

HỘI TOÁN BẮC NAM



MATH

MỖI THÁNG MỘT CHỦ ĐỀ

THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

BUÔN MA THUỘT, 9/2017

MỞ ĐẦU

Trong chủ đề tháng 9/2017 của Hội Toán Bắc Nam tôi xin trình bày một số vấn đề về thể tích khối đa diện.

Chủ đề được chia làm 4 vấn đề:

Vấn đề 1: Thể tích vật thể.

Vấn đề 2: Thể tích khối chóp.

Vấn đề 3: Thể tích khối lăng trụ.

Vấn đề 4: Tỷ số thể tích.

Chuyên đề chủ yếu xoay quanh các bài toán THPT, hi vọng sẽ giúp ích được phần nào cho bạn đọc, đặc biệt là các bạn học sinh 12.

Sẽ không tránh khỏi thiếu sót khi biên tập, rất mong nhận được sự đóng góp từ quý bạn đọc để chuyên đề ngày một hoàn thiện hơn.

Mọi ý kiến đóng góp, quý bạn đọc vui lòng gửi về địa chỉ

email: phamthithuhien117@gmail.com hoặc gửi trực tiếp cho Hội Toán Bắc Nam.

Buôn Ma Thuột, ngày 15 tháng 9 năm 2017

Mục lục

Mở đầu	2
THỂ TÍCH VẬT THỂ	2
0.1 Khái niệm	2
0.2 Tính chất	2
0.3 Thể tích khối hộp chữ nhật	3
THỂ TÍCH KHỐI CHÓP	4
0.4 Công thức tính thể tích khối chóp	4
0.5 Phương pháp	5
0.5.1 Tính chiều cao	5
0.5.2 Tính diện tích đáy	6
0.6 Ví dụ	7
0.7 Bài tập	12
THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ	16
0.8 Công thức tính thể tích khối lăng trụ	16
0.9 Ví dụ	18
0.10 Bài tập	19
TỈ LỆ THỂ TÍCH	23
0.11 Phương pháp	23
0.12 Ví dụ	24
0.13 Bài tập	25

VẤN ĐỀ 1: THỂ TÍCH VẬT THỂ

0.1 Khái niệm

Thể tích vật thể K là phần mà vật thể đó chiếm chỗ trong không gian.

Thể tích của vật thể K được kí hiệu : V

0.2 Tính chất

V là một số lớn hơn 0 thỏa mãn các tính chất sau:

1. Hai khối đa diện bằng nhau thì thể tích bằng nhau.
2. Thể tích khối lập phương bằng 1 thì $V=1$.
3. Nếu một khối đa diện được phân chia thành các khối đa diện thì thể tích khối ban đầu bằng tổng thể tích các khối đã phân chia.

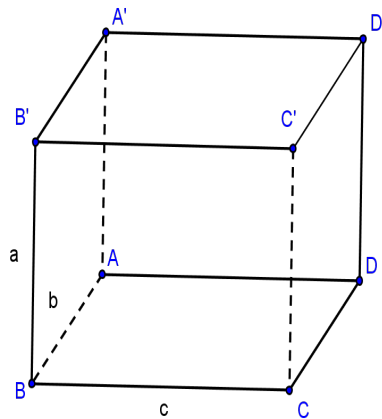
0.3 Thể tích khối hộp chữ nhật

Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ với ba kích thước a, b, c ; thể tích được tính theo công thức:

$$V = abc.$$

Đặc biệt $a = b = c$ thì khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ trở thành hình lập phương. Khi đó:

$$V = a^3.$$



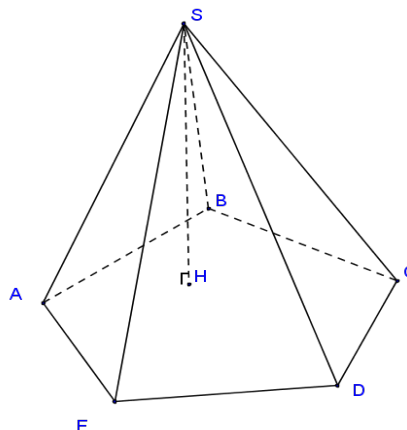
VẤN ĐỀ 2: THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

0.4 Công thức tính thể tích khối chóp

$$V = \frac{1}{3}Bh \quad (1)$$

B là diện tích đáy

h là chiều cao

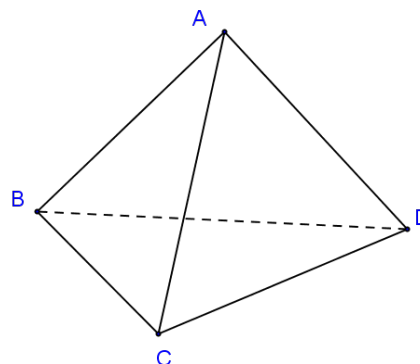


Đối với khối tứ diện $ABCD$

$$V = \frac{1}{6}AB \cdot CD \cdot \sin \alpha \cdot d \quad (2)$$

$\alpha = (\overline{AB}, \overline{CD})$

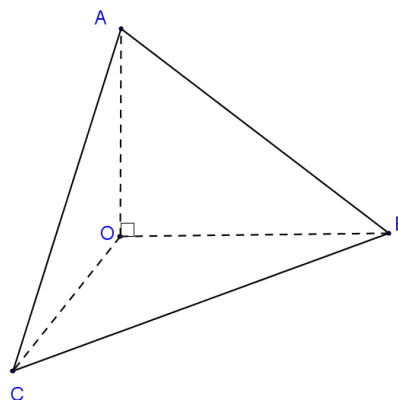
d là khoảng cách $(\overline{AB}, \overline{CD})$



Đặc biệt đối với khối tứ diện vuông

$OABC$ vuông tại O

$$V_{O.ABC} = \frac{1}{6}OA \cdot OB \cdot OC \quad (3)$$



0.5 Phương pháp

Để tính thể tích khối chóp ta cần tính được chiều cao và diện tích đáy

0.5.1 Tính chiều cao

Ta chính xác hóa chân đường cao

1) Hai đường xiên bằng nhau khi và chỉ khi hai hình chiếu bằng nhau, suy ra hình chóp có các cạnh bên bằng nhau thì chân đường cao là tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.

2) Hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này mà vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia

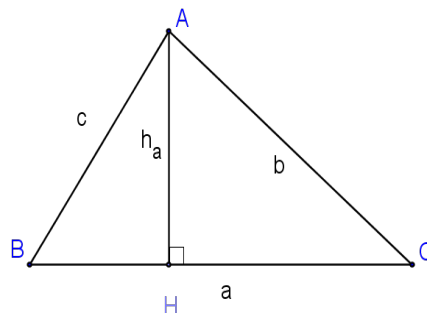
Suy ra cách tìm hình chiếu H của A trên $mp(P)$

- Tìm mặt phẳng (Q) chứa A sao cho $(Q) \perp (P)$
- Xác định giao tuyến d của (P) và (Q)
- Trong (Q) dựng $AH \perp d$ tại H

3) Hai mặt phẳng cắt nhau cùng vuông góc với một mặt phẳng thì giao tuyến của nó vuông góc với mặt phẳng đó.

4) Hình chóp có các mặt bên tạo với đáy một góc bằng nhau thì chân đường cao trùng với tâm đường tròn nội tiếp đa giác đáy.

0.5.2 Tính diện tích đáy



a. Nếu tam giác ABC vuông ở A ta có các hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC sau:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$BH.BC = AB^2$$

$$CH.BC = AC^2$$

$$BH.HC = AH^2$$

$$AH.BC = AB.AC$$

$$AM = \frac{1}{2}BC$$

$$\sin B = \frac{AC}{BC} \dots$$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$

b. Hệ thức lượng trong tam giác thường

Định lí hàm số cos: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$

Định lí hàm số sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

Công thức tính trung tuyến $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}$

c. Một số công thức tính diện tích

Diện tích tam giác

$$S = \frac{1}{2}a.h_a$$

$$S = \frac{1}{2}.b.c.\sin A$$

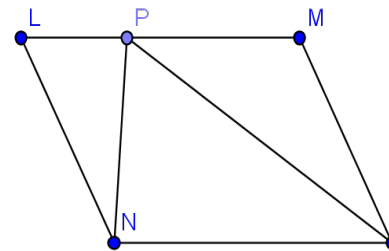
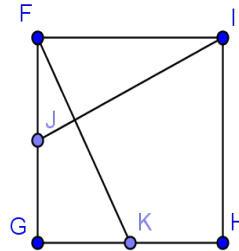
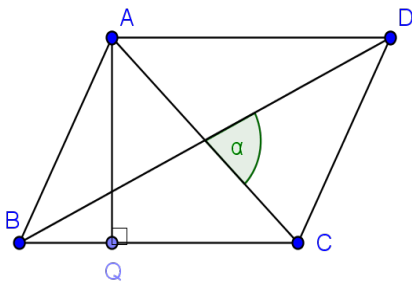
$$S = p.r$$

$$S = \frac{abc}{4R}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

d. Diện tích hình thang $S = \frac{(l+b)h}{2}$ với l là độ dài đáy lớn, b là độ dài đáy bé, h là độ dài đường cao của hình thang

e. Diện tích hình bình hành



$$S = AD.DC.\sin D$$

$$S = AQ.BC$$

$$S = AC.BD.\sin \alpha$$

Đặc biệt hình vuông $FGHI$ có $IJ \perp FK$

Hình bình hành P bất kì $S_{ONP} = \frac{1}{2}S_{hbb}$

0.6 Ví dụ

Ví dụ 1 (bài 38 sbt trang 10)

Chứng minh công thức (2) $V = \frac{1}{6}AB.CD.\sin \alpha.d$

Chứng minh

Ví dụ 2 Cho chóp $S.ABC$. Tam giác ABC cân tại B , $AC=a$, $\widehat{ABC} = 120^\circ$

$SA=SB=SC$, $(SA, (ABC))=60^\circ$. Tính $V_{S.ABC}$

Dựng hình bình hành ABCE

$$\Rightarrow AE // mp(BCD)$$

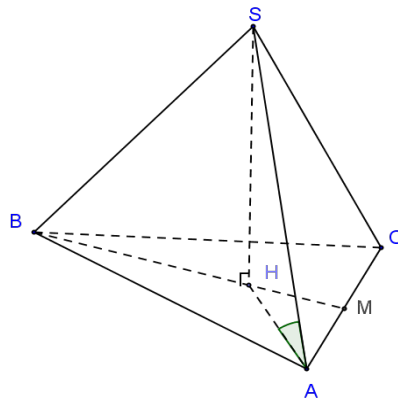
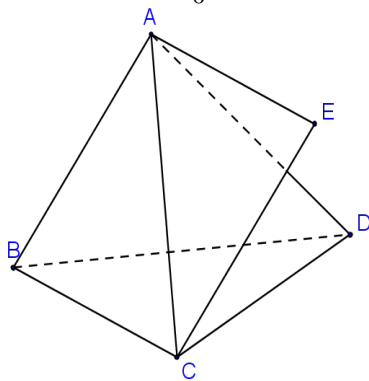
$$\text{Ta có } V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{BCD} d(A; (BCD))$$

$$= \frac{1}{3} S_{BCD} d(E; (BCD)) = V_{E.BCD} \quad (1)$$

$$V_{EBCD} = V_{B.ECD} = \frac{1}{3} S_{ECD} d(B; (ECD))$$

$$= \frac{1}{6} CD \cdot AB \cdot \sin(\angle CD, AB) \cdot d(AB, CD) \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow V = \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot \sin \alpha \cdot d$$



Giải

Gọi H là hình chiếu của S trên (ABC)

Vì SA=SB=SC nên HA=HB=HC

Gọi M là trung điểm của AC $\Rightarrow H \in BM$

HA là hình chiếu của SA trên (ABC)

$$\Rightarrow (\angle SA, (ABC)) = (\angle SA, HA) = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{SHA} = 60^\circ$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC \cdot \sin 120^\circ$$

$$\text{Ta có } \frac{AC}{\sin 120^\circ} = \frac{AB}{\sin 30^\circ} \Rightarrow AB = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}$$

$$\text{Theo định lý sin trong } \triangle ABC: \frac{a}{\sin 120^\circ} = 2HA$$

$$\Rightarrow HA = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Trong tam giác vuông SHA có $SH = HA \cdot \tan 60^\circ = a$

$$\text{Kết luận: } V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot HA = \frac{a^3\sqrt{3}}{36}$$

Ví dụ 3 Cho chóp S.ABC . Tam giác ABC vuông tại B, $BC=a$, $AC=2a$, SA vuông với mp(ABC), $SA=a\sqrt{3}$. H là hình chiếu của A trên SB.

Tính V_{HABC}

Trong (SAB) dựng HK song song với SA khi đó thể tích khối chóp H.ABC được tính là:

$$V_{HABC} = \frac{1}{3} HK \cdot S_{ABC}$$

+) Tính HK Xét tam giác ABC vuông ở B

$$\text{có: } AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = a\sqrt{3}$$

Tam giác SAB có: $AS = AB = a\sqrt{3}$

suy ra tam giác SBA cân tại A, nên SH là đường cao đồng thời là trung tuyến,

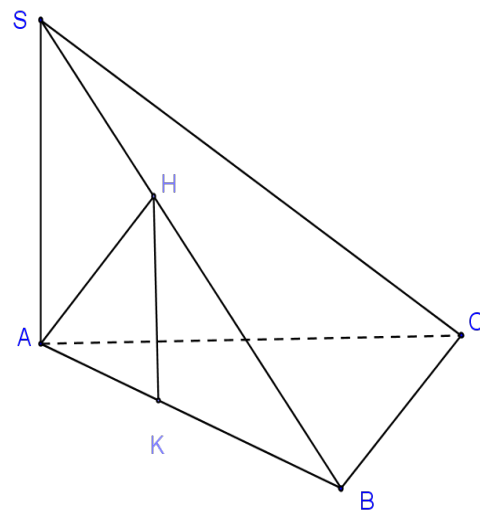
nên suy ra H là trung điểm của SB

suy ra HK là đường trung bình của tam giác SAB

$$\Rightarrow HK = \frac{1}{2} AS = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$+) S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} a^2 \sqrt{3}$$

$$\text{Vậy } V_{HABC} = \frac{1}{3} HK \cdot S_{ABC} = \frac{a^3}{4}$$



[.]

Ví dụ 4 (Bài 33 sbt trang 10): Cho khối chóp tam giác đều S.ABC có chiều cao bằng h và góc ASB bằng 2φ . Hãy tính thể tích khối chóp.

Giải

Giả sử O là tâm của tam giác đều ABC.

Khi đó $SO \perp (ABC)$ và $SO=h$.

Gọi K là trung điểm của AB. Đặt $AK=x$

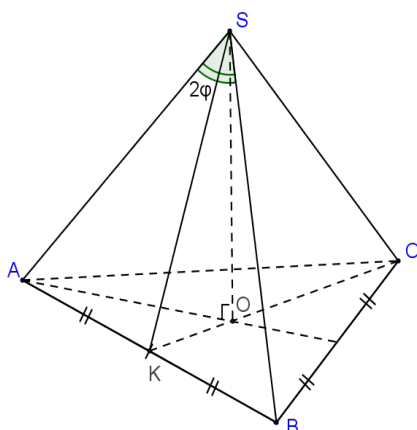
Khi đó $SK=x \cdot \cot \varphi$, $OK=x \cdot \tan 30^\circ = \frac{x}{\sqrt{3}}$.

$$h^2 = SK^2 - OK^2 = \frac{x^2}{3}(3\cot^2 \varphi - 1)$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{3h^2}{3\cot^2 \varphi - 1}$$

Ta có $S_{ABC} = \frac{AB^2 \cdot \sin 60^\circ}{2} = x^2 \sqrt{3}$, suy ra

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h = \frac{x^2 \sqrt{3}}{3} \cdot h = \frac{h^3 \sqrt{3}}{3\cot^2 \varphi - 1}$$



Ví dụ 5 (Bài 36 sbt trang 10): Khối chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$; đáy là tam giác ABC cân ở A, độ dài trung tuyến AD bằng a, cạnh bên SB tạo với đáy một góc α và tạo với mặt (SAD) một góc β . Tính thể tích khối chóp.

Ví dụ 6 (Đề thi đại học khối A năm 2014) : Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, $SD = \frac{3a}{2}$, hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABCD) là trung điểm của cạnh AB. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ A đến mặt

AB là hình chiếu của SB trên mp(ABC) nên $\widehat{SBA} = \alpha$. Để thấy $BD \perp (SAD)$ nên hình chiếu của SB trên mp(SAD) là SD $\Rightarrow \widehat{BSD} = \beta$.

Do SAB và SDB là các tam giác vuông nên ta có $SB = \frac{BD}{\sin \beta}$

$$SB = \frac{AB}{\cos \alpha},$$

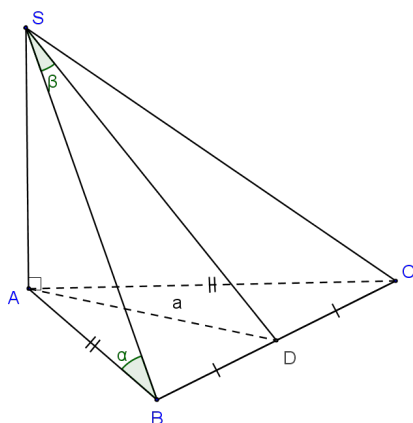
$$\text{suy ra } \frac{AB^2}{\cos^2 \alpha} = \frac{BD^2}{\sin^2 \beta} = \frac{AB^2 - BD^2}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta} = \frac{a^2}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta}$$

$$\Rightarrow BD = \frac{a \sin \beta}{\sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta}}$$

$$SD = BD \cot \beta = \frac{a \cos \beta}{\sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta}}$$

$$SA = \sqrt{SD^2 - AD^2} = \frac{a \sin \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta}}$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy: } V_{S.ABC} &= \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SA \\ &= \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{a \sin \beta}{\sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta}} \cdot \frac{a \sin \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta}} \\ &= \frac{a^3 \sin \alpha \cdot \sin \beta}{3(\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta)} \end{aligned}$$



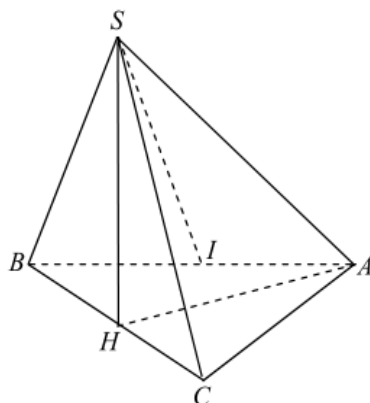
phẳng (SBD)

Giải

thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh A có thể tích V . Tính V .

3. (THPTQG-2017): Tính thể tích V khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$, SA vuông góc với đáy và (SBC) tạo với đáy một góc 60° .
4. (THPTQG-2017): Xét khối tứ diện $ABCD$ có cạnh $AB = x$ và các cạnh còn lại đều bằng $2\sqrt{3}$. Tìm x để khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.
5. (THPTQG-2017): Cho khối chóp $S.ABC$ có SA vuông với đáy, $SA = 4$, $AB = 6$, $BC = 10$, $CA = 8$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.
6. (THPTQG-2017): Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.
7. (THPTQG-2017): Xét khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A , SA vuông góc với đáy, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng 3. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng SBA và ABC , tính $\cos \alpha$ khi thể tích khối chóp $S.ABC$ nhỏ nhất.
8. (THPTQG-2017): Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $2a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.
9. Bài 21 sgk trang 28: Cho điểm M nằm trong hình tứ diện đều $ABCD$. Chứng minh rằng tổng khoảng cách từ M tới 4 mặt của tứ diện là một số không phụ thuộc vào vị trí của điểm M . Tổng đó bằng bao nhiêu nếu cạnh của tứ diện đều bằng a .

10. Bài 39 sbt tr 10: cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=2a$. Gọi B' , D' lần lượt là hình chiếu của A trên SB và SD . Mặt phẳng $(AB'D')$ cắt SC tại C' . Tính thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$
11. Bài 40 sbt tr 10: Tính thể tích khối tứ diện $ABCD$ có các cặp cạnh đối bằng nhau:
 $AB = CD = a, AC = BD = b, AD = BC = c$.
12. Bài 42 sbt tr 11: Cho đường tròn đường kính AB nằm trên $mp(P)$ và một điểm M di động trên đường tròn. trên đường thẳng vuông góc với $mp(P)$ tại A , lấy một điểm S . Mặt phẳng (Q) qua A vuông góc với SB tại K cắt SM tại H . Tìm vị trí của M để thể tích khối chóp $S.AHK$ lớn nhất. Chứng minh rằng khi đó cung AM nhỏ hơn cung BM .
13. Đề thi đại học khối A năm 2013: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A , $\widehat{ABC} = 30^\circ$, SBC là tam giác đều cạnh a và mặt bên SBC vuông góc với đáy. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ điểm C đến $mp(SAB)$
- Hướng dẫn



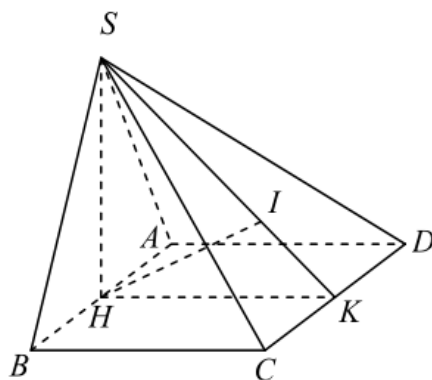
$$V_{S.ABC} = \frac{a^3}{16}.$$

$$d(C, (SAB)) = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{SAB}}$$

14. Đề thi dh khối B 2013: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ điểm A đến $mp(SCD)$.

Hướng dẫn

$$V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$$



$$d(A, (SCD)) = HI$$

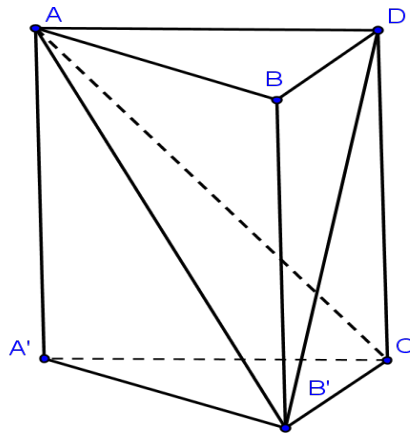
15. Đề thi đh A 2012 : Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA=2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a .

VẤN ĐỀ 3: THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ

0.8 Công thức tính thể tích khối lăng trụ

1. Khối lăng trụ tam giác

Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$



Xét mp($AB'C'$) chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành hai khối chóp: $A.A'B'C'$ và $A.BCC'B'$. Do đó:

$$V_{ABC.A'B'C'} = V_{A.A'B'C'} + V_{A.BCC'B'}$$

Trong đó: $V_{A.A'B'C'} = \frac{1}{3} \cdot S_{A'B'C'} \cdot AA'$

$$V_{A.BCC'B'} = V_{A.CC'B'} + V_{A.BCB'}$$

$$V_{A.CC'B'} = V_{A'.B'C'C} = V_{C.A'B'C'} = \frac{1}{3} \cdot S_{A'B'C'} \cdot CC'$$

$$V_{A.BCB'} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot BB'$$

Từ đó suy ra :

$$V_{ABC.A'B'C'} = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot S_{A'B'C'} \cdot AA' = S_{A'B'C'} \cdot AA' \text{ (do } S_{ABC} = S_{A'B'C'} \text{ và } AA' = BB' = CC')$$

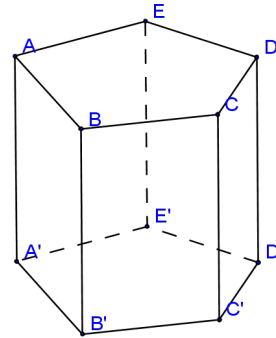
Hay $V = S_d \cdot \text{chiều cao}$

2. Thể tích khối lăng trụ bất kì

$$V = Bh$$

B là diện tích đáy

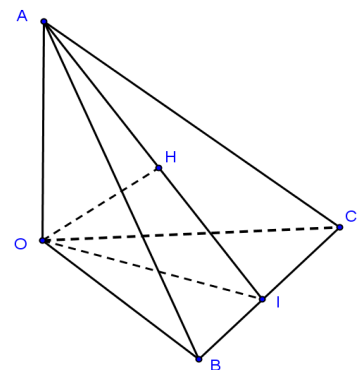
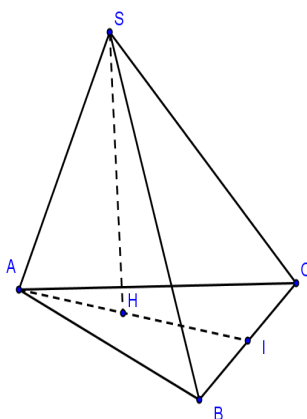
h là chiều cao



3. Một số hình lăng trụ đặc biệt:

- a) Hình lăng trụ đứng: Lăng trụ có cạnh bên vuông với đáy.
- b) Hình lăng trụ đều : Lăng trụ đứng và đáy là đa giác đều.
- c) Hình hộp : Lăng trụ và đáy là hình bình hành.
- d) Hình hộp đứng: Lăng trụ đứng và đáy là hình bình hành.

4. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng trong tứ diện vuông: (Áp dụng để tính đường cao)



OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc.

H là hình chiếu của O xuống (ABC),

Suy ra, H là trực tâm của tam giác ABC.

Khi đó, nếu đặt $h = d(O, (ABC))$ ta có $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$

0.9 Ví dụ

Ví dụ 1: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AC=a$, $\widehat{ACB} = 60^\circ$, $(BC, (AA'C'C)) = 30^\circ$. Tính AC' và thể tích của khối lăng trụ.

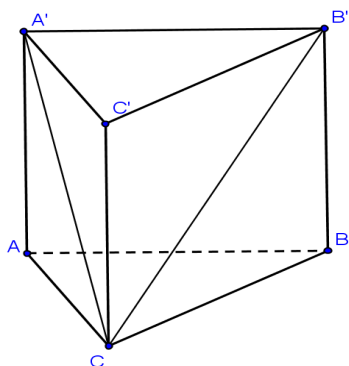
Hướng dẫn :

+ Chứng minh $B'C \perp (AA'C'C)$. Suy ra $\widehat{A'CB'} = (BC, (AA'C'C)) = 30^\circ$

+ Tính AC' dựa vào $\triangle A'B'C$ vuông tại A.

+ $V = AA' \cdot S_{ABC}$

Đáp số: $AC = 3a$, $V = a^3\sqrt{6}$



Ví dụ 2: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, điểm A' cách đều A, B, C ; $(A'A, (ABC)) = 60^\circ$

a. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

b. Chứng minh $BCC'B'$ là hình chữ nhật.

c. Tính diện tích xung quanh của lăng trụ.

Hướng dẫn:

+Gọi H là hình chiếu của A' xuống (ABC).

$A'A = A'B = A'C$ suy ra H là trọng tâm $\triangle ABC$.

+Gọi M là trung điểm BC $\Rightarrow H \in AM$.

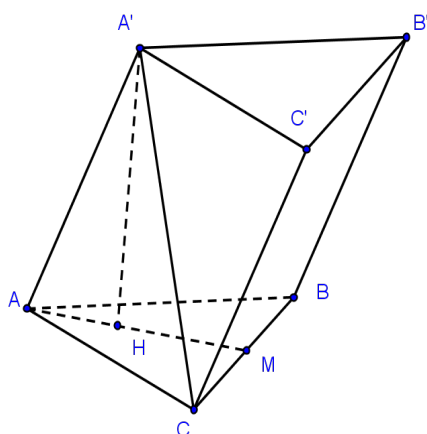
+Theo cách dựng: $\widehat{A'AH} = (A'A, (ABC)) = 60^\circ$

$+V = A'H \cdot S_{\triangle ABC}$

+Theo tính chất hình lăng trụ. Ta có $BCC'B'$ là hình bình hành, chứng minh $BCC'B'$ có 1 góc vuông $\Rightarrow$ nó là hình vuông

$$+S_{xq} = S_{BCC'B'} + S_{ACA'C'} + S_{ABB'A'}$$

Đáp số: $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}, S_{xq} = \frac{a^2 \cdot (2 + \sqrt{13})}{\sqrt{3}}.$



0.10 Bài tập

1. (THPTQG-2017): Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.
2. (THPTQG-2017): Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = BC = a$, $\widehat{ABC} = 120^\circ$, mặt phẳng $(A'B'C')$ tạo với đáy một góc 60° . Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.
3. (ĐMH-2017): Tính thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ biết $AC' = a\sqrt{3}$.
4. (ĐMH-2017): Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h . Tính thể tích V của khối

trụ ngoại tiếp lăng trụ đã cho.

5. (ĐMH-2017): Tính thể tích V của khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a .

6. (18.tr28 SBTHHNC12) Tính thể tích của khối lăng trụ n -giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a .

$$\text{ĐS: } V = \frac{1}{4}na^3 \cot \frac{\pi}{n}$$

7. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông $AB=BC=a$. Cạnh bên $AA'=a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm BC . Tính theo a thể tích khối trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách giữa AM và $B'C$.

8. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB=a$, $AC=2a$, $AA_1 = 2a\sqrt{5}$. $\widehat{ABC} = 120^\circ$, M là trung điểm CC_1 . Chứng minh: $MB \perp MA_1$, tính khoảng cách từ A tới $mp(A_1BM)$.

9. Cho hình hộp thoi $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a , $\widehat{AA'D'} = \widehat{AA'B'} = \widehat{BAD} = \alpha$ ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$). Tính $V_{ABCD.A'B'C'D'}$.

10. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB=a$, $AD=a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A' lên $mp(ABCD)$ trùng với giao điểm AC và BD . Góc giữa 2 $mp(ADD'A')$ và $(ABCD)$ là 60° .

a. Tính $V_{ABCD.A'B'C'D'}$.

b. Khoảng cách từ B' đến $mp(A'BD)$ theo a .

11. (4.tr31 SGKHHNC12) Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có diện tích bằng S và $AA' = h$. Một mặt phẳng (P) cắt các cạnh AA' , BB' ,

CC' lần lượt tại A_1, B_1, C_1 . Biết $AA_1 = a, BB_1 = b, CC_1 = c$.

a. Tính thể tích hai phần của khối lăng trụ được phân chia bởi mặt phẳng (P).

b. Với điều kiện nào của a, b, c thì thể tích hai phần đó bằng nhau?

12. (23.tr9 SBTHHNC12) Cho khối lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $A'D$ bằng 2 và độ dài đường chéo của mặt bên bằng 5.

a. Hạ $AK \perp A'D$ ($K \in A'D$). Chứng minh $AK=2$

b. Tính thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$

13. (24.tr9 SBTHHNC12) Đáy của khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ là tam giác đều. Mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy 1 góc 30° và tam giác $A'BC$ có diện tích bằng 8. Tính thể tích khối lăng trụ.

14. (25.tr9 SBTHHNC12) Cho khối lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình bình hành và $\widehat{BAD} = 45^\circ$. Các đường chéo AC' và DB' lần lượt tạo với đáy những góc 45° và 60° . Hãy tính thể tích của khối lăng trụ nếu biết chiều cao của nó bằng 2.

15. (27.tr9 SBTHHNC12) Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = \sqrt{3}, AD = \sqrt{7}$. Hai mặt bên $(ABB'A')$ và $(ADD'A')$ lần lượt tạo với đáy những góc 45° và 60° . Hãy tính thể tích khối hộp nếu biết cạnh bên bằng 1.

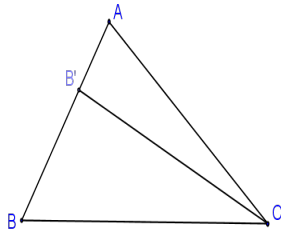
16. (28.tr9 SBTHHNC12) Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ mà

mặt bên $ABB'A'$ có diện tích bằng 4. Khoảng cách giữa cạnh CC' và mặt $(ABB'A')$ bằng 7. Hãy tính thể tích khối lăng trụ.

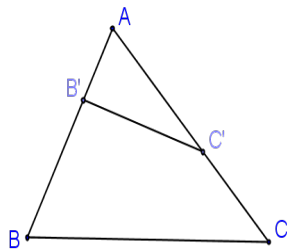
17. (29.tr9 SBTHHNC12) Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân với cạnh huyền AB bằng $\sqrt{2}$. Cho biết mặt phẳng $(AA'B)$ vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $AA' = \sqrt{3}$, góc $\widehat{B'AB}$ nhọn, góc giữa mặt phẳng $(A'AC)$ và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Hãy tính thể tích khối lăng trụ.
18. (29.tr9 SBTHHNC12) Lấy một mặt phẳng vuông góc với cạnh bên của một khối lăng trụ. Hình chiếu của mặt đáy của khối lăng trụ trên mặt phẳng đó được gọi là *thiết diện thẳng* của khối lăng trụ. Chứng minh rằng thể tích của khối lăng trụ bằng tích của diện tích thiết diện thẳng với độ dài cạnh bên.
19. (41.tr10 SBTHHNC12) Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có đáy bằng a , chiều cao bằng h . Tính thể tích khối chóp $A.BC'A'$
20. (52.tr12 SBTHHNC12) Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ mà đáy là tam giác vuông tại B có $AB=a$, $BC=b$, $AA'=c$ ($c^2 \geq a^2 + b^2$). Một mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với CA' .
 - a. Xác định thiết diện của hình lăng trụ khi cắt bởi $mp(P)$.
 - b. Tính diện tích thiết diện nói trên.

VẤN ĐỀ 4: TỈ LỆ THỂ TÍCH

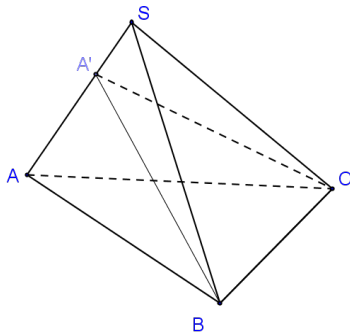
0.11 Phương pháp



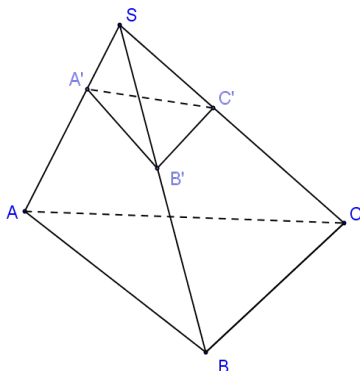
$$\frac{S_{B'BC}}{S_{ABC}} = \frac{B'B}{AB}$$



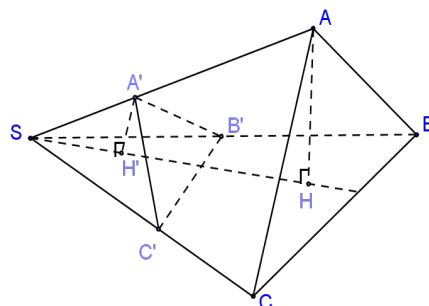
$$\frac{S_{B'AC'}}{S_{ABC}} = \frac{AB'}{AB} \cdot \frac{AC'}{AC}$$



$$\frac{V_{A'ABC}}{V_{SABC}} = \frac{A'A}{SA}$$



$$\frac{V_{A'B'C'}}{V_{SABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} \quad (4)$$



Chứng minh (4)

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} &= \frac{V_{A'.SB'C'}}{V_{A.SBC}} \\ \frac{A'H' \cdot S_{SB'C'}}{AH \cdot S_{SBC}} &= \frac{SA' \cdot SB' \cdot SC'}{SA \cdot SB \cdot SC} \quad \text{đpcm} \end{aligned}$$

0.12 Ví dụ

Ví dụ 1 Cho chóp $S.ABC$, SA vuông với $mp(ABC)$, $SA=2a$. Tam giác ABC vuông tại C , $AB=2a$, $\widehat{CAB} = 30^\circ$. H, K là hình chiếu của A trên SC và SB . Tính V_{HABC} và $V_{S.AHK}$

Giải

$$\text{Ta có } AC = AB \cdot \cos 30^\circ = a\sqrt{3}$$

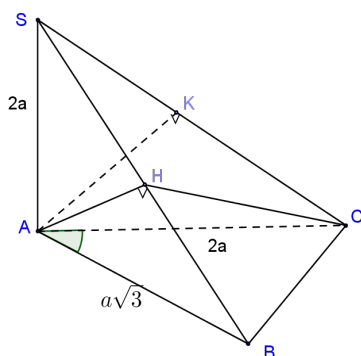
$$\Rightarrow V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin 30^\circ \cdot SA = \frac{a^3 \sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{V_{HABC}}{V_{SABC}} = \frac{HC}{SC} = \frac{HC \cdot SC}{SC^2} = \frac{AC^2}{SC^2} = \frac{3}{7}$$

$$V_{HABC} = \frac{3}{7} \cdot V_{SABC} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{7} \quad (\text{đvtt})$$

$$V_{SAHK} = \frac{SH}{SC} \cdot \frac{SK}{SB} = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{7}$$

$$\Rightarrow V_{S.AHK} = \frac{2}{7} \cdot V_{SABC}$$



Ví dụ 2 Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AA' và cạnh BB' . Tính $\frac{V_{MNC'CBA}}{V_{MNC'A'B'}}$

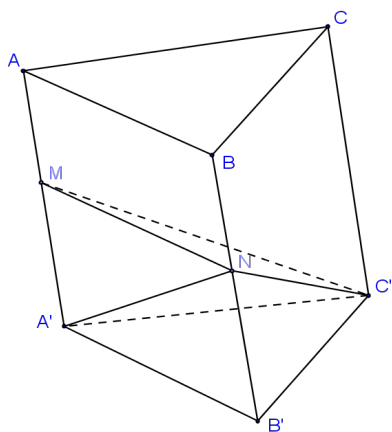
Giải

Gọi $V_{MNC'CBA} = V_1; V_{MNC'A'B'} = V_2$

Khi đó $V_{MNC'A'B'} = V_2 = V_{C'.A'B'NM} = V_{C'.MNB'} +$

$$V_{C'.MA'B'} = 2V_{C'.MA'B'} = 2V_{M.C'A'B'} = \frac{2}{3}B \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{3}V$$

$$\Rightarrow V_2 = \frac{1}{3}V \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = 2$$



Ví dụ 3 Bài 24sgk tr29. Khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, M là trung điểm của cạnh SC . Mặt phẳng (P) đi qua AM , song song với BD chia khối chóp thành hai phần. Tính tỉ số thể tích của hai phần đó

0.13 Bài tập

1. Bài 16 sgk trang 28: Hãy chia một khối tứ diện thành hai khối tứ diện sao cho tỉ số thể tích của hai khối tứ diện này bằng 1 số $k > 0$ cho trước
2. Bài 23sgk tr29. Cho khối chóp tam giác $S.ABC$. Trên ba đường thẳng SA, SB, SC lần lượt lấy ba điểm A', B', C' khác với S . Gọi V và V' lần lượt là thể tích của khối chóp $S.ABC$ và $S.A'B'C'$. Chứng

Giải

Gọi O là tâm ABCD

trong (SCA) $SO \cap AM = G$

$\Rightarrow G$ là trọng tâm tam giác SAC trong (SBD)

$$\text{Vậy } \frac{SG}{SO} = \frac{2}{3}$$

Vì mp(P) song song với BD nên nó cắt mp(SBD) theo giao

tuyến đi qua G và $D'B' \parallel BD$ (với $B' \in SB$ và $D' \in SD$)

$$\text{Suy ra } \frac{SB'}{SB} = \frac{SD'}{SD} = \frac{SG}{SO} = \frac{2}{3}$$

Mặt phẳng (P) chia khối chóp S.ABCD thành hai phần, Khối

chóp S.AB'MD' và khối đa diện ABCDB'MD'. Ta có :

$$\frac{V_{S.AB'D'}}{V_{SABD}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SD'}{SD} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{S.AB'D'}}{V_{SABCD}} = \frac{2}{9}$$

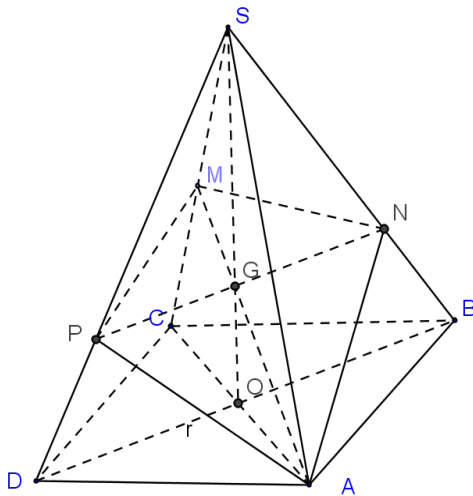
$$\frac{V_{S.MB'D'}}{V_{SCBD}} = \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SD'}{SD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{S.MB'D'}}{V_{SABCD}} = \frac{1}{9}$$

Từ đó suy ra

$$\Rightarrow \frac{V_{S.AB'MD'}}{V_{SABCD}} = \frac{V_{S.AB'D'} + V_{S.MB'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Vậy } \frac{V_{SAB'MD'}}{V_{ABCDB'MD'}} = \frac{1}{2}$$



minh rằng:

$$\frac{V}{V'} = \frac{SA}{SA'} \cdot \frac{SB}{SB'} \cdot \frac{SC}{SC'}.$$

3. Bài 25 sgk trang 29: Chứng minh rằng nếu có phép vị tự tỉ số k biến tứ diện ABCD thành A'B'C'D' thì $\frac{V_{A'B'C'D'}}{V_{ABCD}} = |k|^3$

4. Bài 1 sgk trang 30: Cho tứ diện ABCD có thể tích bằng V. Gọi B' và D' lần lượt là trung điểm của AB và AD. Mặt phẳng (CB'D') chia

khối tứ diện thành hai phần. Tính thể tích của mỗi phần đó.

5. Bài 3 sgk trang 31: Cho khối tứ diện $ABCD$, E và F lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và CD . Hai mặt phẳng (ABF) và (CDE) chia khối tứ diện $ABCD$ thành 4 khối tứ diện.

a. Kể tên 4 khối tứ diện đó

b. Chứng tỏ rằng 4 khối tứ diện đó có thể tích bằng nhau.

c. Chứng tỏ rằng nếu $ABCD$ là khối tứ diện đều thì 4 khối tứ diện nói trên bằng nhau.

6. Bài 4 sgk trang 31: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có diện tích đáy bằng S và $AA'=h$.

Một mp(P) cắt cạnh AA' , BB' , CC' lần lượt tại A_1 , B_1 , C_1 . Biết $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $CC_1 = c$.

a. Tính thể tích hai phần của khối lăng trụ được phân chia bởi mặt phẳng (P)

b. Với điều kiện nào của a , b , c thì thể tích của hai phần đó bằng nhau.

7. Bài 5 sgk trang 31 Cho khối lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ và M là trung điểm của cạnh AB . Mặt phẳng $(B'C'M)$ chia khối lăng trụ thành hai phần. Tính tỉ số thể tích hai phần đó.

8. Bài 6 sgk trang 31: Cho khối chóp $S.ABC$ có đường cao SA bằng a , đáy là tam giác vuông cân có $AB=BC=a$. Gọi B' là trung điểm của SB , C' là chân đường cao hạ từ A của tam giác SAC .

a. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

b. Chứng minh rằng SC vuông góc với mp($AB'C'$)

c. Tính thể tích khối chóp $S.AB'C'$

9. Bài 43 sbt tr 11: Khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi

B', D' lần lượt là trung điểm của SB, SD . Mặt phẳng $(AB'D')$ cắt SC tại C' . Tìm tỉ số thể tích của hai khối chóp $S.AB'C'D'$ và $S.ABCD$.

10. Bài 44sbt tr 11: Khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AD, SC . Chứng minh mặt phẳng (MNP) chia khối chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau.
11. Bài 45 sbt tr 11: Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Một mp(α) đi qua A, B và trung điểm M của cạnh SC . Tính tỉ số thể tích của hai phần khối chóp bị phân chia bởi mặt phẳng đó.
12. Bài 47 sbt tr 11: Cho điểm M trên cạnh SA , điểm N trên cạnh SB của khối chóp tam giác $S.ABC$ sao cho $\frac{SM}{MA} = \frac{1}{2}, \frac{SN}{NB} = 2$. Mặt phẳng (α) qua MN và song song với SC chia khối chóp thành hai phần. Tìm tỉ số thể tích của hai phần đó.
13. Bài 50 sbt tr 11: Cho tứ diện $ABCD$ có điểm O nằm trong tứ diện và cách đều các mặt của tứ diện một khoảng r . Gọi h_A, h_B, h_C, h_D lần lượt là khoảng cách từ các điểm A, B, C, D đến các mặt đối diện. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} + \frac{1}{h_D}$$