SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT
LÊ QUÝ ĐÔN – ĐỐNG ĐA

ĐỀ THI THỬ
(Đề thi gồm có 06 trang)

KỲ THI TỐT NGHIỆP THPT NĂM 2021
Bài thi: TOÁN
Thời gian: 90 phút (Không kể thời gian phát đề)

Mã đề thi

Họ và tên thí sinh:.. SBD:....................

Câu 1. Đồ thị hàm số $y = f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Câu 2. Nghiệm của phương trình $\log_3(2x+1) = 3$ là

A. $x = 26$ **B.** $x = 13$ **C.** $x = 4$ **D.** $x = 8$

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Hàm số đồng biến trên khoảng nào?

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

A. $(-\infty; -1)$ **B.** $(2; +\infty)$ **C.** $(-1; 2)$ **D.** $(-2; 4)$

Câu 4. Cho $a > 0; a \neq 1$, tính $\log_a(4a^3)$?

A. $\dfrac{1}{3} - \log_a 4$ **B.** $3 - 2\log_a 2$ **C.** $\dfrac{1}{3} + \log_a 4$ **D.** $3 + 2\log_a 2$

Câu 5. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{3x}$?

A. $\int f(x)dx = \dfrac{e^{3x+1}}{3x+1} + C$ **B.** $\int f(x)dx = \dfrac{1}{3}e^{3x} + C$

C. $\int f(x)dx = e^{3x} + C$ **D.** $\int f(x)dx = 3e^{3x} + C$

Câu 6. Cho $a > 0$, tính $\sqrt[3]{a.\sqrt{a}}$?

A. $a^{\frac{1}{2}}$ **B.** $a^{\frac{3}{2}}$ **C.** $a^{\frac{1}{6}}$ **D.** $a^{\frac{2}{3}}$

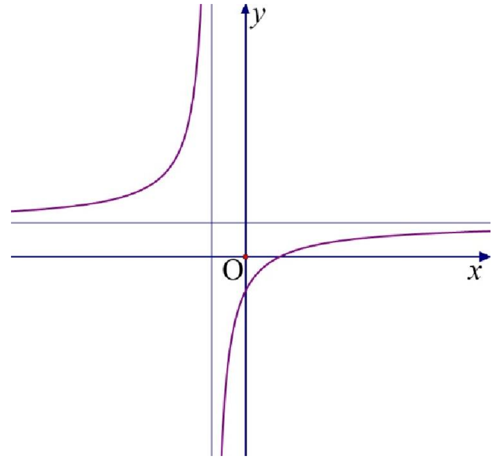
Câu 7. Đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 2$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm?

A. 4 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Câu 8. Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_5 x$, với $x > 0$

A. $y = \dfrac{1}{x.\ln 5}$ **B.** $y = \dfrac{1}{x}$ **C.** $y = \dfrac{\ln 5}{x}$ **D.** $y = \dfrac{1}{\log_5 x}$

Câu 9. Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



A. $y=\dfrac{-x-1}{x-1}$ **B.** $y=\dfrac{x+1}{x-1}$

C. $y=\dfrac{-x+1}{x+1}$ **D.** $y=\dfrac{x-1}{x+1}$

Câu 10. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu và số hạng thứ tư lần lượt là 2; 14. Tìm công sai d?

A. $d=-4$ **B.** $d=3$ **C.** $d=-3$ **D.** $d=4$

Câu 11. Có bao nhiêu số có 3 chữ số khác nhau được lập từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5?

A. 3^5 **B.** $3!$ **C.** A_5^3 **D.** C_5^3

Câu 12. . Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm điểm cực tiểu của hàm số?

x	$-\infty$		-2		-1		2		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	0	−	
y	$-\infty$	↗	4	↘	1	↗	6	↘	$-\infty$

A. $x=2$ **B.** $x=-1$ **C.** $x=1$ **D.** $x=-2$

Câu 13. Tập nghiệm của phương trình $2^{x^2+1}=4$ là

A. $S=\{\pm 1\}$ **B.** $S=\{0\}$ **C.** $S=\{\pm\sqrt{3}\}$ **D.** $S=\{\pm\sqrt{2}\}$

Câu 14. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=4x^3-2x+1$?

A. $\int f(x)dx=x^4-x^2+C$ **B.** $\int f(x)dx=4x^4-2x^2+x+C$

C. $\int f(x)dx=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{1}{2}x^2+x+C$ **D.** $\int f(x)dx=x^4-x^2+x+C$

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2(x-2)^3(x-3)^4$. Hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 1

Câu 16. Tính diện tích xung quanh của hình nón có bán kính đáy $r=3$ và chiều cao $h=4$.

A. 21π **B.** 12π **C.** 24π **D.** 15π

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ có liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3f(x)+2\sin x)dx=8$. Tính $\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(2x)dx$.

A. $\dfrac{4}{3}$ **B.** 2 **C.** $\dfrac{8}{3}$ **D.** 1

Câu 18. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x+\sqrt{9-x^2}$. Tính $M+m$?

A. $3\sqrt{2}-3$ **B.** $3\sqrt{2}+3$ **C.** 0 **D.** $3\sqrt{2}$

Câu 19. Chọn ngẫu nhiên ba số trong 40 số nguyên dương đầu tiên. Tính xác suất để ba số được chọn có tổng chia hết cho 3.

A. $\frac{127}{380}$ **B.** $\frac{9}{95}$ **C.** $\frac{91}{380}$ **D.** $\frac{31}{95}$

Câu 20. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$?

A. $4a^3\sqrt{3}$ **B.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}a^3$ **C.** $\frac{4}{3}a^3$ **D.** $4a^3$

Câu 21. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn: $z-3+i=1-2i$ có tọa độ là

A. $(3;-4)$ **B.** $(-3;4)$ **C.** $(-4;3)$ **D.** $(4;-3)$

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA\perp(ABCD)$, $SA=a\sqrt{3}$. Gọi α là góc giữa SA và mặt phẳng (SCD). Tính $\tan\alpha$.

A. 1 **B.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$ **C.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **D.** $\sqrt{3}$

Câu 23. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\tan\left(\frac{\pi}{9}\right)\right)^{x^2-3x}\geq\left(\cot\left(\frac{\pi}{9}\right)\right)^{3-x}$ là

A. $S=[1;3]$ **B.** $S=(-\infty;1]\cup[3;+\infty)$

C. $S=[-1;3]$ **D.** $S=(-\infty;-1]\cup[3;+\infty)$

Câu 24. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn: $\int_{-1}^{2}f(x)dx=5$; $\int_{-1}^{4}f(x)dx=8$. Tính $\int_{2}^{4}(f(x)+3)dx$?

A. 6 **B.** 9 **C.** 19 **D.** 3

Câu 25. Tìm số phức z biết: $(1-i)z+3-2i=6-3i$

A. $3-2i$ **B.** $z=2+i$ **C.** $7+2i$ **D.** $2-4i$

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-4x-2y+6z-2=0$. Tìm tọa độ tâm của mặt cầu (S)?

A. $(-4;-2;6)$ **B.** $(-2;-1;3)$ **C.** $(4;2;-6)$ **D.** $(2;1;-3)$

Câu 27. Tính tích phân $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x dx$?

A. $-\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** 1 **D.** -1

Câu 28. Cho số phức $z=1+3i$. Tìm môđun của số phức $w=(3-2i)(z+1)$

A. 13 **B.** $\sqrt{13}$ **C.** 10 **D.** 130

Câu 29. Tính thể tích khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng 4.

A. 64 **B.** $\frac{64}{3}$ **C.** $16\sqrt{3}$ **D.** $\frac{16\sqrt{3}}{3}$

Câu 30. Tính thể tích khối trụ biết thiết diện qua trục là một hình vuông có cạnh bằng 8.

A. $\frac{128\pi}{3}$ **B.** $\frac{512\pi}{3}$ **C.** 128π **D.** 512π

Câu 31. Hàm số nào sau đây không có cực trị

A. $y=x^2+4x+5$ **B.** $y=x^4+4x^2+2$

C. $y=x^3-2x^2+3x+1$ **D.** $y=x^3+3x^2-2x+3$

Câu 32. Tìm mô đun của số phức $z=-3+4i$?

A. 1 **B.** 5 **C.** 25 **D.** 7

Câu 33. Véc tơ nào sau đây là một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng $2x-y-5=0$

A. $(0;2;-1)$ **B.** $(2;-1;0)$ **C.** $(2;-1;-5)$ **D.** $(2;0;-1)$

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$ cho tam giác ABC có các đỉnh $A(1;2;5)$, $B(-2;4;3)$, $C(-5;-3;-2)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của ABC?

A. $G(-2;1;2)$ **B.** $G(-6;3;6)$ **C.** $G(2;-1;-2)$ **D.** $G(6;-3;-6)$

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, lập phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(2;1;-1)$ và vuông góc với đường thẳng $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{-3}$?

A. $x-2y+3z-3=0$ **B.** $2x+y-3z-8=0$

C. $2x+y-3z+8=0$ **D.** $x-2y+3z+3=0$

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng (P): $x+2y-z-2=0$; (Q): $2x-y+3z-4=0$. Giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) là đường thẳng có phương trình

A. $\begin{cases}x=2+5t\\y=5t\\z=-5t\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=2+5t\\y=-5t\\z=1-5t\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=1+t\\y=1-t\\z=1-t\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=1+t\\y=1-t\\z=1+t\end{cases}$

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(1;-1;1)$, $B(-1;-2;3)$, $C(3;3;5)$ và mặt cầu (S) có tâm $I(-1;-\frac{1}{2};6)$, bán kính $R=1$. Gọi M là điểm thuộc mặt cầu (S), N là điểm thỏa mãn NA,NB,NC hợp với mặt phẳng (ABC) các góc bằng nhau. Tìm giá trị nhỏ nhất của MN.

A. 4 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 2

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ biết: $\int_1^e \frac{f(2\ln x)}{x}dx=6$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\sin x dx=8$. Giá trị của $\int_1^2 (f(x)+2)dx$ bằng bao nhiêu?

A. 16 **B.** 0 **C.** 22 **D.** 6

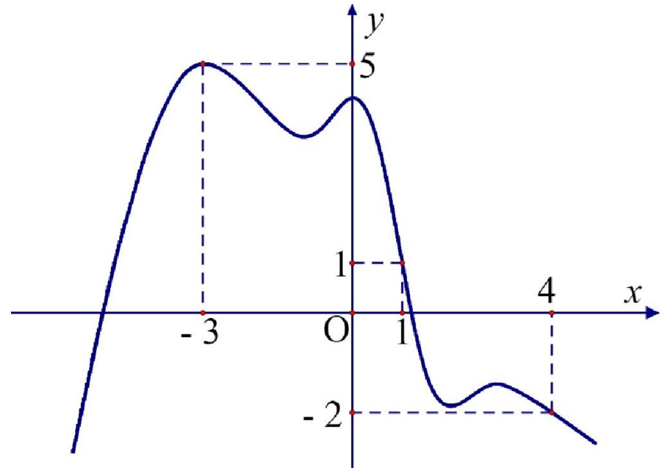
Câu 39. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-i|=3$ và $|z-5-6i|=|z+7+10i|$?

A. 4 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Câu 40. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$ và chiều cao bằng $2a$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD).

A. $\frac{4a}{3}$ **B.** $\frac{2a}{3}$ **C.** $\frac{2a}{\sqrt{5}}$ **D.** $\frac{4a}{\sqrt{5}}$

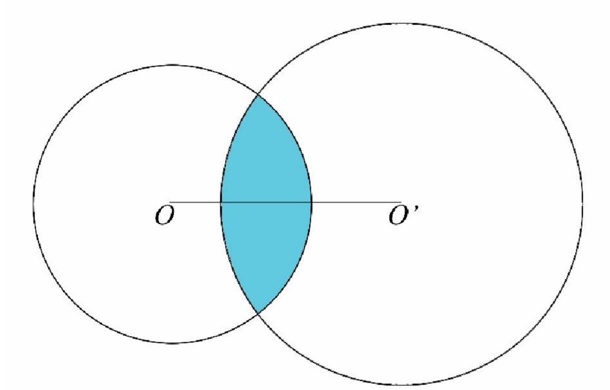
Câu 41. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị của đạo hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f(x)+\frac{(-x+2)^2}{2}$ trên $[-3;4]$?



A. $f(1)+\frac{1}{2}$ **B.** $f(-3)+\frac{25}{2}$

C. $f(0)+2$ **D.** $f(4)+2$

Câu 42. Người ta xây một sân khấu với sân có dạng của hai hình tròn giao nhau (tham khảo hình vẽ). Bán kính của hai hình tròn là $30m$ và $40m$. Khoảng cách giữa hai tâm của hai hình tròn là $50m$. Chi phí làm mỗi mét vuông phần giao nhau của hai hình tròn là 50 nghìn đồng và chi phí làm mỗi mét vuông phần còn lại là 20 nghìn đồng. Hỏi số tiền làm mặt sân khấu gần với số nào nhất trong các số dưới đây?



A. 235 triệu **B.** 196 triệu

C. 164 triệu **D.** 177 triệu

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, $AC=2a$, $BD=2\sqrt{3}a$, $SO\perp(ABCD)$. Biết khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$ theo a.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(2;3;4)$ và đi qua điểm $M(1;1;2)$ có phương trình là

A. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9$ **B.** $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=3$

C. $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=9$ **D.** $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=3$

Câu 45. Có bao nhiêu số bộ số $(x;y)$ trong đó $x;y$ nguyên dương, không vượt quá 2021 và thỏa mãn bất phương trình: $(-xy+3x-2y+6)\sqrt{e^x-10}>(2xy+5x+2y+5)\log_3\left(\frac{3y}{y+6}\right)$

A. 8076 **B.** 4038 **C.** 2019 **D.** 6057

Câu 46. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a trong khoảng $(0;2021)$ sao cho phương trình $2^{2^x}=a(x+\log_2 a)$ có nghiệm $x\in[3;+\infty)$.

A. 1987 **B.** 1993 **C.** 1989 **D.** 1991

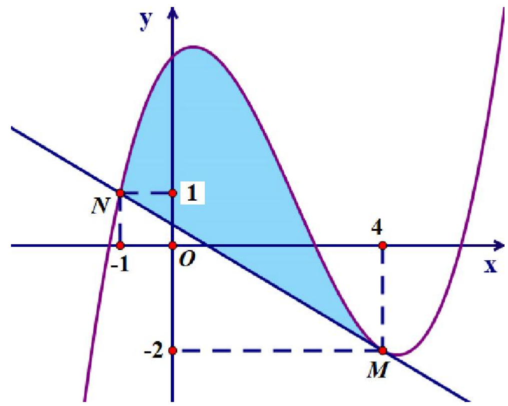
Câu 47. Cho số phức z thỏa mãn $|z-1-i|=10$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2|z-5-4i|+|z-9-5i|$

A. $8\sqrt{2}$ **B.** $8\sqrt{3}$ **C.** $7\sqrt{3}$ **D.** $7\sqrt{2}$

Câu 48. Cho mặt cầu $(S):\ (x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=3$ và đường thẳng $\Delta:\ \dfrac{x+4}{6}=\dfrac{y-6}{-2}=\dfrac{z-2}{-1}$. Từ điểm $M\in\Delta$ kẻ các tiếp tuyến đến mặt cầu (S) và gọi (C) là tập hợp các tiếp điểm. Biết khi diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) đạt giá trị nhỏ nhất thì (C) thuộc mặt phẳng $x+by+cz+d=0$. Tìm $b+c+d$?

A. 4 **B.** -2 **C.** 2 **D.** -4

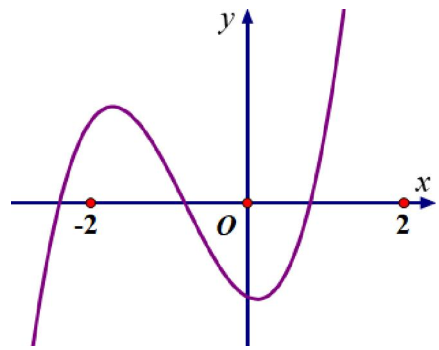
Câu 49. Cho $y=f(x)$ là một hàm số bậc 3 có đồ thị (C) như hình vẽ. Tiếp tuyến Δ của (C) tại $M(4;-2)$ cắt đồ thị hàm số tại điểm thứ hai $N(-1;1)$. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và tiếp tuyến Δ (Phần tô đậm) bằng $\dfrac{125}{12}$. Tính $\int_1^3 f(x)dx$



A. $\dfrac{10}{3}$ **B.** $\dfrac{14}{3}$

C. $\dfrac{94}{15}$ **D.** $\dfrac{46}{15}$

Câu 50. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và số thực k thỏa mãn $f(2)+k>0$. Giả sử đạo hàm $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ và hàm số $y=\left|f(x)+k\right|$ có 7 điểm cực trị và. Phương trình $f(-x^3+3x)+k=0$ có ít nhất bao nhiêu nghiệm trong khoảng $(-2;2)$.



A. 5 **B.** 6

C. 3 **D.** 4

------------- **HẾT** -------------

BẢNG ĐÁP ÁN

1.D	2.B	3.C	4.D	5.B	6.A	7.A	8.A	9.D	10.D
11.C	12.B	13.A	14.D	15.C	16.D	17.B	18.A	19.A	20.C
21.D	22.C	23.A	24.B	25.B	26.D	27.B	28.A	29.C	30.C
31.C	32.B	33.B	34.A	35.B	36.C	37.D	38.D	39.B	40.A
41.A	42.C	43.A	44.C	45.B	46.C	47.A	48.B	49.D	50.B

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Đồ thị hàm số $y=f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định: $x\neq 1; x\neq 2$

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2-3x+2}=0\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang: $y=0$.

Ta có $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{x^2-3x+2}=-\infty;\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{x^2-3x+2}=+\infty\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng: $x=1$.

Ta có $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{1}{x^2-3x+2}=+\infty;\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{1}{x^2-3x+2}=-\infty\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng: $x=2$.

Vậy đồ thị hàm số có tất cả 3 đường tiệm cận.

Câu 2. Nghiệm của phương trình $\log_3(2x+1)=3$ là

A. $x=26$. **B.** $x=13$. **C.** $x=4$. **D.** $x=8$.

Lời giải

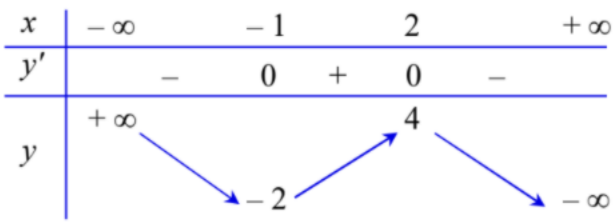
Chọn B

Điều kiện xác định $x>\dfrac{-1}{2}$.

$\log_3(2x+1)=3\Leftrightarrow 2x+1=27\Leftrightarrow x=13(tm)$.

Vậy phương trình có nghiệm $x=13$.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Hàm số đồng biến trên khoảng nào?



A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-1;2)$. **D.** $(-2;4)$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;2)$.

Câu 4. Cho $a>0; a\neq1$, tính $\log_a(4a^3)$.

A. $\dfrac{1}{3}-\log_a4$. **B.** $3-2\log_a2$. **C.** $\dfrac{1}{3}+\log_a4$. **D.** $3+2\log_a2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_a(4a^3)=\log_a(a^3)+\log_a(4)=3+\log_a(2^2)=3+2\log_a(2)$.

Câu 5. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f\quad x\quad=\mathrm{e}^{3x}$.

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{e}^{3x+1}}{3x+1} + C$. **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x} + C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{3x} + C$. **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 3\mathrm{e}^{3x} + C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x} + C.$

Câu 6. Cho $a > 0$, tính $\sqrt[3]{a.\sqrt{a}}$.

A. $a^{\frac{1}{2}}$. **B.** $a^{\frac{3}{2}}$. **C.** $a^{\frac{1}{6}}$. **D.** $a^{\frac{2}{3}}$.

Lời giải

Chọn A

Với $a > 0$, ta có $\sqrt[3]{a.\sqrt{a}} = \left(a.a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}}.$

Câu 7. Đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 2$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm?

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 2$ và trục hoành là

$$x^4 - 3x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{array}\right..$$

Mỗi giá trị x tương ứng với một giao điểm của đồ thị hàm số đã cho với trục hoành.
Vậy đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại 4 điểm.

Câu 8. Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_5 x$, với $x > 0$.

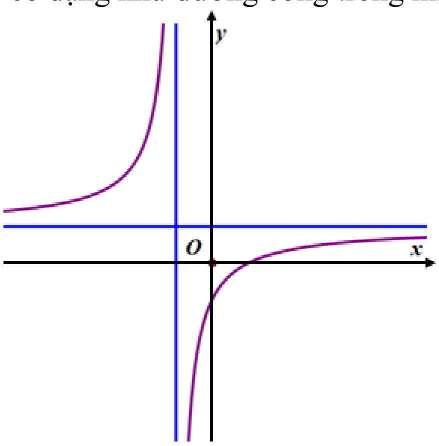
A. $y = \dfrac{1}{x.\ln 5}$. **B.** $y = \dfrac{1}{x}$. **C.** $y = \dfrac{\ln 5}{x}$. **D.** $y = \dfrac{1}{\log_5 x}$.

Lời giải

Chọn A

Với $x > 0$, ta có $y' = \left(\log_5 x\right)' = \dfrac{1}{x\ln 5}$.

Câu 9. Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



A. $y = \dfrac{-x-1}{x-1}$. **B.** $y = \dfrac{x+1}{x-1}$. **C.** $y = \dfrac{-x+1}{x+1}$. **D.** $y = \dfrac{x-1}{x+1}$.

Lời giải

Chọn D

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = a > 0$, tiệm cận đứng là $x = b < 0$.

Xét đáp án A, đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = -1$ nên loại.

Xét đáp án B, đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$ nên loại.
Xét đáp án C, đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=-1$ nên loại.
Xét đáp án D, đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$, tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-1$ nên chọn.

Câu 10. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu và số hạng thứ tư lần lượt là 2; 14. Tìm công sai d ?

A. $d=-4$. **B.** $d=3$. **C.** $d=-3$. **D.** $d=4$.

Lời giải

Chọn D

$u_4=u_1+3d \Rightarrow 14=2+3d \Leftrightarrow d=4$.

Câu 11. Có bao nhiêu số có 3 chữ số khác nhau được lập từ các số 1; 2; 3; 4; 5 ?

A. 3^5. **B.** $3!$. **C.** A_5^3. **D.** C_5^3.

Lời giải

Chọn C

Mỗi số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau là một chỉnh hợp chập 3 của 5.
Vậy có A_5^3 số.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm điểm cực tiểu của hàm số?

x	$-\infty$		-2		-1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	1	↗	6	↘	$-\infty$

A. $x=2$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-2$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên, điểm cực tiểu của hàm số là $x=-1$.

Câu 13. Tập nghiệm của phương trình $2^{x^2+1}=4$ là

A. $S=\{\pm 1\}$. **B.** $S=\{0\}$. **C.** $S=\{\pm\sqrt{3}\}$. **D.** $S=\{\pm\sqrt{2}\}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $2^{x^2+1}=4 \Leftrightarrow 2^{x^2+1}=2^2 \Leftrightarrow x^2+1=2 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$.
Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\{\pm 1\}$

Câu 14. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=4x^3-2x+1$?

A. $\int f(x)dx=x^4-x^2+C$. **B.** $\int f(x)dx=4x^4-2x^2+x+C$.

C. $\int f(x)dx=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2+x+C$. **D.** $\int f(x)dx=x^4-x^2+x+C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int f(x)dx=\int\left(4x^3-2x+1\right)dx=4.\frac{x^4}{4}-2.\frac{x^2}{2}+x+C=x^4-x^2+x+C$.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2(x-2)^3(x-3)^4$. Hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=x(x-1)^2(x-2)^3(x-3)^4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	-	0	-	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	

Vậy hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị.

Câu 16. Tính diện tích xung quanh của một hình nón có bán kính đáy $r=3$ và chiều cao $h=4$.

A. 21π. **B.** 12π. **C.** 24π. **D.** 15π.

Lời giải

Chọn D

Ta có $l=\sqrt{r^2+h^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

Diện tích xung quanh của hình nón: $S_{xq}=\pi rl=\pi.3.5=15\pi$.

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(3f(x)+2\sin x\right)\mathrm{d}x=8$. Tính $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(2x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{4}{3}$. **B.** 2. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$$8=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(3f(x)+2\sin x\right)\mathrm{d}x=3\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x=3\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x-\left(2\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=3\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x+2$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x=2.$$

Xét $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(2x)\mathrm{d}x$. Đặt $t=2x \Rightarrow \mathrm{d}t=2\mathrm{d}x$.

Đổi cận $\begin{cases} x=\frac{\pi}{4} \Rightarrow t=\frac{\pi}{2} \\ x=0 \Rightarrow t=0 \end{cases}$. Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(2x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x=2$.

Câu 18. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x+\sqrt{9-x^2}$. Tính $M+m$?

A. $3\sqrt{2}-3$. **B.** $3\sqrt{2}+3$. **C.** 0. **D.** $3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D=\left[-3;3\right]$.

Ta có $y'=1-\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}=\frac{\sqrt{9-x^2}-x}{\sqrt{9-x^2}}, \forall x\in\left(-3;3\right)$.

$y'=0 \Leftrightarrow \sqrt{9-x^2}=x \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 9-x^2=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{3}{\sqrt{2}}$

Lại có $y(-3)=-3; y(3)=3; y\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)=3\sqrt{2}$. Do đó $m=-3; M=3\sqrt{2} \Rightarrow M+m=3\sqrt{2}-3$.

Câu 19. Chọn ngẫu nhiên ba số trong 40 số nguyên dương đầu tiên. Tính xác suất để ba số được chọn có tổng chia hết cho 3.

A. $\frac{127}{380}$. **B.** $\frac{9}{95}$. **C.** $\frac{91}{380}$. **D.** $\frac{31}{95}$.

Lời giải

Chọn A

Không gian mẫu $n(\Omega)=C_{40}^3=9880$.

Gọi A là biến cố chọn được 3 số có tổng chia hết cho 3, ta tính số phần tử của A

Trong 40 số nguyên dương đầu tiên có 13 số chia hết cho 3; 14 số chia 3 dư 1 và 13 số chia 3 dư 2.

Giả sử chọn được 3 số là $a,b,c \Rightarrow (a+b+c)$ chia hết cho 3.

TH1: Cả ba số a,b,c đều chia hết cho $3 \Rightarrow$ có $C_{13}^3=286$ số

TH2: Cả ba số a,b,c đều chia cho 3 dư 1 $\Rightarrow$ có $C_{14}^3=364$ số

TH3: Cả ba số a,b,c đều chia cho 3 dư 2 $\Rightarrow$ có $C_{13}^3=286$ số

TH4: Trong 3 số a,b,c có 1 số chia hết cho 3, 1 số chia 3 dư 1, 1 số chia 3 dư 2 $\Rightarrow$ có $13.13.14=2366$ số.

Suy ra $n(A)=286+286+364+2366=3302$.

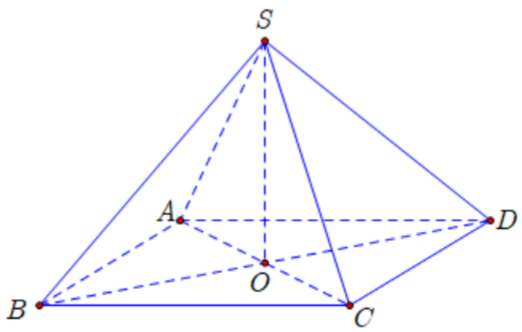
Suy ra $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{3302}{9880}=\frac{127}{380}$.

Câu 20. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$?

A. $4a^3\sqrt{3}$. **B.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}a^3$. **C.** $\frac{4}{3}a^3$. **D.** $4a^3$.

Lời giải

Chọn C



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

Ta có $SO^2=SA^2-OA^2=\left(a\sqrt{3}\right)^2-\left(\frac{2a\sqrt{2}}{2}\right)^2=a^2 \Rightarrow SO=a$.

Diện tích đáy $S_{ABCD}=(2a)^2=4a^2$.

Vậy $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}4a^2.a=\frac{4}{3}a^3$.

Câu 21. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn: $z-3+i=1-2i$ có tọa độ là

A. $3;-4$. **B.** $-3;4$. **C.** $-4;3$. **D.** $4;-3$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $z-3+i=1-2i \Leftrightarrow z=1-2i+3-i \Leftrightarrow z=4-3i$.

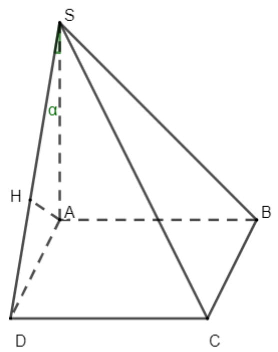
Vậy điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $z-3+i=1-2i$ trên mặt phẳng tọa độ là điểm có tọa độ $(4;-3)$.

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA\perp(ABCD)$, $SA=a\sqrt{3}$. Gọi α là góc giữa SA và mặt phẳng (SCD). Tính $\tan\alpha$.

A. 1. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có:

$$\left.\begin{matrix} CD\perp AD\subset(SAD) \\ CD\perp SA\subset(SAD) \\ AD\cap SA=\{A\} \end{matrix}\right\}\Rightarrow CD\perp(SAD)\Rightarrow(SCD)\perp(SAD)$$ theo giao tuyến SD.

Trên (SAD), kẻ $AH\perp SD, H\in SD \Rightarrow AH\perp(SCD)$

$\Rightarrow$Hình chiếu vuông góc của A lên (SCD) là H. (1)

Mặt khác, $S\in(SCD)\Rightarrow$Hình chiếu vuông góc của S lên (SCD) là S. (2)

Từ $(1),(2)$ suy ra SH là hình chiếu vuông góc của SA lên (SCD).

$\Rightarrow(SA;(SCD))=(SA;SH)=(SA;SD)=\widehat{DSA}=\alpha$ (vì ΔSAD vuông tại A, $H\in SD$)

Xét ΔSAD vuông tại A, ta có $\tan\alpha=\frac{AD}{SA}=\frac{a}{a\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 23. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\tan\left(\frac{\pi}{9}\right)\right)^{x^2-3x}\geq\left(\cot\left(\frac{\pi}{9}\right)\right)^{3-x}$ là

A. $S=[1;3]$. **B.** $S=(-\infty;1]\cup[3;+\infty)$.

C. $S=[-1;3]$. **D.** $S=(-\infty;-1]\cup[3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\left(\tan\left(\frac{\pi}{9}\right)\right)^{x^2-3x}\geq\left(\cot\left(\frac{\pi}{9}\right)\right)^{3-x}\Leftrightarrow\left(\tan\left(\frac{\pi}{9}\right)\right)^{x^2-3x}\geq\left(\tan\left(\frac{\pi}{9}\right)\right)^{x-3}$ $(*)$

Vì $0<\tan\left(\frac{\pi}{9}\right)<1$ nên $(*)\Leftrightarrow x^2-3x\leq x-3\Leftrightarrow x^2-4x+3\leq 0\Leftrightarrow 1\leq x\leq 3$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=[1;3]$.

Câu 24. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x=5$; $\int_{-1}^{4}f(x)\mathrm{d}x=8$. Tính $\int_{2}^{4}(f(x)+3)\mathrm{d}x$.

A. 6. **B.** 9. **C.** 19. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$\int_2^4 \left[f(x)+3\right]dx = \int_2^4 f(x)dx + \int_2^4 3dx \qquad (*)$$

$$\int_{-1}^4 f(x)dx = \int_{-1}^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx \Leftrightarrow 8 = 5 + \int_2^4 f(x)dx \Leftrightarrow \int_2^4 f(x)dx = 3\,;\int_2^4 3dx = 3x\big|_2^4 = 12-6=6.$$

Thay vào $(*)$ ta được: $\int_2^4 \left(f(x)+3\right)dx = 3+6=9$.

Câu 25. Tìm số phức z biết: $(1-i)z+3-2i=6-3i$

A. $3-2i$. **B.** $2+i$. **C.** $7+2i$. **D.** $2-4i$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $(1-i)z+3-2i=6-3i \Leftrightarrow (1-i)z=3-i \Leftrightarrow z=\dfrac{3-i}{1-i}=2+i$.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-4x-2y+6z-2=0$. Tìm tọa độ tâm của mặt cầu (S)?

A. $(-4;-2;6)$. **B.** $(-2;-1;3)$. **C.** $(4;2;-6)$. **D.** $(2;1;-3)$.

Lời giải

Chọn D

Từ phương trình mặt cầu ta có tâm $I(2;1;-3)$ và bán kính $R=\sqrt{2^2+1^2+(-3)^2+2}=4$.

Câu 27. Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$?

A. $-\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** -1.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = \dfrac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \dfrac{1}{2}\left(\sin\dfrac{\pi}{2}-\sin 0\right)=\dfrac{1}{2}$.

Câu 28. Cho số phức $z=1+3i$. Tìm môđun của số phức $w=(3-2i)(z+1)$.

A. 13. **B.** $\sqrt{13}$. **C.** 10. **D.** 130.

Lời giải

Chọn A

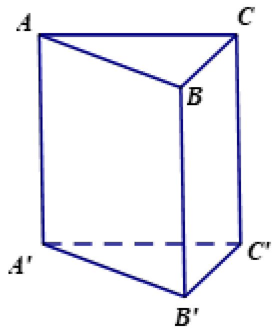
Ta có: $|w|=|(3-2i)(z+1)|=|3-2i||1+3i+1|=\sqrt{3^2+(-2)^2}.\sqrt{2^2+3^2}=13$.

Câu 29. Tính thể tích khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng 4.

A. 64. **B.** $\dfrac{64}{3}$. **C.** $16\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



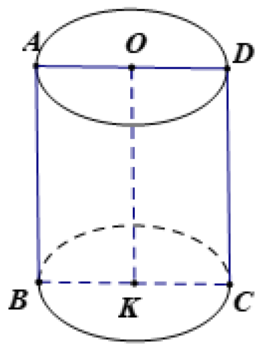
Thể tích khối lăng trụ là $V = AA'.S_{ABC} = 4.\dfrac{4^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}.$

Câu 30. Tính thể tích của khối trụ biết thiết diện qua trục là một hình vuông có cạnh bằng 8.

A. $\dfrac{128\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{512\pi}{3}$. **C.** 128π. **D.** 512π.

Lời giải

Chọn C



Ta có khối trụ có chiều cao $h = 8,$ bán kính $R = 4.$

Thể tích khối trụ là $V = \pi R^2 h = 128\pi.$

Câu 31. Hàm số nào sau đây không có cực trị

A. $y = x^2 + 4x + 5$. **B.** $y = x^4 + 4x^2 + 2$.

C. $y = x^3 - 2x^2 + 3x + 1$. **D.** $y = x^3 + 3x^2 - 2x + 3$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ có $y' = 3x^2 - 4x + 3,\ \Delta_{y'} = 16 - 36 = -20 < 0.$ Suy ra hàm số không có cực trị.

Câu 32. Tìm mô đun của số phức $z = -3 + 4i$?

A. 1 **B.** 5. **C.** 25. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Ta có $|z| = \sqrt{\left(-3\right)^2 + 4^2} = 5.$

Câu 33. Véc tơ nào sau đây là một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng $2x - y - 5 = 0$

A. $(0;2;-1)$. **B.** $(2;-1;0)$. **C.** $(2;-1;-5)$. **D.** $(2;0;-1)$.

Lời giải

Chọn B

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$ cho tam giác ABC có các đỉnh $A(1;2;5)$, $B(-2;4;3)$, $C(-5;-3;-2)$. Tìm tọa độ trong tâm G của tam giác ABC?

A. $G(-2;1;2)$. **B.** $G(-6;3;6)$. **C.** $G(2;-1;-2)$. **D.** $G(6;-3;-6)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = -2 \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = 1 \\ z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3} = 2 \end{cases}$.

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, lập phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(2;1;-1)$ và vuông góc với đường thẳng $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-3}{-3}$?

A. $x - 2y + 3z - 3 = 0$. **B.** $2x + y - 3z - 8 = 0$.

C. $2x + y - 3z + 8 = 0$. **D.** $x - 2y + 3z + 3 = 0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $(P) \perp d : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-3}{-3} \Rightarrow \overrightarrow{n_{(P)}} = \overrightarrow{u_d} = (2;1;-3)$.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(2;1;-1)$ và nhận $\overrightarrow{n_{(P)}} = (2;1;-3)$ làm VTPT là:

$2(x-2) + 1(y-1) - 3(z+1) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 3z - 8 = 0$

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(P): x + 2y - z - 2 = 0$; $(Q): 2x - y + 3z - 4 = 0$. Giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) là đường thẳng có phương trình

A. $\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 5t \\ z = -5t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = -5t \\ z = 1 - 5t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\overrightarrow{n_{(P)}} = (1;2;-1)$, $\overrightarrow{n_{(Q)}} = (2;-1;3)$.

Gọi $d = (P) \cap (Q) \Rightarrow \overrightarrow{u_d} = \left[\overrightarrow{n_{(P)}}; \overrightarrow{n_{(Q)}}\right] = (5;-5;-5)$.

Suy ra : d có VTCP là $\overrightarrow{u_d} = (5;-5;-5)$ hoặc $\overrightarrow{u_d} = (1;-1;-1)$ nên loại hai phương án A và D

Xét phương án B, ta có điểm $M(2;0;1) \notin (P)$ nên loại phương án B.

Xét phương án C, ta có điểm $N(1;1;1) \in (P)$, $N(1;1;1) \in (Q) \Rightarrow N(1;1;1) \in d$ nên đáp án là C.

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(1;-1;1)$, $B(-1;-2;3)$, $C(3;3;5)$ và mặt cầu (S) có tâm $I(-1;-\frac{1}{2};6)$, bán kính $R = 1$. Gọi M là điểm thuộc mặt cầu (S), N là điểm thỏa mãn NA, NB, NC hợp với mặt phẳng (ABC) các góc bằng nhau. Tìm giá trị nhỏ nhất của MN.

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Gọi H là hình chiếu của N trên mặt phẳng (ABC).

Vì NA, NB, NC hợp với mặt phẳng (ABC) các góc bằng nhau nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Mà $\overrightarrow{AB} = (-2;-1;2)$, $\overrightarrow{AC} = (2;4;4) \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$.

Suy ra tam giác ABC vuông tại A và có H là trung điểm $BC \Rightarrow H\left(1;\dfrac{1}{2};4\right)$.

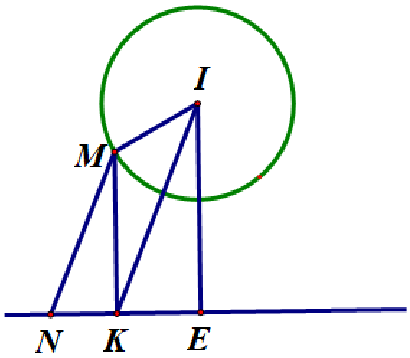
Ta có $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (-12;12;-6)$.

Vì $NH \perp (ABC)$ nên đường thẳng NH có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ cùng phương với vectơ $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]$.

Phương trình đường thẳng NH đi qua điểm $H\left(1;\frac{1}{2};4\right)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2;-2;1)$ là

$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = \frac{1}{2} - 2t \\ z = 4+t \end{cases}.$$

$\Rightarrow d(I, NH) = \dfrac{\left|\left[\vec{u}, \overrightarrow{HI}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|} = 3 > R \Rightarrow$ đường thẳng NH không cắt mặt cầu (S).



Gọi K, E lần lượt là hình chiếu của M, I trên đường thẳng NH.

Với $M \in (I;R)$ và $N \in NH$, ta có $MN \geq MK \geq IK - IM \geq IE - R \Rightarrow MN \geq d(I, NH) - R = 2$

Vậy giá trị nhỏ nhất của MN bằng 2.

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ biết: $\int_1^e \frac{f(2\ln x)}{x}\mathrm{d}x = 6$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\sin x\mathrm{d}x = 8$. Giá trị của $\int_1^2 (f(x)+2)\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?

A. 16. **B.** 0. **C.** 22. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

Xét $\int_1^e \frac{f(2\ln x)}{x}\mathrm{d}x = 6$

Đặt $t = 2\ln x \Rightarrow \frac{1}{2}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\mathrm{d}x \Rightarrow \int_1^e \frac{f(2\ln x)}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t = 6 \Rightarrow \int_0^2 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 12 \quad (1)$.

Xét $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\sin x\mathrm{d}x = 8$

Đặt $u = \cos x \Rightarrow \mathrm{d}u = -\sin x\mathrm{d}x \Rightarrow -\int_1^0 f(u)\mathrm{d}u = 8 \Leftrightarrow \int_0^1 f(u)\mathrm{d}u = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 8 \quad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 4$.

Vậy $\int_1^2 (f(x)+2)\mathrm{d}x = \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^2 2\mathrm{d}x = 4+2 = 6$.

Câu 39. Có bao nhiêu số phức thỏa mãn $|z-i| = 3$ và $|z-5-6i| = |z+7+10i|$

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Xét $z=a+bi; a,b\in\mathbb{R}$ ta có $|z-i|=3\Rightarrow a^2+(b-1)^2=9$, tập hợp điểm biểu diễn là đường tròn có tâm $(0;1), R=3$.

Xét $|z-5-6i|=|z+7+10i|\Rightarrow (a-5)^2+(b-6)^2=(a+7)^2+(b+10)^2$

$\Rightarrow -10a-12b+61=14a+20b+149 \Leftrightarrow 24a+32b=-88\Rightarrow 3a+4b=-11$.

Tập hợp điểm biểu diễn là đường thẳng $\Delta: 3a+4b=-11$.

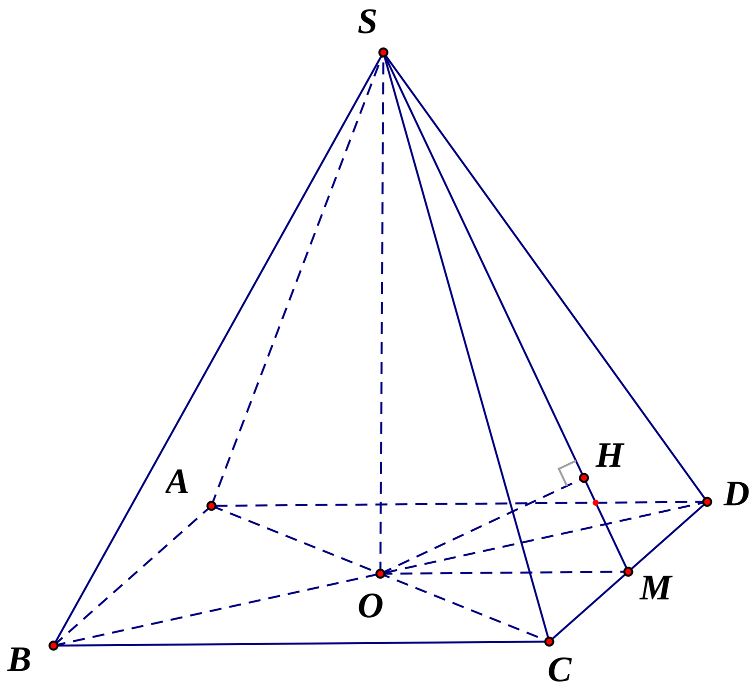
Dễ thấy đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau vì $d(I,\Delta)=\dfrac{|4.1+11|}{\sqrt{25}}=\dfrac{15}{5}=3=R$.

Kết luận có đúng 1 số phức thỏa mãn.

Câu 40. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$ và chiều cao bằng $2a$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD)

A. $\dfrac{4a}{3}$. **B.** $\dfrac{2a}{3}$. **C.** $\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{4a}{\sqrt{5}}$.

Lời giải



Chọn A

Gọi O là tâm của đáy $ABCD$ vì $S.ABCD$ là chóp đều nên $SO\perp(ABCD)$

Gọi M là trung điểm của CD, ta có:

$\begin{cases} OM\perp CD \\ SO\perp CD\end{cases}\Rightarrow CD\perp(SOM)\Rightarrow(SCD)\perp(SOM)$ theo giao tuyến SM

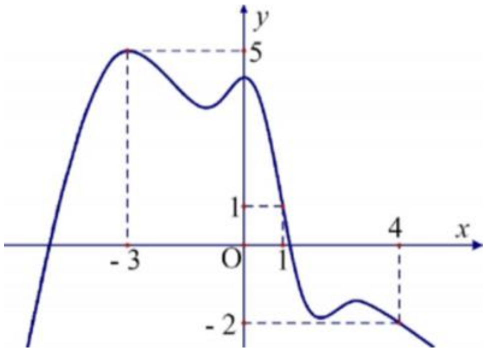
Kẻ $OH\perp SM\Rightarrow OH\perp(SCD)\Rightarrow d(O,(SCD))=OH$

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{SO^2}+\frac{1}{OM^2}=\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{9}{4a^2}$$

$\Rightarrow OH=\dfrac{2a}{3}$

$d(A,(SCD))=2d(O,(SCD))=\dfrac{4a}{3}$

Câu 41. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị của đạo hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f(x)+\dfrac{(-x+2)^2}{2}$ trên $[-3;4]$?



A. $f(1)+\dfrac{1}{2}$. **B.** $f(-3)+\dfrac{25}{2}$. **C.** $f(0)+2$. **D.** $f(4)+2$.

Lời giải

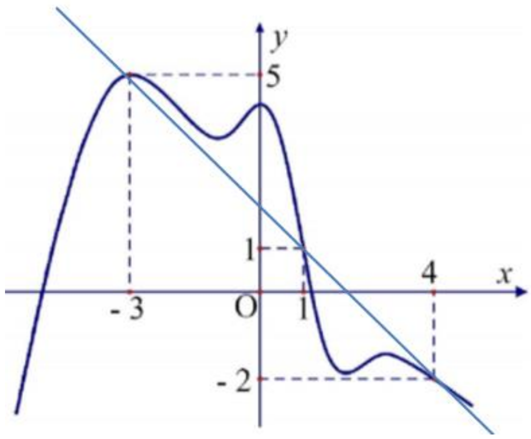
Chọn A

Xét hàm số $g(x)=f(x)+\dfrac{(-x+2)^2}{2}$ trên $[-3;4]$.

$g'(x)=f'(x)+x-2$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=-x+2$

Ta có hình vẽ:



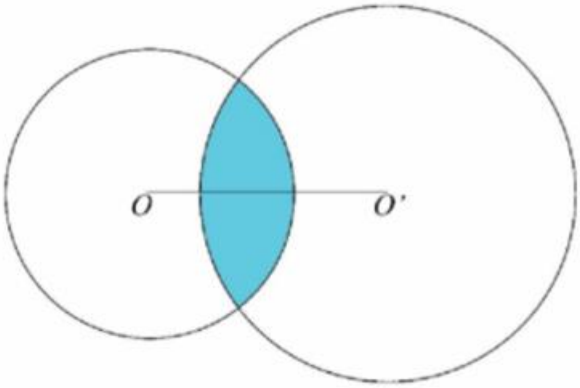
Nhìn vào đồ thị ta thấy $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=-x+2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \\ x=4 \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên:

x	-3		1		4
y'		$+$	0	$-$	
y	$f(-3)+\frac{25}{2}$	$\nearrow$	$f(1)+\frac{1}{2}$	$\searrow$	$f(4)+2$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f(x)+\dfrac{(-x+2)^2}{2}$ trên $[-3;4]$ là $f(1)+\dfrac{1}{2}$

Câu 42. Người ta xây một sân khấu với sân có dạng của hai hình tròn giao nhau (tham khảo hình vẽ). Bán kính của hai hình tròn là $30\,m$ và $40\,m$. Khoảng cách giữa hai tâm của hai hình tròn là $50\,m$. Chi phí làm mỗi mét vuông phần giao nhau của hai hình tròn là 50 nghìn đồng và chi phí làm mỗi mét vuông phần còn lại là 20 nghìn đồng. Hỏi số tiền làm mặt sân khấu gần với số nào nhất trong các số dưới đây?

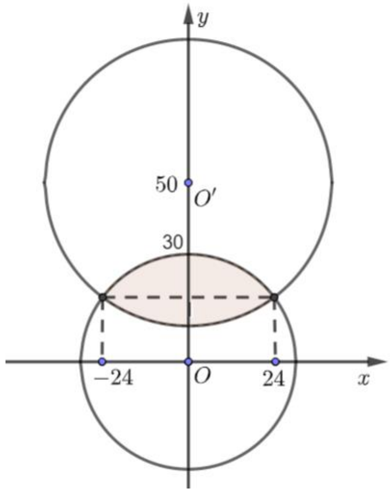


A. 235 triệu. **B.** 196 triệu. **C.** 164 triệu. **D.** 177 triệu.

Lời giải

Chọn C

Tính diện tích phần giao nhau bằng tích phân



Đặt hệ trục tọa độ (Oxy) với đường tròn tâm O trùng với gốc tọa độ. Ta có $O'(0;50)$.

Phương trình đường tròn tâm O bán kính $R=30$ là: $x^2+y^2=30^2 \Rightarrow y=\sqrt{30^2-x^2}\ (y>0)$

Phương trình đường tròn tâm O' bán kính $R=40$ là:

$x^2+(y-50)^2=40^2 \Rightarrow y=-\sqrt{40^2-x^2}+50\ \ (y<50)$

Phương trình hoành độ giao điểm: $\sqrt{30^2-x^2}=-\sqrt{40^2-x^2}+50 \Leftrightarrow x^2=576 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=24 \\ x=-24 \end{array}\right.$

Vậy diện tích phần giao nhau là: $S_1=\int\limits_{-24}^{24}\left(\sqrt{30^2-x^2}+\sqrt{40^2-x^2}-50\right)dx \approx 664{,}167$

Phần diện tích không giao nhau là: $S_2=S_{(O)}+S_{(O')}-2S_1 \approx 6525{,}647\left(m^2\right)$

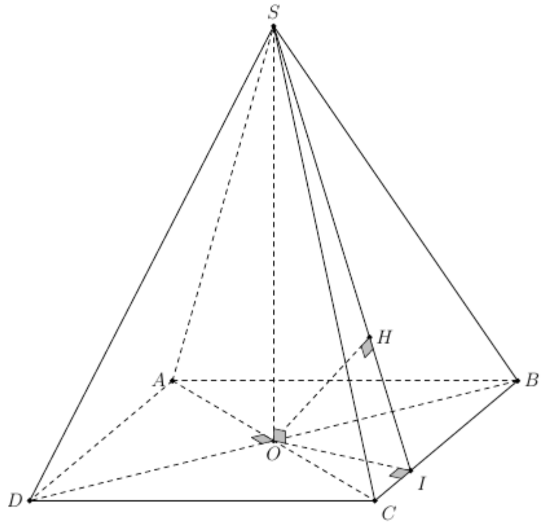
Vậy số tiền cần làm mặt sân khấu là: $S_1.50.10^3+S_2.20.10^3 \approx 163721307{,}4$ đồng. Vậy số tiền này gần nhất với số tiền 164 triệu.

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thoi tâm O, $AC=2a$, $BD=2\sqrt{3}a$, $SO\perp(ABCD)$. Biết khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I, H lần lượt là hình chiếu vuông góc của O cạnh BC và cạnh SI.

Suy ra $BC \perp (SOI) \Rightarrow OH \perp BC \Rightarrow OH \perp (SBC)$.

Vậy $\mathrm{d}(O,(SBC)) = OH = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Trong ΔOBC vuông tại O ta có $OB = \dfrac{BD}{2} = a\sqrt{3}$; $OC = \dfrac{AC}{2} = a$; $BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = 2a$.

Ta có $OI.BC = OB.OC \Leftrightarrow OI = \dfrac{OB.OC}{BC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong ΔSOI vuông tại O ta có

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{SO^2} \Leftrightarrow \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{OI^2} = \frac{16}{3a^2} - \frac{4}{3a^2} = \frac{4}{a^2} \Leftrightarrow SO = \frac{a}{2}.$$

Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V = \dfrac{1}{3}.SO.S_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a}{2}.\dfrac{1}{2}.2a.2\sqrt{3}a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$ (đvtt).

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(2;3;4)$ và đi qua điểm $M(1;1;2)$ có phương trình là

A. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9$. **B.** $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 3$.

C. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 9$. **D.** $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 3$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $IM = \sqrt{(1-2)^2 + (1-3)^2 + (2-4)^2} = 3$.

Mặt cầu (S) có tâm là $I(2;3;4)$ và đi qua điểm $M(1;1;2)$, có bán kính: $R = IM = 3$.

Vậy $(S): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 9$.

Câu 45. Có bao nhiêu bộ số $(x;y)$ trong đó $x;y$ nguyên dương không vượt quá 2021 và thỏa mãn bất phương trình: $(-xy + 3x - 2y + 6)\sqrt{e^x - 10} > (2xy + 5x + 2y + 5)\log_3\left(\dfrac{3y}{y+6}\right)$.

A. 8076. **B.** 4038. **C.** 2019. **D.** 6057.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases} x, y \in \{1;2;3;...;2021\} \\ e^x - 10 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x, y \in \{1;2;3;...;2021\} \\ x \ge \ln 10 \approx 2,3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \{3;4;5;...;2021\} \\ y \in \{1;2;3;...;2021\} \end{cases}$

Bất phương trình đã cho tương đương với :

$\left[-y(x+2)+3(x+2)\right]\sqrt{e^x-10}>\left[x(2y+5)+(2y+5)\right]\log_3\left(\dfrac{3y}{y+6}\right)$

$\Leftrightarrow (x+2)(3-y)\sqrt{e^x-10}>(2y+5)(x+1)\log_3\left(\dfrac{3y}{y+6}\right)$.

TH1: $y\in\{3;4;5;...;2021\}\Rightarrow\begin{cases}VT\le 0\\ VP\ge 0\end{cases}\Rightarrow$ Bất phương trình vô nghiệm.

TH2: $y=1$: Bpt trở thành $2(x+2)\sqrt{e^x-10}>7(x+1)\log_3\dfrac{3}{7}$.

Ta thấy $\begin{cases}VT>0,\forall x\in\{3;4;5;...;2021\}\\ VP<0,\forall x\in\{3;4;5;...;2021\}\end{cases}$ (vì $\log_3\dfrac{3}{7}<0$ và $e^x-10>0,\forall x\ge 3$).

Suy ra các cặp số $(x;1)$ với $x\in\{3;4;5;...;2021\}$ đều thỏa mãn bất phương trình.

TH3: $y=2$: Bpt trở thành $(x+2)\sqrt{e^x-10}>9(x+1)\log_3\dfrac{2}{3}$.

Ta thấy $\begin{cases}VT>0,\forall x\in\{3;4;5;...;2021\}\\ VP<0,\forall x\in\{3;4;5;...;2021\}\end{cases}$ (vì $\log_3\dfrac{2}{3}<0$ và $e^x-10>0,\forall x\ge 3$).

Suy ra các cặp số $(x;2)$ với $x\in\{3;4;5;...;2021\}$ đều thỏa mãn bất phương trình.

Vậy có tất cả là $2\left(\dfrac{2021-3}{1}+1\right)=4038$. Chọn đáp án **B**.

Câu 46. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a trong khoảng $(0;2021)$ sao cho phương trình $2^{2^x}=a(x+\log_2 a)$ có nghiệm $x\in[3;+\infty)$.

A. 1987. **B.** 1993. **C.** 1989. **D.** 1991.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $a(x+\log_2 a)>0\Leftrightarrow x+\log_2 a>0\,(*)$

Phương trình đã cho tương đương với:

$2^x=\log_2\left[a(x+\log_2 a)\right]\Leftrightarrow 2^x=\log_2 a+\log_2(x+\log_2 a)$ (1)

Đặt $t=\log_2(x+\log_2 a)\Rightarrow x+\log_2 a=2^t\Rightarrow\log_2 a=2^t-x$.

Phương trình (1) trở thành $2^x=2^t-x+t\Leftrightarrow 2^x+x=2^t+t$

$\Leftrightarrow x=t$ (do $f(u)=2^u+u$ đồng biến trên $\mathbb{R}$)

$\Leftrightarrow x=\log_2(x+\log_2 a)$

$\Leftrightarrow \log_2 a=2^x-x$.

Xét hàm số $g(x)=2^x-x, x\in[3;+\infty)$

Ta có: $g'(x)=2^x\ln 2-1$. Suy ra: $g'(x)=0\Leftrightarrow x=\log_2\left(\dfrac{1}{\ln 2}\right)\notin[3;+\infty)$.

Bảng biến thiên:

x	3		$+\infty$
g'		$+$	
g	5	$\nearrow$	$+\infty$

Theo BBT phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow\log_2 a\ge 5\Leftrightarrow a\ge 32$.

So điều kiện $a\in\mathbb{Z}$ và $a\in(0;2021)\Rightarrow a\in\{32;33;34;...;2020\}$.

Vậy có $2020-32+1=1989$. Chọn đáp án **C**.

Câu 47. Cho số phức z thỏa mãn $|z-1-i|=10$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2|z-5-4i|+|z-9-5i|$

A. $8\sqrt{2}$ **B.** $8\sqrt{3}$ **C.** $7\sqrt{3}$ **D.** $7\sqrt{2}$

Lời giải

Chọn A

Gọi điểm $M(a;b)$ là điểm biểu diễn số phức z.

Từ $|z-1-i|=10\Rightarrow(a-1)^2+(b-1)^2=100\Leftrightarrow 3.\left[(a-1)^2+(b-1)^2-100\right]=0$ (1)

Do đó $P=2|z-5-4i|+|z-9-5i|=\sqrt{4(a-5)^2+4(b-4)^2}+\sqrt{(a-9)^2+(b-5)^2}$

$$P=\sqrt{4(a-5)^2+4(b-4)^2-3.\left[(a-1)^2+(b-1)^2-100\right]}+\sqrt{(a-9)^2+(b-5)^2}$$

$$=\sqrt{(a-17)^2+(b-13)^2}+\sqrt{(a-9)^2+(b-5)^2}$$

Chọn $A(17;13)$, $B(9;5)$.

Ta có $P=MA+MB\ge AB=\sqrt{(17-9)^2+(13-8)^2}=8\sqrt{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi $MA+MB=AB\Leftrightarrow M$ nằm giữa A và B.

Vậy $min\,P=8\sqrt{2}\Leftrightarrow\overrightarrow{BM}=k\overrightarrow{AM}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{a-9}{a-17}=\dfrac{b-5}{b-13}=k<0\\(a-1)^2+(b-1)^2=100\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\sqrt{46}+3\\b=\sqrt{46}-1\end{cases}$.

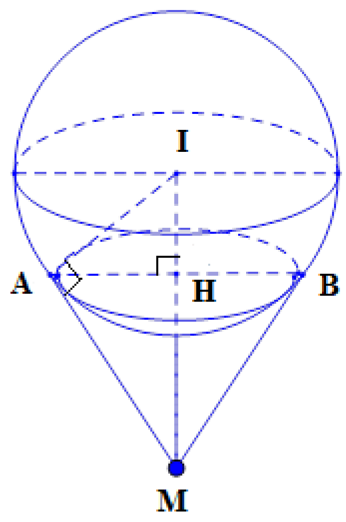
Câu 48. Cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=3$ và đường thẳng $\Delta:\dfrac{x+4}{6}=\dfrac{y-6}{-2}=\dfrac{z-2}{-1}$

Từ điểm $M\in\Delta$ kẻ các tiếp tuyến đến mặt cầu (S) và gọi (C) là tập hợp các tiếp điểm. Biết khi diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) đạt giá trị nhỏ nhất thì (C) thuộc mặt phẳng $x+by+cz+d=0$. Tính $b+c+d$

A. 4. **B.** -2. **C.** 2. **D.** -4.

Lời giải

Chọn B



Từ điểm $M\in\Delta$ kẻ các tiếp tuyến đến mặt cầu (S) nên (C) là một đường tròn.

Gọi AB là đường kính của (C) và H là trung điểm của AB.

Ta có diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) là : $S=\pi.AH^2$.

S đạt min khi AH min.

Ta có $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{AI^2}\Leftrightarrow AH=\frac{AM.R}{\sqrt{AM^2+R^2}}=\frac{R}{\sqrt{1+\frac{R^2}{AM^2}}}$ đạt min khi AM đạt min .

Do đó $IM=\sqrt{R^2+AM^2}$ đạt min. Hay M là hình chiếu của I trên Δ.

Gọi $M\left(6t-4;-2t+6;-t+2\right)$. Ta có $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{u_\Delta}=0\Rightarrow t=1\Rightarrow M\left(2;4;1\right)$.

Khi đó $IM=3.$

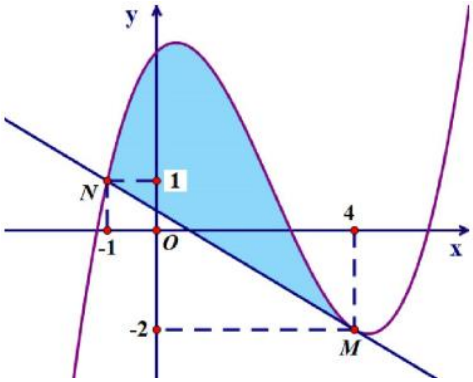
Theo hệ thức lượng ta có : $IA^2=IH.IM\Leftrightarrow \sqrt{3}^2=IH.3\Leftrightarrow IH=1$.

Ta có $\overrightarrow{IH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IM}\Rightarrow H\left(\frac{4}{3};\frac{8}{3};\frac{-1}{3}\right)$

$\left(P\right)$ đi qua H và nhận $\overrightarrow{IM}=\left(1;2;2\right)$ là $vtpt\Rightarrow\left(P\right)=x+2y+2z-6=0$

$\Rightarrow T=b+c+d=2+2-6=-2$.

Câu 49. Cho $y=f(x)$ là một hàm số bậc 3 có đồ thị $\left(C\right)$ như hình vẽ. Tiếp tuyến Δ của $\left(C\right)$ tại $M(4;-2)$ cắt đồ thị hàm số tại điểm thứ hai $N\left(-1;1\right)$. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\left(C\right)$ và tiếp tuyến Δ (Phần tô đậm) bằng $\frac{125}{12}$. Tính $\int_1^3 f\left(x\right)dx$.



A. $\frac{10}{3}$. **B.** $\frac{14}{3}$. **C.** $\frac{94}{15}$. **D.** $\frac{46}{15}$.

Lời giải

Chọn D

Tiếp tuyến của $\left(C\right)$ đi qua $N\left(-1;1\right),M\left(4;-2\right)$ nên ta có phương trình là: $y=\frac{-3}{5}x+\frac{2}{5}$.

Hàm số $y=f(x)$ là một hàm số bậc 3 có đồ thị $\left(C\right)$ và tiếp tuyến Δ của $\left(C\right)$ tại $M(4;-2)$ cắt đồ thị hàm số tại điểm thứ hai $N\left(-1;1\right)$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

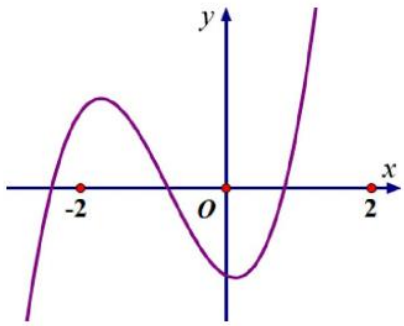
$f\left(x\right)=\frac{-3}{5}x+\frac{2}{5}\Leftrightarrow a\left(x+1\right)\left(x-4\right)^2=0\quad\left(a\neq 0\right)$.

$\Rightarrow\frac{125}{12}=\int_{-1}^{4}a\left(x+1\right)\left(x-4\right)^2dx\Leftrightarrow\frac{125}{12}=a.\frac{625}{12}\Rightarrow a=\frac{1}{5}$.

Khi đó ta được

$\frac{1}{5}\left(x+1\right)\left(x-4\right)^2=f\left(x\right)-\left(\frac{-3}{5}x+\frac{2}{5}\right)\Rightarrow f\left(x\right)=\frac{1}{5}\left(x^3-7x^2+5x+18\right)\Rightarrow\int_1^3 f\left(x\right)dx=\frac{46}{15}$.

Câu 50. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và số thực k thỏa mãn $f\left(2\right)+k>0$. Giả sử đạo hàm $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ và hàm số $y=\left|f\left(x\right)+k\right|$ có 7 điểm cực trị .



Phương trình $f\left(-x^3+3x\right)+k=0$ có ít nhất bao nhiêu nghiệm trong khoảng $\left(-2;2\right)$.

A. 5. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ suy ra đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)+k$ có 3 điểm cực trị a,b,c thỏa mãn $a<-2<b<0<c<2$

Suy ra số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x\right)+k$ là 3.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		a		-2	b		c		2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		0	$-$	0	$+$		
$f\left(x\right)+k$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$			$\searrow$		$\nearrow$		$+\infty$
										$y=0$	

Hàm số $y=\left|f\left(x\right)+k\right|$ có 7 điểm cực trị nên suy ra phương trình $f\left(x\right)+k=0$ có 4 nghiệm phân biệt và $\begin{cases} f\left(a\right)+k<0 \\ f\left(c\right)+k<0 \\ f\left(b\right)+k>0 \end{cases}$.

Khi đó $f\left(x\right)+k=0$ có ít nhất 2 nghiệm phân biệt $x\in\left(-2;2\right)$.

Đặt $u=-x^3+3x$ với $x\in\left(-2;2\right)$.

$$u'=-3x^2+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-1\to u=-2 \\ x=1\to u=2 \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		-1		1		2		$+\infty$
u'		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
u	$+\infty$	$\searrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$

Nếu $x\in\left(-2;2\right)$ thì $u\in\left(-2;2\right)$.

Suy ra $f\left(u\right)+k=0$ có ít nhất 2 nghiệm phân biệt $u\in\left(-2;2\right)$.

Từ Bảng biến thiên ta thấy, với mỗi $u\in\left(-2;2\right)$ thì có 3 nghiệm $x\in\left(-2;2\right)$.

Do vậy, $f\left(u\right)+k=0$ có ít nhất 6 nghiệm phân biệt $x\in\left(-2;2\right)$.

--- HẾT ---