

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1 (4,5 điểm)

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^6 - y^3 + x^2 - 9y^2 - 30 = 28y \\ \sqrt{2x+3} + x = y \end{cases} \quad \text{với } x, y \in \mathbb{R}.$$

Câu 2 (4,5 điểm)

Cho đa thức $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$ có $\deg P(x) \geq 2$ và có các nghiệm là $b_1, b_2, \dots, b_n$. Chứng minh rằng: nếu $x > b_i$, với $i = 1, 2, \dots, n$ thì

$$P(x+1) \left(\frac{1}{x-b_1} + \frac{1}{x-b_2} + \dots + \frac{1}{x-b_n} \right) \geq 2n^2$$

Câu 3 (3 điểm)

Cho đường tròn (O_1) tiếp xúc trong với đường tròn (O_2) tại điểm A. Đường thẳng qua điểm A cắt các đường tròn (O_1) , (O_2) lần lượt tại các điểm B, C. Tiếp tuyến tại B của (O_1) cắt đường tròn (O_2) tại hai điểm D, E. Qua điểm C, kẻ hai đường thẳng tiếp xúc với (O_1) tại các điểm F, G. Chứng minh bốn điểm D, E, F, và G cùng thuộc một đường tròn.

Câu 4 (4 điểm)

Cho dãy số (u_n) được xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = 2023 \\ u_{n+1} = u_n^2 - 2, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}^2}{u_1^2 \cdot u_2^2 \cdot \dots \cdot u_n^2}$.

Câu 5 (4 điểm)

Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện sau đây:

$$f(1) = \frac{1}{2} \quad \text{và} \quad f(xy) = f(x)f\left(\frac{3}{y}\right) + f(y)f\left(\frac{3}{x}\right), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$