặc biệt:

- $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$
- $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng
- $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$
- $(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng
- Nếu $\vec{a} = \vec{0}$, $\vec{b} = \vec{0}$ thì góc xen giữa là tùy ý từ 0° đến 180° .

2. Tích vô hướng của hai vectơ:

- Định nghĩa: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Đặc biệt: ① $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$; ② $\overrightarrow{AB}^2 = AB^2$; ③ $\vec{0} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{0} = 0, \forall \vec{a}$

④ $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ (bằng tích độ dài)

⑤ $(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng: $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ (bằng âm tích độ dài)

- Tính chất: Với $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bất kì và $\forall k \in \mathbb{R}$, ta có:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} \pm \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} \pm \vec{a} \cdot \vec{c}$
- $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$
- $\vec{a}^2 \geq 0; \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$
- $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$
- $(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$
- $\vec{a}^2 - \vec{b}^2 = (\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + \vec{b})$
- $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b})$ là góc nhọn
- $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b})$ là góc tù
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b})$ là góc vuông

3. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng:

Cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2)$. Khi đó:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$
- $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$
- $|\overrightarrow{AB}| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
- $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$, với $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$.
- Đặc biệt $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$.

B - PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1. Tích tích vô hướng của hai vectơ. Góc giữa hai vectơ

I - PHƯƠNG PHÁP GIẢI

3. Tích vô hướng:

Ta có thể lựa chọn một trong các hướng sau:

✓ **Hướng 1:** Sử dụng định nghĩa bằng cách đưa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ về cùng chung gốc để xác định chính xác góc $\alpha = (\vec{a}; \vec{b})$ sau đó dùng công thức: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{(\vec{a}, \vec{b})})$

✓ **Hướng 2:** Sử dụng các tính chất và các hằng đẳng thức của tích vô hướng của hai vectơ.

✓ **Hướng 3:** Nếu đề bài cho dạng tọa độ $\vec{a} = (a_1; a_2)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2)$ thì:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

✓ **Hướng 4:** Trong ΔABC , nếu biết độ dài 3 cạnh:

$$BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 \Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$$

✎ **Chú ý:** Khi tính tích vô hướng của hai vectơ ta thường:

✓ Biến đổi các vectơ về **chung gốc** để việc tìm góc giữa 2 vectơ dễ dàng hơn.

Ví dụ: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$

✓ Đưa về các vectơ cùng phương hoặc vuông góc.

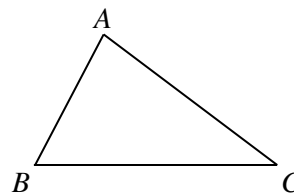
Ví dụ: nếu ABCD là hình chữ nhật (hình vuông) thì: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$

4. Tính góc:

✓ Góc giữa hai vectơ: $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$, với $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$.

✓ Các góc của ΔABC :

- $\cos A = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot AC}$
- $\cos B = \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{BA \cdot BC}$
- $\cos C = \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{CA \cdot CB}$



II - BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 6. Cho tam giác đều ABC , đường cao AH . Hãy vẽ và tính các góc của các cặp vectơ sau:

- a) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ b) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ c) $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BC})$ d) $(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{AB})$

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC đều cạnh a , đường cao AH . Tính các tích vô hướng sau:

- a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC}$ c) $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ d) $\overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$ d) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$

Ví dụ 8. Cho tam giác ABC vuông tại C có $CA = b$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}$.

Ví dụ 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1; -2)$ và $B(-3; 1)$.

- a) Tính $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$.

- b) Tính $\widehat{AOB}$.

Ví dụ 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tính góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ trong các trường hợp sau:

- a) $\vec{a} = (2; -3)$, $\vec{b} = (6; 4)$. b) $\vec{a} = (3; 2)$, $\vec{b} = (5; -1)$. c) $\vec{a} = (-2; -2\sqrt{3})$, $\vec{b} = (3; \sqrt{3})$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

III - BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 20. a) Cho $\triangle ABC$ vuông tại A và $BC = a$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Tính $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BA}$.

b) Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A và $BC = a$. Tính $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA}$.

Bài 21. Cho hình thang vuông $ABCD$, đường cao $AB = 2a$, đáy lớn $BC = 3a$, đáy nhỏ $AD = 2a$.

a) Tính các tích vô hướng: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$.

b) Gọi I là trung điểm của CD , tính $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BD}$. Từ đó suy ra góc của hai vector $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{BD}$.

Bài 22. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O , cạnh a . Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$

d) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$

e) $(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \cdot (2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$

f) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA})$

g) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB}$

h) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$

Bài 23. Cho $\triangle ABC$, trên cạnh BC lấy 2 điểm E, F sao cho $BE = EF = FC$. Đặt $\overrightarrow{AE} = \vec{a}$, $\overrightarrow{EB} = \vec{b}$.

a) Biểu thị $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ theo các vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

b) Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ nếu $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 2$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$.

Bài 24. a) Tính $|\vec{a} + \vec{b}|$, $|\vec{a} - \vec{b}|$ nếu $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 8$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$.

b) Cho $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 19$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 24$. Tính $|\vec{a} - \vec{b}|$.

Bài 25. Cho các vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ thỏa $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ và $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 4$. Tính $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$.

Bài 26. Cho tam giác đều ABC cạnh a . G là trọng tâm tam giác, M là trung điểm của BC . Tính:

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$ b) $\overrightarrow{AB} \cdot (2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC})$, $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{GA}$

Bài 27. Cho $\triangle ABC$ có $AB = 3$, $BC = 6$ và $CA = 8$.

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ và độ dài trung tuyến AM .

b) Cho điểm I thỏa: $3\overrightarrow{CI} = 5\overrightarrow{IA}$. Tính $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BI}$ và độ dài BI .

Dạng 2. Tính độ dài của một đoạn thẳng**I - PHƯƠNG PHÁP GIẢI**

Ta thường sử dụng:

- Quy tắc biến đổi: $BC^2 = \overline{BC}^2 = (\overline{AC} - \overline{AB})^2$ tức là biến đổi phép tính độ dài đoạn thẳng thành phép tính tích vô hướng.
- Công thức tọa độ: $|\overline{AB}| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ (nếu đề bài có liên quan đến tọa độ).

II - BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 11. Cho tam giác ABC có $AB = 3a$, $AC = a$, $\widehat{A} = 60^\circ$. Tính $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$. Suy ra độ dài BC và độ dài trung tuyến AM .

Ví dụ 12. Cho hai điểm $A(4;3)$ và $B(2;-1)$.

- Tìm điểm N thuộc Oy sao cho N cách đều hai điểm A và B .
- Tìm điểm M trên trục hoành sao cho $|\overline{MA} + \overline{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

III - BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 28. Cho $\triangle ABC$ có $AB = 2$, $AC = 3$ và $\widehat{A} = 120^\circ$.

- Tính độ dài BC và trung tuyến AM .
- Gọi I, J là 2 điểm định bởi: $2\overline{IA} + \overline{IB} = \vec{0}$, $\overline{JB} - 2\overline{JC} = \vec{0}$. Tính $\overline{BI} \cdot \overline{BJ}$ và độ dài IJ .

Dạng 3. Chứng minh vuông góc

I - PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Ta có thể lựa chọn một trong các hướng sau:

✓ **Hướng 1:** Dùng tính chất tích vô hướng:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} = 0 \\ \vec{b} = 0 \\ \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \end{cases}$$

✓ **Hướng 2:** Dùng tọa độ: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0$

II - BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 13. Chứng minh rằng hai đường chéo của một hình thoi $ABCD$ vuông góc với nhau.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 14. Cho ba điểm A, B, M . Gọi O là trung điểm của đoạn AB . Chứng minh: $4MO^2 = AB^2 \Leftrightarrow MA \perp MB$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 15. Cho ΔABC với $A(10;5), B(3;2), C(6;-5)$. Chứng minh rằng ΔABC vuông tại B .

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 16. Trong hệ trục tọa độ $(O, \vec{i}, \vec{j})$, cho $\vec{a} = (1; 2)$ và $\vec{b} = (x; -1)$.

- a) Tìm x để $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau. b) Tìm x để độ dài của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng nhau.

III - BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 29. Cho $\triangle ABC$ đều cạnh a . Gọi M, N, P là 3 điểm sao cho: $\vec{BM} = \frac{1}{2}\vec{BA}$, $\vec{BN} = \frac{1}{3}\vec{BC}$, $\vec{AP} = \frac{5}{8}\vec{AC}$

- a) Tính $\vec{AM}$, $\vec{AN}$ theo $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$. b) Chứng minh: $MP \perp AN$.

Bài 30. Cho $\triangle ABC$ đều cạnh $3a$. Trên 3 cạnh BC, CA, AB lấy M, N, P thỏa: $BM = a$, $CN = 2a$, $AP = x$ ($0 < x < 3a$).

- a) Tính $\vec{AM}$ theo $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$.
b) Chứng minh: $\vec{PN} = \frac{1}{3}\left(\vec{AC} - \frac{x}{a}\vec{AB}\right)$.
c) Tìm x theo a để $AM \perp NP$.

Bài 31. Cho điểm I nằm trong đường tròn tâm O . Kẻ qua I hai dây cung AB và CD vuông góc với nhau. Gọi M là trung điểm của AD . Chứng minh rằng: $BC \perp IM$.

Bài 32. Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tạo O . Gọi H, K lần lượt là trọng tâm của tam giác ABO và CDO ; I, J lần lượt là trung điểm của AD, BC . Chứng minh: $HK \perp IJ$.

Bài 33. Cho $\triangle ABC$ đều, trên BC, CA, AB lấy các điểm D, E, F thỏa $3\vec{DB} = \vec{BC}$, $3\vec{CE} = 2\vec{CA}$ và $15\vec{AF} = 4\vec{AB}$. Chứng minh: $AD \perp EF$.

Bài 34. Cho hình vuông $OACB$ và một điểm M thuộc OC . Kẻ đường PP' qua M và vuông góc với OA , đường QQ' qua M và vuông góc với OB .

- a) Chứng minh: $AM = PQ$. b) Chứng minh: $AM \perp PQ$.

Bài 35. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để $\triangle ABC$ vuông là: $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = AB^2$

III - BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- Bài 36.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm O . Gọi M là điểm tùy ý. Chứng minh rằng:
- $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$
 - $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$
 - $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$
 - $MA^2 + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MO}$
- Bài 37.** Cho hai điểm A và B . Gọi O là trung điểm của AB và M là một điểm tùy ý. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = OM^2 - OA^2$.
- Bài 38.** Cho ΔABC , gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = MA^2 - MB^2$.
- Bài 39.** Cho 4 điểm A, B, C, D tùy ý.
- Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. Suy ra cách chứng minh định lý “ba đường cao trong tam giác đồng qui”.
 - Chứng minh rằng: $AB^2 + CD^2 - BC^2 - AD^2 = 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD}$ suy ra điều kiện cần và đủ để tứ giác có hai đường chéo vuông góc.
- Bài 40.** Cho ΔABC có trọng tâm G . Lấy điểm M tùy ý.
- Chứng minh: $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$.
 - Suy ra rằng: $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$; $OG^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$
(Với O là tâm và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC ; $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$)
- Bài 41.** Cho ΔABC có trọng tâm H . Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng:
- $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{4}BC^2$
 - $MH^2 + MA^2 = AH^2 + \frac{1}{2}BC^2$
- Bài 42.** Gọi I là trung điểm của đoạn AB , M là một điểm tùy ý. Gọi H là hình chiếu của M lên đường thẳng AB . Chứng minh rằng:
- $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}(MB^2 - MA^2)$
 - $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$
 - $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$
 - $|MA^2 - MB^2| = 2IH \cdot AB$
- Bài 43.** Cho hai điểm M, N nằm trên đường tròn đường kính $AB = 2R$. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AM và BN .
- Chứng minh: $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}$; $\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BI}$
 - Tính $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BI}$ theo R .
- Bài 44.** Từ điểm P trong đường tròn kẻ 2 dây vuông góc APB và CPQ . Chứng minh rằng đường chéo PQ của hình chữ nhật $APCQ$ vuông góc với PD .
- Bài 45.** Cho ΔABC có AA', BB', CC' là các đường trung tuyến, G là trọng tâm, M là điểm tùy ý. Chứng minh rằng:
- $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CC'} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.
 - $\overrightarrow{MA'} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB'} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC'} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$
 - $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = MA^2 + MB^2 + MC^2 - \frac{1}{2}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$
 - $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = MA'^2 + MB'^2 + MC'^2 - \frac{1}{4}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$
 - $MA^2 + MB^2 + MC^2 = MA'^2 + MB'^2 + MC'^2 + \frac{1}{4}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$

Dạng 5. Tập hợp điểm – Cực trị

I - PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Các tập hợp điểm cơ bản: Cho đoạn AB , tập hợp các điểm M thỏa:

- $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ là đường thẳng vuông góc với AB tại A .
- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ là đường tròn đường kính AB .

2. Các dạng thường gặp:

- **Dạng 1:** $AM^2 = k > 0$: M thuộc đường tròn tâm A , bán kính $R = \sqrt{k}$.
- **Dạng 2:** $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$, với A, B cố định và k không đổi.

✓ Gọi I là trung điểm AB , ta được:

$$\text{Ta có: } k = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IB})$$

$$k = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2 = MI^2 - \frac{AB^2}{4} \Rightarrow MI^2 = k + \frac{AB^2}{4}.$$

$$\text{Đặt } \Rightarrow l = k + \frac{AB^2}{4}.$$

✓ Khi đó:

- Nếu $l < 0$: M không tồn tại
- Nếu $l = 0$ thì $M \equiv I$: là trung điểm AB
- Nếu $l > 0$: M thuộc đường tròn tâm I , bán kính $R = \sqrt{l}$.

⚠ Lưu ý các phép biến đổi vector, quy tắc trung điểm, trọng tâm, đặc biệt là tâm tỉ cự I thì ta phải chọn đặt và chứng minh I cố định rồi chèn I vào biểu thức vector tương ứng. nếu không có tâm tỉ cự của hệ điểm thì chọn tâm tỉ cự của bộ phận điểm.

- **Dạng 3:** $\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = k$, với $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, A, B, C cố định và k không đổi.

✓ Gọi I là điểm cố định thỏa $\alpha \overrightarrow{IA} + \beta \overrightarrow{IB} + \gamma \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

$$\text{Ta có: } \alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = k \Leftrightarrow (\alpha + \beta + \gamma) MA^2 = k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2 + \gamma IC^2)$$

$$MI^2 = \frac{k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2 + \gamma IC^2)}{\alpha + \beta + \gamma}. \text{ Đặt } h = \frac{k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2 + \gamma IC^2)}{\alpha + \beta + \gamma}$$

Như vậy tập hợp các điểm M là:

- Đường tròn tâm I , bán kính $\sqrt{h}$ nếu $h > 0$.
- Điểm I nếu $h = 0$.
- $\emptyset$ nếu $h < 0$.

3. Bài toán cực trị hình học

a) Cho I là điểm cố định, M thay đổi thì MI^2 bé nhất khi $M \equiv I$.

b) Cho I là điểm cố định, M thay đổi trên đường thẳng d thì MI bé nhất khi M là hình chiếu của I lên đường thẳng d .

c) Một số bất đẳng thức được đánh giá từ các bình phương vô hướng đặc biệt:

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 \geq 0, (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})^2 \geq 0, \dots$$

II - BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 19. Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp những điểm M sao cho:

a) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$

Ví dụ 20. Cho tam giác AB có độ dài bằng $3a$. Tìm tập hợp những điểm M thỏa:

a) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = AB^2$

b) $MA^2 + 2MB^2 = AB^2$

Dạng 6. Biểu thức tọa độ**I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI**

Cho $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$, $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$.

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$ (hoành $\times$ hoành + tung $\times$ tung)
- $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$; $|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$
- $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$
- $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0$
- $AB = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
- Khi tính tích vô hướng 2 vectơ, ta nên để ý đến chiều nhằm xác định đúng góc của chúng.

II - BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 22. a) Cho $\vec{a} = (-1; 2)$. Tìm tọa độ vectơ $\vec{b}$ cùng phương với $\vec{a}$ biết $|\vec{b}| = \sqrt{10}$.

b) Cho $\vec{a} = (2; -3)$. Tìm vectơ $\vec{b}$ cùng phương với $\vec{a}$ biết $\vec{a} \cdot \vec{b} = -26$.

c) Cho $\vec{a} = (-2; 1)$. Tìm tọa độ vectơ $\vec{b}$ vuông góc với $\vec{a}$ biết $|\vec{b}| = \sqrt{5}$.

III - BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 50. Cho $A(5; -1)$ và $B(-1; 3)$.

- Tìm trên trục tung điểm P sao cho $\widehat{APB} = 90^\circ$.
- Tìm trên trục hoành điểm M sao cho $MA^2 + 2MB^2$ nhỏ nhất.

Bài 51. Cho $\vec{a} = (1; 3)$, $\vec{b} = (6; -2)$ và $\vec{c} = (x; 1)$.

- Chứng minh $\vec{a} \perp \vec{b}$
- Tìm x để $\vec{a} \perp \vec{c}$
- Tìm x để $\vec{a}$ và $\vec{c}$ cùng phương
- Tìm tọa độ vectơ $\vec{d}$ để $\vec{a} \perp \vec{d}$ và $\vec{b} \cdot \vec{d} = 20$

Dạng 7. Tìm các điểm đặc biệt trong tam giác

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Để tìm điểm $M(x; y)$ ta dùng quan hệ giữa các vector: vuông góc, cùng phương, bằng nhau, ... để thiết lập phương trình theo 2 ẩn x, y .

2. Trong $\triangle ABC$, ta cần nhớ các thuộc tính của một số điểm sau:

✓ **Trọng tâm $G(x_G; y_G)$ là giao điểm ba đường trung tuyến:**

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \quad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

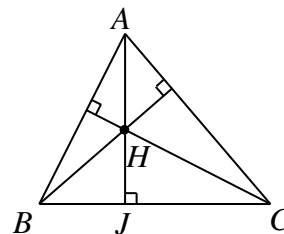
✓ **Trực tâm $H(x_H; y_H)$ là giao điểm ba đường cao:**

Ta có $AH \perp BC \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

$BH \perp AC \Leftrightarrow \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

Từ đó ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta tìm được x_H, y_H .



✓ **Tìm $J(x_J; y_J)$ là chân đường cao vẽ từ A:**

▪ Vì $AJ \perp BC \Rightarrow \overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ (1)

▪ Vì 3 điểm B, J, C thẳng hàng nên: $\overrightarrow{BJ}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương (2)

Giải hệ phương trình gồm 2 phương trình (1) và (2) ta tìm được x_J, y_J .

✓ **Tâm đường tròn ngoại tiếp $I(x_I; y_I)$ là giao điểm 3 đường trung trực:**

❖ Trường hợp 1: $\triangle ABC$ là tam giác đặc biệt:

▪ $\triangle ABC$ vuông tại A $\Rightarrow I$ là trung điểm BC.

▪ $\triangle ABC$ đều $\Rightarrow I$ là trọng tâm.

❖ Trường hợp 2: $\triangle ABC$ là tam giác thường:

▪ Cách 1: Tọa độ điểm I là nghiệm của hệ:
$$\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \end{cases}$$

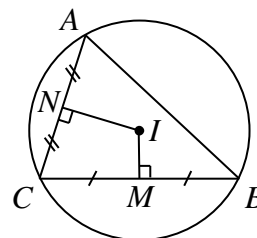
▪ Cách 2: Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AC.

Ta có $IM \perp BC \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

$IN \perp AC \Leftrightarrow \overrightarrow{IN} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

Từ đó ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{IN} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta tìm được x_I, y_I .



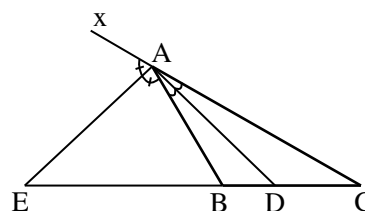
✓ **Tìm D và E lần lượt là chân đường phân giác trong và phân giác ngoài của góc A:**

• Chân đường phân giác trong $D(x_D; y_D)$:

$$\frac{\overrightarrow{DB}}{\overrightarrow{DC}} = -\frac{AB}{AC} \Rightarrow \overrightarrow{DB} = -\frac{AB}{AC} \cdot \overrightarrow{DC}$$

• Chân đường phân giác ngoài $E(x_E; y_E)$:

$$\frac{\overrightarrow{EB}}{\overrightarrow{EC}} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \overrightarrow{EB} = \frac{AB}{AC} \cdot \overrightarrow{EC}$$



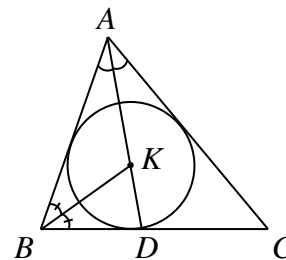
✓ Tâm đường tròn nội tiếp $K(x_K; y_K)$ là giao điểm ba đường phân giác:

- Bước 1: $\triangle ABC$: Tìm điểm D là chân đường phân giác trong của góc A :

$$\frac{\overrightarrow{DB}}{\overrightarrow{DC}} = -\frac{AB}{AC} \Rightarrow \overrightarrow{DB} = -\frac{AB}{AC} \cdot \overrightarrow{DC}$$

- Bước 2: $\triangle ABD$: Tìm điểm K là chân đường phân giác trong của góc B :

$$\frac{\overrightarrow{KA}}{\overrightarrow{KD}} = -\frac{BA}{BD} \Rightarrow \overrightarrow{KA} = -\frac{BA}{BD} \cdot \overrightarrow{KD}$$



⊗ Chú ý: Ta có thể dùng công thức sau để kiểm tra lại kết quả:

$$x_K = \frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a + b + c}; \quad y_K = \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a + b + c}$$

(trong đó $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ là độ dài 3 cạnh của tam giác)

II - BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 23. Cho $\triangle ABC$, biết $A(1;1)$, $B(1;7)$, $C(9;1)$. Tìm tọa độ điểm K là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.

Bài 52. Cho $\triangle ABC$, biết $A(4;3)$, $B(-1;-1)$, $C(2;-4)$.

a) Tìm tọa độ trực tâm H của $\triangle ABC$.

b) Tìm điểm K là chân đường cao kẻ từ C .

Dạng 8. Một số dạng toán thường gặp trên tam giác, tứ giác**I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI****1. Dạng câu hỏi “Chứng minh ...”:**1) Chứng minh ΔABC cân tại A .Tính độ dài AB, AC . Suy ra $AB = AC \Rightarrow \Delta ABC$ cân tại A .2) Chứng minh ΔABC vuông tại A .Cách 1: Tính AB, AC, BC . Suy ra $AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A .Cách 2: Tính tọa độ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$, suy ra $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dots = 0 \Rightarrow AB \perp AC \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A .3) Chứng minh ΔABC vuông cân tại A .Tính AB, AC, BC .Suy ra
$$\begin{cases} AB = AC \\ AB^2 + AC^2 = BC^2 \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \text{ vuông cân tại } A.$$
4) Chứng minh tứ giác $ABCD$ là hình bình hành:Tính $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$, suy ra $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và $AB = DC \Rightarrow ABCD$ là hình bình hành.5) Chứng minh tứ giác $ABCD$ là hình thoi:Tính AB, BC, CD, DA . Suy ra $AB = BC = CD = DA \Rightarrow ABCD$ là hình thoi.6) Chứng minh tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật:Cách 1: Chứng minh $ABCD$ là hình bình hành và có 1 góc vuông.Cách 2: Chứng minh $ABCD$ là hình bình hành và có 2 đường chéo bằng nhau.7) Chứng minh tứ giác $ABCD$ là hình vuôngCách 1: Chứng minh $ABCD$ là hình thoi và có 1 góc vuông.Cách 2: Chứng minh $ABCD$ là hình bình hành + 1 góc vuông + 2 cạnh liên tiếp bằng nhau.8) Chứng minh tứ giác $ABCD$ là hình thang:Tính $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC} \Rightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, suy ra $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ cùng phương $\Rightarrow AB \parallel CD \Rightarrow ABCD$ là hình thang.

- CM hình thang vuông: chứng minh thêm 1 góc vuông.

- CM hình thang cân: chứng minh thêm 2 đường chéo bằng nhau.

9) Chứng minh $ABCD$ là tứ giác nội tiếp:

- Ta vẽ hình trong mp Oxy để xem tứ giác này có đặc điểm gì?

- Chứng minh A và C vuông bằng cách tính tọa độ các vectơ liên quan và dùng điều kiện vuông góc (tích vô hướng = 0)Suy ra tứ giác $ABCD$ nội tiếp được trong đường tròn có đường kính BD .✎ **Lưu ý**: các tứ giác đặc biệt: hình chữ nhật, hình vuông, hình thang cân cũng là tứ giác nội tiếp.**11. Dạng câu hỏi “Tìm tọa độ điểm ...”:**1) Tìm tọa độ 1 điểm M thuộc trục tung (hoặc hoành) để ΔMAB vuông tại M (với A, B là 2 điểm cho trước).- Nếu $M \in Ox \Rightarrow M(x_M; 0)$; $M \in Oy \Rightarrow M(0; y_M)$.Nếu M thuộc đường thẳng $x = a \Rightarrow M(a; y_M)$.Nếu M thuộc đường thẳng $y = a \Rightarrow M(x_M; a)$.

- Tính sẵn tọa độ $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ (có 1 ẩn là x_M hoặc y_M).
- Do ΔMAB vuông tại $M \Rightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$, suy ra phương trình theo x_M hoặc y_M .
- 2) Tìm tọa độ 1 điểm M thuộc trục tung (hoặc hoành) để ΔMAB vuông cân tại M hoặc M cách đều A và B (với A và B là 2 điểm cho trước)
 - Nếu $M \in Ox \Rightarrow M(x_M; 0)$; $M \in Oy \Rightarrow M(0; y_M)$.
 - Nếu M thuộc đường thẳng $x = a \Rightarrow M(a; y_M)$.
 - Nếu M thuộc đường thẳng $y = a \Rightarrow M(x_M; b)$.
 - Tính độ dài MA , MB .
 - Do ΔMAB cân tại M (hay M cách đều A và B - tùy câu hỏi).
 $\Rightarrow MA = MB \Rightarrow \sqrt{\dots} = \sqrt{\dots} \Rightarrow$ phương trình theo x_M hoặc y_M .
- ✎ **Lưu ý:** Nếu yêu cầu câu hỏi là “ ΔMAB cân” thì với tọa độ M tìm được phải thử lại để loại trường hợp M là trung điểm AB .
- 3) Tìm tọa độ 1 điểm M thuộc trục tung (hoặc hoành) để M , A , B thẳng hàng (với A và B là 2 điểm cho trước)
 - Nếu $M \in Ox \Rightarrow M(x_M; 0)$; $M \in Oy \Rightarrow M(0; y_M)$.
 - Nếu M thuộc đường thẳng $x = a \Rightarrow M(a; y_M)$.
 - Nếu M thuộc đường thẳng $y = a \Rightarrow M(x_M; b)$.
 - Tính tọa độ $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$.
 - Ba điểm M , A , B suy ra $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ cùng phương $\Rightarrow$ phương trình theo x_M hoặc y_M .

II - BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 25. Trong mặt phẳng Oxy . Xét hình tính các tam giác ΔABC và tính chu vi, diện tích của chúng.

a) $A(1;4)$, $B(2;1)$, $C(5;2)$.

b) $A(1;1)$, $B(2;3)$, $C(5;-1)$.

c) $A(1;-1)$, $B(3;1)$, $C(-3;3)$.

b) $A(1;-1)$, $B(-2;-2)$, $C(-3;1)$.

Ví dụ 26. Trong mặt phẳng Oxy . Chứng minh tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết:

- a) $A(-1;2)$, $B(1;4)$, $C(5;0)$, $D(3;-2)$. b) $A(2;-2)$, $B(-1;-3)$, $C(-3;3)$, $D(0;4)$.

Ví dụ 27. Trong mặt phẳng Oxy . Chứng minh tứ giác $ABCD$ là hình thoi. Biết:

- a) $A(3;1)$, $B(5;-3)$, $C(1;-1)$, $D(1;-3)$. b) $A(3;3)$, $B(-2;8)$, $C(-3;1)$, $D(2;-4)$.

Ví dụ 28. Trong mặt phẳng Oxy . Chứng minh tứ giác $ABCD$ là hình vuông. Biết:

- a) $A(0;-2)$, $B(5;0)$, $C(3;5)$, $D(-2;3)$. b) $A(7;-3)$, $B(8;4)$, $C(1;5)$, $D(0;-2)$.

Ví dụ 29. Cho hai điểm $A(-3;3)$, $B(4;4)$.

- Tìm M thuộc trục tung để $\widehat{AMB} = 90^\circ$.
- Tìm N thuộc trục hoành để ba điểm A , B , N thẳng hàng.

Ví dụ 30. Cho ba điểm $A(1;3)$, $B(-1;-1)$, $C(2;-4)$.

- Chứng minh 3 điểm A , B , C lập thành tam giác.
- Tìm điểm $M(m,2)$ để $\triangle ABM$ vuông tại M .

Ví dụ 31. Cho ba điểm $A(1;3)$, $B(-1;-1)$, $C(5;-4)$.

- Chứng minh 3 điểm A , B , C lập thành tam giác vuông.
- Tìm điểm E trên Oy sao cho $AEBC$ lập thành hình thang.

Ví dụ 32. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho bốn điểm $A(7;-3)$, $B(8;4)$, $C(1;5)$ và $D(0;-2)$. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ là hình vuông.

III - BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 55. Cho ba điểm $A(1;1)$, $B(3;4)$, $C(0;5)$.

- Tìm $\vec{a} = (x; y)$ sao cho $\vec{a} \cdot \vec{AB} = 7$ và $|\vec{a}| = 5$.
- Tìm điểm M trên Ox sao cho $\triangle ABM$ vuông tại B .
- Tìm điểm D sao cho $ABDC$ là hình chữ nhật.

Bài 56. Tìm x , y để các điểm $A(2;0)$, $B(0;2)$, $C(0;7)$ và $D(x;y)$ là các đỉnh liên tiếp của hình thang cân.

Bài 57. Cho $\triangle ABC$, biết $A(4;1)$, $B(2;6)$ và $C(-5;3)$.

- Tính cosin của góc lớn nhất trong tam giác ABC .
- Tìm điểm D trên Ox sao cho $ABCD$ là hình thang.

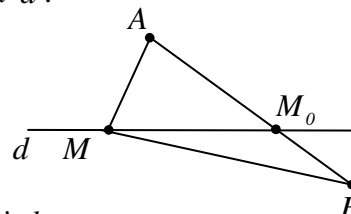
Dạng 9. Tìm GTLN, GTNN trong hình học

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Bài toán 1: Cho điểm A, B và đường thẳng d . Tìm điểm $M \in d$ sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất.

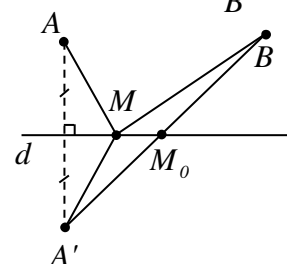
1. Trường hợp 1: Hai điểm A và B nằm khác phía đối với d :

- $M \in d \Rightarrow$ Tọa độ của M dạng tổng quát.
- Áp dụng bất đẳng thức trong tam giác, ta có:
 $MA + MB \geq AB$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv M_0$
 $\Leftrightarrow M, A, B$ thẳng hàng $\Rightarrow$ tọa độ M .



2. Trường hợp 2: Hai điểm A và B nằm cùng phía đối với d :

- $M \in d \Rightarrow$ Tọa độ của M dạng tổng quát.
- Gọi A' là điểm đối xứng với A qua d .
- Áp dụng bất đẳng thức trong tam giác, ta có:
 $MA + MB \geq A'B \Leftrightarrow MA + MB \geq A'B$
 $\Rightarrow (MA + MB)_{\min} \Leftrightarrow (MA + MB) = A'B$

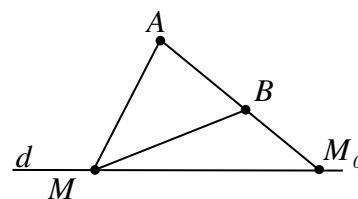


Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv M_0 \Leftrightarrow M, A', B$ thẳng hàng $\Rightarrow$ tọa độ M .

Bài toán 2: Cho điểm A, B và đường thẳng d . Tìm điểm $M \in d$ sao cho $|MA - MB|$ lớn nhất.

1. Trường hợp 1: Hai điểm A và B nằm khác phía đối với d :

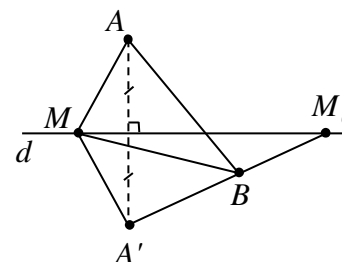
- $M \in d \Rightarrow$ Tọa độ của M dạng tổng quát.
- Áp dụng bất đẳng thức trong tam giác, ta có:
 $|MA - MB| \leq AB \Leftrightarrow |MA - MB|_{\max} = AB$



Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv M_0 \Leftrightarrow M, A, B$ thẳng hàng $\Rightarrow$ tọa độ M .

2. Trường hợp 2: Hai điểm A và B nằm cùng phía đối với d :

- $M \in d \Rightarrow$ Tọa độ của M dạng tổng quát.
- Gọi A' là điểm đối xứng với A qua d .
- Áp dụng bất đẳng thức trong tam giác, ta có:
 $|MA' - MB| \leq A'B \Leftrightarrow |MA - MB| \leq A'B$
 $|MA - MB|_{\max} \Leftrightarrow |MA' - MB|_{\max} = A'B$



Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv M_0 \Leftrightarrow M, A', B$ thẳng hàng $\Rightarrow$ tọa độ M .

II - BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 33. Tìm trên trục hoành điểm P sao cho tổng khoảng cách từ điểm P đến các điểm A và B là nhỏ nhất. Biết: a) $A(1; 1), B(2; -4)$ b) $A(1; 2), B(3; 4)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 58. Cho ba điểm $A(0; 6)$, $B(2; 5)$, $M(2t - 2; t)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho:

a) $(MA + MB)_{\min}$

b) $|MA - MB|_{\max}$

III - BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 59. Tìm trên đường thẳng $d: y = -x$ điểm M sao cho tổng khoảng cách từ điểm M đến các điểm A và B là nhỏ nhất. Biết:

a) $A(1; 1)$, $B(-2; -4)$

b) $A(1; 1)$, $B(3; -2)$

Bài 60. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $A(1; -2)$, $B(3; 4)$.

a) Tìm điểm M trên trục hoành sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai điểm A , B là ngắn nhất.

b) Tìm điểm N trên trục hoành sao cho $|NA - NB|$ lớn nhất.

c) Tìm điểm I trên trục tung sao cho $IA + IB$ nhỏ nhất.

d) Tìm điểm J trên trục tung sao cho $|\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB}|$ ngắn nhất.

Bài 61. Cho ba điểm $A(1; 2)$, $B(2; 5)$, $M(2t + 2; t)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho:

a) $(MA + MB)_{\min}$

b) $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|_{\max}$

c) $|MA - MB|_{\max}$

d) $|MA - MB|_{\min}$

C – BÀI TẬP TỔNG HỢP VẤN ĐỀ 2

- Bài 62.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , tâm O , N là điểm tùy ý trên cạnh BC .
- Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{NA}$, $\overrightarrow{NO} \cdot \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{BD}$.
 - Lấy $M \in AD$ sao cho: $4\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD}$.
 Tính: $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{CD} \cdot (3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD})$.
- Bài 63.** Cho hình bình hành $ABCD$, biết $AB = 13$, $AD = 19$, $AC = 24$.
- Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.
 - Tính độ dài đường chéo BD .
 - Chứng tỏ $60^\circ < \hat{A} < 90^\circ$.
 - Tính $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD})$.
- Bài 64.** Cho tam giác ABC có:
- $AB = 2$, $AC = 3$, $\hat{A} = 60^\circ$. Tính độ dài cạnh BC .
 - $AB = 3$, $BC = 4$, $\hat{B} = 45^\circ$. Tính độ dài cạnh AC .
 - $AC = 5$, $BC = 6$, $\hat{C} = 120^\circ$. Tính độ dài cạnh AB .
- Bài 65.** Cho tam giác ABC vuông tại A có trung tuyến AM . Biết $BC = a\sqrt{3}$, $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$. Tính hai cạnh AB , AC .
- Bài 66.** Cho $\triangle ABC$ có $AB = 3a$, $AC = a$, $\hat{A} = 60^\circ$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. Suy ra độ dài trung tuyến AM .
- Bài 67.** Cho $\triangle ABC$ có $AB = 2$, $AC = 3$, $BC = 4$. Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$.
- Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ rồi suy ra $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$.
 - Tính $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BC}$.
 - Tính $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA}$.
 - Gọi D là chân đường phân giác trong của góc A . Tính AD .
- Bài 68.** Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , $AB = 3a$, $AC = 4a$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.
- Bài 69.** Cho $\triangle ABC$ đều có độ dài cạnh là a , đường cao AH . Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot (2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC})$.
- Bài 70.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , tính:
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
 - $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$
 - $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$
 - $(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})(2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$
 - $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$
 - $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$
- Bài 71.** Cho $\triangle ABC$ có $AB = 2$, $AC = 3$ và $\hat{A} = 120^\circ$.
- Tính BC .
 - Tính độ dài đường trung tuyến AM .
 - Gọi I , J là các điểm định bởi $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$, $\overrightarrow{JB} - 2\overrightarrow{JC} = \vec{0}$. Tính IJ .
- Bài 72.**
- Cho $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $|2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$. Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$.
 - Cho $|\vec{a}| = 2$; $|\vec{b}| = 3$; $|\vec{a} - \vec{b}| = 1$. Tính $|\vec{a} + \vec{b}|$.
 - Tính góc giữa 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa
$$\begin{cases} 3\vec{a} - 5\vec{b} \perp 2\vec{a} + \vec{b} \\ \vec{a} + 4\vec{b} \perp \vec{a} - \vec{b} \end{cases}$$

- Bài 73.** cho $\triangle ABC$ có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, G là trọng tâm.
a) Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. Suy ra $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$.
b) Tính AG và cosin của góc hợp bởi AG và BC .
c) Gọi đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là $(O; R)$. Tính OG .
- Bài 74.** Cho $\triangle ABC$. Tìm tập hợp các điểm M trong mỗi trường hợp sau:
a) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC}$ b) $MA^2 + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$
c) $MA^2 = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC}$ d) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$
- Bài 75.** Cho $\triangle ABC$ và số k . Tìm quỹ tích các điểm M trong mỗi trường hợp sau:
a) $MA = kMB$ b) $MA^2 + 4MB^2 = k^2$ c) $MA^2 - MC^2 = k^2$ d) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = k$
- Bài 76.** Cho $\triangle ABC$, G là trọng tâm và M là điểm tùy ý.
a) Chứng minh rằng: $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$ không phụ thuộc vị trí M .
b) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. CMR: $MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 2\overrightarrow{MO} \cdot \vec{v}$
c) Giả sử M di động trên đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Tìm vị trí của điểm M để $MA^2 + MB^2 - 2MC^2$ đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất?
- Bài 77.** a) Cho hai điểm A và B cố định và một số k . Tìm tập hợp điểm M sao cho $MA^2 + MB^2 = k$.
b) Cho hai điểm A và B cố định và một số k . Tìm tập hợp điểm M sao cho $MA^2 - MB^2 = k$.
c) Cho $\triangle ABC$ cố định và một số k . Tìm tập hợp điểm M sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2 = k^2$.
d) Cho $\triangle ABC$ cố định và một số k . Tìm tập hợp điểm M sao cho $2MA^2 + 3MB^2 + 5MC^2 = k^2$.
e) Cho hình bình hành $ABCD$ cố định và một số k . Tìm tập hợp điểm M sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = k^2$.
- Bài 78.** Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O) . Gọi H là điểm xác định bởi $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.
a) Tính $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BC}$. Suy ra H là trực tâm của tam giác ABC .
b) Tìm hệ thức giữa độ dài ba cạnh của $\triangle ABC$ là a, b, c sao cho $AH \perp AM$ với M là trung điểm của BC .
- Bài 79.** Cho hình vuông $ABCD$.
a) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, CD . Chứng minh: $AM \perp BN$.
b) Gọi P, Q tương ứng trên BC, CD sao cho $4BP = BC, 4CQ = CD$.
Chứng minh: $AP \perp BQ$.
- Bài 80.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có:
a) $AB = a, AD = a\sqrt{2}$. Gọi K là trung điểm của AD . Chứng minh: $BK \perp AC$.
b) $AB = a, AD = b$. Gọi K là trung điểm của AD và L trên tia DC sao cho $DL = \frac{b^2}{2a}$.
Chứng minh: $BK \perp AL$.
- Bài 81.** Cho hình vuông $ABCD$, điểm M nằm trên AC sao cho $4AM = AC$. Gọi N là trung điểm của DC . Chứng minh $\triangle BMN$ vuông cân.
- Bài 82.** Cho $\triangle ABC$. Lấy M, M' là hai điểm tùy ý. Gọi H, K, L là hình chiếu của M trên BC, CA, AB và H', K', L' là hình chiếu của M' trên BC, CA, AB .
Chứng minh rằng: $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{KK'} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{LL'} = 0$.

- Bài 96.** Cho ΔABC , biết $A(1;3)$, $B(-1;-1)$, $C(2;-4)$. Tìm tọa độ điểm I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC .
- Bài 97.** Cho ΔABC , biết $A(1;-4)$, $B(-5;-1)$, $C(5;4)$.
 a) Tìm tọa độ điểm D là chân đường phân giác trong của góc B .
 b) Tìm tọa độ điểm E là chân đường phân giác ngoài của góc B .
- Bài 98.** Cho ΔABC với $A(-3;6)$, $B(9;-10)$, $C(-5;4)$. Xác định tâm I và tính bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC .
- Bài 99.** Cho ΔABC với $A(2;-4)$, $B(1;3)$, $C(11;2)$. Tìm tọa độ trực tâm H .
- Bài 100.** Cho ΔABC với $A(-2;6)$, $B(6;2)$, $C(1;-3)$. Tìm tọa độ chân đường cao CH và tính độ dài đường cao này.
- Bài 101.** Trong mặt phẳng Oxy , cho 3 điểm $A(-1;-5)$, $B(5;-3)$, $C(3;-1)$.
 a) Tính $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$. Suy ra tính chất của tam giác ABC . Tìm tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
 b) Tìm $D \in Oy$ sao cho $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$, $ABCD$ là hình gì?
 c) Vẽ phân giác trong CF của góc C trong ΔABC . Tìm tọa độ C .
- Bài 102.** Trong mặt phẳng Oxy , cho 3 điểm $A(1;-1)$, $B(2;-3)$, $C(5;1)$.
 a) Chứng minh rằng A , B , C lập thành một tam giác.
 b) Tìm tọa độ tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC .
 c) Tính diện tích ΔABC .
- Bài 103.** Xét hình dạng của ΔABC khi biết:
 a) $A(1;0)$, $B(5;0)$, $C(3;4)$.
 b) $A(1;2)$, $B(-2;6)$, $C(9;8)$.
 c) $A(-1;0)$, $B(3;0)$, $C(1;2\sqrt{2})$.
 d) $A(5;7)$, $B(8;-5)$, $C(0;-7)$.
- Bài 104.** Xác định hình dạng của tứ giác khi biết:
 a) $A(2;6)$, $B(3;3)$, $C(-3;1)$, $D(-4;4)$.
 b) $A(-2;-2)$, $B(-1;3)$, $C(3;2)$, $D(2;-2)$.
 c) $A(-2;-6)$, $B(4;-4)$, $C(2;-2)$, $D(-1;-3)$.
 d) $A(2;1)$, $B(3;6)$, $C(-2;5)$, $D(-3;0)$.
- Bài 105.** Cho ΔABC , biết $A(0;2)$, $B(6;9)$, $C(4;1)$.
 a) Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. Chứng minh ΔABC vuông tại A .
 b) Tìm tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC .
 c) Tìm tọa độ trực tâm H và trọng tâm G của ΔABC .
 d) Tính chu vi, diện tích của ΔABC .
 e) Tìm tọa độ điểm M trên Oy để B , M , A thẳng hàng.
 f) Tìm tọa độ điểm N trên Ox để ΔANC cân tại N .
 g) Tìm tọa độ điểm D để $ABCD$ là hình chữ nhật.
 h) Tìm tọa độ điểm K để $AOKB$ là hình thang đáy AO .
 i) Tìm tọa độ điểm T thỏa $\overrightarrow{TA} + 2\overrightarrow{TB} - 3\overrightarrow{TC} = \vec{0}$.
 j) Tìm tọa độ điểm E đối xứng với điểm A qua B .
 k) Tìm tọa độ điểm I là chân đường phân giác trong tại đỉnh C .
- Bài 106.** Cho $\vec{a} = (1;1)$, $\vec{b} = (x-1;2)$ và $\vec{c} = (2;y+1)$.
 a) Tìm x để $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}$
 b) Tìm y để $\vec{a} \perp \vec{c}$.

Bài 107. Cho bốn điểm $A(2;3)$, $B(9;4)$, $C(5;y)$, $D(x;-2)$.

- Tìm y để $\triangle ABC$ vuông tại C .
- Tìm x để ba điểm A , B , D thẳng hàng.

Bài 108. Cho $\triangle ABC$ với $A(5;3)$, $B(2;-1)$, $C(-1;5)$.

- Tính tọa độ trực tâm H của tam giác.
- Tính tọa độ chân đường cao vẽ từ A .

Bài 109. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $A(-2;1)$. Gọi B là điểm đối xứng với điểm A qua gốc tọa độ O . Tìm tọa độ của điểm C có tung độ bằng 2 sao cho tam giác ABC vuông ở C .

Bài 110. Cho $\triangle ABC$, biết $A(1;-1)$, $B(5;-3)$, $C(2;0)$.

- Tính chu vi và nhận dạng tam giác ABC .
- Tìm tọa độ điểm M biết $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$
- Tìm tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Bài 111. Cho $\triangle ABC$, biết $A(2;2)$, $B(-2;-4)$, $C(6;0)$.

- Tìm tọa độ trọng tâm G , trực tâm H và tâm I đường tròn ngoại tiếp của $\triangle ABC$. Chứng minh G , H , I thẳng hàng.
- Tìm điểm K là chân đường cao kẻ từ C .

Bài 112. Cho ba điểm $A(1;5)$, $B(-4;-5)$, $C(4;-1)$.

- Chứng minh 3 điểm A , B , C là 3 đỉnh của một tam giác.
- Tìm tọa độ chân đường phân giác trong và ngoài của góc A .
- Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.

Bài 113. Cho $\triangle ABC$, biết $A(4;3)$, $B(0;-5)$, $C(-6;-2)$.

- Chứng minh $\triangle ABC$ vuông tại B .
- Tìm tâm của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$
- Tìm tâm của đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$

Bài 114. Cho $\triangle ABC$, biết $A(4;3)$, $B(0;-5)$, $C(-6;-2)$.

- Chứng minh $\triangle ABC$ vuông tại B .
- Tìm tọa độ hình chiếu của A lên BC . Tính diện tích $\triangle ABC$.
- Tìm tâm của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$
- Tìm tâm của đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$

Bài 115. Cho ba điểm $A(7;4)$, $B(0;3)$, $C(4;0)$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A lên BC . Từ đó suy ra tọa độ A' là điểm đối xứng với A qua BC .

Bài 116. Cho $\triangle ABC$, biết $A(1;2)$, $B(-1;1)$, $C(5;-1)$.

- Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
- Tính $\cos$ và $\sin$ của góc A .
- Tìm tọa độ chân đường cao của $\triangle ABC$.
- Tìm tọa độ trực tâm H của $\triangle ABC$.
- Tìm tọa độ trọng tâm G của $\triangle ABC$.
- Tìm tọa độ tâm I đường tròn ngoại tiếp của $\triangle ABC$.
- Chứng minh: I , H , G thẳng hàng.

D – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VẤN ĐỀ 2

- Câu 29.** [0H2-1] Cho $\triangle ABC$ có H là trực tâm. Biểu thức $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HC})^2$ bằng biểu thức nào sau đây?
A. $AB^2 + HC^2$. **B.** $(AB + HC)^2$. **C.** $AC^2 + AH^2$. **D.** $AC^2 + 2AH^2$.
- Câu 30.** [0H2-1] Cho tam giác ABC , có $AB = 1$, $BC = \sqrt{3}$, $AC = 2$. Gọi M là trung điểm của AB . Giá trị của $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC}$ là
A. $\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $8 - \sqrt{2}$.
- Câu 31.** [0H2-1] Cho tam giác ABC đều cạnh bằng 4. Khi đó, tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ ta được:
A. 8. **B.** -8. **C.** -6. **D.** 6.
- Câu 32.** [0H2-1] Cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là 2 vector khác $\vec{0}$. Khi đó $(\vec{u} + \vec{v})^2$ bằng:
A. $\vec{u}^2 + \vec{v}^2$. **B.** $\vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$. **C.** $(\vec{u} + \vec{v})^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$. **D.** $\vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$.
- Câu 33.** [0H2-1] $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là 2 vector đều khác $\vec{0}$. Khi đó $|\vec{u} + \vec{v}|^2$ bằng:
A. $\vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$. **B.** $\vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$. **C.** $\vec{u}^2 + \vec{v}^2$. **D.** $\vec{u} \cdot \vec{v}(\vec{u} - \vec{v})$.
- Câu 34.** [0H2-1] Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Tập hợp những điểm M mà $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ là
A. Đường tròn đường kính AB .
B. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC .
C. Đường thẳng đi qua B và vuông góc với AC .
D. Đường thẳng đi qua C và vuông góc với AB .
- Câu 35.** [0H2-1] Trong các hệ thức sau, hệ thức nào đúng?
A. $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}|$. **B.** $\sqrt{\vec{a}^2} = |\vec{a}|$. **C.** $\sqrt{\vec{a}^2} = \vec{a}$. **D.** $\vec{a} = \pm |\vec{a}|$.
- Câu 36.** [0H2-1] Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng m . Khi đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ bằng
A. m^2 . **B.** $m^2 \frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $-\frac{m^2}{2}$. **D.** $\frac{m^2}{2}$.
- Câu 37.** [0H2-1] Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng m . Khi đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ bằng
A. $2m^2$. **B.** $-m^2 \frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $-\frac{m^2}{2}$. **D.** $\frac{m^2}{2}$.
- Câu 38.** [0H2-1] Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng khác $\vec{0}$ là số âm khi
A. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng chiều. **B.** $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.
C. $0^\circ < (\vec{a}, \vec{b}) < 90^\circ$. **D.** $90^\circ < (\vec{a}, \vec{b}) < 180^\circ$.
- Câu 39.** [0H2-1] Chọn kết quả đúng $(\vec{a} - \vec{b})^2 =$
A. $\vec{a}^2 - \vec{b}^2$. **B.** $a^2 - b^2$.
C. $\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$. **D.** $a^2 + b^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \cos(\vec{a}, \vec{b})$.
- Câu 40.** [0H2-1] Điều kiện của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ sao cho $(\vec{a} - \vec{b})^2 = 0$ là
A. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đối nhau. **B.** $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.
C. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng nhau. **D.** $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.

- Câu 41. [0H2-2]** Cho hình vuông $MNPQ$ có I, J lần lượt là trung điểm của PQ, MN . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{QI} \cdot \overrightarrow{NJ}$.
- A. $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PI}$. B. $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PN}$. C. $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PQ}$. D. $-\frac{\overrightarrow{PQ}^2}{4}$.
- Câu 42. [0H2-2]** Nếu tam giác ABC là tam giác đều thì mệnh đề nào sau đây đúng?
- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} AB^2$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2} AB^2$. C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{4} AB^2$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.
- Câu 43. [0H2-2]** Trong hình dưới đây, cho $AB = 2$; $AH = \frac{3}{2}$.
- Khi đó, tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ ta được:
- A. -3 . B. 3 .
C. 4 . D. 5 .
- Câu 44. [0H2-2]** Trong hình vẽ dưới đây, tính $2\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{FG}$, ta được:
- A. 8 . B. -12 .
C. -6 . D. -8 .
- Câu 45. [0H2-2]** Cho hình vuông $ABCD$ tâm O , cạnh a . Tính $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BC}$ ta được:
- A. a^2 . B. $-a^2$. C. $\frac{3}{2}a^2$. D. $\frac{a^2}{2}$.
- Câu 46. [0H2-2]** Cho tam giác ABC có H là trực tâm; A', B' lần lượt là chân đường cao xuất phát từ các điểm A, B . Gọi D, M, N, P lần lượt là trung điểm của AH, BC, CA, AB . Đẳng thức nào sau đây là đúng?
- A. $\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{ND} = \overrightarrow{A'M} \cdot \overrightarrow{A'D}$. B. $\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{ND} = \overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{PC}$.
C. $\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{ND} = \overrightarrow{DP} \cdot \overrightarrow{DM}$. D. $\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{ND} = \overrightarrow{DA'} \cdot \overrightarrow{DB'}$.
- Câu 47. [0H2-2]** Cho tam giác ABC vuông cân đỉnh A , có $AB = AC = a$. Mệnh đề nào sau đây sai?
- A. $\overrightarrow{AB}^2 = AB$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. C. $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = a^2$. D. $|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|$.
- Câu 48. [0H2-2]** Cho ABC là tam giác đều. Mệnh đề nào sau đây sai?
- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \in \mathbb{R}$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$.
C. $(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} (\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC})$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.
- Câu 49. [0H2-2]** Cho hình thang vuông $ABCD$ có đáy lớn $AB = 4a$, đáy nhỏ $CD = 2a$, đường cao $AD = 3a$; I là trung điểm của AD . Câu nào sau đây sai?
- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = 8a^2$. B. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$. C. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. D. $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$.
- Câu 50. [0H2-2]** Cho tam giác ABC có $BC = 6, CA = 4, AB = 5$. Mệnh đề nào sau đây sai?
- A. $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{8}$. B. $\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{1}{8}$.
C. $\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA}) = -\frac{1}{8}$. D. $\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{3}{4}$.
- Câu 51. [0H2-2]** Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^\circ, AB = 5, AC = 8$. Tính $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC}$.
- A. 20 . B. 44 . C. 64 . D. 60 .

Câu 52. [0H2-2] Cho tam giác ABC có $AB = c, CA = b, BC = a$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ theo a, b, c .

- A. $\frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)$. B. $\frac{1}{2}(a^2 - b^2 - c^2)$. C. $\frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2)$. D. $\frac{1}{2}(b^2 - c^2 - a^2)$.

Câu 53. [0H2-2] Trong tam giác ABC có $AB = 10, AC = 12$, góc $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Khi đó, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ bằng:

- A. 30. B. 60. C. -60. D. -30.

Câu 54. [0H2-2] Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Tập hợp những điểm M mà $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ là:

- A. Đường tròn đường kính AB .
B. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC .
C. Đường thẳng đi qua B và vuông góc với AC .
D. Đường thẳng đi qua C và vuông góc với AB .

Câu 55. [0H2-2] Cho hai điểm B, C phân biệt. Tập hợp những điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CM}^2$ là:

- A. Đường tròn đường kính BC . B. Đường tròn $(B; BC)$.
C. Đường tròn $(C; CB)$. D. Một đường khác.

Câu 56. [0H2-2] Cho ABC là tam giác đều. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \in \mathbb{R}$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$.
C. $(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} (\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC})$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Câu 57. [0H2-2] Cho tam giác đều ABC cạnh $a = 2$. Hỏi mệnh đề nào sau đây sai?

- A. $(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) \overrightarrow{BC} = 2 \overrightarrow{BC}$. B. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -2$.
C. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{AC} = -4$. D. $(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{BA} = -4$.

Câu 58. [0H2-2] Cho hình vuông $ABCD$ tâm O . Câu nào sau đây sai?

- A. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$. B. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{CA}$.
C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$.

Câu 59. [0H2-2] Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Câu nào sau đây sai?

- A. $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CB} = a^2$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = a^2$.
C. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

Câu 60. [0H2-2] Cho tam giác đều ABC cạnh a , với các đường cao AH, BK vẽ $HI \perp AC$. Câu nào sau đây sai?

- A. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 2 \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BH}$. B. $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = 4 \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CI}$.
C. $(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{BC} = 2 \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$. D. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 4 \overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{CH}$.

Câu 61. [0H2-2] Cho tam giác đều ABC cạnh a , với các đường cao AH, BK vẽ $HI \perp AC$. Câu nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$. B. $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CK} = \frac{a^2}{8}$. C. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$. D. $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CK} = \frac{a^2}{2}$.

Câu 62. [0H2-2] Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$.
C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = a^2$. D. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{AD} = a^2$.

- Câu 63. [0H2-2]** Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh a . Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.
- A. 0. B. a . C. $\frac{a^2}{2}$. D. a^2 .
- Câu 64. [0H2-2]** Tam giác ABC vuông ở A và có góc $\widehat{B} = 50^\circ$. Hệ thức nào sau đây là **sai**?
- A. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 130^\circ$. B. $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = 40^\circ$.
 C. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) = 50^\circ$. D. $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 120^\circ$.
- Câu 65. [0H2-2]** Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng và đều khác vectơ $\vec{0}$. Trong các kết quả sau đây, hãy chọn kết quả đúng.
- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$. D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.
- Câu 66. [0H2-2]** Cho tam giác ABC vuông tại A . Khẳng định nào sau đây là **sai**?
- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} < \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$. B. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} < \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$.
 C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} < \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$. D. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} < \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB}$.
- Câu 67. [0H2-2]** Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 5$ cm, $BC = 13$ cm. Gọi góc $\widehat{ABC} = \alpha$ và $\widehat{ACB} = \beta$. Hãy chọn kết luận đúng khi so sánh α và β :
- A. $\beta > \alpha$. B. $\beta < \alpha$. C. $\beta = \alpha$. D. $\alpha \leq \beta$.
- Câu 68. [0H2-2]** Đường tròn tâm O có bán kính $R = 15$ cm. Gọi P là một điểm cách tâm O một khoảng $PO = 9$ cm. Dây cung đi qua P và vuông góc với PO có độ dài là:
- A. 22 cm. B. 23 cm. C. 24 cm. D. 25 cm.
- Câu 69. [0H2-2]** Cho tam giác ABC . Tìm tổng $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB})$.
- A. 180° . B. 360° . C. 270° . D. 120° .
- Câu 70. [0H2-2]** Cho tam giác ABC , tìm $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) - (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
- A. 180° . B. 90° . C. 270° . D. 120° .
- Câu 71. [0H2-2]** Cho tam giác ABC vuông ở A . Tìm tổng $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$.
- A. 180° . B. 360° . C. 270° . D. 240° .
- Câu 72. [0H2-2]** Cho tam giác ABC với $\widehat{A} = 60^\circ$, tìm tổng $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$.
- A. 120° . B. 360° . C. 270° . D. 240° .
- Câu 73. [0H2-2]** Tam giác ABC vuông ở A và $BC = 2AC$. Tính cosin của góc $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB})$.
- A. $\frac{1}{2}$. B. $-\frac{1}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- Câu 74. [0H2-2]** Tam giác ABC vuông ở A và $BC = 2AC$. Tính cosin của góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$.
- A. $\frac{1}{2}$. B. $-\frac{1}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- Câu 75. [0H2-2]** Cho tam giác đều ABC . Tính $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + \cos(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$.
- A. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{3}{2}$. C. $-\frac{3}{2}$. D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 76. [0H2-2] Cho tam giác đều ABC . Tính $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB})$.

- A. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{3}{2}$. C. $-\frac{3}{2}$. D. $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 77. [0H2-2] Tam giác ABC vuông ở A , $AB = c$, $AC = b$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$

- A. $b^2 + c^2$. B. $b^2 - c^2$. C. b^2 . D. c^2 .

Câu 78. [0H2-2] Cho O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều MNP . Góc nào sau đây bằng 120° ?

- A. $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NP})$. B. $(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{ON})$. C. $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{OP})$. D. $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP})$.

Câu 79. [0H2-2] Cho M, N, P, Q là bốn điểm tùy ý. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào sai?

- A. $\overrightarrow{MN}(\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ}$. B. $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$.
C. $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{MN}$. D. $(\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PQ})(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ}) = MN^2 - PQ^2$.

Câu 80. [0H2-2] Tam giác ABC vuông ở A , $AB = c$, $AC = b$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$

- A. $b^2 + c^2$. B. $b^2 - c^2$. C. $-b^2$. D. c^2 .

Câu 81. [0H2-2] Cho tam giác đều ABC cạnh a . Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$

- A. $\frac{3a^2}{2}$. B. $\frac{-3a^2}{2}$. C. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. D. $-\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Câu 82. [0H2-2] Cho biết $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$; $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$. Độ dài của vectơ $\vec{a} - \vec{b}$ bằng

- A. $\sqrt{19}$. B. 7. C. 4. D. 2.

Câu 83. [0H2-2] Cho tam giác ABC biết: $\overrightarrow{AB} = 3\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2$; $\overrightarrow{BC} = \vec{e}_1 + 5\vec{e}_2$; $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$ và $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$.
Độ dài cạnh AC bằng

- A. $4\vec{e}_1 + \vec{e}_2$. B. 5. C. $|4\vec{e}_1| + |\vec{e}_2|$. D. $\sqrt{17}$.

Câu 84. [0H2-2] Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ bằng

- A. a^2 . B. $a^2\sqrt{2}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}a^2$. D. $\frac{1}{2}a^2$.

Câu 85. [0H2-2] Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . $\overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA})$ bằng

- A. -1. B. $3a^2$. C. $-3a^2$. D. $2a^2$.

Câu 86. [0H2-2] Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Gọi E là điểm đối xứng của D qua C . Khi đó: $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB}$ bằng

- A. $2a^2$. B. $\sqrt{3}a^2$. C. $\sqrt{5}a^2$. D. $5a^2$.

Câu 87. [0H2-2] Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khi $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

- A. 180° . B. 0° . C. 90° . D. 45° .

Câu 88. [0H2-2] Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ nếu $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

- A. 180° . B. 0° . C. 90° . D. 45° .

Câu 89. [0H2-2] Cho ba điểm O, A, B không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để tích vô hướng $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ là

- A. Tam giác OAB đều. B. Tam giác OAB cân tại O .
C. Tam giác OAB vuông tại O . D. Tam giác OAB vuông cân tại O .

- Câu 90. [0H2-2]** Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Đẳng thức nào sau đây là sai ?
- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$. B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$.
 C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$. D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$.
- Câu 91. [0H2-3]** Cho 2 điểm A, B và O là trung điểm của AB , $OA = a$. Tập hợp những điểm M mà $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = a^2$ là đường tròn tâm O , có bán kính bằng:
- A. a . B. $2a$. C. $a\sqrt{2}$. D. $2a\sqrt{2}$.
- Câu 92. [0H2-3]** Cho đoạn thẳng $AB = a$ cố định. Tập hợp những điểm M mà $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = a^2$ là:
- A. Đường tròn tâm A , bán kính a . B. Đường tròn tâm B , bán kính a .
 C. Đường thẳng vuông góc với AB tại A . D. Đường thẳng vuông góc với AB tại B .
- Câu 93. [0H2-3]** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = \sqrt{2}$, $AD = 1$. Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$.
- A. 89° . B. 92° . C. 109° . D. 91° .
- Câu 94. [0H2-3]** Cho đoạn thẳng $AB = 4$, $AC = 3$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = k$. Hỏi có mấy điểm C để $k = 8$?
- A. 3. B. 1. C. 2. D. 0.
- Câu 95. [0H2-3]** Cho đoạn thẳng $AB = 4$, $AC = 3$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = k$. Hỏi có mấy điểm C để $k = -12$?
- A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.
- Câu 96. [0H2-3]** Cho hình vuông $ABCD$ có I là trung điểm của AD . Tính $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BI})$.
- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{\sqrt{10}}$. C. $\frac{1}{\sqrt{5}}$. D. $-\frac{2}{\sqrt{10}}$.
- Câu 97. [0H2-3]** Cho tam giác vuông ABH vuông H tại H có $BH = 2$, $AB = 3$. Hình chiếu của H lên AB là K . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{BH}$.
- A. 4. B. $\frac{4}{3}$. C. $\frac{3}{4}$. D. $\frac{16}{9}$.
- Câu 98. [0H2-3]** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Trên các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt lấy các điểm M, N, P, Q sao cho $AM = BN = CP = DQ = x$ ($0 < x < a$). Tích tích vô hướng $\overrightarrow{PN} \cdot \overrightarrow{PQ}$.
- A. AB^2 . B. AC^2 . C. 0. D. AD^2 .
- Câu 99. [0H2-3]** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Trên các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt lấy các điểm M, N, P, Q sao cho $AM = BN = CP = DQ = x$ ($0 < x < a$). Tính diện tích tứ giác $MNPQ$ ta được:
- A. $2x^2 + 2ax + a^2$. B. $2x^2 - 2ax + a^2$. C. $2x^2 - ax + a^2$. D. $x^2 - 2ax + a^2$.
- Câu 100. [0H2-3]** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Trên các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt lấy các điểm M, N, P, Q sao cho $AM = BN = CP = DQ = x$ ($0 < x < a$). Tích tích vô hướng $\overrightarrow{PN} \cdot \overrightarrow{PM}$ ta được:
- A. $x^2 + (x + a)^2$. B. $x^2 + (a - 2x)^2$. C. $x^2 + (a - x)^2$. D. $x^2 + (2a - x)^2$.
- Câu 101. [0H2-3]** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Trên các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt lấy các điểm M, N, P, Q sao cho $AM = BN = CP = DQ = x$ ($0 < x < a$). Nếu $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{DC} = \frac{a^2}{2}$ thì giá trị của x bằng:
- A. $\frac{a}{4}$. B. $\frac{a}{2}$. C. $\frac{3a}{4}$. D. a .

Câu 102. [0H2-3] Cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là 2 vectơ đều khác $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} - \vec{v})^2$.
 B. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow |\vec{u}| = |\vec{v}|$.
 C. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 0$.
 D. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - 2\vec{v}) = 0$.

Câu 103. [0H2-3] Cho 3 điểm D, E, F theo thứ tự bất kỳ trên trục $x'Ox$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} = DE \cdot DF$.
 B. $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} = \overline{DE} \cdot \overline{DF}$.
 C. $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} = -DE \cdot DF$.
 D. $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} = -\overline{DE} \cdot \overline{DF}$.

Câu 104. [0H2-3] Cho tam giác đều ABC cạnh $a = 2$. Hỏi mệnh đề nào sau đây sai?

- A. $(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BC}$.
 B. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -2$.
 C. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{AC} = -4$.
 D. $(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{BA} = 4$.

Câu 105. [0H2-3] Cho hình vuông $ABCD$ tâm O . Câu nào sau đây sai?

- A. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$.
 B. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{CA}$.
 C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DC}$.
 D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$.

Câu 106. [0H2-3] Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Câu nào sau đây sai?

- A. $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CB} = a^2$.
 B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -a^2$.
 C. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$.
 D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

Câu 107. [0H2-3] Cho hình thang vuông $ABCD$ có đáy lớn $AB = 4a$, đáy nhỏ $CD = 2a$, đường cao $AD = 3a$; I là trung điểm của AD . $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC}$ bằng:

- A. $-9a^2$.
 B. $15a^2$.
 C. 0 .
 D. Không tính được.

Câu 108. [0H2-3] Cho hình thang vuông $ABCD$ có đáy lớn $AB = 4a$, đáy nhỏ $CD = 2a$, đường cao $AD = 3a$; I là trung điểm của AD . $(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) \cdot \overrightarrow{AC}$ bằng:

- A. $\frac{3a^2}{2}$.
 B. $-\frac{3a^2}{2}$.
 C. 0 .
 D. $9a^2$.

Câu 109. [0H2-3] Cho 2 điểm A và B có $AB = 4\text{cm}$. Tập hợp những điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ là:

- A. Đường thẳng vuông góc với AB .
 B. Đường tròn đường kính AB .
 C. Đoạn thẳng vuông góc với AB .
 D. Kết quả khác.

Câu 110. [0H2-3] Cho tam giác ABC vuông tại A , có $AB = 3$, $AC = 5$. Vẽ đường cao AH . Tích vô hướng $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC}$ bằng:

- A. $\sqrt{34}$.
 B. $-\sqrt{34}$.
 C. $-\frac{225}{34}$.
 D. $\frac{225}{34}$.

Câu 111. [0H2-3] Cho tam giác đều ABC cạnh a , với các đường cao AH , BK vẽ $HI \perp AC$. Câu nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BH}$.
 B. $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = 4\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CI}$.
 C. $(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{BC})^2$.
 D. Cả ba câu trên.

Câu 112. [0H2-3] Cho tam giác đều ABC cạnh a , với các đường cao AH , BK vẽ $HI \perp AC$. Câu nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$.
 B. $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CK} = \frac{a^2}{8}$.
 C. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$.
 D. Cả ba câu trên.

Câu 113. [0H2-3] Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$.
C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = a^2$. D. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{AD} = a^2$.

Câu 114. [0H2-3] Cho hình thang vuông $ABCD$ có đáy lớn $AB = 4a$, đáy nhỏ $CD = 2a$, đường cao $AD = 3a$; I là trung điểm của AB . $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC}$ bằng:

- A. $-9a^2$. B. $15a^2$. C. 0 . D. $9a^2$.

Câu 115. [0H2-3] Cho hình thang vuông $ABCD$ có đáy lớn $AB = 4a$, đáy nhỏ $CD = 2a$, đường cao $AD = 3a$; I là trung điểm của AB . Câu nào sau đây sai?

- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = 8a^2$. B. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$. C. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. D. $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$.

Câu 116. [0H2-3] Cho hình thang vuông $ABCD$ có đáy lớn $AB = 4a$, đáy nhỏ $CD = 2a$, đường cao $AD = 3a$; I là trung điểm của AB . $(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) \cdot \overrightarrow{ID}$ bằng:

- A. $\frac{3a^2}{2}$. B. $-\frac{3a^2}{2}$. C. 0 . D. $9a^2$.

Câu 117. [0H2-3] Trong tam giác có $AB = 10$, $AC = 12$, góc $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Khi đó, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ bằng:

- A. 30 . B. 60 . C. -60 . D. -30 .

Câu 118. [0H2-3] Cho hai điểm B, C phân biệt. Tập hợp những điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CM}^2$ thuộc

- A. Đường tròn đường kính BC . B. Đường tròn (B, BC) .
C. Đường tròn (C, CB) . D. Một đường khác không phải đường tròn.

Câu 119. [0H2-3] Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $AB = AC = 30$ cm. Hai đường trung tuyến BF và CE cắt nhau tại G . Diện tích tam giác GFC là:

- A. 50 cm^2 . B. $50\sqrt{2} \text{ cm}^2$. C. 75 cm^2 . D. $15\sqrt{105} \text{ cm}^2$.

Câu 120. [0H2-3] Cho góc $\widehat{xOy} = 30^\circ$. Gọi A và B là hai điểm di động lần lượt trên Ox và Oy sao cho $AB = 1$. Độ dài lớn nhất của đoạn OB bằng:

- A. $1,5$. B. $\sqrt{3}$. C. $2\sqrt{2}$. D. 2 .

Câu 121. [0H2-3] Tam giác ABC có góc A bằng 100° và có trực tâm H . Tìm tổng: $(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}) + (\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}) + (\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HA})$.

- A. 360° . B. 180° . C. 80° . D. 160° .

Câu 122. [0H2-3] Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA})$ bằng

- A. $2\sqrt{2}a$. B. $-3a^2$. C. 0 . D. $-2a^2$.

Câu 123. [0H2-3] Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ nếu hai vectơ $\frac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{a} + \vec{b}$ vuông góc với nhau và $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$.

- A. 90° . B. 180° . C. 60° . D. 45° .

Câu 124. [0H2-4] Cho tam giác ABC có H là trực tâm. Gọi các điểm D, E, F lần lượt là trung điểm của HA, HB, HC ; M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB ; A', B', C' lần lượt là chân đường cao xuất phát từ A, B, C ; Đường tròn đường kính NE đi qua:

- A. M và A . B. N và B . C. P và C . D. M, N, P .

Câu 125. [0H2-3] Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , tâm O . Tập hợp các điểm M thỏa mãn

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = a^2 \text{ là}$$

A. đường tròn $(O, a\sqrt{2})$.

B. đường tròn (O, a) .

C. đường tròn $\left(O, \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$.

D. đường tròn đường kính AC .

Câu 126. [0H2-3] Cho hình vuông $ABCD$ tâm O . Tập hợp các điểm M thỏa mãn

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MD^2 \text{ là}$$

A. đường thẳng AC .

B. đường thẳng CD .

C. đường tròn đường kính BC .

D. đường tròn đường kính AC .

Câu 127. [0H2-4] Cho tam giác ABC vuông cân tại A , I là trung điểm của BC . Vẽ ra ngoài tam giác các hình vuông $ABMN$ và $ACEF$. Hệ thức nào sau đây **sai**?

A. $MN \perp FE$.

B. $AN \perp FA$.

C. $MF \perp NE$.

D. $AI \perp FN$.

Câu 128. [0H2-4] Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 12$ và $|\vec{a} + \vec{b}| = 13$. Khi đó cosin của góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{a} + \vec{b}$ bằng

A. $\frac{12}{13}$.

B. $\frac{5}{12}$.

C. $\frac{5}{13}$.

D. $\frac{13}{12}$.

Câu 129. [0H2-4] Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 3$, $AD = 4$. Gọi M là điểm thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AB}$. Xác định k để hai đường thẳng AC và DM vuông góc nhau?

A. $\frac{9}{16}$.

B. $\frac{16}{9}$.

C. $\frac{4}{3}$.

D. $\frac{3}{4}$.

Câu 130. [0H2-4] Cho hình thang cân $ABCD$, đáy lớn là AB , góc nhọn ở đáy là 60° , biết $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $|\vec{a}| = m > 0$, $|\vec{b}| = n > 0$, $m > n$. Hai đường thẳng AC và BD vuông góc nhau khi

A. $m = \frac{n}{2}(1 + \sqrt{3})$.

B. $m = \frac{n}{2}(1 + \sqrt{3})$ hoặc $m = \frac{n}{2}(1 - \sqrt{3})$.

C. $n = \frac{m}{2}(1 + \sqrt{3})$.

D. $n = \frac{m}{2}(1 + \sqrt{3})$ hoặc $n = \frac{m}{2}(1 - \sqrt{3})$.

Câu 131. [0H2-4] Cho tam giác ABC có $AB = c$, $CA = b$, $BC = a$, $\widehat{BAC} = \alpha$. Vẽ đường phân giác AD của góc A ($D \in BC$). Tính AD .

A. $\frac{bc}{b+c} \sqrt{2(1+\cos \alpha)}$.

B. $\frac{bc \cos \alpha}{b+c}$.

C. $\frac{bc}{b+c} \sqrt{1+\cos \alpha}$.

D. $\frac{(b+c) \cos \alpha}{bc}$.

Câu 132. [0H2-1] Cho 2 vector $\vec{u} = (4; 5)$ và $\vec{v} = (3; a)$. Tính a để $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

A. $a = \frac{12}{5}$.

B. $a = -\frac{12}{5}$.

C. $a = \frac{5}{12}$.

D. $a = -\frac{5}{12}$.

Câu 133. [0H2-1] Trong hệ trục tọa độ Oxy , cho 2 vector $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$ và $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$. Tính $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ta được:

A. 6.

B. 2.

C. 4.

D. -4.

Câu 134. [0H2-1] Trong hệ trục tọa độ Oxy , cho 2 vector $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ và $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. Lúc đó $(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{v}$

bằng:

A. $2\vec{v}$.

B. $\vec{0}$.

C. $\vec{u}^2$.

D. $(\vec{u} \cdot \vec{v})(\vec{u}^2)$.

Câu 135. [0H2-1] Trong hệ trục $(O; \vec{i}; \vec{j})$, mệnh đề nào sau đây sai?

- A. $\vec{i}^2 = \vec{i}$. B. $|\vec{i}| = 1$. C. $|\vec{i}| = |\vec{j}|$. D. $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$.

Câu 136. [0H2-1] Trong mặt phẳng Oxy , cho $\vec{a} = (2; 1)$ và $\vec{b} = (3; -2)$. Tích vô hướng của hai vectơ đã cho là

- A. 4. B. -4. C. 0. D. 1.

Câu 137. [0H2-1] Trong mặt phẳng Oxy , cho $\vec{a} = (2; -1)$, $\vec{b} = (-3; 4)$. Khẳng định nào sau đây là sai?

- A. Tích vô hướng của hai vectơ đã cho là -10. B. Độ lớn của vectơ $\vec{a}$ là $\sqrt{5}$.
C. Độ lớn của vectơ $\vec{b}$ là 5. D. Góc giữa hai vectơ là 90° .

Câu 138. [0H2-1] Cho các vectơ $\vec{u} = (-2; 1)$, $\vec{v} = (1; 2)$. Tích vô hướng của $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là

- A. 0. B. $\vec{0}$. C. 2. D. 5.

Câu 139. [0H2-1] Cho hai điểm $A = (1; 2)$ và $B = (3; 4)$. Giá trị của $\overline{AB}^2$ là:

- A. 4. B. $4\sqrt{2}$. C. $6\sqrt{2}$. D. 8.

Câu 140. [0H2-1] Cho hai vectơ $\vec{a} = (4; 3)$ và $\vec{b} = (1; 7)$. Góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là

- A. 90° . B. 60° . C. 45° . D. 30° .

Câu 141. [0H2-1] Cho hai điểm $M(1; -2)$ và $N(-3; 4)$. Khoảng cách giữa hai điểm M và N là

- A. 4. B. 6. C. $3\sqrt{6}$. D. $2\sqrt{13}$.

Câu 142. [0H2-1] Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(3; -1)$, $B(2; 10)$. Tích vô hướng $\overline{OA} \cdot \overline{OB}$ bằng bao nhiêu?

- A. -4. B. 4. C. 16. D. 0.

Câu 143. [0H2-1] Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba điểm $A(3; -1)$, $B(2; 10)$, $C(4; -2)$. Tích vô hướng $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ bằng bao nhiêu?

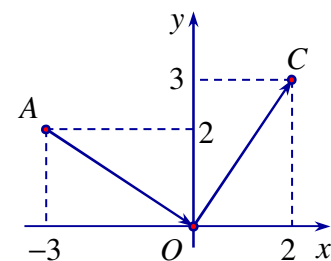
- A. 40. B. -12. C. 26. D. -26.

Câu 144. [0H2-1] Cho hai điểm $A(0; 1)$ và $B(3; 0)$. Khoảng cách giữa hai điểm A và B là:

- A. 3. B. 4.
C. $\sqrt{5}$. D. $\sqrt{10}$.

Câu 145. [0H2-2] Trong hình bên, $\vec{u} \cdot \vec{v}$ bằng:

- A. 13. B. 0.
C. -13. D. $13\sqrt{2}$.



Câu 146. [0H2-2] Trong mặt phẳng $(O; \vec{i}; \vec{j})$ cho ba điểm $A(3; 6)$, $B(x; -2)$, $C(2; y)$. Tính $\overline{OA} \cdot \overline{BC}$:

- A. $\overline{OA} \cdot \overline{BC} = 3x + 6y - 12$. B. $\overline{OA} \cdot \overline{BC} = -3x + 6y + 18$.
C. $\overline{OA} \cdot \overline{BC} = -3x + 6y + 12$. D. $\overline{OA} \cdot \overline{BC} = 0$.

Câu 147. [0H2-2] Trong mặt phẳng $(O; \vec{i}; \vec{j})$ cho ba điểm $A(3; 6)$, $B(x; -2)$, $C(2; y)$. Tìm x để OA vuông góc với AB .

- A. $x = 19$. B. $x = -19$. C. $x = 12$. D. $x = 18$.

- Câu 148. [0H2-2]** Trong mặt phẳng $(O, \vec{i}, \vec{j})$ cho ba điểm $A(3;6)$, $B(x;-2)$, $C(2;y)$. Tính y biết rằng $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 12$.
- A. $y = 3$. B. $y = -2$. C. $y = -1$. D. $y = 1$.
- Câu 149. [0H2-2]** Nếu trong mặt phẳng Oxy cho $A(1;1)$, $B(x;5)$, $C(2;x)$ thì $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ bằng:
- A. $5x - 5$. B. $2x + 2$. C. 10 . D. 0 .
- Câu 150. [0H2-2]** Trong mặt phẳng Oxy cho $A(1;2)$, $B(4;1)$, $C(5;4)$. Tính $\widehat{BAC}$?
- A. 60° . B. 45° . C. 90° . D. 30° .
- Câu 151. [0H2-2]** Trong mặt phẳng $(O; \vec{i}, \vec{j})$ cho 2 vector: $\vec{a} = 3\vec{i} + 6\vec{j}$ và $\vec{b} = 8\vec{i} - 4\vec{j}$. Kết luận nào sau đây sai?
- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. B. $\vec{a} \perp \vec{b}$. C. $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = 0$. D. $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = 0$.
- Câu 152. [0H2-2]** Trong mặt phẳng Oxy cho $A(1;2)$, $B(4;1)$, $C(5;4)$. Tính $\widehat{BAC}$?
- A. 60° . B. 45° . C. 90° . D. 120° .
- Câu 153. [0H2-2]** Trong mặt phẳng $(O, \vec{i}, \vec{j})$ cho 2 vector $\vec{a} = 3\vec{i} + 6\vec{j}$ và $\vec{b} = 8\vec{i} - 4\vec{j}$. Kết luận nào sau đây sai?
- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. B. $\vec{a} \perp \vec{b}$. C. $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = 0$. D. $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = 0$.
- Câu 154. [0H2-2]** Trong mặt phẳng Oxy cho 3 điểm $A(2;4)$, $B(1;2)$, $C(6;2)$. Tam giác ABC là tam giác gì?
- A. Vuông cân tại A . B. Cân tại A . C. Đều. D. Vuông tại A .
- Câu 155. [0H2-2]** Cho các vector $\vec{a} = (1; -2)$, $\vec{b} = (-2; -6)$. Khi đó góc giữa chúng là
- A. 45° . B. 60° . C. 30° . D. 135° .
- Câu 156. [0H2-2]** Cho các vector $\vec{a} = (1; -3)$, $\vec{b} = (2; 5)$. Tính tích vô hướng của $\vec{a}(\vec{a} + 2\vec{b})$.
- A. 16 . B. 26 . C. 36 . D. -16 .
- Câu 157. [0H2-2]** Cho $\overrightarrow{OM} = (-2; -1)$, $\overrightarrow{ON} = (3; -1)$. Tính góc $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$.
- A. 135° . B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. -135° . D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- Câu 158. [0H2-2]** Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC biết $A(1; -1)$, $B(5; -3)$, $C(0; 1)$. Tính chu vi tam giác ABC .
- A. $5\sqrt{3} + 3\sqrt{5}$. B. $5\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$. C. $5\sqrt{3} + \sqrt{41}$. D. $3\sqrt{5} + \sqrt{41}$.
- Câu 159. [0H2-2]** Trong mặt phẳng Oxy cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ biết $\vec{a} = (1; -2)$, $\vec{b} = (-1; -3)$. Tính góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$.
- A. 45° . B. 60° . C. 30° . D. 135° .
- Câu 160. [0H2-2]** Cặp vector nào sau đây vuông góc với nhau?
- A. $\vec{a} = (2; -1)$ và $\vec{b} = (-3; 4)$. B. $\vec{a} = (3; -4)$ và $\vec{b} = (-3; 4)$.
C. $\vec{a} = (2; -3)$ và $\vec{b} = (-6; 4)$. D. $\vec{a} = (-7; -3)$ và $\vec{b} = (3; -7)$.

- Câu 161. [0H2-2]** Góc giữa hai vectơ $\vec{u} = (3; -4)$ và $\vec{v} = (-8; -6)$ là
 A. 30° . B. 60° . C. 90° . D. 45° .
- Câu 162. [0H2-2]** Góc giữa hai vectơ $\vec{u} = (-2; 2)$ và $\vec{v} = (1; 0)$ là
 A. 45° . B. 90° . C. 135° . D. 150° .
- Câu 163. [0H2-2]** Cho tam giác ABC có $A = (10; 5)$, $B = (3; 2)$ và $C = (6; -5)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?
 A. ABC là tam giác đều. B. ABC là tam giác vuông cân tại B .
 C. ABC là tam giác vuông cân tại A . D. ABC là tam giác có góc tù tại A .
- Câu 164. [0H2-2]** Trong mặt phẳng tọa độ, cho $\vec{a} = (3; 4)$, $\vec{b} = (4; -3)$. Kết luận nào sau đây là sai?
 A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. B. $\vec{a} \perp \vec{b}$. C. $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = 0$. D. $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = 0$.
- Câu 165. [0H2-2]** Trong mặt phẳng tọa độ, cho $\vec{a} = (9; 3)$. Vectơ nào sau đây không vuông góc với vectơ $\vec{a}$?
 A. $\vec{v} = (1; -3)$. B. $\vec{v} = (2; -6)$. C. $\vec{v} = (1; 3)$. D. $\vec{v} = (-1; 3)$.
- Câu 166. [0H2-2]** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(1; 2)$, $B(-3; 1)$. Tìm tọa độ điểm C trên Oy sao cho tam giác ABC vuông tại A .
 A. $(5; 0)$. B. $(0; 6)$. C. $(3; 1)$. D. $(0; -6)$.
- Câu 167. [0H2-2]** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(-2; 4)$, $B(8; 4)$. Tìm tọa độ điểm C trên Ox (khác điểm O) sao cho tam giác ABC vuông tại C .
 A. $(1; 0)$. B. $(3; 0)$. C. $(-1; 0)$. D. $(6; 0)$.
- Câu 168. [0H2-2]** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(1; 2)$, $B(6; -3)$. Tính diện tích tam giác OAB .
 A. 8. B. 7,5. C. $3\sqrt{3}$. D. $5\sqrt{2}$.
- Câu 169. [0H2-2]** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(2; -5)$, $B(10; 4)$. Tính diện tích tam giác OAB .
 A. 29. B. 58. C. 14,5. D. $\sqrt{29}$.
- Câu 170. [0H2-2]** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba điểm $A(5; 0)$, $B(0; 10)$, $C(8; 4)$. Tính diện tích tam giác ABC .
 A. 50. B. 25. C. 10. D. $5\sqrt{2}$.
- Câu 171. [0H2-3]** Cho hai điểm $A(-3; 2)$, $B(4; 3)$. Tìm điểm M thuộc trục Ox và có hoành độ dương để tam giác MAB vuông tại M .
 A. $M(7; 0)$. B. $M(5; 0)$. C. $M(3; 0)$. D. $M(9; 0)$.
- Câu 172. [0H2-3]** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(5; 5)$, $B(-3; 1)$, $C(1; -3)$. Diện tích tam giác ABC .
 A. $S = 24$. B. $S = 2$. C. $S = 2\sqrt{2}$. D. $S = 12$.

Câu 173. [0H2-3] Trong mặt phẳng Oxy cho bốn điểm $A(0;-2)$, $B(1;5)$, $C(8;4)$, $D(7;-3)$. Chọn khẳng định đúng.

- A.** Ba điểm A, B, C thẳng hàng. **B.** Ba điểm A, C, D thẳng hàng.
C. Tam giác ABC là tam giác đều. **D.** Tứ giác $ABCD$ là hình vuông.

Câu 174. [0H2-3] Trong mặt phẳng Oxy cho các điểm $A(2;3)$, $I\left(\frac{11}{2};\frac{7}{2}\right)$. B là điểm đối xứng với A qua I . Giả sử C là điểm có tọa độ $(5;y)$. Giá trị của y để tam giác ABC là tam giác vuông tại C là

- A.** $y=0, y=7$ **B.** $y=0, y=-5$. **C.** $y=5, y=7$. **D.** $y=-5$.

Câu 175. [0H2-3] Tam giác ABC có $A=(-1;1)$, $B=(1;3)$ và $C=(1;-1)$. Trong các phát biểu sau đây, hãy chọn phát biểu đúng:

- A.** ABC là tam giác có ba cạnh bằng nhau. **B.** ABC là tam giác có ba góc đều nhọn.
C. ABC là tam giác cân tại B ($BA=BC$). **D.** ABC là tam giác vuông cân tại A .

Câu 176. [0H2-4] Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{a}=(4;1)$, $\vec{b}=(1;4)$. Số giá trị của n để $\vec{x}=n\vec{a}+\vec{b}$ tạo với $\vec{y}=\vec{i}+\vec{j}$ một góc 45° là

- A.** 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 177. [0H2-4] Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(3;4)$, $B(2;1)$, $C(-1;-2)$.

Cho $M(x;y)$ trên đoạn thẳng BC sao cho $S_{ABC}=3S_{ABM}$. Khi đó x^2+y^2 bằng

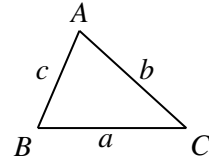
- A.** 13. **B.** 1. **C.** 113. **D.** 221.

Vấn đề 3. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

A - TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Qui ước kí hiệu dùng cho $\triangle ABC$:

- Độ dài các cạnh: $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$
- Độ dài các đường trung tuyến vẽ từ các đỉnh A, B, C : m_a, m_b, m_c .
- Độ dài các đường cao vẽ từ các đỉnh A, B, C : h_a, h_b, h_c
- Độ dài các đường phân giác vẽ từ các đỉnh A, B, C : l_a, l_b, l_c
- Bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác: R, r
- Nửa chu vi tam giác: p
- Diện tích tam giác: S



1. Định lí cosin:

- $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC \cos A$ hay $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
- $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC \cos B$ hay $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$
- $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC.BC \cos C$ hay $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

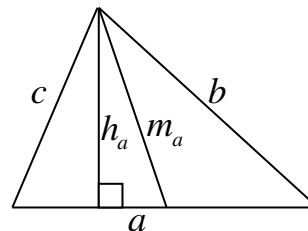
Hệ quả: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$; $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$; $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

2. Định lí sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

3. Độ dài trung tuyến: $m_a = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$; $m_b = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$; $m_c = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$

4. Diện tích tam giác:

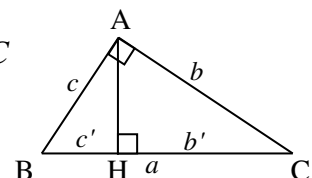
$$S = \begin{cases} \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c \\ \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C \\ \frac{abc}{4R} = p.r \\ \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ (Herông)} \end{cases}$$



❖ Một số kiến thức cần nhớ:

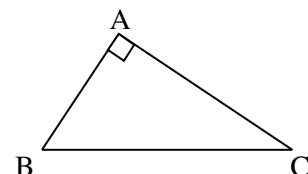
5. Hệ thức lượng trong tam giác vuông:

- ① $AB^2 = BH.BC$ ② $AC^2 = CH.BC$ ③ $AH^2 = HB.HC$
 ④ $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ⑤ $AH.BC = AB.AC$
 ⑥ $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$ ⑦ $\frac{HB}{HC} = \frac{AB^2}{AC^2}$



6. Tỷ số lượng giác của góc nhọn:

- ① $\sin B = \frac{\text{đối}}{\text{huyền}} = \frac{AC}{BC}$ ② $\cos B = \frac{\text{ kề }}{\text{ huyền }} = \frac{AB}{BC}$
 ③ $\tan B = \frac{\text{ đối }}{\text{ kề }} = \frac{AC}{AB}$ ④ $\cot B = \frac{\text{ kề }}{\text{ đối }} = \frac{AB}{AC}$

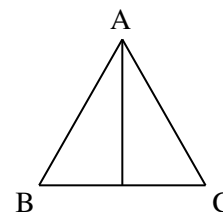


☞ B và C là hai góc phụ nhau: $\sin B = \cos C$, $\cos B = \sin C$, $\tan B = \cot C$, $\cot B = \tan C$

7. Một số tam giác, tứ giác đặc biệt**a) Tam giác đều**

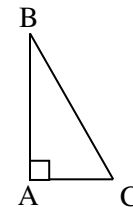
Cho ΔABC đều có độ dài cạnh là a , đường cao $AH = h$:

$$\textcircled{1} h = \frac{(\text{cạnh}) \times \sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \textcircled{2} S = \frac{(\text{cạnh})^2 \times \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

**b) Tam giác nửa đều**

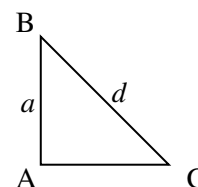
Cho ΔABC là nửa tam giác đều có độ dài cạnh là a :

$$\textcircled{1} AB = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \textcircled{2} AC = \frac{a}{2} \quad \textcircled{3} S = \frac{(\text{cạnh})^2 \times \sqrt{3}}{8} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{8}$$

**c) Tam giác vuông cân**

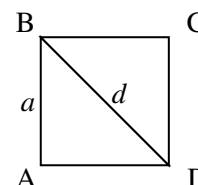
Cho ΔABC vuông cân tại A có độ dài cạnh bằng a , cạnh huyền d :

$$\textcircled{1} d = a\sqrt{2} \quad \textcircled{2} a = \frac{d}{\sqrt{2}} \quad \textcircled{3} S = \frac{a^2}{2}$$

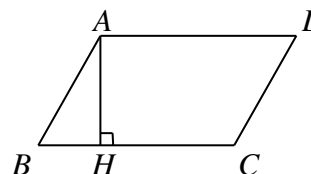
**d) Hình vuông**

Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh bằng a , đường chéo d :

$$\textcircled{1} d = a\sqrt{2} \quad \textcircled{2} a = \frac{d}{\sqrt{2}} \quad \textcircled{3} S = a^2$$

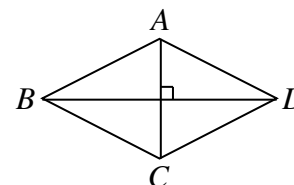
**e) Hình bình hành:**

Diện tích: $S_{ABCD} = BC \cdot AH = AB \cdot AD \cdot \sin A$

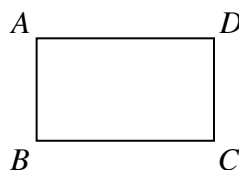
**f) Hình thoi:**

- Diện tích: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = AB \cdot AD \cdot \sin A$

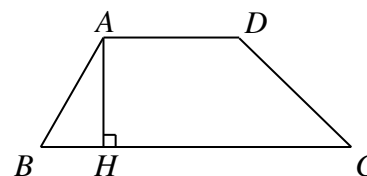
- Đặc biệt: khi $\widehat{ABC} = 60^\circ$ hoặc $\widehat{BAC} = 120^\circ$ thì các tam giác ABC , ACD đều.

**g) Hình chữ nhật:**

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD$$

**h) Hình thang:**

$$S_{ABCD} = \frac{(AD + BC) \cdot AH}{2}$$

**B - PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN****Dạng 1. Tính toán các đại lượng****I - PHƯƠNG PHÁP GIẢI**

- ✓ Vận dụng các định lý sin, cosin, trung tuyến, diện tích.
- ✓ Chú ý các quan hệ trực tiếp và quan hệ trung gian giữa các đại lượng cho và đại lượng cần tính, các tam giác đặc biệt.

II - BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 34. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^\circ$, $AB = 1$ và $AC = 2$.

a) Tính BC .

b) Trên tia CA kéo dài lấy điểm D sao cho $BD = 2$. Tính AD .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 35. Cho tam giác ABC có $a = 7$, $b = 24$ và $c = 23$. Tính góc A .

.....

.....

.....

Ví dụ 36. Cho tam giác ABC có các cạnh thỏa $a(a^2 - b^2) = c(b^2 - c^2)$. Tính góc B .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 37. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 45^\circ$, $\widehat{C} = 75^\circ$ và đường phân giác trong $AD = 4$. Tính cạnh AC , BC , AB và bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 38. Cho tam giác ABC có $m_b = 4$, $m_c = 2$ và $a = 3$. Tính độ dài các cạnh AB và AC .

Ví dụ 39. Cho tam giác ABC có $AB = 6$, $AC = 8$ và $\widehat{A} = 60^\circ$.

- Tính diện tích ΔABC .
- Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC . Tính diện tích ΔIBC .
- Tính bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC .
- Tính độ dài đường phân giác trong của $\widehat{A}$.

Bài 117. Cho ΔABC , biết:

- $a = 12, b = 13, c = 15$. Tính $\cos A$ và góc A .
- $a = 2\sqrt{3}, b = 2\sqrt{2}, c = \sqrt{6} - \sqrt{2}$. Tính $\widehat{A}, \widehat{B}, h_a$ và l_a .
- $c = 3 \text{ cm}, a = 5 \text{ cm}, b = 6 \text{ cm}$. Tính S, h_a và R .
- $a = 7, b = 8, c = 6$. Tính m_a, S, h_a .
- $a = \sqrt{6}, b = 2, c = \sqrt{3} + 1$. Tính các góc của tam giác, R, m_a .
- $a = \sqrt{3}, b = \sqrt{2}, c = \frac{1}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$. Tính $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, R, S$.
- $AB = 2, AC = 3, BC = 4$. Tính r .
- $a = 13, b = 14, c = 15$. Tính S, h_b, R, r .
- $a = 21, b = 17, c = 10$. Tính S, h_a, r, m_a .
- $\widehat{A} = 60^\circ, \widehat{B} = 45^\circ, b = 4$. Tính a và c .
- $\widehat{A} = 60^\circ, a = 6$. Tính R .
- $\widehat{A} = 60^\circ, b = 20, c = 25$. Tính S, h_a, R, r .
- $\widehat{A} = 60^\circ, AB = 5 \text{ cm}, BC = 7 \text{ cm}$. Tính AC, R, r, h_a .
- $\widehat{A} = 120^\circ, AB = 6 \text{ cm}, AC = 10 \text{ cm}$. Tính BC, R, S .
- $b = 7, c = 5, \cos A = 0,6$. Tính S, R và r .
- $AB = 3, AC = 4, S = 3\sqrt{3}$. Tính BC .
- $\widehat{A} = 120^\circ, BC = 7 \text{ cm}, AC = 5 \text{ cm}$. Tính AB, R, r, m_a, l_a .
- $AC = 13 \text{ cm}, AB + BC = 22 \text{ cm}, \widehat{B} = 60^\circ$. Tính AB, BC .

Bài 118. ΔABC có $a = 5, b = 4, c = 3$. Lấy D đối xứng với B qua C . Tính AD .

Bài 119. Cho ΔABC . Biết $a = 3, b = 4, c = 6$. Tính góc lớn nhất và đường cao ứng với cạnh lớn nhất.

Bài 120. Cho ΔABC . Biết $AB + BC = 11 \text{ cm}$ ($AB > BC$), $\widehat{B} = 60^\circ$. Bán kính đường tròn nội tiếp trong ΔABC là $\frac{2}{\sqrt{3}} \text{ cm}$. Tính độ dài đường cao AH .

Bài 121. Cho ΔABC có $AB = 8, AC = 9, BC = 10$. Một điểm M nằm trên cạnh BC sao cho $BM = 7$. Tính độ dài đoạn thẳng AM .

Bài 122. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 4, BC = 5, BD = 7$. Tính AC .

Bài 123. Cho ΔABC có độ dài 3 trung tuyến bằng 15, 18, 27.

- Tính diện tích của ΔABC .
- Tính độ dài các cạnh của ΔABC .

Bài 124. Cho ΔABC vuông tại A có $AB = 5, AC = 12$, đường cao AH .

- Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp ΔABC .
- Vẽ phân giác trong AD . Tính DB, DC, AD .

Bài 125. Cho ΔABC vuông tại A có $\widehat{B} = 60^\circ, \widehat{C} = 45^\circ, BC = a$.

- Tính AB, AC .
- Chứng minh: $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

Dạng 2. Chứng minh hệ thức**I - PHƯƠNG PHÁP GIẢI**

- ✓ Vận dụng các phương pháp chung để chứng minh đẳng thức; biến đổi vế này sang vế kia, biến đổi tương đương hoặc so sánh với biểu thức trung gian, tỉ lệ thức, ...
- ✓ Sử dụng các định cơ bản về tam giác, tam giác vuông: định lí Pitago, định lí đường trung tuyến trong tam giác vuông, ...

II - BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 40. Cho tam giác ABC .

a) Chứng minh $\frac{\tan A}{\tan B} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{c^2 + b^2 - a^2}$.

b) Biết $a = 4$, $b = 5$, $c = 6$. Tính giá trị của $\sin A - 2 \sin B + \sin C$.

Ví dụ 41. Cho tam giác ABC . Trên cạnh AB , AC lần lượt lấy 2 điểm M , N . C/m $\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC}$.

Ví dụ 42. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = a$, $BD = m$ và $AC = n$. Cmr: $m^2 + n^2 = 2(a^2 + b^2)$.

Ví dụ 43. Cho ΔABC . Chứng minh:

a) $\cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$.

b) $\cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$.

III - BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 126. Cho ΔABC có G là trọng tâm. Chứng minh rằng:

a) $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$

b) $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$

Bài 127. Cho ΔABC . Chứng minh:

a) $b^2 - c^2 = a(b \cos C - c \cos B)$.

b) $(b^2 - c^2) \cos A = a(c \cos C - b \cos B)$.

Bài 128. Cho ΔABC có $b - c = \frac{a}{2}$. Chứng minh:

a) $\sin A = 2 \sin B - 2 \sin C$.

b) $\frac{1}{2h_a} = \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}$.

Bài 129. Cho ΔABC có $b + c = 2a$. Chứng minh:

a) $2 \sin A = \sin B + \sin C$.

b) $\frac{2}{h_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$.

Dạng 3. Dạng tam giác**I - PHƯƠNG PHÁP GIẢI**

$$\checkmark \Delta ABC \text{ vuông tại } A \Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{A} = 90^\circ \\ \cos A = 0 \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}$$

$$\checkmark \Delta ABC \text{ cân tại } A \Leftrightarrow \begin{cases} b = c \\ \widehat{B} = \widehat{C} \\ \sin B = \sin C \\ \cos B = \cos C \end{cases}$$

$$\checkmark \Delta ABC \text{ đều} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c \\ \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} \\ a = b \text{ và } 1 \text{ góc} = 60^\circ \end{cases}$$

$$\checkmark \Delta ABC \text{ nhọn} \Leftrightarrow A, B, C \text{ đều nhọn}$$

Chú ý: Sử dụng phối hợp các hệ thức cơ bản về tam giác, biến đổi về tích số bằng 0, biến đổi tổng bình phương, các bất đẳng thức cơ bản, so sánh, ...

II - BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 44. Cho ΔABC . Chứng minh các khẳng định sau:

- Góc A nhọn khi và chỉ khi $a^2 < b^2 + c^2$.
- Góc A vuông khi và chỉ khi $a^2 = b^2 + c^2$.
- Góc A tù khi và chỉ khi $a^2 > b^2 + c^2$.

Ví dụ 45. Tam giác ABC thỏa hệ thức: $c^4 - 2(a^2 + b^2)c^2 + a^4 + a^2b^2 + b^4 = 0$. Chứng minh rằng: ΔABC có $\widehat{C} = 60^\circ$ hoặc $\widehat{C} = 120^\circ$.

Ví dụ 46. Cho ΔABC thỏa mãn: $a^3 = b^3 + c^3$. Chứng minh ΔABC có 3 góc nhọn.

III - BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 130. Tam giác ABC thỏa hệ thức: $b(b^2 - a^2) = c(c^2 - a^2)$. CMR: $\triangle ABC$ cân tại A hay $\hat{A} = 120^\circ$.

Bài 131. Tính góc A của $\triangle ABC$ thỏa: $b(a^2 - b^2) = c(a^2 - c^2)$.

Bài 132. Cho $\triangle ABC$ có $a = 2\sqrt{2}$, $b = 2$ và $\widehat{C} = 30^\circ$. Chứng minh tam giác ABC cân. Tính diện tích và chiều cao h_c .

Bài 133. Cho $a = x^2 + x + 1$, $b = 2x + 1$, $c = x^2 - 1$. Định x để a , b , c là độ dài 3 cạnh một tam giác. Với x vừa tìm được, chứng minh rằng tam giác có 1 góc bằng 120° .

Bài 134. a) Cho $\triangle ABC$ biết $a=7, b=8, c=5$. Chứng minh $\triangle ABC$ có 1 góc 60° .

b) Cho $\triangle ABC$ biết $\hat{A} = 60^\circ$, $a = 10$, $r = \frac{5\sqrt{3}}{3}$. Chứng minh $\triangle ABC$ đều.

Bài 135. Tính các góc của ΔABC nếu có $\frac{\sin A}{1} - \frac{\sin B}{\sqrt{3}} = \frac{\sin C}{2}$.

Bài 136. Chứng minh rằng ΔABC đều $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} = a^2 \\ a = 2b \cos C \end{cases}$

Bài 137. Xét dạng $\triangle ABC$ nếu có:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{1 + \cos B}{\sin^2 B} = \frac{2a + c}{\sqrt{4a^2 - c^2}} & \text{b) } \begin{cases} \frac{a^3 + c^3 - b^3}{a + c - b} = b^2 \\ \sin A \cdot \sin C = \frac{3}{4} \end{cases} & \text{c) } S = p(p - a) \end{array}$$

Dạng 4. Giải tam giác và ứng dụng thực tế**I - PHƯƠNG PHÁP GIẢI**

- ✓ Giải tam giác là tìm các cạnh và các góc còn lại sau khi biết các giả thiết: cho ba cạnh, hai cạnh và một góc, một cạnh và hai góc. Vận dụng các định lý sin, cosin với chú ý $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$ để tính toán.
- ✓ Ứng dụng thực tế là chuyển các bài toán thực tế thành bài toán tam giác, cho biết yếu tố xác định rồi tìm đại lượng nào đó.

II - BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 47. Cho tam giác ABC . Biết $a = 17,4$; $\widehat{B} = 44^\circ 30'$, $\widehat{C} = 64^\circ$. Tính góc $\widehat{A}$ và các cạnh b, c .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 48. Cho tam giác ABC . Biết $a = 6,3$; $b = 6,3$; $\widehat{C} = 54^\circ$. Tính góc $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ và cạnh c .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 49. Cho tam giác ABC . Biết $a = 14$; $b = 18$; $c = 20$. Tính các góc $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$.

.....

.....

.....

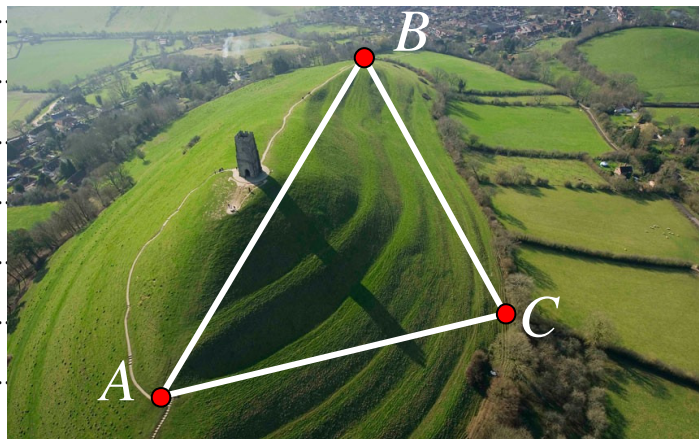
.....

.....

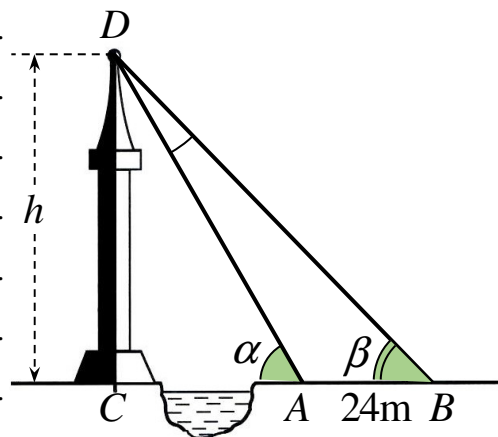
.....

.....

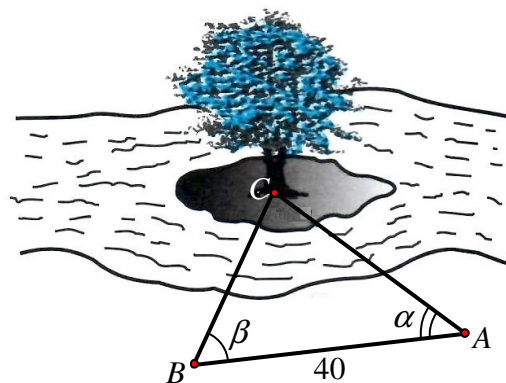
Ví dụ 50. Để lập đường dây cao thế từ vị trí A đến vị trí B , ta phải tránh một ngọn núi nên người ta phải nối thẳng đường dây từ vị trí A đến vị trí C dài 10 km rồi nối từ vị trí C thẳng đến vị trí B dài 8 km. Góc tạo bởi hai đoạn dây AC và CB là 75° . Hỏi so với việc nối thẳng từ A đến người ta tốn thêm bao nhiêu km dây?



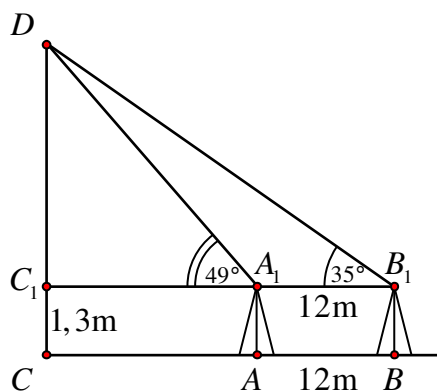
Ví dụ 51. Giả sử $CD = h$ là chiều cao của tháp trong đó C là chân tháp. Chọn hai điểm A, B trên mặt đất sao cho ba điểm A, B, C thẳng hàng. Ta đo khoảng cách AB và các góc $\widehat{CAD}, \widehat{CBD}$. Chẳng hạn ta đo được $AB = 24 \text{ m}$, $\widehat{CAD} = \alpha = 63^\circ$, $\widehat{CBD} = \beta = 48^\circ$. Tính chiều cao của tháp.



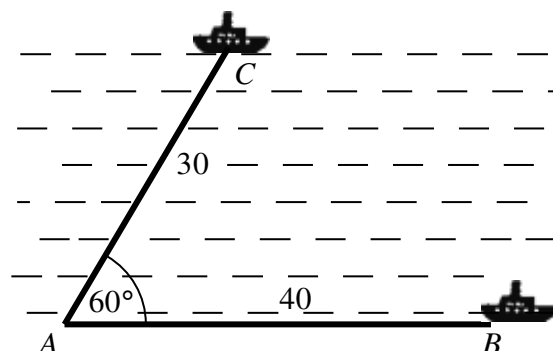
Ví dụ 52. Để đo khoảng cách từ một điểm A đến gốc cây C trên cù lao giữa sông, người ta chọn một điểm B cùng ở trên bờ với A sao cho từ A và B có thể nhìn thấy điểm C . Biết $AB = 40$ m, $\widehat{CAB} = \alpha = 45^\circ$, $\widehat{CBA} = \beta = 70^\circ$. Tính khoảng cách từ một điểm A đến gốc cây C .



Ví dụ 53. Muốn đo chiều cao của Tháp Chàm Por Klong Garai ở tỉnh Ninh Thuận, người ta lấy hai điểm A và B trên mặt đất có khoảng cách $AB = 12$ m cùng thẳng hàng với chân C của tháp để đặt hai giác kế. Chân của giác kế có chiều cao $h = 1,3$ m. Gọi D là đỉnh tháp và hai điểm A_1 , B_1 cùng thẳng hàng với C_1 thuộc chiều cao CD của tháp. Người ta đo được $\widehat{DA_1C_1} = 49^\circ$ và $\widehat{DB_1C_1} = 35^\circ$. Tính chiều cao CD của tháp đó.



Ví dụ 54. Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ một vị trí A , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau góc 60° . Tàu B chạy với tốc độ 20 hải lí một giờ. Tàu C chạy với tốc độ 15 hải lí một giờ. Sau 2 giờ, hai tàu cách nhau bao nhiêu hải lí?



III - BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 138. Giải tam giác ABC , biết:

a) $c = 14$; $\widehat{A} = 60^\circ$; $\widehat{B} = 40^\circ$.

b) $b = 4,5$; $\widehat{A} = 45^\circ$; $\widehat{C} = 75^\circ$

c) $c = 35$; $\widehat{A} = 40^\circ$; $\widehat{C} = 120^\circ$

d) $a = 137,5$; $\widehat{B} = 60^\circ$; $\widehat{C} = 40^\circ$.

Bài 139. Giải tam giác ABC , biết:

a) $a = 6,3$; $b = 6,3$; $\widehat{C} = 54^\circ$

b) $b = 32$; $c = 45$; $\widehat{A} = 87^\circ$

c) $a = 7$; $b = 23$; $\widehat{C} = 130^\circ$

d) $b = 14$; $c = 10$; $\widehat{A} = 145^\circ$

Bài 140. Giải tam giác ABC , biết:

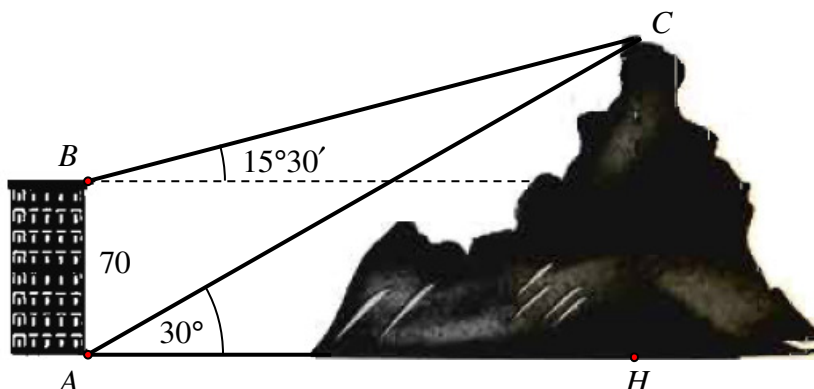
a) $a = 14$; $b = 18$; $c = 20$

b) $a = 6$; $b = 7,3$; $c = 4,8$

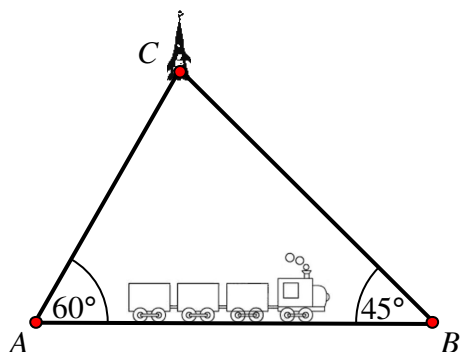
c) $a = 4$; $b = 5$; $c = 7$

d) $a = 2\sqrt{3}$; $b = 2\sqrt{2}$; $c = \sqrt{6} - \sqrt{2}$

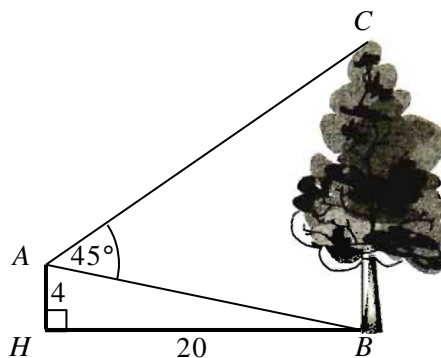
Bài 141. Từ hai vị trí A và B của một tòa nhà, người ta quan sát đỉnh C của ngọn núi. Biết rằng độ cao AB bằng 70 m, phương nhìn AC tạo với phương nằm ngang góc 30° phương nhìn BC tạo với phương nằm ngang góc $15^\circ 30'$. Hỏi ngọn núi đó cao bao nhiêu mét so với mặt đất?



Bài 142. Một người ngồi trên tàu hỏa đi từ ga A đến ga B. Khi tàu đỗ ở ga A, qua ống nhòm người đó nhìn thấy một tháp C (hình a). Hướng nhìn từ người đó đến tháp tạo với hướng đi tàu một góc 60° . Khi tàu đỗ ở ga B, người đó nhìn lại vẫn thấy tháp C, hướng nhìn từ người đó đến tháp tại với hướng ngược với hướng đi của tàu một góc 45° . Biết rằng đoạn đường tàu nối thẳng ga A với ga B dài 8 km. Hỏi khoảng cách từ ga A đến tháp C là bao nhiêu?



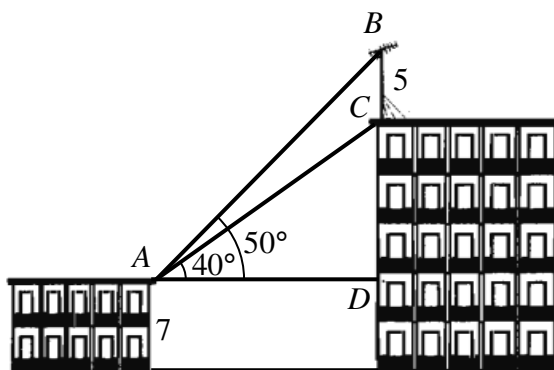
Hình a.



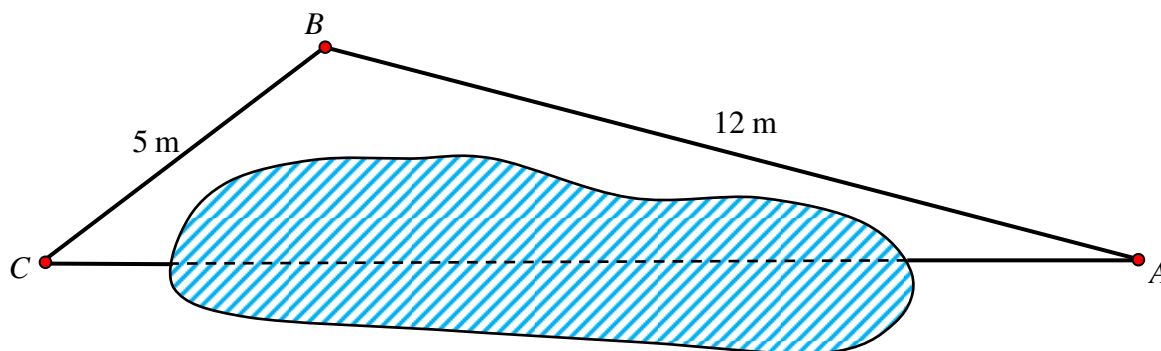
Hình b.

Bài 143. Từ vị trí A, người ta quan sát một cây cao (hình b). Biết $AH = 4\text{ m}$, $HB = 20\text{ m}$, $\widehat{BAC} = 45^\circ$. Tính chiều cao của cây.

Bài 144. Trên nóc tòa nhà có một cột ăng-ten cao 5 m. Từ vị trí quan sát A cao 7 m so với mặt đất, có nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten dưới góc 50° và 40° so với phương nằm ngang. Tính chiều cao của tòa nhà (hình bên dưới)



Bài 145. Khoảng cách từ A đến C không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy nên người ta làm như sau: Xác định một điểm B có khoảng cách $AB = 12\text{ km}$ và đo được góc $\widehat{ACB} = 37^\circ$. Hãy tính khoảng cách AC biết rằng $BC = 5\text{ km}$.



Bài 146. Biết 2 lực cùng tác dụng vào một vật và tạo với nhau một góc 40° . Cường độ của 2 lực đó bằng 3 N và 4 N. Tính cường độ của lực tổng hợp.

Bài 147. Hai chiếc tàu thủy P và Q cách nhau 300 m. Từ P và Q thẳng hàng với chân A của tháp hải đăng AB ở trên bờ biển người ta nhìn chiều cao AB của tháp dưới các góc $\widehat{BPA} = 35^\circ$ và $\widehat{BQA} = 48^\circ$. Tính chiều cao của tháp.

C – BÀI TẬP TỔNG HỢP VẤN ĐỀ 3

Bài 148. Cho $\triangle ABC$, biết $b = 7$, $c = 9$, $\cos A = \frac{5}{13}$. Tính h_a , R .

Bài 149. Cho $\triangle ABC$, biết $a = 9$, $b = 10$, $c = 13$. Tính h_a , m_a , S , r .

Bài 150. Cho $\triangle ABC$ có: $m_a = 5$, $m_b = 4$, $m_c = 3$.

a) Tính a , b , c .

b) Chứng minh rằng $\widehat{A} < 45^\circ$.

Bài 151. Tam giác ABC có $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Một điểm M nằm trên cạnh BC sao cho $BM = d$. Tính độ dài đoạn thẳng AM .

Bài 152. Cho $\triangle ABC$ có $\sin A > \sin B > \sin C$. Chứng minh $\widehat{A} > \widehat{B} > \widehat{C}$.

Bài 153. Chứng minh trong mọi tam giác ABC :

$$\text{a) } b = a \cos C + c \cos A \quad \text{b) } \sin B = \sin A \cos C + \cos A \sin C \quad \text{c) } \frac{\tan A}{\tan B} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{c^2 + b^2 - a^2}$$

Bài 154. Chứng minh rằng: nếu G là trọng tâm $\triangle ABC$ thì $\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{1}{18}(b^2 + c^2 - 5a^2)$.

Bài 155. Cho $\triangle ABC$ với $AB = 2$ cm, trung tuyến $BD = 1$ cm, $\widehat{BDA} = 30^\circ$. Tính AD , BC và diện tích.

Bài 156. Cho $\triangle ABC$ cân tại A với $\widehat{A} = 30^\circ$, $AB = AC = 5$ cm. Đường thẳng qua B và tâm O của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ cắt AC tại D . Tính BD .

Bài 157. Cho $\triangle ABC$ với $AB = 8$ cm và $\widehat{A} = 60^\circ$ nội tiếp trong đường tròn (O) bán kính $R = 7\sqrt{3}/3$. Tính độ dài các cạnh BC , AC và diện tích $\triangle ABC$.

Bài 158. Cho $\triangle ABC$ đều, N là 1 điểm trên cạnh AC sao cho $AN = \frac{1}{3}AC$. Tính tỉ số các bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABN$ và $\triangle ABC$.

Bài 159. Cho $\triangle ABC$ đều cạnh $4a$, lấy $D \in BC$, $E \in AC$, $F \in AB$ sao cho $BD = x$ ($0 < x < 4a$), $AE = a$, $AF = 3a$.

a) Tính EF .

b) Định x để tam giác DEF vuông tại F .

Bài 160. Trong một tam giác cân, đường cao ứng với cạnh đáy bằng 20, đường cao ứng với cạnh bên bằng 24. Tính các cạnh của tam giác cân đó.

Bài 161. Tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 5$, $BC = 7$.

a) Tính $\widehat{BAC}$.

b) Tính độ dài các đường phân giác trong và ngoài của góc $\widehat{BAC}$.

Bài 162. Cho $\triangle ABC$ cân tại A , có $\widehat{A} = \alpha$, $AB = a$.

a) Tính BC theo a và α . b) Gọi D là điểm trên BC , xác định bởi $BC = 3BD$. Tính AD .

Bài 163. Tam giác ABC có hai trung tuyến $BM = 6$, $CN = 9$ hợp với nhau một góc 120° . Tính các cạnh của tam giác đó.

Bài 164. Cho $\triangle ABC$ cân tại A , $BC = a$, đường cao $AH = 2a$. M là trung điểm AB .

a) Tính độ dài đường trung tuyến CM .

b) Tính khoảng cách từ A đến CM .

Bài 165. Cho $ABCD$ là hình thang có đáy lớn $AB = 3a$, đáy nhỏ CD và cạnh AD bằng a , $\widehat{A} = 60^\circ$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của các cạnh đáy. Tính BC và MN .

Bài 166. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , tâm O , M là trung điểm AB . Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác OMC .

Bài 167. Cho $\triangle ABC$ vuông ở A , D là hình chiếu của A trên BC ; E và F lần lượt là hình chiếu của D xuống AB và AC . Chứng minh:

$$\text{a) } \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{DB}{DC} \text{ và } \left(\frac{AB}{AC}\right)^3 = \frac{BE}{CF} \quad \text{b) } AD^3 = BC \cdot EB \cdot CF$$

Bài 168. Cho $\triangle ABC$. Chứng minh:

$$\text{a) } a^2 - c^2 = b(a \cos C - c \cos A) \quad \text{b) } b = r \left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{C}{2} \right) \quad \text{c) } \tan A = \frac{a \sin B}{c - a \cos B}$$

Bài 169. Cho $\triangle ABC$. Chứng minh:

- a) Nếu $m_a = m_b$ thì tam giác cân.
b) Nếu hai trung tuyến $AM \perp CN$ thì $\cot B = 2(\cot A + \cot C)$

Bài 170. Cho $\triangle ABC$ có AM là trung tuyến. Biết $AM = AB$. Chứng minh:

$$\text{a) } \sin A = 2 \sin(B - A) \quad \text{b) } \cot C = 3 \cot B$$

Bài 171. Cho $\triangle ABC$ có $a^4 + b^4 = c^4$. Chứng minh rằng: A, B, C nhọn và $2 \sin^2 C = \tan A \cdot \tan B$

Bài 172. Cho $\triangle ABC$ có $m_a = c$. Chứng minh rằng:

$$\text{a) } \tan B = 3 \tan C \quad \text{b) } \sin A = 2 \sin(B - C)$$

Bài 173. Cho $\triangle ABC$ có $bc = a^2$. Chứng minh:

$$\text{a) } \sin^2 A = \sin B \cdot \sin C. \quad \text{b) } h_b \cdot h_c = h_a^2.$$

Bài 174. Cho $\triangle ABC$. Chứng minh rằng:

$$\begin{aligned} \text{a) } a &= b \cos C + c \cos B & \text{b) } \sin A &= \sin B \cos C + \sin C \cos B \\ \text{c) } h_a &= 2R \sin B \cdot \sin C & \text{d) } a &= r \left(\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \right). \end{aligned}$$

Bài 175. Chứng minh trong $\triangle ABC$: $a(\sin B - \sin C) + b(\sin C - \sin A) + c(\sin A - \sin B) = 0$

Bài 176. Chứng minh rằng:

- a) Nếu $\triangle ABC$ thỏa $\frac{\sin B}{\sin A} = 2 \cos C$ thì $\triangle ABC$ cân.
b) Nếu $\triangle ABC$ thỏa $\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\cos B}$ thì $\triangle ABC$ cân.
c) Nếu $\triangle ABC$ thỏa $\sin \frac{A}{2} = \frac{a}{\sqrt{2bc}}$ thì $\triangle ABC$ cân tại A .
d) Nếu $\triangle ABC$ thỏa $\sin A = 2 \sin B \cdot \cos C$ thì $\triangle ABC$ cân.
e) Nếu $\triangle ABC$ thỏa $h_a = \sqrt{p(p-a)}$ thì $\triangle ABC$ cân.
f) Nếu $\triangle ABC$ thỏa $\frac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} = a^2$ thì một trong 3 góc của nó bằng 60° .
g) Nếu 3 góc của $\triangle ABC$ thỏa hệ thức $\sin A = 2 \sin B \cos C$ thì $\triangle ABC$ là tam giác cân.
h) Nếu $\triangle ABC$ thỏa hệ thức $a + b + c = 2(a \cdot \cos A + b \cdot \cos B + c \cdot \cos C)$ thì $\triangle ABC$ đều.

Bài 177. Cho $\triangle ABC$. Chứng minh rằng:

$$\text{a) } \frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \quad \text{b) } \frac{2}{h_a} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_a} = \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}.$$

Bài 178. Cho $\triangle ABC$. Chứng minh:

a) $S = 2R^2 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$.

b) $S = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2 \overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$.

Bài 179. Cho $\triangle ABC$ có $AB = AC = a$, $\widehat{BAM} = \alpha$.

a) Tính BC theo a và α .

b) Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp. Chứng minh: $r = \frac{a \sin \alpha}{2 \left(1 + \sin \frac{\alpha}{2} \right)}$

Bài 180. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , cạnh góc vuông là b, c . Lấy $M \in BC$ sao cho $\widehat{BAM} = \alpha$. Chứng minh rằng: $AM = \frac{bc}{b \cos \alpha + c \sin \alpha}$.

Bài 181. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , AD là phân giác trong của góc A . Chứng minh rằng: $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{AD}$.

Bài 182. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , cạnh góc vuông là b, c . Chứng minh rằng:

a) Độ dài phân giác trong của góc A là $l_a = \frac{bc\sqrt{2}}{b+c}$. b) $r = \frac{1}{2} \left(b+c - \sqrt{b^2+c^2} \right)$

Bài 183. Tam giác ABC và DEF cùng nội tiếp trong một đường tròn tâm. Chứng minh rằng: chu vi 2 tam giác bằng nhau khi và chỉ khi: $\sin A + \sin B + \sin C = \sin D + \sin E + \sin F$

Bài 184. Chứng minh rằng trong một hình bình hành, tổng bình phương các cạnh bằng tổng bình phương của hai đường chéo.

Bài 185. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BD . Chứng minh rằng: $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2$.

Bài 186. Gọi S là diện tích và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Chứng minh rằng: $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$.

Bài 187. Cho $\triangle ABC$ có $\frac{c}{b} = \frac{m_b}{m_c} \neq 1$. Chứng minh rằng $2 \cot A = \frac{\sin A}{\sin B \cdot \sin C} = \cot B + \cot C$.

Bài 188. Cho tứ giác lồi $ABCD$, gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC và BD .

a) Chứng minh: $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4IJ^2$

b) Suy ra điều kiện cần và đủ để một tứ giác là hình bình hành.

Bài 189. Cho $\triangle ABC$ có $\frac{abc}{a+b+c} = k$. Chứng minh: $R \cdot r = \frac{k}{2}$.

Bài 190. Cho $\triangle ABC$ có đường tròn nội tiếp tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại K, L, M . Chứng minh: $S_{\triangle KLM} = 2S_{\triangle ABC} \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$.

Bài 191. Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy $AB = a, CD = b$, 2 cạnh bên $AD = c, BC = d$ và hai đường chéo $AC = p, BD = q$. Chứng minh rằng: $p^2 + q^2 = c^2 + d^2 + 2ab$.

Bài 192. Cho $\triangle ABC$ có $a+c=2b$. Chứng minh: $\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{C}{2} = 2 \cot \frac{B}{2}$

Bài 193. Tính diện tích $\triangle ABC$ trong mỗi trường hợp sau:

- a) $a = 5, b = 7, \hat{C} = 135^\circ$ b) $a = 2, b = 3, c = 4$ c) $\hat{A} = 30^\circ, \hat{B} = 120^\circ, c = 12$.

Bài 194. Cho $\triangle ABC$ với $\hat{A} = 60^\circ$, bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $\frac{7}{\sqrt{3}}$ và bán kính đường tròn nội tiếp bằng $\sqrt{3}$. Tính diện tích và chu vi $\triangle ABC$.

Bài 195. Cho $\triangle ABC$. Chứng minh:

a) $h_a h_b h_c = 8R^3 \sin^2 A \cdot \sin^2 B \cdot \sin^2 C$.

b) $S = \frac{1}{3} \cdot \frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{\cot A + \cot B + \cot C}$

c) $S = \frac{1}{4}(a^2 \sin 2B + b^2 \sin 2A)$

Bài 196. Các đường phân giác trong của $\triangle ABC$ kéo dài cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ở các điểm L, M, N . Chứng minh: $S_{MLN} = \frac{1}{2} p \cdot R$.

Bài 197. Chứng minh rằng:

a) Nếu $\triangle ABC$ thỏa $\sin A \cdot \cos^3 B = \sin B \cdot \cos^3 A$ thì $\triangle ABC$ cân.

b) Nếu $\triangle ABC$ thỏa $\frac{a}{m_a} = \frac{b}{m_b} = \frac{c}{m_c}$ thì $\triangle ABC$ đều.

c) Nếu $\triangle ABC$ thỏa $\sin A = 2 \sin B \cdot \cos C$ thì $\triangle ABC$ cân.

Bài 198. Cho $\triangle ABC$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$

b) $a^2 + b^2 - c^2 < 2ab$

c) $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$

d) $\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$

e) $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc$

f) $\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq \frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c}$

Bài 199. Cho $\triangle ABC$ có $a < b < c$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $b\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right) + \frac{1}{b}(a+c) < \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right)(a+c)$

b) $\frac{h_a}{h_b} + \frac{h_b}{h_c} + \frac{h_c}{h_a} < \frac{h_b}{h_a} + \frac{h_c}{h_b} + \frac{h_a}{h_c}$

c) $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b) < 0$

d) $(a+b+c)^2 < 9bc$

Bài 200. Cho $\triangle ABC$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $\frac{3}{4}(a+b+c) < m_a + m_b + m_c < a+b+c$

b) $h_a + h_b + h_c \geq 9r$

c) $a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$

d) $a^4 + b^4 + c^4 \geq 16S^2$

Bài 201. Cho $\triangle ABC$ có góc 120° nếu đồng dạng với tam giác có độ dài 3 cạnh lần lượt là $\sqrt{3}, \sqrt{2}$ và $(\sqrt{6} - \sqrt{2})/2$.

D – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VẤN ĐỀ 3

Câu 178. [0H2-1] Trong tam giác ABC , câu nào sau đây đúng?

- A. $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos A$. B. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$.
C. $a^2 = b^2 + c^2 + bc \cdot \cos A$. D. $a^2 = b^2 + c^2 - bc \cdot \cos A$.

Câu 179. [0H2-1] Tam giác ABC có $A = 120^\circ$ thì câu nào sau đây đúng?

- A. $a^2 = b^2 + c^2 - 3bc$. B. $a^2 = b^2 + c^2 + bc$. C. $a^2 = b^2 + c^2 + 3bc$. D. $a^2 = b^2 + c^2 - bc$.

Câu 180. [0H2-1] Tam giác ABC có $a = 8, b = 7, c = 5$. Diện tích của tam giác là:

- A. $5\sqrt{3}$ B. $8\sqrt{3}$. C. $10\sqrt{3}$. D. $12\sqrt{3}$.

Câu 181. [0H2-1] Tính diện tích tam giác ABC biết $A = 60^\circ, b = 10, c = 20$.

- A. $50\sqrt{3}$. B. 50. C. $50\sqrt{2}$. D. $50\sqrt{5}$.

Câu 182. [0H2-1] Cho tam giác ABC có $a = 2, b = \sqrt{6}, c = \sqrt{3} + 1$. Góc B là:

- A. 115° . B. 75° . C. 60° . D. $53^\circ 32'$.

Câu 183. [0H2-1] Cho tam giác ABC có $a = 2, b = \sqrt{6}, c = \sqrt{3} + 1$. Tính góc A .

- A. 30° . B. 45° . C. 68° . D. 75° .

Câu 184. [0H2-1] Tam giác ABC có $AB = 12, AC = 13, \hat{A} = 30^\circ$. Tính diện tích tam giác ABC .

- A. 39. B. 78. C. $39\sqrt{3}$. D. $78\sqrt{3}$.

Câu 185. [0H2-1] Tính diện tích tam giác có ba cạnh lần lượt là $\sqrt{3}, \sqrt{2}$ và 1.

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 186. [0H2-1] Tính diện tích tam giác có ba cạnh là 9, 10, 11.

- A. $50\sqrt{3}$. B. 44. C. $30\sqrt{2}$. D. 42.

Câu 187. [0H2-1] Tính diện tích tam giác ABC có ba cạnh là 13, 14, 15.

- A. 84. B. $\sqrt{6411}$. C. 168. D. $16\sqrt{24}$.

Câu 188. [0H2-2] Cho tam giác ABC . Trung tuyến AM có độ dài:

- A. $\sqrt{b^2 + c^2 - a^2}$. B. $\frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$. C. $\sqrt{3a^2 - 2b^2 - 2c^2}$. D. $\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.

Câu 189. [0H2-2] Nếu tam giác ABC có $a^2 < b^2 + c^2$ thì:

- A. A là góc nhọn. B. A là góc tù. C. A là góc vuông. D. A là góc nhỏ nhất.

Câu 190. [0H2-2] Trong tam giác ABC , hệ thức nào sau đây sai?

- A. $a = \frac{b \cdot \sin A}{\sin B}$. B. $\sin C = \frac{c \cdot \sin A}{a}$. C. $a = 2R \cdot \sin A$. D. $b = R \cdot \tan B$.

Câu 191. [0H2-2] Tính góc C của tam giác ABC biết $a \neq b$ và $a(a^2 - c^2) = b(b^2 - c^2)$.

- A. $C = 150^\circ$. B. $C = 120^\circ$. C. $C = 60^\circ$. D. $C = 30^\circ$.

Câu 192. [0H2-2] Cho tam giác ABC , các đường cao h_a, h_b, h_c thỏa mãn hệ thức $3h_a = 2h_b + h_c$. Tìm hệ thức giữa a, b, c .

- A. $\frac{3}{a} = \frac{2}{b} - \frac{1}{c}$. B. $3a = 2b + c$. C. $3a = 2b - c$. D. $\frac{3}{a} = \frac{2}{b} + \frac{1}{c}$.

Câu 193. [0H2-2] Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. Nếu $a^2 > b^2 + c^2$ thì A là góc tù.
 B. Nếu tam giác ABC có một góc tù thì $a^2 > b^2 + c^2$.
 C. Nếu $a^2 < b^2 + c^2$ thì A là góc nhọn.
 D. Nếu $a^2 = b^2 + c^2$ thì A là góc vuông.

Câu 194. [0H2-2] Trong tam giác ABC , câu nào sau đây đúng?

- A. $m_a = \frac{b+c}{2}$. B. $m_a > \frac{b+c}{2}$. C. $m_a < \frac{b+c}{2}$. D. $m_a = b+c$.

Câu 195. [0H2-2] Trong tam giác ABC , nếu có $2h_a = h_b + h_c$ thì:

- A. $\frac{2}{\sin A} = \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}$. B. $2\sin A = \sin B + \sin C$.
 C. $\sin A = 2\sin B + 2\sin C$. D. $\frac{2}{\sin A} = \frac{1}{\sin B} - \frac{1}{\sin C}$.

Câu 196. [0H2-2] Trong tam giác ABC , nếu có $a^2 = bc$ thì:

- A. $\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}$. B. $h_a^2 = h_b \cdot h_c$. C. $\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$. D. $\frac{1}{h_a^2} = \frac{2}{h_b} + \frac{2}{h_c}$.

Câu 197. [0H2-2] Cho tam giác ABC có $a=2, b=\sqrt{6}, c=\sqrt{3}+1$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp.

- A. $\sqrt{2}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. D. $\sqrt{3}$.

Câu 198. [0H2-2] Diện tích S của tam giác sẽ thỏa mãn hệ thức nào trong hai hệ thức sau đây?

- I. $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$.
 II. $16S^2 = (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$.

- A. Chỉ I. B. Chỉ II. C. Cả I và II. D. Không có.

Câu 199. [0H2-2] Trong $\triangle ABC$, điều kiện để hai trung tuyến vẽ từ A và B vuông góc với nhau là:

- A. $2a^2 + 2b^2 = 5c^2$. B. $3a^2 + 3b^2 = 5c^2$. C. $2a^2 + 2b^2 = 3c^2$. D. $a^2 + b^2 = 5c^2$.

Câu 200. [0H2-2] Cho tam giác ABC có $AB=8$ cm, $AC=18$ cm và có diện tích bằng 64 cm². Giá trị $\sin A$ là:

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{3}{8}$. C. $\frac{4}{5}$. D. $\frac{8}{9}$.

Câu 201. [0H2-2] Cho tam giác ABC có $AB=4$ cm, $BC=7$ cm, $CA=9$ cm. Giá trị $\cos A$ là:

- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $-\frac{2}{3}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 202. [0H2-2] Tam giác ABC vuông cân tại A và nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R . Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Khi đó tỉ số $\frac{R}{r}$ bằng:

- A. $1+\sqrt{2}$. B. $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$. D. $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Câu 203. [0H2-2] Tam giác ABC có $AB=9$ cm, $AC=12$ cm và $BC=15$ cm. Khi đó đường trung tuyến AM của tam giác có độ dài là:

- A. 8 cm. B. 10 cm. C. 9 cm. D. 7,5 cm.

- Câu 204. [0H2-2]** Tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ và có diện tích S . Nếu tăng cạnh BC lên 2 lần đồng thời tăng cạnh AC lên 3 lần và giữ nguyên độ lớn của góc C thì khi đó diện tích của tam giác mới được tạo nên bằng:
- A. $2S$. B. $3S$. C. $4S$. D. $6S$.
- Câu 205. [0H2-2]** Cho tam giác DEF có $DE = DF = 10$ cm và $EF = 12$ cm. Gọi I là trung điểm của cạnh EF . Đoạn thẳng DI có độ dài là:
- A. 6,5 cm. B. 7 cm. C. 8 cm. D. 4 cm.
- Câu 206. [0H2-2]** Cho tam giác ABC có $AB = 5$, $AC = 8$, $\hat{A} = 60^\circ$. Kết quả nào trong các kết quả sau là độ dài cạnh BC ?
- A. $\sqrt{129}$. B. 7. C. 49. D. $\sqrt{69}$.
- Câu 207. [0H2-2]** Tam giác ABC có $a = 14$, $b = 18$, $c = 20$. Kết quả nào sau đây là gần đúng nhất?
- A. $\hat{B} \approx 42^\circ 50'$. B. $\hat{B} \approx 60^\circ 56'$. C. $\hat{B} \approx 119^\circ 04'$. D. $\hat{B} \approx 90^\circ$.
- Câu 208. [0H2-2]** Nếu tam giác MNP có $MP = 5$, $PN = 8$ và $\widehat{MPN} = 120^\circ$ thì độ dài cạnh MN (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất) là:
- A. 11,4. B. 12,4. C. 7,0. D. 12,0.
- Câu 209. [0H2-2]** Tam giác ABC có $BC = 10$, $\hat{A} = 30^\circ$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng bao nhiêu?
- A. 5. B. 10. C. $\frac{10}{\sqrt{3}}$. D. $10\sqrt{3}$.
- Câu 210. [0H2-2]** Tam giác với ba cạnh là 5, 12 và 13 có diện tích bằng bao nhiêu?
- A. 30. B. $20\sqrt{2}$. C. $10\sqrt{3}$. D. 20.
- Câu 211. [0H2-2]** Tam giác có ba cạnh là 6, 10, 8. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đó bằng bao nhiêu?
- A. $\sqrt{3}$. B. 4. C. 2. D. 1.
- Câu 212. [0H2-2]** Tam giác ABC có $\hat{B} = 60^\circ$, $\hat{C} = 45^\circ$, $AB = 5$. Hỏi cạnh AC bằng bao nhiêu?
- A. $5\sqrt{3}$. B. $5\sqrt{2}$. C. $\frac{5\sqrt{6}}{2}$. D. 10.
- Câu 213. [0H2-2]** Tam giác ABC có $AB = 2$ cm, $AC = 1$ cm, $\hat{A} = 60^\circ$. Khi đó độ dài cạnh BC là:
- A. 1 cm. B. 2 cm. C. $\sqrt{3}$ cm. D. $\sqrt{5}$ cm.
- Câu 214. [0H2-2]** Tam giác ABC có $a = 5$ cm, $b = 3$ cm, $c = 5$ cm. Khi đó số đo của góc $\widehat{BAC}$ là:
- A. $\hat{A} = 45^\circ$. B. $\hat{A} = 30^\circ$. C. $\hat{A} > 60^\circ$. D. $\hat{A} = 90^\circ$.
- Câu 215. [0H2-2]** Tam giác ABC có $AB = 8$ cm, $BC = 10$ cm, $CA = 6$ cm. Đường trung tuyến AM của tam giác đó có độ dài bằng:
- A. 4 cm. B. 5 cm. C. 6 cm. D. 7 cm.
- Câu 216. [0H2-2]** Tam giác ABC có $a = \sqrt{3}$ cm, $b = \sqrt{2}$ cm, $c = 1$ cm. Đường trung tuyến m_a có độ dài là:
- A. 1 cm. B. 1,5 cm. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm. D. 2,5 cm.

Câu 217. [0H2-2] Tam giác ABC vuông cân tại A có $AB = AC = a$. Đường trung tuyến BM có độ dài là:

- A. $1,5a$. B. $a\sqrt{2}$. C. $a\sqrt{3}$. D. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Câu 218. [0H2-2] Tam giác đều cạnh a nội tiếp trong đường tròn bán kính R . Khi đó bán kính R bằng:

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 219. [0H2-2] Bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác đều cạnh a bằng:

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{5}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. D. $\frac{a\sqrt{5}}{7}$.

Câu 220. [0H2-2] Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Nếu $b^2 + c^2 - a^2 > 0$ thì góc A nhọn. B. Nếu $b^2 + c^2 - a^2 > 0$ thì góc A tù.
C. Nếu $b^2 + c^2 - a^2 < 0$ thì góc A nhọn. D. Nếu $b^2 + c^2 - a^2 < 0$ thì góc A vuông.

Câu 221. [0H3-2] Tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^\circ$, $AC = 10$, $AB = 6$. Tính cạnh BC

- A. 76. B. $2\sqrt{19}$. C. 14. D. $6\sqrt{2}$.

Câu 222. [0H3-2] Tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^\circ$, $AC = 10$, $AB = 6$. Tính cạnh BC

- A. 76. B. $2\sqrt{19}$. C. 14. D. $6\sqrt{2}$.

Câu 223. [0H3-2] Tam giác ABC có $\widehat{B} = 30^\circ$, $BC = \sqrt{3}$, $AB = 3$. Tính cạnh AC .

- A. $\sqrt{3}$. B. 3. C. 1,5. D. 1,7.

Câu 224. [0H3-2] Tam giác ABC có $\widehat{C} = 30^\circ$, $AC = 2$, $BC = \sqrt{3}$. Tính cạnh AB

- A. $\sqrt{10}$. B. 10. C. $\sqrt{3}$. D. 1.

Câu 225. [0H3-2] Tam giác ABC có $\widehat{C} = 150^\circ$, $BC = \sqrt{3}$, $AC = 2$. Tính cạnh AB .

- A. $\sqrt{13}$. B. 10. C. $\sqrt{3}$. D. 1.

Câu 226. [0H3-2] Tam giác ABC có $\widehat{B} = 135^\circ$, $BC = 3$, $AB = \sqrt{2}$. Tính cạnh AC .

- A. 5. B. $\sqrt{5}$. C. $\sqrt{17}$. D. 2,25.

Câu 227. [0H3-2] Tam giác ABC có các góc $\widehat{B} = 30^\circ$, $\widehat{C} = 45^\circ$, $AB = 3$. Tính cạnh AC .

- A. $\frac{3\sqrt{6}}{2}$. B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. C. $\sqrt{6}$. D. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Câu 228. [0H3-2] Tam giác ABC có $\widehat{B} = 60^\circ$, $\widehat{C} = 45^\circ$, $AB = 3$. Tính cạnh AC .

- A. $\frac{3\sqrt{6}}{2}$. B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. C. $\sqrt{6}$. D. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Câu 229. [0H3-2] Tam giác ABC có $\widehat{A} = 105^\circ$, $\widehat{B} = 45^\circ$, $AC = 10$. Tính cạnh AB .

- A. $10\sqrt{2}$. B. $5\sqrt{6}$. C. $\frac{5\sqrt{6}}{2}$. D. $5\sqrt{2}$.

Câu 230. [0H3-2] Tam giác ABC có $\widehat{A} = 75^\circ$, $\widehat{B} = 45^\circ$, $AC = 2$. Tính cạnh AB .

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\sqrt{6}$. C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

- Câu 231. [0H3-2]** Tam giác ABC có tổng hai góc B và C bằng 135° và độ dài cạnh BC bằng a . Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.
- A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. B. $a\sqrt{2}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $a\sqrt{3}$.
- Câu 232. [0H2-2]** Tam giác ABC có $AB = 5$, $AC = 9$ và đường trung tuyến $AM = 6$. Tính độ dài cạnh BC .
- A. $2\sqrt{17}$. B. $\sqrt{17}$. C. $\sqrt{129}$. D. 22 .
- Câu 233. [0H2-2]** Tam giác ABC có $AB = 4$, $AC = 10$ và đường trung tuyến $AM = 6$. Tính độ dài cạnh BC .
- A. $2\sqrt{6}$. B. 5 . C. $\sqrt{22}$. D. $2\sqrt{22}$.
- Câu 234. [0H2-2]** Tam giác ABC có $AB = 4$, $AC = 6$ và trung tuyến $BM = 3$. Tính độ dài cạnh BC .
- A. $\sqrt{17}$. B. $2\sqrt{5}$. C. 4 . D. 8 .
- Câu 235. [0H2-2]** Tam giác có ba cạnh lần lượt là 5 , 12 , 13 . Tính độ dài đường cao ứng với cạnh lớn nhất.
- A. $\frac{60}{13}$. B. $\frac{120}{13}$. C. $\frac{30}{13}$. D. 12 .
- Câu 236. [0H2-2]** Tam giác ABC có $AB = 1$, $AC = 3$, $\widehat{A} = 60^\circ$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC .
- A. $\sqrt{7}$. B. $\frac{\sqrt{21}}{3}$. C. $\frac{5}{2}$. D. $\sqrt{3}$.
- Câu 237. [0H2-2]** Tam giác ABC có góc B tù, $AB = 3$, $AC = 4$ và có diện tích bằng $3\sqrt{3}$. Góc A có số đo bằng bao nhiêu?
- A. 30° . B. 60° . C. 45° . D. 120° .
- Câu 238. [0H2-2]** Tam giác ABC có $AB = 10$, $AC = 24$, diện tích bằng 120 . Tính độ dài đường trung tuyến AM .
- A. 13 . B. $7\sqrt{3}$. C. 26 . D. $11\sqrt{2}$.
- Câu 239. [0H2-2]** Tam giác ABC có góc A nhọn, $AB = 5$, $AC = 8$, diện tích bằng 12 . Tính độ dài cạnh BC .
- A. $2\sqrt{3}$. B. 4 . C. 5 . D. $3\sqrt{2}$.
- Câu 240. [0H2-2]** Tam giác có ba cạnh lần lượt là $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ và 1 . Tính độ dài đường cao ứng với cạnh lớn nhất.
- A. $\frac{\sqrt{6}}{6}$. B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{3}{2}$.
- Câu 241. [0H2-2]** Tam giác có ba cạnh lần lượt là 1 , 2 , $\sqrt{5}$. Tính độ dài đường cao ứng với cạnh lớn nhất.
- A. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. B. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$. C. $1,4$. D. $1,3$.
- Câu 242. [0H2-2]** Tam giác có ba cạnh lần lượt là 5 , 6 , 7 . Tính độ dài đường cao ứng với cạnh có độ dài bằng 6 .
- A. $\sqrt{6}$. B. $2\sqrt{6}$. C. 5 . D. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

Câu 243. [0H2-2] Tam giác có ba cạnh lần lượt là 7, 8, 9. Tính độ dài đường cao ứng với cạnh có độ dài bằng 8.

- A. $4\sqrt{3}$. B. $2\sqrt{2}$. C. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$. D. $3\sqrt{5}$.

Câu 244. [0H2-2] Tam giác có ba cạnh lần lượt là 21, 22, 23. Tính độ dài đường cao ứng với cạnh có độ dài bằng 22.

- A. $\frac{4\sqrt{11}}{7}$. B. 27. C. $3\sqrt{10}$. D. $6\sqrt{10}$.

Câu 245. [0H2-2] Tam giác có ba cạnh 13, 14, 15. Tính đường cao ứng với cạnh có độ dài 14.

- A. 10. B. 12. C. 1. D. 15.

Câu 246. [0H2-2] Cho tam giác với ba cạnh $a=13$, $b=14$, $c=15$ Tính đường cao h_c .

- A. $10\frac{1}{5}$. B. $11\frac{1}{5}$. C. $5\frac{3}{5}$. D. 12.

Câu 247. [0H2-2] Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác có ba cạnh lần lượt là 5, 12, 13.

- A. 11. B. $5\sqrt{2}$. C. 6. D. 6,5.

Câu 248. [0H2-2] Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác có ba cạnh lần lượt là $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ và 1.

- A. $\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$. D. $\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$.

Câu 249. [0H2-2] Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác có ba cạnh lần lượt là 5, 12, 13.

- A. $\sqrt{2}$. B. 2. C. $2\sqrt{2}$. D. $\sqrt{3}$.

Câu 250. [0H2-2] Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có ba cạnh là 13, 14, 15.

- A. 8. B. $\frac{33}{4}$. C. $8\frac{1}{8}$. D. $6\sqrt{2}$.

Câu 251. [0H2-2] Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC có ba cạnh là 13, 14, 15.

- A. 2. B. 4. C. $\sqrt{2}$. D. 3.

Câu 252. [0H2-2] Cho tam giác ABC có diện tích S . Nếu tăng độ dài mỗi cạnh BC và AC lên hai lần đồng thời giữ nguyên độ lớn của góc C thì diện tích của tam giác mới được tạo nên là:

- A. $2S$. B. $3S$. C. $4S$. D. $5S$.

Câu 253. [0H2-3] Cho tam giác ABC , xét các bất đẳng thức sau:

- I. $|a-b| < c$. II. $a < b+c$. III. $m_a + m_b + m_c < a+b+c$.

Hỏi bất đẳng thức nào đúng?

- A. Chỉ I, II. B. Chỉ II, III. C. Chỉ I, III. D. Cả I, II, III.

Câu 254. [0H2-3] Cho tam giác MPQ vuông tại P . Trên cạnh MQ lấy hai điểm E, F sao cho các góc $\widehat{MPE}$, $\widehat{EPF}$, $\widehat{FPQ}$ bằng nhau. Đặt $MP=q$, $PQ=m$, $PE=x$, $PF=y$. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào đúng?

- A. $ME = EF = FQ$. B. $ME^2 = q^2 + x^2 - xq$.
C. $MF^2 = q^2 + y^2 - yq$. D. $MQ^2 = q^2 + m^2 - 2qm$.

Câu 255. [0H2-3] Tam giác ABC vuông tại A có $AB=6$ cm, $BC=10$ cm. Đường tròn nội tiếp tam giác đó có bán kính r bằng:

- A. 1 cm. B. $\sqrt{2}$ cm. C. 2 cm. D. 3 cm.

- Câu 256. [0H2-3]** Tam giác đều nội tiếp đường tròn bán kính $R = 4$ cm có diện tích là:
 A. 13 cm^2 . B. $13\sqrt{2} \text{ cm}^2$. C. $12\sqrt{3} \text{ cm}^2$. D. 15 cm^2 .
- Câu 257. [0H2-3]** Tam giác ABC vuông cân tại A có $AB = a$. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC có bán kính r bằng:
 A. $\frac{a}{2}$. B. $\frac{a}{\sqrt{2}}$. C. $\frac{a}{2+\sqrt{2}}$. D. $\frac{a}{3}$.
- Câu 258. [0H2-3]** Tam giác ABC có các cạnh a, b, c thỏa mãn điều kiện: $(a+b+c)(a+b-c) = 3ab$. Khi đó số đo của góc C là:
 A. 120° . B. 30° . C. 45° . D. 60° .
- Câu 259. [0H2-3]** Hình bình hành $ABCD$ có $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$ và $\widehat{BAD} = 45^\circ$. Khi đó hình bình hành có diện tích bằng
 A. $2a^2$. B. $a^2\sqrt{2}$. C. a^2 . D. $a^2\sqrt{3}$.
- Câu 260. [0H2-3]** Cho tam giác ABC có cạnh $BC = a$, cạnh $CA = b$. Tam giác ABC có diện tích lớn nhất khi góc C bằng:
 A. 60° . B. 90° . C. 150° . D. 120° .
- Câu 261. [0H3-3]** Tam giác ABC có $\sin C = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $AC = 3$, $BC = 6$ và góc C nhọn. Tính cạnh AB .
 A. $\sqrt{27}$. B. $3\sqrt{2}$. C. 27 . D. 8 .
- Câu 262. [0H3-2]** Tam giác ABC có $AC = 3\sqrt{3}$, $AB = 3$, $BC = 6$. Tính số đo góc B .
 A. 60° . B. 45° . C. 30° . D. 120° .
- Câu 263. [0H3-2]** Tam giác ABC có $BC = 5\sqrt{5}$, $AC = 5\sqrt{2}$, $AB = 5$. Tính $\widehat{A}$.
 A. 60° . B. 45° . C. 30° . D. 120° .
- Câu 264. [0H3-3]** Tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 4$ và $\tan A = 2\sqrt{2}$. Tính cạnh BC
 A. $\sqrt{33}$. B. $\sqrt{17}$. C. $3\sqrt{2}$. D. $4\sqrt{2}$.
- Câu 265. [0H3-3]** Tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 4$ và $\tan A = -2\sqrt{2}$. Tính cạnh BC .
 A. $3\sqrt{2}$. B. $4\sqrt{3}$. C. $\sqrt{33}$. D. 7 .
- Câu 266. [0H3-3]** Tam giác ABC có $BC = \sqrt{5}$, $AC = 3$ và $\cot C = -2$. Tính cạnh AB .
 A. $\sqrt{26}$. B. $\sqrt{21}$. C. $\frac{9}{5}$. D. $2\sqrt{10}$.
- Câu 267. [0H3-3]** Tam giác ABC có $BC = \sqrt{5}$, $AC = 3$ và $\cot C = 2$. Tính cạnh AB .
 A. 6 . B. $\sqrt{2}$. C. $\frac{9}{5}$. D. $2\sqrt{10}$.
- Câu 268. [0H3-3]** Tam giác ABC có $AB = 7$, $AC = 5$ và $\cos(B+C) = -\frac{1}{5}$. Tính BC .
 A. $2\sqrt{15}$. B. $4\sqrt{22}$. C. $4\sqrt{15}$. D. $2\sqrt{22}$.
- Câu 269. [0H3-3]** Tam giác ABC có $\cos(A+B) = -\frac{1}{8}$, $AC = 4$, $BC = 5$. Tính cạnh AB .
 A. $\sqrt{46}$. B. 11 . C. $5\sqrt{2}$. D. 6 .

Câu 270. [0H3-3] Hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi E là trung điểm cạnh BC , F là trung điểm cạnh AE . Tìm độ dài đoạn thẳng DF .

- A. $\frac{a\sqrt{13}}{4}$. B. $\frac{a\sqrt{5}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{3a}{4}$.

Câu 271. [0H3-3] Tam giác có ba cạnh lần lượt là 3, 8, 9. Góc lớn nhất của tam giác có cosin bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{1}{6}$. B. $-\frac{1}{6}$. C. $\frac{\sqrt{17}}{4}$. D. $-\frac{4}{25}$.

Câu 272. [0H3-3] Tam giác có ba cạnh lần lượt là 2, 3, 4. Góc bé nhất của tam giác có sin bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{\sqrt{15}}{8}$. B. $\frac{7}{8}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{\sqrt{14}}{8}$.

Câu 273. [0H3-3] Tam giác ABC có $AB = 4$, $AC = 5$, $BC = 6$. Tính $\cos(B + C)$.

- A. $\frac{1}{8}$. B. $-\frac{1}{4}$. C. $-0,125$. D. $0,75$.

Câu 274. [0H3-3] Tam giác ABC có các góc $\widehat{A} = 105^\circ$, $\widehat{B} = 45^\circ$. Tính tỉ số $\frac{AB}{AC}$.

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\sqrt{2}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 275. [0H3-3] Tam giác ABC có các góc $\widehat{A} = 75^\circ$, $\widehat{B} = 45^\circ$. Tính tỉ số $\frac{AB}{AC}$.

- A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. B. $\sqrt{6}$. C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. D. $1,2$.

Câu 276. [0H3-3] Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết $AB = c$ và $\cos(A + B) = \frac{1}{3}$.

- A. $\frac{c\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{3c\sqrt{2}}{8}$. C. $\frac{9c\sqrt{2}}{8}$. D. $\frac{3c}{2}$.

Câu 277. [0H3-3] Tìm chu vi tam giác ABC , biết rằng $AB = 6$ và $2 \sin A = 3 \sin B = 4 \sin C$.

- A. 26. B. 13. C. $5\sqrt{26}$. D. $10\sqrt{6}$.

Câu 278. [0H3-3] Tam giác ABC có $BC = 10$ và $\frac{\sin A}{5} = \frac{\sin B}{4} = \frac{\sin C}{3}$. Tìm chu vi của tam giác đó.

- A. 12. B. 36. C. 24. D. 22.

Câu 279. [0H3-3] Tam giác ABC có $AB = 9$, $BC = 10$, $CA = 11$. Gọi M là trung điểm BC và N là trung điểm AM . Tính độ dài BN .

- A. 6. B. $4\sqrt{2}$. C. 5. D. $\sqrt{34}$.

Câu 280. [0H3-3] Tam giác ABC có $AB = 5$, $BC = 8$, $CA = 6$. Gọi G là trọng tâm tam giác. Độ dài đoạn thẳng CG bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{5\sqrt{7}}{2}$. B. $\frac{5\sqrt{7}}{3}$. C. $\frac{5\sqrt{7}}{6}$. D. $\frac{13}{3}$.

Câu 281. [0H3-3] Tam giác ABC có $AB = 5$, $BC = 8$, $CA = 6$. Gọi G là trọng tâm tam giác. Độ dài đoạn thẳng AG bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{\sqrt{58}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{58}}{2}$. C. $\frac{7\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{7\sqrt{2}}{2}$.

- Câu 282. [0H3-3]** Tam giác ABC có $AB = 5$, $BC = 8$, $CA = 6$. Gọi G là trọng tâm tam giác. Độ dài đoạn thẳng BG bằng bao nhiêu?
- A. 4. B. 6. C. $\frac{\sqrt{142}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{142}}{2}$.
- Câu 283. [0H2-3]** Hình bình hành có hai cạnh là 5 và 9, một đường chéo bằng 11. Tìm độ dài đường chéo còn lại.
- A. 9,5. B. $4\sqrt{6}$. C. $\sqrt{91}$. D. $3\sqrt{10}$.
- Câu 284. [0H2-3]** Hình bình hành có hai cạnh là 3 và 5, một đường chéo bằng 5. Tìm độ dài đường chéo còn lại.
- A. $\sqrt{43}$. B. $2\sqrt{13}$. C. 8. D. $8\sqrt{3}$.
- Câu 285. [0H2-3]** Hình bình hành có một cạnh là 5 hai đường chéo là 6 và 8. Tính độ dài cạnh kề với cạnh có độ dài bằng 5
- A. 3. B. 1. C. $5\sqrt{6}$. D. 5.
- Câu 286. [0H2-3]** Hình bình hành có một cạnh là 4 hai đường chéo là 6 và 8. Tính độ dài cạnh kề với cạnh có độ dài bằng 4
- A. $\sqrt{34}$. B. 6. C. $\sqrt{42}$. D. 5.
- Câu 287. [0H2-3]** Cho tam giác vuông, trong đó có một góc bằng trung bình cộng của hai góc còn lại. Cạnh lớn nhất của tam giác đó bằng a . Tính diện tích tam giác.
- A. $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$. B. $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. C. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{a^2\sqrt{6}}{10}$.
- Câu 288. [0H2-3]** Tam giác có ba cạnh là 9, 10, 11. Tính đường cao lớn nhất của tam giác.
- A. $\frac{60\sqrt{2}}{9}$. B. $3\sqrt{2}$. C. $\sqrt{70}$. D. $4\sqrt{3}$.
- Câu 289. [0H2-3]** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn bán kính R , $AB = R$, $AC = R\sqrt{3}$. Tính góc $\hat{A}$ nếu biết $\hat{B}$ là góc tù.
- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .
- Câu 290. [0H2-3]** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn bán kính R , $AB = R$, $AC = R\sqrt{2}$. Tính góc $\hat{A}$ biết $\hat{A}$ là góc tù.
- A. 135° . B. 105° . C. 120° . D. 150° .
- Câu 291. [0H2-3]** Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Gọi M là trung điểm cạnh BC . Hãy tính giá trị $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC}$
- A. $\frac{-a^2}{2}$. B. $\frac{c^2 + b^2}{2}$. C. $\frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$. D. $\frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$.
- Câu 292. [0H2-3]** Tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Tính $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC}$
- A. $-a^2$. B. $\frac{c^2 + b^2}{2}$. C. $\frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$. D. $\frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$.
- Câu 293. [0H3-4]** Tam giác ABC vuông tại A có $AB = AC = a$. Điểm M nằm trên cạnh BC sao cho $BM = \frac{BC}{3}$. Độ dài AM bằng bao nhiêu?
- A. $\frac{a\sqrt{17}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{5}}{3}$. C. $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{2a}{3}$.

- Câu 294. [0H3-4]** Cho tam giác cân ABC có $\widehat{A} = 120^\circ$ và $AB = AC = a$. Lấy điểm M trên cạnh BC sao cho $BM = \frac{2BC}{5}$. Tính độ dài AM .
- A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{11a}{5}$. C. $\frac{a\sqrt{7}}{5}$. D. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$.
- Câu 295. [0H3-4]** Tam giác ABC có $BC = 12$, $CA = 9$, $AB = 6$. Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $BM = 4$. Tính độ dài đoạn thẳng AM .
- A. $2\sqrt{5}$. B. $3\sqrt{2}$. C. $\sqrt{20}$. D. $\sqrt{19}$.
- Câu 296. [0H3-4]** Tam giác ABC có $AB = 4$, $AC = 6$, $\cos B = \frac{1}{8}$, $\cos C = \frac{3}{4}$. Tính cạnh BC .
- A. 7. B. 5. C. $3\sqrt{3}$. D. 2.
- Câu 297. [0H3-4]** Cho tam giác ABC vuông tại A , $AC = b$, $AB = c$. Lấy điểm M trên cạnh BC sao cho góc $\widehat{BAM} = 30^\circ$. Tính tỉ số $\frac{MB}{MC}$.
- A. $\frac{b\sqrt{3}}{3c}$. B. $\frac{\sqrt{3}c}{3b}$. C. $\frac{\sqrt{3}c}{b}$. D. $\frac{b-c}{b+c}$.
- Câu 298. [0H3-4]** Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết $AB = 10$ và $\tan(A+B) = \frac{1}{3}$.
- A. $\frac{5\sqrt{10}}{9}$. B. $\frac{10}{3}$. C. $\frac{\sqrt{10}}{5}$. D. $5\sqrt{10}$.
- Câu 299. [0H3-4]** Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết $AB = 12$ và $\cot(A+B) = \frac{1}{3}$.
- A. $2\sqrt{10}$. B. $\frac{9\sqrt{10}}{5}$. C. $5\sqrt{10}$. D. $3\sqrt{2}$.
- Câu 300. [0H2-4]** Cho góc $\widehat{xOy} = 30^\circ$. Gọi A và B là hai điểm di động lần lượt trên Ox và Oy sao cho $AB = 2$. Độ dài lớn nhất của đoạn OB bằng:
- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	D	C	D	A	A	A	A	B	C	A	A	B	D	B	A	C	C	B	C
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A	C	C	D	A	C	A	A	A	A	A	D	B	B	B	C	D	D	D	C
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
D	A	B	B	D	A	D	C	D	C	B	D	C	B	A	A	C	C	B	D
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
A	C	A	D	A	D	B	C	B	A	C	D	B	D	B	C	D	A	B	C
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
B	A	D	A	C	A	B	A	B	C	C	D	C	C	C	D	D	C	B	C
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
C	A	B	C	B	C	A	C	B	C	D	A	C	A	D	C	C	A	C	D
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
D	D	B	D	A	A	C	C	B	A	A	B	C	B	A	A	D	A	D	C
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
D	A	B	D	B	B	A	D	A	B	C	B	C	D	A	D	A	D	A	D
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
C	C	B	D	C	B	D	B	A	B	C	A	D	A	D	D	B	B	B	C
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200
A	C	B	A	D	C	A	B	A	D	B	D	B	C	A	B	A	C	D	D
201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220
A	A	D	D	C	B	B	A	B	A	C	C	C	C	B	C	D	C	C	A
221	222	223	224	225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240
B	C	A	D	A	C	B	A	D	B	A	A	D	B	A	B	B	A	C	B
241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
A	B	D	D	B	B	D	A	B	C	B	C	D	C	C	C	C	D	C	B
261	262	263	264	265	266	267	268	269	270	271	272	273	274	275	276	277	278	279	280
B	A	A	B	C	B	B	A	D	A	B	A	C	A	C	B	A	C	D	B
281	282	283	284	285	286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300
A	C	C	A	D	A	B	A	A	B	A	A	B	C	D	B	B	D	A	C

Tài liệu tham khảo:

- [1] Trần Văn Hạo – Hình học 10 CB- Nhà xuất bản Giáo Dục Việt Nam
- [2] Trần Văn Hạo – Bài tập Hình học 10 CB- Nhà xuất bản Giáo Dục Việt Nam
- [3] Trần Văn Hạo - Hình học 10 NC- Nhà xuất bản Giáo Dục Việt Nam
- [4] Trần Văn Hạo - Bài tập Hình học 10 NC- Nhà xuất bản Giáo Dục Việt Nam
- [5] Nguyễn Phú Khánh - Phân dạng và phương pháp giải các chuyên đề Hình học 10.
- [6] Lê Mậu Dũng - Rèn luyện kỹ năng trắc nghiệm Hình học 10.
- [7] Nguyễn Hữu Ngọc – Các dạng toán và PP giải Hình học 10.
- [8] Tài liệu học tập Toán 10 – THPT chuyên Lê Hồng Phong TPHCM
- [9] Tài liệu học tập Toán 10 – THPT Marie Curie TPHCM
- [10] Một số tài liệu trên internet.

MỤC LỤC

TÍCH VÔ HƯỚNG & ỨNG DỤNG

Vấn đề 1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC BẤT KÌ TỪ 0^0 ĐẾN 180^0	1
A - TÓM TẮT LÝ THUYẾT	1
B - PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	2
Dạng 1. Góc và dấu của các giá trị lượng giác.....	2
Dạng 2. Cho một giá trị lượng giác, tính các giá trị lượng giác còn lại	3
Dạng 3. Chứng minh, rút gọn một biểu thức.....	5
C – BÀI TẬP TỔNG HỢP VẤN ĐỀ 1	7
D – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VẤN ĐỀ 1	8
Vấn đề 2. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VÉCTƠ	10
A - TÓM TẮT LÝ THUYẾT	10
B - PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	11
Dạng 1. Tính tích vô hướng của hai vectơ. Góc giữa hai vectơ.....	11
Dạng 2. Tính độ dài của một đoạn thẳng.....	14
Dạng 3. Chứng minh vuông góc	15
Dạng 4. Chứng minh một đẳng thức về tích vô hướng hay độ dài	17
Dạng 5. Tập hợp điểm – Cực trị.....	19
Dạng 6. Biểu thức tọa độ	22
Dạng 7. Tìm các điểm đặc biệt trong tam giác.....	23
Dạng 8. Một số dạng toán thường gặp trên tam giác, tứ giác.....	26
Dạng 9. Tìm GTLN, GTNN trong hình học.....	31
C – BÀI TẬP TỔNG HỢP VẤN ĐỀ 2	33
D – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VẤN ĐỀ 2	38
Vấn đề 3. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC.....	51
A - TÓM TẮT LÝ THUYẾT	51
B - PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	52
Dạng 1. Tính toán các đại lượng.....	52
Dạng 2. Chứng minh hệ thức.....	56
Dạng 3. Dạng tam giác.....	58
Dạng 4. Giải tam giác và ứng dụng thực tế.....	60
C – BÀI TẬP TỔNG HỢP VẤN ĐỀ 3	65
D – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VẤN ĐỀ 3	69

Gv: TRẦN QUỐC NGHĨA - 098 373 4349

Chuyên: TOÁN

- LỚP 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12
- LUYỆN THI LỚP 10
- LUYỆN THI THPT QUỐC GIA

TRỌN BỘ TÀI LIỆU HỌC TẬP

Môn: TOÁN - Lớp: 10 và THPTQG

Năm học 2017-2018

- 1. Tài liệu TOÁN 10 theo chủ đề (8 chủ đề)**
- 2. Bài tập trắc nghiệm TOÁN 10 HK 1**
- 3. Bài tập trắc nghiệm TOÁN 10 HK 2**

Năm học 2017 - 2018

Lưu hành nội bộ