

ĐẠI SỐ & GIẢI TÍCH 11

Chương 2. Tổ hợp. Xác suất. Nhị thức Newton

§1. Hoán vị-chỉnh hợp-tổ hợp

1. Bài toán chỉ sử dụng P hoặc C hoặc A.

Câu 1. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm hai chữ số khác nhau?

- A. C_2^7 .. B. 2^7 .. C. 7^2 .. D. A_7^2 ..

Câu 2. Có bao nhiêu cách chọn hai học sinh từ một nhóm gồm 34 học sinh?

- A. 2^{34} . B. A_{34}^2 . C. 34^2 . D. C_{34}^2 .

Câu 3. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm hai chữ số khác nhau?

- A. 2^8 . B. C_8^2 . C. A_8^2 . D. 8^2 .

Câu 4. Cho tập hợp M có 10 phần tử. Số tập con gồm 2 phần tử của M là

- A. A_{10}^8 . B. A_{10}^2 . C. C_{10}^2 . D. 10^2 .

§2. Nhị thức Newton

1. Tìm hệ số, số hạng trong khai triển nhị thức Newton.

Câu 5. Hệ số của x^5 trong khai triển $x(2x - 1)^6 + (x - 3)^8$ bằng

- A. -1272 .. B. 1272 .. C. -1752 .. D. 1752 ..

Câu 6. Hệ số của x^5 trong khai triển nhị thức $x(2x - 1)^6 + (3x - 1)^8$ bằng

- A. -13368 . B. 13368 . C. -13848 . D. 13848 .

Câu 7. Hệ số của x^5 trong khai triển biểu thức $x(x - 2)^6 + (3x - 1)^8$ bằng

- A. 13548 . B. 13668 . C. -13668 . D. -13548 .

Câu 8. Với n là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^1 + C_n^2 = 55$, số hạng không chứa x trong khai triển của biểu thức $\left(x^3 + \frac{2}{x^2}\right)^n$ bằng

- A. 322560 . B. 3360 . C. 80640 . D. 13440 .

§3. Xác suất của biến cố

1. Tính xác suất bằng định nghĩa.

Câu 9. Từ một hộp chứa 9 quả cầu màu đỏ và 6 quả cầu màu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả cầu. Xác suất để lấy được 3 quả cầu màu xanh bằng

- A. $\frac{12}{65}$.. B. $\frac{5}{21}$.. C. $\frac{24}{91}$.. D. $\frac{4}{91}$..

Câu 10. Từ một hộp chứa 11 quả cầu đỏ và 4 quả cầu màu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả cầu. Xác suất để lấy được 3 quả cầu màu xanh bằng:

- A. $\frac{4}{455}$. B. $\frac{24}{455}$. C. $\frac{4}{165}$. D. $\frac{33}{91}$.

Câu 11. Từ một hộp chứa 10 quả cầu màu đỏ và 5 quả cầu màu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả cầu. Xác suất để lấy được 3 quả cầu màu xanh bằng

- A. $\frac{2}{91}$. B. $\frac{12}{91}$. C. $\frac{1}{12}$. D. $\frac{24}{91}$.

Câu 12. Một hộp chứa 11 quả cầu gồm 5 quả cầu màu xanh và 6 quả cầu màu đỏ. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 2 quả cầu từ hộp đó. Xác suất để 2 quả cầu chọn ra cùng màu bằng

- A. $\frac{5}{22}$. B. $\frac{6}{11}$. C. $\frac{5}{11}$. D. $\frac{8}{11}$.

Câu 13. Ba bạn A, B, C mỗi bạn viết ngẫu nhiên lên bảng một số tự nhiên thuộc đoạn $[1; 17]$. Xác suất để ba số được viết ra có tổng chia hết cho 3 bằng

- A. $\frac{1728}{4913}$. B. $\frac{1079}{4913}$. C. $\frac{23}{68}$. D. $\frac{1637}{4913}$.

Câu 14. Ba bạn A, B, C mỗi bạn viết ngẫu nhiên lên bảng một số tự nhiên thuộc đoạn $[1; 16]$. Xác suất để ba số được viết ra có tổng chia hết cho 3 bằng

- A. $\frac{683}{2048}$. B. $\frac{1457}{4096}$. C. $\frac{19}{56}$. D. $\frac{77}{512}$.

Câu 15. Xếp ngẫu nhiên 10 học sinh gồm 2 học sinh lớp 12A, 3 học sinh lớp 12B và 5 học sinh lớp 12C thành một hàng ngang. Xác suất để trong 10 học sinh trên không có 2 học sinh cùng lớp đứng cạnh nhau bằng

- A. $\frac{11}{630}$. B. $\frac{1}{126}$. C. $\frac{1}{105}$. D. $\frac{1}{42}$.

2. Tính xác suất bằng công thức nhân.

Câu 16. Ba bạn A, B, C mỗi bạn viết ngẫu nhiên lên bảng một số tự nhiên thuộc đoạn $[1; 14]$. Xác suất để ba số được viết có tổng chia hết cho 3.

- A. $\frac{457}{1372}$. B. $\frac{307}{1372}$. C. $\frac{207}{1372}$. D. $\frac{31}{91}$.

Chương 3. Dãy số - Cấp số cộng- Cấp số nhân

§1. Dãy số

1. Tìm hạng tử trong dãy số.

Câu 17. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log u_1 + \sqrt{2 + \log u_1 - 2 \log u_{10}} = 2 \log u_{10}$ và $u_{n+1} = 2u_n$ với mọi $n \geq 1$ Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > 5^{100}$ bằng

- A. 247. B. 248. C. 229. D. 290.

Chương 4. Giới hạn

§1. Giới hạn của dãy số

1. Dùng phương pháp đặt thừa số.

Câu 18. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+7}$ bằng

- A. $+\infty$. B. $\frac{1}{2}$. C. 0. D. $\frac{1}{7}$.

Câu 19. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5n+3}$ bằng

A. 0.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $+\infty$.

D. $\frac{1}{5}$.

Câu 20. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+5}$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. 0.

C. $+\infty$.

D. $\frac{1}{5}$.

§2. Giới hạn của hàm số

1. Dạng vô cùng chia vô cùng, số chia vô cùng.

Câu 21. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x+3}$ bằng

A. $-\frac{2}{3}$.

B. 1.

C. 2.

D. -3.

HÌNH HỌC 11

Chương 3. Véc-tơ trong không gian. Quan hệ vuông góc trong không gian

§1. Hai đường thẳng vuông góc

1. Xác định góc giữa hai đường thẳng (dùng định nghĩa).

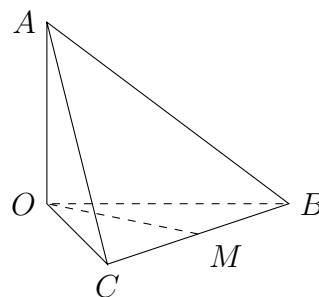
Câu 22. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = OC$. Gọi M là trung điểm của BC (tham khảo hình bên). Góc giữa hai đường thẳng OM và AB bằng

A. 90° .

B. 30° .

C. 60° .

D. 45° .



§2. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

1. Xác định quan hệ vuông góc giữa đường thẳng và mặt phẳng, đường thẳng và đường thẳng.

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại C , $AC = a$, $BC = a\sqrt{2}$, SA vuông góc với mặt đáy, $SA = a$, góc giữa đường thẳng SB và mặt đáy bằng

A. 60° ..

B. 90° ..

C. 30° ..

D. 45° ..

2. Xác định góc giữa hai mặt phẳng, đường thẳng và mặt phẳng.

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $AB = a$ và $SB = 2a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

A. 60° .

B. 45° .

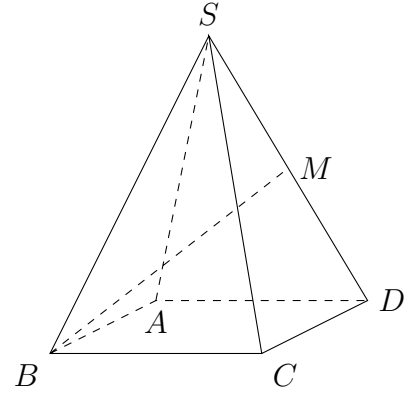
C. 30° .

D. 90° .

Câu 25. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có

tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm của SD (tham khảo hình vẽ bên). Tang của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
 B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
 C. $\frac{2}{3}$.
 D. $\frac{1}{3}$.



Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SB = 2a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

- A. 60° . B. 90° . C. 30° . D. 45° .

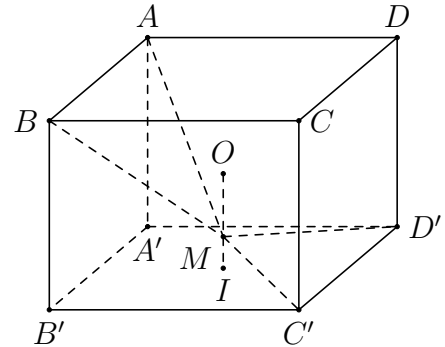
§3. Hai mặt phẳng vuông góc

1. Xác định góc giữa hai mặt phẳng, đường và mặt.

Câu 27.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Gọi I là tâm hình vuông $A'B'C'D'$ và M là điểm thuộc đoạn thẳng OI sao cho $MO = 2MI$ (tham khảo hình vẽ). Khi đó cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) bằng

- A. $\frac{6\sqrt{85}}{85}$. B. $\frac{7\sqrt{85}}{85}$. C. $\frac{17\sqrt{13}}{65}$. D. $\frac{6\sqrt{13}}{65}$.

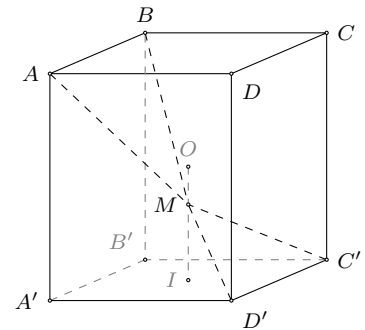


Câu 28. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O .

Gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và M là điểm thuộc đoạn thẳng OI sao cho $OM = \frac{1}{2}MI$ (tham khảo hình vẽ).

Khi đó sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) bằng

- A. $\frac{17\sqrt{13}}{65}$. B. $\frac{6\sqrt{85}}{85}$.
 C. $\frac{7\sqrt{85}}{85}$. D. $\frac{6\sqrt{13}}{65}$.



Câu 29. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2\sqrt{3}$ và $AA' = 2$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B', A'C'$ và BC (tham khảo hình vẽ bên). Cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (MNP) bằng

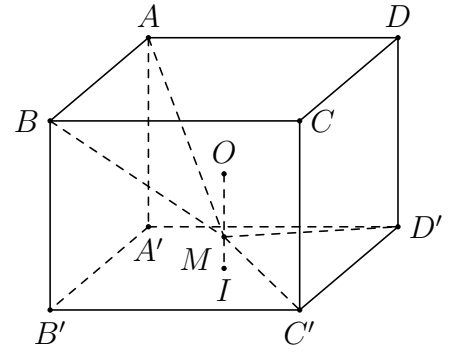
- A. $\frac{6\sqrt{13}}{65}$. B. $\frac{\sqrt{13}}{65}$. C. $\frac{17\sqrt{13}}{65}$. D. $\frac{18\sqrt{13}}{65}$.

Câu 30. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O .

Gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và M là điểm thuộc đường thẳng OI sao cho $MO = 2MI$ (tham khảo hình vẽ). Khi đó sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) bằng:

A. $\frac{6\sqrt{13}}{65}..$
C. $\frac{17\sqrt{13}}{65}..$

B. $\frac{7\sqrt{85}}{85}..$
D. $\frac{6\sqrt{85}}{85}..$



§4. Khoảng cách

1. Tính độ dài đoạn thẳng và khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng.

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{a\sqrt{5}}{3}..$

B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}..$

C. $\frac{a\sqrt{6}}{6}..$

D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}..$

2. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông đỉnh B , $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{2\sqrt{5}a}{5}..$

B. $\frac{\sqrt{5}a}{3}..$

C. $\frac{2\sqrt{2}a}{3}..$

D. $\frac{\sqrt{5}a}{5}..$

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại C , $BC = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\sqrt{2}a..$

B. $\frac{\sqrt{2}a}{2}..$

C. $\frac{a}{2}..$

D. $\frac{\sqrt{3}a}{2}..$

3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.

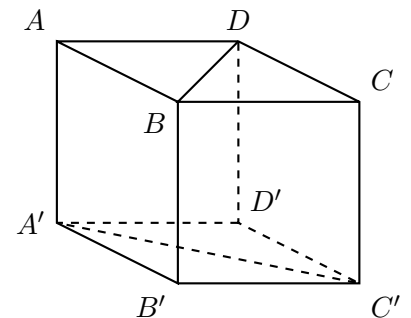
Câu 34. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a (tham khảo hình bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng

A. $\sqrt{3}a..$

B. $a..$

C. $\frac{\sqrt{3}a}{2}..$

D. $\sqrt{2}a..$



Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB bằng

A. $\frac{\sqrt{6}a}{2}..$

B. $\frac{2a}{3}..$

C. $\frac{a}{2}..$

D. $\frac{a}{3}..$

Câu 36. Cho tứ diện $OABC$ có OA , OB , OC đôi một vuông góc với nhau, $OA = a$ và $OB = OC = 2a$. Gọi M là trung điểm của BC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng OM và AB bằng

A. $\frac{\sqrt{2}a}{2}..$

B. $a..$

C. $\frac{2\sqrt{5}a}{5}..$

D. $\frac{\sqrt{6}a}{3}..$

- Câu 37.** Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau, $OA = OB = a; OC = 2a$. Gọi M là trung điểm của AB . Khoảng cách giữa hai đường thẳng OM và AC bằng.
- A. $\frac{\sqrt{2}a}{3}$.. B. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.. C. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$.. D. $\frac{2a}{3}$..

GIẢI TÍCH 12

Chương 1. Ứng dụng đạo hàm để khảo sát hàm số

§1. Sự đồng biến và nghịch biến của hàm số

1. Xét tính đơn điệu của hàm số cho bởi công thức.

- Câu 38.** Cho hàm số $y = x^3 + 3x + 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
 B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
 C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
 D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

- Câu 39.** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	-1	-2	-1	$-\infty$			

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-1; 0)$.. B. $(1; +\infty)$.. C. $(-\infty; 1)$.. D. $(0; 1)$..
- Câu 40.** Hàm số $y = \frac{2}{x^2 + 1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?
- A. $(0; +\infty)$. B. $(-1; 1)$. C. $(-\infty; +\infty)$. D. $(-\infty; 0)$.
- Câu 41 (QG17,102).** Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?
- A. $y = \frac{x+1}{x+3}$. B. $y = x^3 + x$. C. $y = \frac{x-1}{x-2}$. D. $y = -x^3 - 3x$.
- Câu 42 (QG17,102).** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$. B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
 C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$. D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

- Câu 43.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
 B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
 C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
 D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Câu 44. Hỏi hàm số $y = 2x^4 + 1$ đồng biến trên khoảng nào ?

- A. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$. B. $(0; +\infty)$. C. $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. D. $(-\infty; 0)$.

Câu 45. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$. B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; \frac{1}{3})$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$. D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Câu 46. Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Câu 47. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A. $y = 3x^3 + 3x - 2$. B. $y = 2x^3 - 5x + 1$. C. $y = x^4 + 3x^2$. D. $y = \frac{x-2}{x+1}$.

Câu 48. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	$ $	$-$	0	$+$

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$.
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.
D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

Câu 49. Cho hàm số $y = \sqrt{2x^2 + 1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$. B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$. D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 50. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.
D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

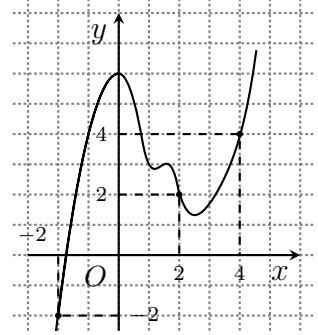
Câu 51. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$		
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$		0	4		$-\infty$

- A. $(-2; +\infty)$. B. $(-2; 3)$. C. $(3; +\infty)$. D. $(-\infty; -2)$.

Câu 52.

Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $h(x) = 2f(x) - x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- A. $h(4) = h(-2) > h(2)$. B. $h(4) = h(-2) < h(2)$.
C. $h(2) > h(4) > h(-2)$. D. $h(2) > h(-2) > h(4)$.

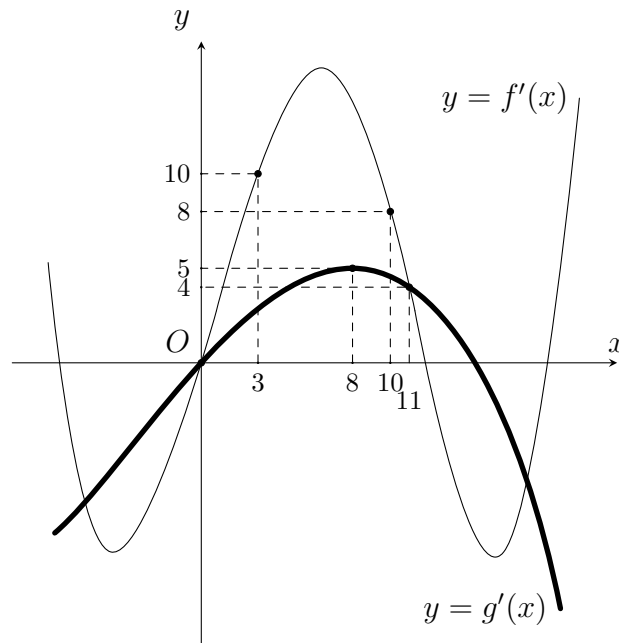
2. Xét tính đơn điệu dựa vào bảng biến thiên, đồ thị.

Câu 53. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y			3		-1		3	
	$-\infty$							$-\infty$

- A. $(-2; 0)$. B. $(-\infty; -2)$. C. $(0; 2)$. D. $(0; +\infty)$.

Câu 54. Cho hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$. Hai hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên, trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị của hàm số $y = g'(x)$.



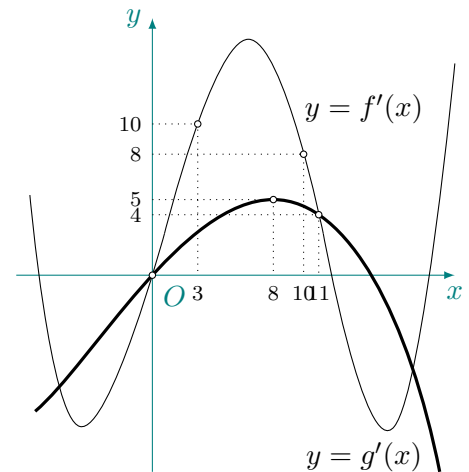
Hàm số $h(x) = f(x + 4) - g\left(2x - \frac{3}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $\left(5; \frac{31}{5}\right)$. B. $\left(\frac{9}{4}; 3\right)$. C. $\left(\frac{31}{5}; +\infty\right)$. D. $\left(6; \frac{25}{4}\right)$.

Câu 55. Cho hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$. Hai hàm số

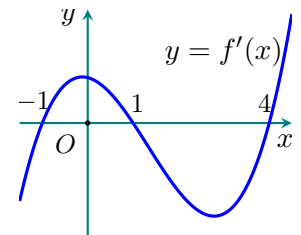
$y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên, trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị của hàm số $y = g'(x)$. Hàm số $h(x) = f(x+6) - g\left(2x + \frac{5}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $\left(\frac{21}{5}; +\infty\right)$.
 B. $\left(\frac{1}{4}; 1\right)$.
 C. $\left(3; \frac{21}{5}\right)$.
 D. $\left(4; \frac{17}{4}\right)$.



Câu 56. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = f(2-x)$ đồng biến trên khoảng

- A. $(1; 3)$.
 B. $(2; +\infty)$.
 C. $(-2; 1)$.
 D. $(-\infty; -2)$.



3. Tìm tham số m để hàm số đơn điệu.

Câu 57. Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m+9)x + 5$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A. 7. B. 4. C. 6. D. 5.

Câu 58. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = x^3 + mx - \frac{1}{5x^5}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

- A. 5. B. 3. C. 0. D. 4.

Câu 59. Cho hàm số $y = \frac{mx+4m}{x+m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S .

- A. 5. B. 4. C. Vô số. D. 3.

Câu 60. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+2}{x+5m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -10)$?

- A. 2. B. Vô số. C. 1. D. 3.

Câu 61. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+1}{x+3m}$ nghịch biến trên khoảng $(6; +\infty)$.

- A. 3.. B. Vô số.. C. 0.. D. 6..

Câu 62. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+2}{x+3m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -6)$?

- A. 2. B. 6. C. Vô số. D. 1.

Câu 63. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $m \leq 0$ hoặc $1 \leq m < 2$.

B. $m \leq 0$.

C. $m < 2$.

D. $m \geq 2$.

Câu 64. Hỏi có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = (m^2 - 1)x^3 + (m - 1)x^2 - x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 3.

Câu 65. Cho hàm số $y = \frac{mx - 2m - 3}{x - m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S .

A. 5.

B. 4.

C. Vô số.

D. 3.

4. Ứng dụng tính đơn điệu để chứng minh bất, giải pt, bpt, hệ pt.

Câu 66. Cho hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$.

Hai hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên, trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị của hàm số $y = g'(x)$.

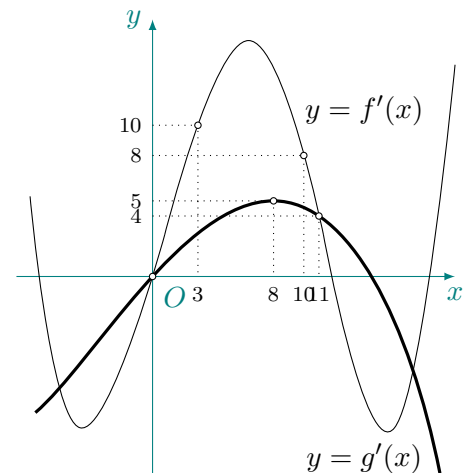
Hàm số $h(x) = f(x + 3) - g\left(2x - \frac{7}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây:

A. $\left(\frac{13}{4}; 4\right) ..$

B. $\left(7; \frac{29}{4}\right) ..$

C. $\left(6; \frac{36}{5}\right) ..$

D. $\left(\frac{36}{5}; +\infty\right) ..$



§2. Cực trị của hàm số

1. Tìm cực trị của hàm số cho bởi công thức.

Câu 67. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y			3		0	$+\infty$
	$-\infty$					

Tìm giá trị cực đại y_{CD} và giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số đã cho.

A. $y_{CD} = 3$ và $y_{CT} = -2$.

B. $y_{CD} = 2$ và $y_{CT} = 0$.

C. $y_{CD} = -2$ và $y_{CT} = 2$.

D. $y_{CD} = 3$ và $y_{CT} = 0$.

Câu 68. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			5		1		$+\infty$
	$-\infty$						

Đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 4. B. 2. C. 3. D. 5.

Câu 69. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y			4		5	
	2					2

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số có bốn điểm cực trị. B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.
C. Hàm số không có cực đại. D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -5$.

Câu 70. Tìm giá trị cực đại y_{CD} của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$.

- A. $y_{CD} = 4$. B. $y_{CD} = 1$. C. $y_{CD} = 0$. D. $y_{CD} = -1$.

Câu 71. Hàm số $y = \frac{2x+3}{x+1}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.

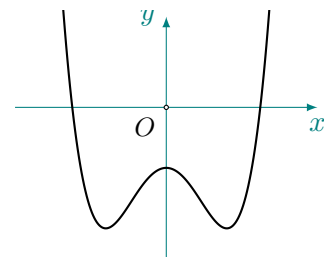
Câu 72. Đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai điểm cực trị A và B . Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB ?

- A. $P(1; 0)$. B. $M(0; -1)$. C. $N(1; -10)$. D. $Q(-1; 10)$.

Câu 73. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$)

có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 2..
B. 3..
C. 0..
D. 1..



Câu 74. Đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 5$ có hai điểm cực trị A và B . Tính diện tích S của tam giác OAB với O là gốc tọa độ.

- A. $S = 9$. B. $S = \frac{10}{3}$. C. $S = 5$. D. $S = 10$.

Câu 75. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2mx^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn 1.

- A. $m > 0$. B. $m < 1$. C. $0 < m < \sqrt[3]{4}$. D. $0 < m < 1$.

2. Tìm cực trị dựa vào BBT, đồ thị.

Câu 76. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$				3				$+\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$
 0 0

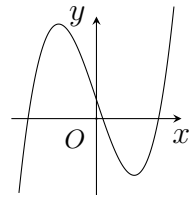
Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- A. Hàm số có ba điểm cực trị. B. Hàm số có giá trị cực đại bằng 3.
 C. Hàm số có giá trị cực trị bằng 0. D. Hàm số có hai điểm cực tiểu.

Câu 77.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 2. B. 0. C. 3. D. 1.



Câu 78. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$				3				$+\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$
 -2 -2

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(0; 1)$. B. $(-\infty; 0)$. C. $(1; +\infty)$. D. $(-1; 0)$.

Câu 79. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + 3x^2$ trên đoạn $[-4; -1]$ bằng

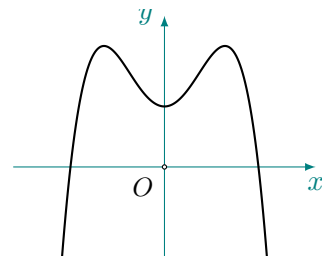
- A. -4 . B. -16 . C. 0 . D. 4 .

Câu 80. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$)

có đồ thị như hình vẽ bên.

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 0. B. 1.
 C. 2. D. 3.



Câu 81. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên :

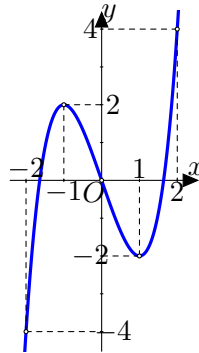
x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$		0		-1		$+\infty$

$\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$
 0 -1

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

- A. Hàm số có đúng một cực trị.
- B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.
- C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng 1.
- D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Câu 82. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây ?



- A. $x = 2$.
- B. $x = -1$.
- C. $x = 1$.
- D. $x = 2$.

Câu 83. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. Cực tiểu của hàm số bằng -3 .
- B. Cực tiểu của hàm số bằng 1.
- C. Cực tiểu của hàm số bằng -6 .
- D. Cực tiểu của hàm số bằng 2.

Câu 84. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Hàm số đạt cực đại tại điểm

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$				5		$-\infty$

- A. $x = 1$.
- B. $x = 0$.
- C. $x = 5$.
- D. $x = 2$.

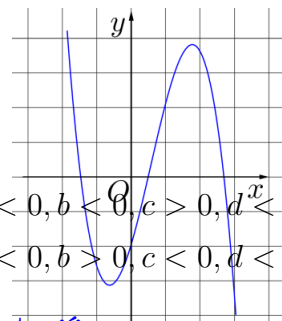
Câu 85. Biết $M(0; 2), N(2; -2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tính giá trị của hàm số tại $x = -2$.

- A. $y(-2) = 2$.
- B. $y(-2) = 22$.
- C. $y(-2) = 6$.
- D. $y(-2) = -18$.

Câu 86. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có

đồ thị như hình vẽ bên.

Mệnh đề nào dưới đây đúng ?



- A. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.
- B. $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.
- C. $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$.
- D. $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$.

3. Tìm m để hàm số đạt cực trị tại 1 điểm x_0 cho trước.

Câu 87. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$.

- A. $m = 1$. B. $m = -1$. C. $m = 5$. D. $m = -7$.

Câu 88. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m - 4)x^5 - (m^2 - 16)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

- A. 8.. B. Vô số.. C. 7.. D. 9..

Câu 89. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m - 3)x^5 - (m^2 - 9)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

- A. 4. B. 7. C. 6. D. Vô số.

4. Tìm m để hàm số, đồ thị hàm số trùng phương có cực trị thỏa mãn điều kiện.

Câu 90. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = (2m - 1)x + 3 + m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

- A. $m = \frac{3}{2}$. B. $m = \frac{3}{4}$. C. $m = -\frac{1}{2}$. D. $m = \frac{1}{4}$.

Câu 91. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ có hai điểm cực trị A và B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 4 với O là gốc tọa độ.

- A. $m = -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}; m = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$. B. $m = -1; m = 1$.
C. $m = 1$. D. $m \neq 0$.

Câu 92. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = (m - 1)x^4 - 2(m - 3)x^2 + 1$ không có cực đại.

- A. $1 \leq m \leq 3$. B. $m \leq 1$. C. $m \geq 1$. D. $1 < m \leq 3$.

Câu 93. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 1)x$ có hai điểm cực trị là A và B sao cho A, B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $y = 5x - 9$. Tính tổng tất cả các phần tử của S .

- A. 0. B. 6. C. -6. D. 3.

Câu 94. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

- A. $m = -\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$. B. $m = -1$. C. $m = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$. D. $m = 1$.

5. Tìm m để hàm số, đồ thị hàm số các hàm số khác có cực trị thỏa mãn điều kiện.

Câu 95. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = x^8 + (m - 2)x^5 - (m^2 - 4)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

- A. 3. B. 5. C. 4. D. Vô số.

Câu 96. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 7 điểm cực trị?

- A. 3. B. 5. C. 6. D. 4.

§3. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

1. GTLN, GTNN trên đoạn $[a;b]$.

Câu 97. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$ trên đoạn $[0; \sqrt{3}]$.

- A. $M = 9$. B. $M = 8\sqrt{3}$. C. $M = 1$. D. $M = 6$.

Câu 98. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^2 + \frac{2}{x}$ trên đoạn $[\frac{1}{2}; 2]$.

- A. $m = \frac{17}{4}$. B. $m = 10$. C. $m = 5$. D. $m = 3$.

Câu 99. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 9$ trên đoạn $[-2; 3]$ bằng

- A. 201. B. 2. C. 9. D. 54.

Câu 100. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - x^2 + 13$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

- A. 25. B. $\frac{51}{4}$. C. 13. D. 85.

Câu 101. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ trên đoạn $[2; 4]$.

- A. $\min_{[2;4]} y = 6$. B. $\min_{[2;4]} y = -2$. C. $\min_{[2;4]} y = -3$. D. $\min_{[2;4]} y = \frac{19}{3}$.

Câu 102. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 4x^2 + 5$ trên đoạn $[-2; 3]$ bằng

- A. 50. B. 5. C. 1. D. 122.

Câu 103 (QG17,101). Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^3 - 7x^2 + 11x - 2$ trên đoạn $[0; 2]$.

- A. $m = 11$. B. $m = 0$. C. $m = -2$. D. $m = 3$.

Câu 104. Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[2;4]} y = 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $m < -1$. B. $3 < m \leq 4$. C. $m > 4$. D. $1 \leq m < 3$.

Câu 105. Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = \frac{16}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $m \leq 0$. B. $m > 4$. C. $0 < m \leq 2$. D. $2 < m \leq 4$.

Câu 106. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^4 - x^2 + 13$ trên đoạn $[-2; 3]$.

- A. $m = \frac{51}{4}$. B. $m = \frac{49}{4}$. C. $m = 13$. D. $m = \frac{51}{2}$.

Câu 107. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng 3. Số phần tử của S là

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 6.

Câu 108. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{3}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- A. 144 m/s. B. 36 m/s. C. 243 m/s. D. 27 m/s.

Câu 109. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- A. 24 m/s. B. 108 m/s. C. 18 m/s. D. 64 m/s.

2. GTLN, GTNN trên khoảng.

Câu 110. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$			
y'	+	0	-	0	+		
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

- A. $y_{\text{CD}} = 3$. B. $y_{\text{CT}} = 3$. C. $\min_{\mathbb{R}} y = -1$. D. $\max_{\mathbb{R}} y = 3$.

Câu 111. Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3x + \frac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

- A. $\min_{(0;+\infty)} y = 3\sqrt[3]{9}$. B. $\min_{(0;+\infty)} y = 7$. C. $\min_{(0;+\infty)} y = \frac{33}{5}$. D. $\min_{(0;+\infty)} y = 2\sqrt[3]{9}$.

Câu 112. Ông A dự định sử dụng hết 5 m^2 kính để làm bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

- A. 1,01 m^3 .. B. 0,96 m^3 .. C. 1,33 m^3 .. D. 1,51 m^3 ..

3. Ứng dụng GTNN, GTLN trong bài toán phương trình, bpt, hệ pt.

Câu 113. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $\sqrt[3]{m+3}\sqrt{m+3\sin x} = \sin x$ có nghiệm thực?

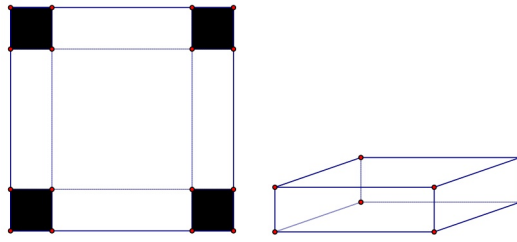
- A. 5. B. 7. C. 3. D. 2.

4. Bài toán ứng dụng, tối ưu, thực tế.

Câu 114. Ông A dự định sử dụng hết $5,5 \text{ m}^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

- A. 1,17 m^3 . B. 1,01 m^3 . C. 1,51 m^3 . D. 1,40 m^3 .

Câu 115. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



- A. $x = 6$. B. $x = 3$. C. $x = 2$. D. $x = 4$.

Câu 116. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 9t^2$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu ?

- A. $216(m/s)$. B. $30(m/s)$. C. $400(m/s)$. D. $54(m/s)$.

Câu 117. Ông A dự định sử dụng hết $6,5 \text{ m}^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

- A. $2,26 \text{ m}^3$. B. $1,61 \text{ m}^3$. C. $1,33 \text{ m}^3$. D. $1,50 \text{ m}^3$.

§4. Đường tiệm cận

1. Bài toán xác định các đường tiệm cận của hàm số (không chứa tham số) hoặc biết BBT,

Câu 118. Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16}$.

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.

Câu 119. Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x + 1}{x + 1}$.

- A. $x = 1$. B. $y = -1$. C. $y = 2$. D. $x = -1$.

Câu 120. Tìm số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1}$.

- A. 3. B. 1. C. 0. D. 2.

Câu 121. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$ là

- A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.

Câu 122. Đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây có tiệm cận đứng?

- A. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$. B. $y = \frac{1}{x^2 + x + 1}$. C. $y = \frac{1}{x^4 + 1}$. D. $y = \frac{1}{x^2 + 1}$.

Câu 123. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+x}$ là

- A. 0. B. 3. C. 2. D. 1.

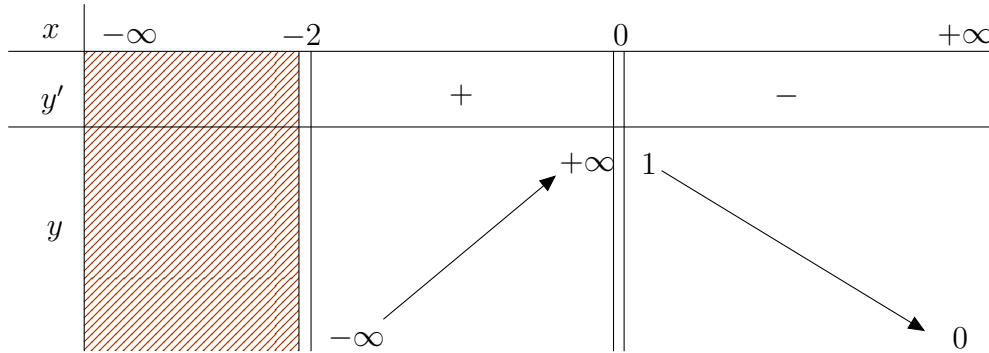
Câu 124. Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

- A. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.
B. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.

C. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$.

D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = 1$ và $x = -1$.

Câu 125. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Hỏi đồ thị của hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?



A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Câu 126. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận đứng

A. $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$. B. $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$. C. $y = \sqrt{x^2 - 1}$. D. $y = \frac{x}{x + 1}$.

Câu 127. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x + 25} - 5}{x^2 + x}$ là

A. 2..

B. 0..

C. 1..

D. 3..

Câu 128. Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x - 1 - \sqrt{x^2 + x + 3}}{x^2 - 5x + 6}$

A. $x = -3$ và $x = -2$.

B. $x = -3$.

C. $x = 3$ và $x = 2$.

D. $x = 3$.

2. Bài toán xác định các đường tiệm cận của hàm số có chứa tham số.

Câu 129. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \frac{x + 1}{\sqrt{mx^2 + 1}}$

A. Không có giá trị thực nào của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

B. $m < 0$.

C. $m = 0$.

D. $m > 0$.

§5. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

1. Nhận dạng đồ thị, bảng biến thiên.

Câu 130.

Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây.

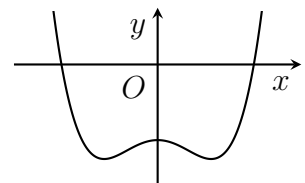
Hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = -x^3 + x^2 - 1$.

B. $y = x^4 - x^2 - 1$.

C. $y = x^3 - x^2 - 1$.

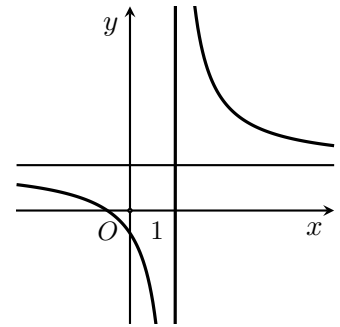
D. $y = -x^4 + x^2 - 1$.



Câu 131.

Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ với a, b, c, d là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
 B. $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
 C. $y' > 0, \forall x \neq 1$.
 D. $y' < 0, \forall x \neq 1$.



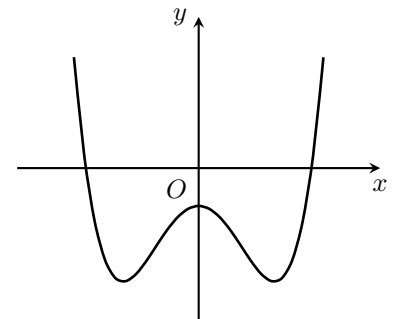
Câu 132. Cho hàm số $y = (x - 2)(x^2 + 1)$ có đồ thị (C) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. (C) cắt trục hoành tại hai điểm.
 B. (C) cắt trục hoành tại một điểm.
 C. (C) không cắt trục hoành.
 D. (C) cắt trục hoành tại ba điểm.

Câu 133 (QG17,102).

Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ với a, b, c là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

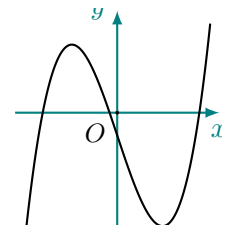
- A. Phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt.
 B. Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt.
 C. Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm trên tập số thực.
 D. Phương trình $y' = 0$ có đúng một nghiệm thực.



Câu 134. Đường cong trong hình vẽ bên

là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

- A. $y = -x^4 + x^2 - 1$.
 B. $y = x^4 - 3x^2 - 1$.
 C. $y = -x^3 - 3x - 1$.
 D. $y = x^3 - 3x - 1$.

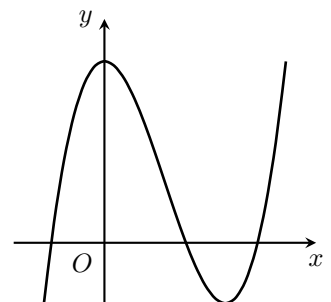


Câu 135.

Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây.

Hàm số đó là hàm số nào?

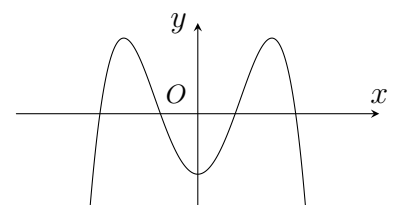
- A. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.
 B. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.
 C. $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.
 D. $y = x^3 - 3x^2 + 3$.



Câu 136.

Đường cong trong hình vẽ bên là của hàm số nào dưới đây?

- A. $y = x^4 - 3x^2 - 1$.
 B. $y = x^3 - 3x^2 - 1$.
 C. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.
 D. $y = -x^4 + 3x^2 - 1$.



Câu 137. Đường cong trong hình vẽ bên

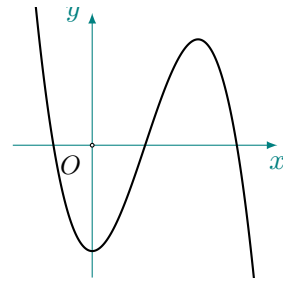
là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

A. $y = x^3 - 3x^2 - 2$.

B. $y = x^4 - x^2 - 2$.

C. $y = -x^4 + x^2 - 2$.

D. $y = -x^3 + 3x^2 - 2$.



Câu 138. Đường cong trong hình bên là đồ thị

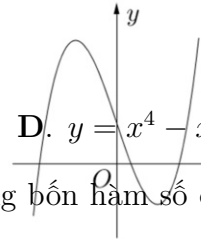
của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?

A. $y = -x^2 + x - 1$.

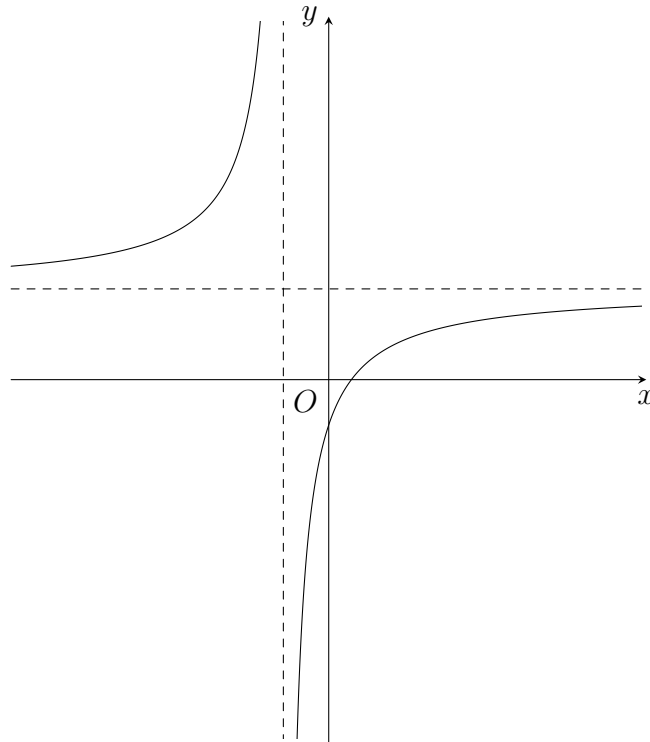
B. $y = -x^3 + 3x + 1$.

C. $y = x^3 - 3x + 1$.

D. $y = x^4 - x^2 + 1$.



Câu 139. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào?



A. $y = \frac{2x+3}{x+1}$.

B. $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

C. $y = \frac{2x-2}{x-1}$.

D. $y = \frac{2x+1}{x-1}$.

Câu 140. Đường cong trong hình bên

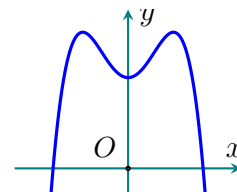
là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

A. $y = -x^4 + 2x^2 + 2$.

B. $y = x^4 - 2x^2 + 2$.

C. $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

D. $y = -x^3 + 3x^2 + 2$.



Câu 141. Đồ thị của hàm số $y = \frac{x-2}{x^2-4}$ có bao nhiêu tiệm cận?

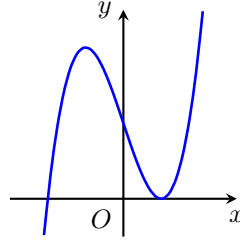
A. 0.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

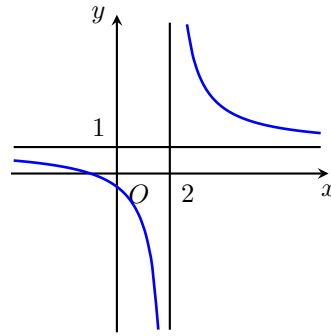
Câu 142. Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây.



Hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = x^3 - 3x + 2$. B. $y = x^4 - x^2 + 1$. C. $y = x^4 + x^2 + 1$. D. $y = -x^3 + 3x + 2$.

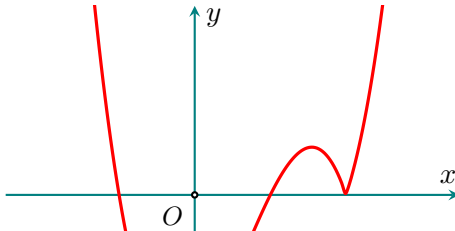
Câu 143. Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ với a, b, c, d là các số thực.



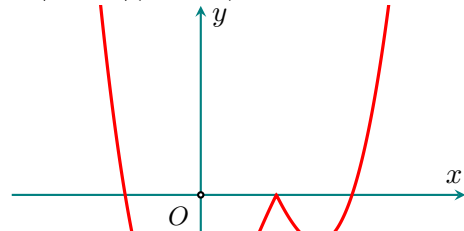
Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $y' < 0, \forall x \neq 2$. B. $y' < 0, \forall x \neq 1$. C. $y' > 0, \forall x \neq 2$. D. $y' > 0, \forall x \neq 1$.

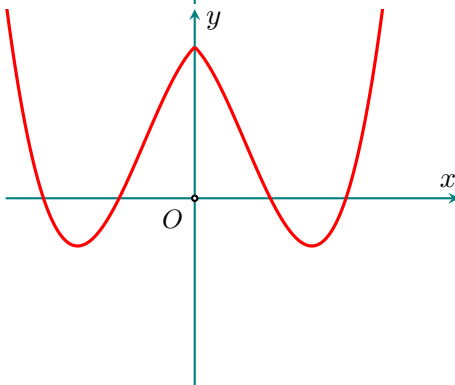
Câu 144. Hình nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = |x - 2|(x^2 - 1)$?



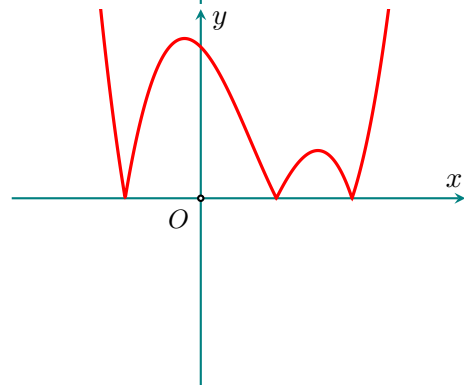
A.



B.



C.



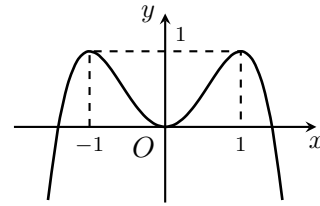
D.

Câu 145. Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{2}x^2$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ (M, N khác A) thỏa mãn $y_1 - y_2 = 6(x_1 - x_2)$?

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

2. Biện luận số giao điểm dựa vào đồ thị, bảng biến thiên.

Câu 146. Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2$ có đồ thị như hình bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m



để phương trình $-x^4 + 2x^2 = m$ có bốn nghiệm thực phân biệt.

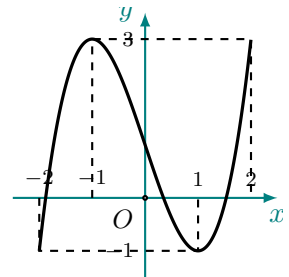
- A. $m > 0$. B. $0 \leq m \leq 1$. C. $0 < m < 1$. D. $m < 1$.

Câu 147. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 2]$

và có đồ thị như hình vẽ bên.

Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) - 4 = 0$ trên đoạn $[-2; 2]$ là

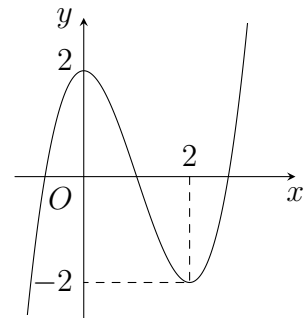
- A. 3.. B. 1..
C. 2.. D. 4..



Câu 148.

Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$). Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) + 4 = 0$ là

- A. 3. B. 0. C. 1. D. 2.

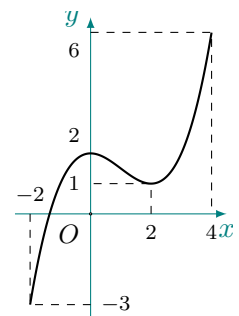


Câu 149. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 4]$

và có đồ thị như hình vẽ bên.

Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) - 5 = 0$ trên đoạn $[-2; 4]$ là

- A. 0.
B. 3.
C. 2.
D. 1.



Câu 150. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Số nghiệm phương trình $f(x) - 2 = 0$ là

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$				-2		$-\infty$

Arrows indicate the function values at the critical points: from $+\infty$ at $x = -1$ to 4 , and from $-\infty$ at $x = 3$ to -2 .

- A. 0. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 151. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$,

liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm thực phân biệt.

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$	
y'	$-$			$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-1		2	$-\infty$	

- A. $[-1; 2]$. B. $(-1; 2)$. C. $(-1; 2]$. D. $(-\infty; 2]$.

Câu 152. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = -mx$ cắt đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - m + 2$ tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho $AB = BC$.

- A. $m \in (-\infty; 3)$. B. $m \in (-\infty; -1)$. C. $m \in (-\infty; +\infty)$. D. $m \in (1; +\infty)$.

3. Sự tương giao của hai đồ thị (liên quan đến tọa độ giao điểm).

Câu 153. Đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$ và đồ thị của hàm số $y = -x^2 + 4$ có tất cả bao nhiêu điểm chung ?

- A. 0. B. 4. C. 1. D. 2.

Câu 154. Cho hàm số $y = x^3 - 3x$ có đồ thị (C) . Tìm số giao điểm của (C) và trục hoành.

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.

Câu 155. Biết rằng đường thẳng $y = -2x + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + x + 2$ tại điểm duy nhất; kí hiệu $(x_0; y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0 .

- A. $y_0 = 4$. B. $y_0 = 0$. C. $y_0 = 2$. D. $y_0 = -1$.

Câu 156. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = mx - m + 1$ cắt đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + x + 2$ tại ba điểm A, B, C phân biệt sao cho $AB = BC$.

- A. $m \in (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$. B. $m \in \mathbb{R}$.
C. $m \in \left(-\frac{1}{5}; 4\right) \cup (4; +\infty)$. D. $m \in (-2; +\infty)$.

Câu 157. Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+2}$ có đồ thị (C) . Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của (C) . Xét tam giác đều ABI có hai đỉnh A, B thuộc (C) , đoạn thẳng AB có độ dài bằng:

- A. $2\sqrt{2}$. B. 4. C. 2. D. $2\sqrt{3}$.

Câu 158. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^4 - \frac{14}{3}x^2$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ ($M, N \neq A$) thỏa mãn $y_1 - y_2 = 8(x_1 - x_2)$?

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

Câu 159. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ có đồ thị (C) . Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của (C) . Xét tam giác đều ABI có hai đỉnh A, B thuộc (C) , đoạn thẳng AB có độ dài bằng

- A. $\sqrt{6}$. B. $2\sqrt{3}$. C. 2. D. $2\sqrt{2}$.

Câu 160. Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ có đồ thị (C) . Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của (C) . Xét tam giác đều ABI có hai đỉnh A, B thuộc (C) , đoạn thẳng AB có độ dài bằng

A. $2\sqrt{3}$.

B. $2\sqrt{2}$.

C. $\sqrt{3}$.

D. $\sqrt{6}$.

4. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số.

Câu 161. Cho hàm số $y = \frac{1}{6}x^4 - \frac{7}{3}x^2$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ thỏa mãn $y_1 - y_2 = 4(x_1 - x_2)$?

A. 3.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Câu 162. Cho hàm số $y = \frac{-x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(a; 1)$ Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của a để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua A . Tổng giá trị tất cả phần tử của S bằng

A. 1.

B. $\frac{3}{2}$.

C. $\frac{5}{2}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Chương 2. Hàm số lũy thừa- Hàm số mũ và Hàm số lô-ga-rít**§1. Lũy thừa****1. Tính giá trị của biểu thức chứa lũy thừa.**

Câu 163. Rút gọn biểu thức $P = x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{x}$ với $x > 0$.

A. $P = x^{\frac{1}{8}}$.

B. $P = x^2$.

C. $P = \sqrt{x}$.

D. $P = x^{\frac{2}{9}}$.

Câu 164. Rút gọn biểu thức $Q = b^{\frac{5}{3}} : \sqrt[3]{b}$ với $b > 0$.

A. $Q = b^2$.

B. $Q = b^{\frac{5}{9}}$.

C. $Q = b^{-\frac{4}{3}}$.

D. $Q = b^{\frac{4}{3}}$.

Câu 165. Tính giá trị của biểu thức $P = (7 + 4\sqrt{3})^{2017} (4\sqrt{3} - 7)^{2016}$

A. $P = 1$.

B. $P = 7 - 4\sqrt{3}$.

C. $P = 7 + 4\sqrt{3}$.

D. $P = (7 + 4\sqrt{3})^{2016}$.

2. Biến đổi, rút gọn, biểu diễn các biểu thức chứa lũy thừa.

Câu 166. Cho biểu thức $P = \sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt{x^3}}}$, với $x > 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $P = x^{\frac{1}{2}}$.

B. $P = x^{\frac{13}{24}}$.

C. $P = x^{\frac{1}{4}}$.

D. $P = x^{\frac{2}{3}}$.

§2. Hàm số lũy thừa**1. Tập xác định của hàm số chứa hàm lũy thừa.**

Câu 167. Tìm tập xác định D của hàm số $y = (x - 1)^{\frac{1}{3}}$.

A. $D = (-\infty; 1)$.

B. $D = (1; +\infty)$.

C. $D = \mathbb{R}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Câu 168. Tìm tập xác định D của hàm số $y = (x^2 - x - 2)^{-3}$.

A. $D = \mathbb{R}$.

B. $D = (0; +\infty)$.

C. $D = (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$.

2. Đạo hàm hàm số lũy thừa.

Câu 169. Với a là số thực dương tùy ý, $\ln(7a) - \ln(3a)$ bằng

A. $\frac{\ln(7a)}{\ln(3a)}$..

B. $\frac{\ln 7}{\ln 3}$..

C. $\ln \frac{7}{3}$..

D. $\ln(4a)$..

§3. Lô-ga-rít

1. Tính giá trị biểu thức chứa lô-ga-rít.

Câu 170. Cho a là số thực dương khác 1. Tính $I = \log_{\sqrt{a}} a$.

- A. $I = \frac{1}{2}$. B. $I = 0$. C. $I = -2$. D. $I = 2$.

Câu 171. Với a, b là các số thực dương tùy ý và a khác 1, đặt $P = \log_a b^3 + \log_{a^2} b^6$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $P = 9 \log_a b$. B. $P = 27 \log_a b$. C. $P = 15 \log_a b$. D. $P = 6 \log_a b$.

Câu 172 (QG17,102). Cho a là số thực dương khác 1. Mệnh đề nào dưới đây đúng với mọi số thực dương x, y ?

- A. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$. B. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x + \log_a y$.
C. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a (x - y)$. D. $\log_a \frac{x}{y} = \frac{\log_a x}{\log_a y}$.

Câu 173. Với a là số thực dương bất kỳ, mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $\log(3a) = 3 \log a$. B. $\log a^3 = \frac{1}{3} \log a$. C. $\log a^3 = 3 \log a$. D. $\log(3a) = \frac{1}{3} \log a$.

Câu 174 (QG17,102). Cho $\log_a b = 2$ và $\log_a c = 3$. Tính $P = \log_a (b^2 c^3)$.

- A. $P = 31$. B. $P = 13$. C. $P = 30$. D. $P = 108$.

Câu 175. Cho a là số thực dương tùy ý khác 1. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $\log_2 a = \log_a 2$. B. $\log_2 a = \frac{1}{\log_2 a}$. C. $\log_2 a = \frac{1}{\log_a 2}$. D. $\log_2 a = -\log_a 2$.

Câu 176. Với mọi a, b, x là các số thực dương thỏa mãn $\log_2 x = 5 \log_2 a + 3 \log_2 b$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $x = 3a + 5b$. B. $x = 5a + 3b$. C. $x = a^5 + b^3$. D. $x = a^5 b^3$.

Câu 177. Cho a là số thực dương khác 2. Tính $I = \log_a \left(\frac{a^2}{4} \right)$.

- A. $I = \frac{1}{2}$. B. $I = 2$. C. $I = -\frac{1}{2}$. D. $I = -2$.

Câu 178. Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$. B. $\ln(ab) = \ln a \cdot \ln b$.
C. $\ln \frac{a}{b} = \frac{\ln a}{\ln b}$. D. $\ln \frac{a}{b} = \ln b - \ln a$.

Câu 179. Cho a là số thực dương, $a \neq 1$ và $P = \log_{\sqrt[3]{a}} a^3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $P = 3$. B. $P = 1$. C. $P = 9$. D. $P = \frac{1}{3}$.

Câu 180. Cho $\log_a x = 3$, $\log_b x = 4$ với a, b là các số thực lớn hơn 1. Tính $P = \log_{ab} x$.

- A. $P = \frac{7}{12}$. B. $P = \frac{1}{12}$. C. $P = 12$. D. $P = \frac{12}{7}$.

Câu 181. Cho x, y là các số thực lớn hơn 1 thỏa mãn $x^2 + 9y^2 = 6xy$. Tính $M = \frac{1 + \log_{12} x + \log_{12} y}{2 \log_{12} (x + 3y)}$.

- A. $M = \frac{1}{4}$. B. $M = 1$. C. $M = \frac{1}{2}$. D. $M = \frac{1}{3}$.

Câu 182. Với các số thực dương x, y tùy ý, đặt $\log_3 x = \alpha$, $\log_3 y = \beta$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log_{27} \left(\frac{\sqrt{x}}{y} \right)^3 = 9 \left(\frac{\alpha}{2} - \beta \right).$

B. $\log_{27} \left(\frac{\sqrt{x}}{y} \right)^3 = \frac{\alpha}{2} + \beta.$

C. $\log_{27} \left(\frac{\sqrt{x}}{y} \right)^3 = 9 \left(\frac{\alpha}{2} + \beta \right).$

D. $\log_{27} \left(\frac{\sqrt{x}}{y} \right)^3 = \frac{\alpha}{2} - \beta.$

Câu 183. Cho $\log_3 a = 2$ và $\log_2 b = \frac{1}{2}$. Tính $I = 2 \log_3 [\log_3 (3a)] + \log_{\frac{1}{4}} b^2$.

A. $I = \frac{5}{4}.$

B. $I = 4.$

C. $I = 0.$

D. $I = \frac{3}{2}.$

Câu 184. Với mọi số thực dương a và b thỏa mãn $a^2 + b^2 = 8ab$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log(a+b) = \frac{1}{2}(\log a + \log b).$

B. $\log(a+b) = 1 + \log a + \log b.$

C. $\log(a+b) = \frac{1}{2}(1 + \log a + \log b).$

D. $\log(a+b) = \frac{1}{2} + \log a + \log b.$

2. Biến đổi, rút gọn, biểu diễn biểu thức chứa lô-ga-rít.

Câu 185. Với a là số thực dương tùy ý, $\ln(5a) - \ln(3a)$ bằng

A. $\frac{\ln(5a)}{\ln(3a)}.$

B. $\ln(2a).$

C. $\ln \frac{5}{3}.$

D. $\frac{\ln 5}{\ln 3}.$

Câu 186. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_3 \left(\frac{3}{a} \right)$ bằng

A. $1 - \log_3 a.$

B. $3 - \log_3 a.$

C. $\vec{n}_3 = (2; 1; 3).$

D. $\vec{n}_2 = (-1; 3; 2).$

Câu 187. Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log_2 \left(\frac{2a^3}{b} \right) = 1 + 3\log_2 a - \log_2 b.$

B. $\log_2 \left(\frac{2a^3}{b} \right) = 1 + \frac{1}{3}\log_2 a - \log_2 b.$

C. $\log_2 \left(\frac{2a^3}{b} \right) = 1 + 3\log_2 a + \log_2 b.$

D. $\log_2 \left(\frac{2a^3}{b} \right) = 1 + \frac{1}{3}\log_2 a + \log_2 b.$

Câu 188. Đặt $a = \log_2 3, b = \log_5 3$. Hãy biểu diễn $\log_6 45$ theo a và b .

A. $\log_6 45 = \frac{a + 2ab}{ab}.$

B. $\log_6 45 = \frac{2a^2 - 2ab}{ab}.$

C. $\log_6 45 = \frac{a + 2ab}{ab + b}.$

D. $\log_6 45 = \frac{2a^2 - 2ab}{ab + b}.$

Câu 189. Cho các số thực dương a, b , với $a \neq 1$ Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{2}\log_a b.$

B. $\log_{a^2}(ab) = 2 + 2\log_a b.$

C. $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{4}\log_a b.$

D. $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_a b.$

Câu 190. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a \neq 1, a \neq \sqrt{b}$ và $\log_a b = \sqrt{3}$. Tính $P =$

$\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \sqrt{\frac{b}{a}}$

A. $P = -5 + 3\sqrt{3}.$

B. $P = -1 + \sqrt{3}.$

C. $P = -1 - \sqrt{3}.$

D. $P = -5 - 3\sqrt{3}.$

Câu 191. Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $\log_{3a+2b+1}(9a^2 + b^2 + 1) + \log_{6ab+1}(3a + 2b + 1) = 2$. Giá trị của $a + 2b$ bằng

A. 6.

B. 9.

C. $\frac{7}{2}.$

D. $\frac{5}{2}.$

Câu 192. Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $\log_{2a+2b+1}(4a^2 + b^2 + 1) + \log_{4ab+1}(2a + 2b + 1) = 2$. Giá trị của $a + 2b$ bằng

A. $\frac{15}{4}.$

B. 5.

C. 4.

D. $\frac{3}{2}.$

3. So sánh các biểu thức lô-ga-rít.

Câu 193. Cho hai số thực a và b , với $1 < a < b$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng ?

- A. $\log_a b < 1 < \log_b a$. B. $1 < \log_a b < \log_b a$.
C. $\log_b a < \log_a b < 1$. D. $\log_b a < 1 < \log_a b$.

Câu 194. Cho $a > 0; b > 0$ thỏa mãn $\log_{4a+5b+1}(16a^2 + b^2 + 1) + \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1) = 2$. Giá trị của $a + 2b$ bằng:

- A. 9.. B. 6.. C. $\frac{27}{4}$.. D. $\frac{20}{3}$..

§4. Hàm số mũ. Hàm số lô-ga-rít**1. Tập xác định của hàm số mũ, hàm số lô-ga-rít.**

Câu 195. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \log_3(x^2 - 4x + 3)$.

- A. $\mathcal{D} = (2 - \sqrt{2}; 1) \cup (3; 2 + \sqrt{2})$. B. $\mathcal{D} = (1; 3)$.
C. $\mathcal{D} = (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$. D. $\mathcal{D} = (-\infty; 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}; +\infty)$.

Câu 196 (QG17,102). Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_2(2x + 1)$.

- A. $y' = \frac{1}{(2x + 1) \ln 2}$. B. $y' = \frac{2}{(2x + 1) \ln 2}$.
C. $y' = \frac{2}{2x + 1}$. D. $y' = \frac{1}{2x + 1}$.

Câu 197. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_5 \frac{x - 3}{x + 2}$.

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. B. $D = (-\infty; -2) \cup [3; +\infty)$.
C. $D = (-2; 3)$. D. $D = (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$.

Câu 198. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \log_2(x^2 - 2x - 3)$.

- A. $\mathcal{D} = (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$. B. $\mathcal{D} = [-1; 3]$.
C. $\mathcal{D} = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$. D. $\mathcal{D} = (-1; 3)$.

Câu 199. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \log(x^2 - 2x - m + 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

- A. $m \geq 0$. B. $m < 0$. C. $m \leq 2$. D. $m > 2$.

Câu 200. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \ln(x^2 - 2x + m + 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

- A. $m = 0$. B. $0 < m < 3$.
C. $m < -1$ hoặc $m > 0$. D. $m > 0$.

2. Tính đạo hàm hàm số mũ, hàm số lô-ga-rít.

Câu 201. Tính đạo hàm của hàm số $y = 13^x$.

- A. $y' = x \cdot 13^{x-1}$. B. $y' = 13^x \cdot \ln 13$. C. $y' = 13^x$. D. $y' = \frac{13^x}{\ln 13}$.

Câu 202. Cho hàm số $f(x) = 2^x \cdot 7^x$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai** ?

- A. $f(x) < 1 \Leftrightarrow x + x^2 \log_2 7 < 0$. B. $f(x) < 1 \Leftrightarrow x \ln 2 + x^2 \ln 7 < 0$.

C. $f(x) < 1 \Leftrightarrow x \log_7 2 + x^2 < 0$.

D. $f(x) < 1 \Leftrightarrow 1 + x \log_2 7 < 0$.

Câu 203. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x+1}{4^x}$.

A. $y' = \frac{1 - 2(x+1) \ln 2}{2^{2x}}$.

B. $y' = \frac{1 + 2(x+1) \ln 2}{2^{2x}}$.

C. $y' = \frac{1 - 2(x+1) \ln 2}{2^{x^2}}$.

D. $y' = \frac{1 + 2(x+1) \ln 2}{2^{x^2}}$.

Câu 204. Tính đạo hàm của hàm số $y = \ln(1 + \sqrt{x+1})$.

A. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}(1 + \sqrt{x+1})}$.

B. $y' = \frac{1}{1 + \sqrt{x+1}}$.

C. $y' = \frac{1}{\sqrt{x+1}(1 + \sqrt{x+1})}$.

D. $y' = \frac{2}{\sqrt{x+1}(1 + \sqrt{x+1})}$.

Câu 205. Tìm đạo hàm của hàm số $y = \log x$.

A. $y' = \frac{1}{x}$.

B. $y' = \frac{\ln 10}{x}$.

C. $y' = \frac{1}{x \ln 10}$.

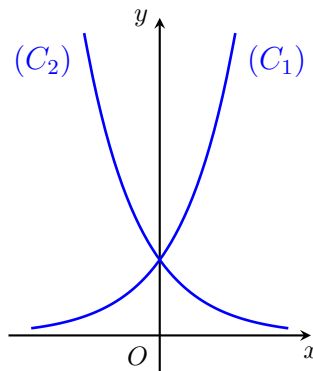
D. $y' = \frac{1}{10 \ln x}$.

Câu 206. Cho hàm số $y = \frac{\ln x}{x}$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $2y' + xy'' = -\frac{1}{x^2}$. B. $y' + xy'' = \frac{1}{x^2}$. C. $y' + xy'' = -\frac{1}{x^2}$. D. $2y' + xy'' = \frac{1}{x^2}$.

3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số mũ, lô-ga-rít.

Câu 207. Cho hai hàm số $y = a^x$, $y = b^x$ với a, b là hai số thực dương khác 1, lần lượt có đồ thị là (C_1) và (C_2) như hình bên.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

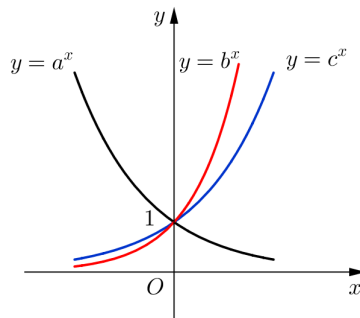
A. $0 < a < b < 1$.

B. $0 < b < 1 < a$.

C. $0 < a < 1 < b$.

D. $0 < b < a < 1$.

Câu 208. Cho ba số thực dương a, b, c khác 1. Đồ thị các hàm số $y = a^x$, $y = b^x$, $y = c^x$ được cho trong hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a < b < c$.

B. $a < c < b$.

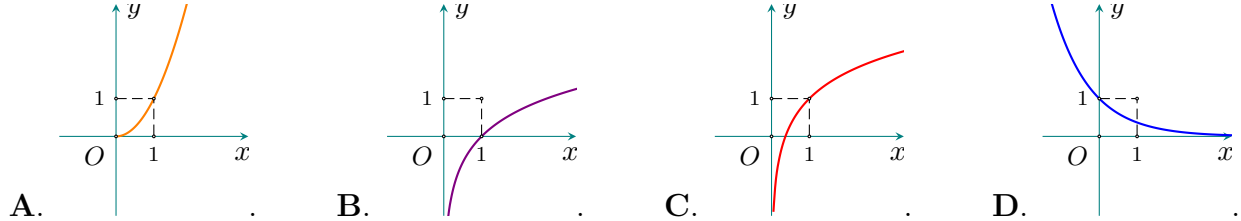
C. $b < c < a$.

D. $c < a < b$.

Câu 209. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = \ln(x^2 + 1) - mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$

- A. $(-\infty; -1]$. B. $(-\infty; -1)$. C. $[-1; 1]$. D. $[1; +\infty)$.

Câu 210. Cho hàm số $f(x) = x \ln x$. Đồ thị nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = f'(x)$. Tìm đồ thị đó.



4. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức chứa hàm mũ, hàm lô-ga-rít.

Câu 211. Xét các số thực a, b thỏa mãn $a > b > 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = \log_b^2(a^2) + 3\log_b\left(\frac{a}{b}\right)$.

- A. $P_{\min} = 19$. B. $P_{\min} = 13$. C. $P_{\min} = 14$. D. $P_{\min} = 15$.

Câu 212. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3 \frac{1-xy}{x+2y} = 3xy + x + 2y - 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = x + y$.

- A. $P_{\min} = \frac{9\sqrt{11} - 19}{9}$. B. $P_{\min} = \frac{9\sqrt{11} + 19}{9}$.
C. $P_{\min} = \frac{18\sqrt{11} - 29}{21}$. D. $P_{\min} = \frac{2\sqrt{11} - 3}{3}$.

Câu 213. Xét hàm số $f(t) = \frac{9^t}{9t + m^2}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $f(x) + f(y) = 1$ với mọi số thực x, y thỏa mãn $e^{x+y} \leq e(x+y)$. Tìm số phần tử của S .

- A. 0. B. 1. C. Vô số. D. 2.

Câu 214. Xét các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_2 \frac{1-ab}{a+b} = 2ab + a + b - 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = a + 2b$.

- A. $P_{\min} = \frac{2\sqrt{10} - 3}{2}$. B. $P_{\min} = \frac{3\sqrt{10} - 7}{2}$. C. $P_{\min} = \frac{2\sqrt{10} - 1}{2}$. D. $P_{\min} = \frac{2\sqrt{10} - 5}{2}$.

5. Bài toán thực tế.

Câu 215. Một người gửi tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất 6,6%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau một năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền ban đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?

- A. 11 năm.. B. 10 năm.. C. 13 năm.. D. 12 năm..

Câu 216. Một người gửi 50 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 6%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó nhận được số tiền nhiều hơn 100

triệu đồng bao gồm gốc và lãi? Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra.

- A. 13 năm. B. 14 năm. C. 12 năm. D. 11 năm.

Câu 217. Một người gửi tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất 6,1 %/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền gửi ban đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?

- A. 13 năm. B. 10 năm. C. 11 năm. D. 12 năm.

Câu 218. Một người gửi 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 0,4%/tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau đúng 6 tháng, người đó được lĩnh số tiền (cả vốn ban đầu và lãi) gần nhất với số nào dưới đây, nếu trong thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi?

- A. 102.424.000 đồng. B. 102.423.000 đồng. C. 102.016.000 đồng. D. 102.017.000 đồng.

Câu 219. Ông A vay ngắn hạn ngân hàng 100 triệu đồng, với lãi suất 12%/năm. Ông muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách : Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau và trả hết tiền nợ sau đúng 3 tháng kể từ ngày vay. Hỏi, theo cách đó, số tiền m mà ông A sẽ phải trả cho ngân hàng trong mỗi lần hoàn nợ là bao nhiêu ? Biết rằng, lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian ông A hoàn nợ.

A. $m = \frac{100 \cdot (1,01)^3}{3}$ (triệu đồng).

B. $m = \frac{(1,01)^3}{(1,01)^3 - 1}$ (triệu đồng).

C. $m = \frac{100 \times 1,03}{3}$ (triệu đồng).

D. $m = \frac{120 \cdot (1,12)^3}{(1,12)^3 - 1}$ (triệu đồng).

Câu 220. Đầu năm 2016, ông A thành lập một công ty. Tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong năm 2016 là 1 tỷ đồng. Biết rằng cứ sau mỗi năm thì tổng số tiền dùng để trả lương cho nhân viên trong cả năm đó tăng thêm 15% so với năm trước. Hỏi năm nào dưới đây là năm đầu tiên mà tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong cả năm lớn hơn 2 tỷ đồng?

- A. Năm 2023. B. Năm 2022. C. Năm 2021. D. Năm 2020.

Câu 221. Một người gửi tiết kiệm vào ngân hàng với lãi suất 7,5 %/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền đã gửi, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?

- A. 11 năm. B. 9 năm. C. 10 năm. D. 12 năm.

§5. Phương trình mũ và phương trình lô-ga-rít

1. Phương trình cơ bản.

Câu 222. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $3^x = m$ có nghiệm thực.

- A. $m \geq 1$. B. $m \geq 0$. C. $m > 0$. D. $m \neq 0$.

Câu 223. Phương trình $5^{2x+1} = 125$ có nghiệm là

- A. $x = \frac{3}{2}$. B. $x = \frac{5}{2}$. C. $x = 1$. D. $x = 3$.

Câu 224. Tìm nghiệm của phương trình $\log_2(x - 5) = 4$.

- A. $x = 21$. B. $x = 3$. C. $x = 11$. D. $x = 13$.

Câu 225 (QG17,102). Tìm nghiệm của phương trình $\log_2(1 - x) = 2$.

- A. $x = -4$. B. $x = -3$. C. $x = 3$. D. $x = 5$.

Câu 226 (QG17,102). Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x - 1) + \log_{\frac{1}{2}}(x + 1) = 1$.

- A. $S = \{2 + \sqrt{5}\}$. B. $S = \{2 - \sqrt{5}; 2 + \sqrt{5}\}$.
C. $S = \{3\}$. D. $S = \{\frac{3+\sqrt{13}}{2}\}$.

Câu 227. Phương trình $2^{2x+1} = 32$ có nghiệm là

- A. $x = \frac{5}{2}$. B. $x = 2$. C. $x = \frac{3}{2}$. D. $x = 3$.

Câu 228. Tìm nghiệm của phương trình $\log_{25}(x + 1) = \frac{1}{2}$.

- A. $x = -6$. B. $x = 6$. C. $x = 4$. D. $x = \frac{23}{2}$.

Câu 229. Tập nghiệm S của phương trình $\log_3(2x + 1) - \log_3(x - 1) = 1$.

- A. $S = \{4\}$. B. $S = \{3\}$. C. $S = \{-2\}$. D. $S = \{1\}$.

Câu 230. Giải phương trình $\log_4(x - 1) = 3$.

- A. $x = 63$. B. $x = 65$. C. $x = 80$. D. $x = 82$.

Câu 231. Tập nghiệm của phương trình $\log_3(x^2 - 7) = 2$ là

- A. $\{-\sqrt{15}; \sqrt{15}\} ..$ B. $\{-4; 4\} ..$ C. $\{4\} ..$ D. $\{-4\} ..$

2. Phương pháp đưa về cùng cơ số.

Câu 232. Tìm nghiệm của phương trình $3^{x-1} = 27$.

- A. $x = 9$. B. $x = 3$. C. $x = 4$. D. $x = 10$.

Câu 233. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_2(x - 1) + \log_2(x + 1) = 3$.

- A. $S = \{-3; 3\}$. B. $S = \{4\}$.
C. $S = \{3\}$. D. $S = \{-\sqrt{10}; \sqrt{10}\}$.

Câu 234. Tổng giá trị tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x \cdot \log_{81} x = \frac{2}{3}$ bằng

- A. $\frac{82}{9}$. B. $\frac{80}{9}$. C. 9. D. 0.

3. Phương pháp đặt ẩn phụ.

Câu 235. Cho phương trình $4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$. Khi đặt $t = 2^x$, ta được phương trình nào dưới đây?

- A. $2t^2 - 3 = 0$. B. $t^2 + t - 3 = 0$. C. $4t - 3 = 0$. D. $t^2 + 2t - 3 = 0$.

Câu 236. Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m^2 - 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

- A. 3.. B. 5.. C. 2.. D. 1..

Câu 237. Tìm tập hợp các giá trị của tham số thực m để phương trình $6^x + (3 - m)2^x - m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.

- A. $[3; 4]$. B. $[2; 4]$. C. $(2; 4)$. D. $(3; 4)$.

Câu 238. Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3^2 x - m \log_3 x + 2m - 7 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 x_2 = 81$.

- A. $m = -4$. B. $m = 4$. C. $m = 81$. D. $m = 44$.

Câu 239. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x - 2^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt.

- A. $m \in (-\infty; 1)$. B. $m \in (0; +\infty)$. C. $m \in (0; 1]$. D. $m \in (0; 1)$.

Câu 240. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $16^x - m \cdot 4^{x+1} + 5m^2 - 45 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

- A. 13. B. 3. C. 6. D. 4.

Câu 241. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $9^x - m \cdot 3^{x+1} + 3m^2 - 75 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

- A. 8. B. 4. C. 19. D. 5.

Câu 242. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $16^x - 2 \cdot 12^x + (m - 2)9^x = 0$ có nghiệm dương?

- A. 1. B. 2. C. 4. D. 3.

Câu 243. Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình $9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 1$.

- A. $m = 6$. B. $m = -3$. C. $m = 3$. D. $m = 1$.

Câu 244. Xét các số nguyên dương a, b sao cho phương trình $a \ln^2 x + b \ln x + 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $5 \log^2 x + b \log x + a = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn $x_1 x_2 > x_3 x_4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $S_{\min}$ của $S = 2a + 3b$.

- A. $S_{\min} = 30$. B. $S_{\min} = 25$. C. $S_{\min} = 33$. D. $S_{\min} = 17$.

4. Phương pháp hàm số, đánh giá.

Câu 245. Cho phương trình $7^x + m = \log_7(x - m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-25; 25)$ để phương trình trên có nghiệm?

- A. 9.. B. 25.. C. 24.. D. 26..

Câu 246. Hỏi phương trình $3x^2 - 6x + \ln(x + 1)^3 + 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.

Câu 247. Cho phương trình $5^x + m = \log_5(x - m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-20; 20)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

- A. 20. B. 19. C. 9. D. 21.

Câu 248. Cho phương trình $2^x + m = \log_2(x - m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-18; 18)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

- A. 9. B. 19. C. 17. D. 18.

Câu 249. Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên trong đoạn $[-2017; 2017]$ để phương trình $\log(mx) = 2\log(x + 1)$ có nghiệm duy nhất?

- A. 2017. B. 4014. C. 2018. D. 4015.

5. Bài toán thực tế.

Câu 250. Số lượng của loại vi khuẩn A trong một phòng thí nghiệm được tính theo công thức $s(t) = s(0) \cdot 2^t$, trong đó $s(0)$ là số lượng vi khuẩn A lúc ban đầu, $s(t)$ là số lượng vi khuẩn A có sau t phút. Biết sau 3 phút thì số lượng vi khuẩn A là 625 nghìn con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc ban đầu, số lượng vi khuẩn A là 10 triệu con ?

- A. 48 phút. B. 19 phút. C. 7 phút. D. 12 phút.

§6. Bất phương trình mũ và lô-ga-rít

1. Bất phương trình cơ bản.

Câu 251. Giải bất phương trình $\log_2(3x - 1) > 3$.

- A. $x > 3$. B. $\frac{1}{3} < x < 3$. C. $x < 3$. D. $x > \frac{10}{3}$.

Câu 252. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x + 1) < \log_{\frac{1}{2}}(2x - 1)$

- A. $S = (2; +\infty)$. B. $S = (-\infty; 2)$. C. $S = (\frac{1}{2}; 2)$. D. $S = (-1; 2)$.

Câu 253. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $5^{x+1} - \frac{1}{5} > 0$.

- A. $S = (1; +\infty)$. B. $S = (-1; +\infty)$. C. $S = (-2; +\infty)$. D. $S = (-\infty, -2)$.

2. Phương pháp đưa về cùng cơ số.

Câu 254. Tập hợp nghiệm của bất phương trình $2^{2x} < 2^{x-6}$ là

- A. $(0; 6)$. B. $(-\infty; 6)$. C. $(0; 64)$. D. $(6; +\infty)$.

3. Phương pháp đặt ẩn phụ.

Câu 255. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2^2 x - 5\log_2 x + 4 \geq 0$.

- A. $S = (-\infty; 2) \cup [16; +\infty)$. B. $S = [2; 16]$.
C. $S = (0; 2] \cup [16; +\infty)$. D. $S = (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$.

Câu 256. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2^2 x - 2\log_2 x + 3m - 2 < 0$ có nghiệm thực.

- A. $m < 1$. B. $m < \frac{2}{3}$. C. $m < 0$. D. $m \leq 1$.

Chương 3. Nguyên hàm, tích phân và ứng dụng

§1. Nguyên hàm

1. Định nghĩa, tính chất và nguyên hàm cơ bản.

Câu 257 (QG17,101). Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 3x$.

- A. $\int \cos 3x dx = 3 \sin 3x + C$.
 B. $\int \cos 3x dx = \frac{\sin 3x}{3} + C$.
 C. $\int \cos 3x dx = -\frac{\sin 3x}{3} + C$.
 D. $\int \cos 3x dx = \sin 3x + C$.

Câu 258. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x$ là

- A. $x^4 + x^2 + C$.
 B. $3x^2 + 1 + C$.
 C. $x^3 + x + C$.
 D. $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C$.

Câu 259. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + x^2$ là

- A. $4x^3 + 2x + C$.
 B. $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C$.
 C. $x^4 + x^2 + C$.
 D. $x^5 + x^3 + C$.

Câu 260. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x^2$ là

- A. $x^4 + x^3 + C$.
 B. $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + C$.
 C. $3x^2 + 2x + C$.
 D. $x^3 + x^2 + C$.

Câu 261. $\int_1^2 \frac{dx}{3x-2}$ bằng

- A. $2 \ln 2$.
 B. $\frac{1}{3} \ln 2$.
 C. $\frac{2}{3} \ln 2$.
 D. $\ln 2$.

Câu 262 (QG17,101). Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 3 - 5 \sin x$ và $f(0) = 10$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $f(x) = 3x + 5 \cos x + 5$.
 B. $f(x) = 3x + 5 \cos x + 2$.
 C. $f(x) = 3x - 5 \cos x + 2$.
 D. $f(x) = 3x - 5 \cos x + 15$.

Câu 263 (QG17,102). Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{5x-2}$.

- A. $\int \frac{dx}{5x-2} = \frac{1}{5} \ln |5x-2| + C$.
 B. $\int \frac{dx}{5x-2} = -\frac{1}{2} \ln(5x-2) + C$.
 C. $\int \frac{dx}{5x-2} = 5 \ln |5x-2| + C$.
 D. $\int \frac{dx}{5x-2} = \ln |5x-2| + C$.

Câu 264. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 7^x$.

- A. $\int 7^x dx = 7^x \ln 7 + C$.
 B. $\int 7^x dx = \frac{7^x}{\ln 7} + C$.
 C. $\int 7^x dx = 7^{x+1} + C$.
 D. $\int 7^x dx = \frac{7^{x+1}}{x+1} + C$.

Câu 265. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

- A. $F(x) = \cos x - \sin x + 3$.
 B. $F(x) = -\cos x + \sin x + 3$.
 C. $F(x) = -\cos x + \sin x - 1$.
 D. $F(x) = -\cos x + \sin x + 1$.

Câu 266. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2 \sin x$.

- A. $\int 2 \sin x dx = 2 \cos x + C$.
 B. $\int 2 \sin x dx = \sin^2 x + C$.
 C. $\int 2 \sin x dx = \sin 2x + C$.
 D. $\int 2 \sin x dx = -2 \cos x + C$.

Câu 267. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x-1}$.

- A. $\int f(x)dx = \frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C.$ B. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C.$
 C. $\int f(x)dx = -\frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C.$ D. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C.$

Câu 268. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 2x$.

- A. $\int f(x)dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C.$ B. $\int f(x)dx = -\frac{1}{2} \sin 2x + C.$
 C. $\int f(x)dx = 2 \sin 2x + C.$ D. $\int f(x)dx = -2 \sin 2x + C.$

Câu 269. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 + \frac{2}{x^2}$.

- A. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C.$ B. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C.$
 C. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} + C.$ D. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + C.$

Câu 270. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 1$ là

- A. $x^3 + C.$ B. $\frac{x^3}{3} + x + C.$ C. $6x + C.$ D. $x^3 + x + C.$

Câu 271. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$. Tìm $F(x)$.

- A. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{3}{2}.$ B. $F(x) = 2e^x + x^2 - \frac{1}{2}.$
 C. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{5}{2}.$ D. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}.$

Câu 272. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{x-1}$ và $F(2) = 1$. Tính $F(3)$.

- A. $F(3) = \ln 2 - 1.$ B. $F(3) = \ln 2 + 1.$ C. $F(3) = \frac{1}{2}.$ D. $F(3) = \frac{7}{4}.$

Câu 273. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{2}{2x-1}$, $f(0) = 1$ và $f(1) = 2$. Giá trị của biểu thức $f(-1) + f(3)$ bằng

- A. $4 + \ln 15.$ B. $2 + \ln 15.$ C. $3 + \ln 15.$ D. $\ln 15.$

2. Phương pháp đổi biến số.

Câu 274. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{2}{9}$ và $f'(x) = 2x[f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

- A. $-\frac{35}{36}.$ B. $-\frac{2}{3}.$ C. $-\frac{19}{36}.$ D. $-\frac{2}{15}.$

Câu 275. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{5}$ và $f'(x) = x^3[f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

- A. $-\frac{4}{35}.$ B. $-\frac{71}{20}.$ C. $-\frac{79}{20}.$ D. $-\frac{4}{5}.$

3. Phương pháp nguyên hàm từng phần.

Câu 276. Cho $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^{2x}$.

- A. $\int f'(x)e^{2x}dx = -x^2 + 2x + C.$ B. $\int f'(x)e^{2x}dx = -x^2 + x + C.$
 C. $\int f'(x)e^{2x}dx = 2x^2 - 2x + C.$ D. $\int f'(x)e^{2x}dx = -2x^2 + 2x + C.$

Câu 277. Cho hàm số $f'(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{25}$ và $f'(x) = 4x^3 \cdot [f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng?

- A. $\frac{-41}{100}$.. B. $\frac{-1}{10}$.. C. $\frac{-391}{400}$.. D. $\frac{-1}{40}$..

Câu 278. Cho $F(x) = -\frac{1}{3x^3}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x) \ln x$.

- A. $\int f'(x) \ln x \, dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{5x^5} + C$. B. $\int f'(x) \ln x \, dx = \frac{\ln x}{x^3} - \frac{1}{5x^5} + C$.
C. $\int f'(x) \ln x \, dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$. D. $\int f'(x) \ln x \, dx = -\frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$.

Câu 279. Cho $F(x) = \frac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x) \ln x$.

- A. $\int f'(x) \ln x \, dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2}\right) + C$. B. $\int f'(x) \ln x \, dx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} + C$.
C. $\int f'(x) \ln x \, dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) + C$. D. $\int f'(x) \ln x \, dx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2} + C$.

Câu 280. Cho $F(x) = (x-1)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^{2x}$.

- A. $\int f'(x)e^{2x} \, dx = (4-2x)e^x + C$. B. $\int f'(x)e^{2x} \, dx = \frac{2-x}{2}e^x + C$.
C. $\int f'(x)e^{2x} \, dx = (2-x)e^x + C$. D. $\int f'(x)e^{2x} \, dx = (x-2)e^x + C$.

§2. Tích phân

1. Định nghĩa, tính chất và tích phân cơ bản.

Câu 281. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Tính $I = F(e) - F(1)$.

- A. $I = e$. B. $I = \frac{1}{e}$. C. $I = \frac{1}{2}$. D. $I = 1$.

Câu 282. Cho $\int_{-1}^2 f(x) \, dx = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x) \, dx = -1$. Tính $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)] \, dx$.

- A. $I = \frac{5}{2}$. B. $I = \frac{7}{2}$. C. $I = \frac{17}{2}$. D. $I = \frac{11}{2}$.

Câu 283. Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \, dx = 5$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2 \sin x] \, dx$.

- A. 7. B. $5 + \frac{\pi}{2}$. C. 3. D. $5 + \pi$.

Câu 284. $\int_1^2 e^{3x-1} \, dx$ bằng

- A. $\frac{1}{3}(e^5 - e^2)$. B. $\frac{1}{3}e^5 - e^2$. C. $e^5 - e^2$. D. $\frac{1}{3}(e^5 + e^2)$.

Câu 285. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1; 2]$, $f(1) = 1$ và $f(2) = 2$. Tính $I = \int_1^2 f'(x) \, dx$

- A. $I = 1$. B. $I = -1$. C. $I = 3$. D. $I = \frac{7}{2}$.

Câu 286. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Tính $I = F(e) - F(1)$.

A. $I = e$. B. $I = \frac{1}{e}$. C. $I = \frac{1}{2}$. D. $I = 1$.

Câu 287. Cho $\int_{-1}^2 f(x)dx = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x)dx = -1$. Tính $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)] dx$.

A. $I = \frac{5}{2}$. B. $I = \frac{7}{2}$. C. $I = \frac{17}{2}$. D. $I = \frac{11}{2}$.

Câu 288. Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 5$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2 \sin x] dx$.

A. 7. B. $5 + \frac{\pi}{2}$. C. 3. D. $5 + \pi$.

Câu 289. $\int_1^2 \frac{dx}{2x+3}$ bằng

A. $2 \ln \frac{7}{5}$. B. $\frac{1}{2} \ln 35$. C. $\ln \frac{7}{5}$. D. $\frac{1}{2} \ln \frac{7}{5}$.

Câu 290. Tích phân $\int_0^2 \frac{dx}{x+3}$ bằng

A. $\frac{16}{225}$. B. $\log \frac{5}{3}$. C. $\ln \frac{5}{3}$. D. $\frac{2}{15}$.

Câu 291. Cho $\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = a \ln 2 + b \ln 3$ với a, b là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a + b = 2$. B. $a - 2b = 0$. C. $a + b = -2$. D. $a + 2b = 0$.

Câu 292. Tính tích phân $I = \int_0^{\pi} \cos^3 x \cdot \sin x dx$.

A. $I = -\frac{1}{4}\pi^4$. B. $I = -\pi^4$. C. $I = 0$. D. $I = -\frac{1}{4}$.

Câu 293. Biết $I = \int_3^4 \frac{dx}{x^2+x} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$, với a, b, c là các số nguyên. Tính $S = a + b + c$.

A. $S = 6$. B. $S = 2$. C. $S = -2$. D. $S = 0$.

2. Phương pháp đổi biến số.

Câu 294. Cho $\int_0^6 f(x)dx = 12$. Tính $I = \int_0^2 f(3x)dx$.

A. $I = 6$. B. $I = 36$. C. $I = 2$. D. $I = 4$.

Câu 295. Tính tích phân $I = \int_1^2 2x\sqrt{x^2-1}dx$ bằng cách đặt $u = x^2 - 1$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I = 2 \int_0^3 \sqrt{u}du$. B. $I = \int_1^2 \sqrt{u}du$. C. $I = \int_0^3 \sqrt{u}du$. D. $I = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{u}du$.

Câu 296. Cho $\int_{16}^{55} \frac{dx}{x\sqrt{x+9}} = a \ln 2 + b \ln 5 + c \ln 11$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a - b = -c$. B. $a + b = c$. C. $a + b = 3c$. D. $a - b = -3c$.

Câu 297. Cho $\int_0^4 f(x) dx = 16$. Tính tích phân $I = \int_0^2 f(2x) dx$.

A. $I = 32$. B. $I = 8$. C. $I = 16$. D. $I = 4$.

Câu 298. Cho $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1} = a + b \ln \frac{1+e}{2}$, với a, b là các số hữu tỉ. Tính $S = a^3 + b^3$.

A. $S = 2$. B. $S = -2$. C. $S = 0$. D. $S = 1$.

Câu 299. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) + f(-x) = \sqrt{2 + 2\cos 2x}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Tính $I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx$.

- A. $I = -6$. B. $I = 0$. C. $I = -2$. D. $I = 6$.

Câu 300. Biết $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x} + x\sqrt{x+1}} = \sqrt{a} - \sqrt{b} - c$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $P = a + b + c$

- A. $P = 24$. B. $P = 12$. C. $P = 18$. D. $P = 46$.

3. Phương pháp tích phân từng phần.

Câu 301. Cho $\int_1^e (1 + x \ln x) dx = ae^2 + be + c$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a + b = c$. B. $a + b = -c$. C. $a - b = c$. D. $a - b = -c$.

Câu 302. Cho $\int_1^e (2 + x \ln x) dx = a.e^2 + b.e + c$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a + b = -c$. B. $a + b = c$. C. $a - b = c$. D. $a - b = -c$.

Câu 303. Tính tích phân $I = \int_1^e x \ln x dx$

- A. $I = \frac{1}{2}$. B. $I = \frac{e^2 - 2}{2}$. C. $I = \frac{e^2 + 1}{4}$. D. $I = \frac{e^2 - 1}{4}$.

Câu 304. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 (x+1)f'(x) dx = 10$ và $2f(1) - f(0) = 2$. Tính $I = \int_0^1 f(x) dx$.

- A. $I = -12$. B. $I = 8$. C. $I = 12$. D. $I = -8$.

4. Tích phân của hàm ẩn. Tích phân đặc biệt.

Câu 305. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn $f(1) = 0, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7$ và $\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

- A. $\frac{7}{5}$. B. 1. C. $\frac{7}{4}$. D. 4.

§3. Ứng dụng của tích phân

1. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đồ thị.

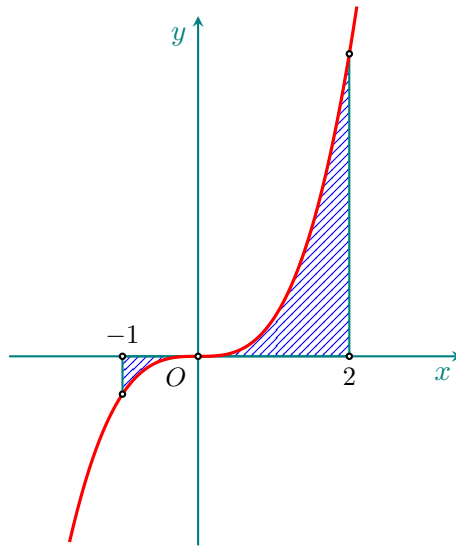
Câu 306. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2 + \cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = \frac{\pi}{2}$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

- A. $V = \pi - 1$. B. $V = (\pi - 1)\pi$. C. $V = (\pi + 1)\pi$. D. $V = \pi + 1$.

Câu 307. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x, y = 0, x = 0, x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $S = \pi \int_0^2 e^{2x} dx$. B. $S = \int_0^2 e^x dx$. C. $S = \pi \int_0^2 e^x dx$. D. $S = \int_0^2 e^{2x} dx$.

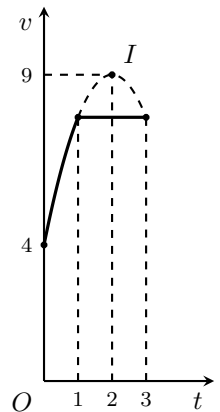
Câu 308. Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = f(x)$ trục hoành và hai đường thẳng $x = -1, x = 2$ (như hình vẽ bên). Đặt $a = \int_{-1}^0 f(x)dx, b = \int_0^2 f(x)dx$, mệnh đề nào dưới đây đúng?



- A. $S = b - a.$ B. $S = b + a.$ C. $S = -b + a.$ D. $S = -b - a.$

Câu 309.

Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(\text{km/h})$ phụ thuộc thời gian $t(\text{h})$ có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2; 9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

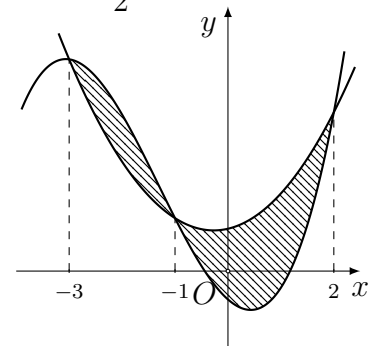


- A. $s = 23, 25(\text{km}).$ B. $s = 21, 58(\text{km}).$
C. $s = 15, 50(\text{km}).$ D. $s = 13, 83(\text{km}).$

Câu 310. Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 1$ và $g(x) = dx^2 + ex + \frac{1}{2}$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-3, -1, 2$ (tham khảo hình vẽ)

. Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

- A. $\frac{253}{12} ..$ B. $\frac{125}{12} ..$
C. $\frac{253}{48} ..$ D. $\frac{125}{48} ..$



Câu 311. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - x$ và đồ thị hàm số $y = x - x^2$.

- A. $\frac{37}{12}.$ B. $\frac{9}{4}.$ C. $\frac{81}{12}.$ D. 13.

Câu 312. Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường

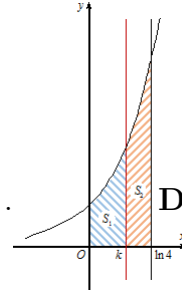
$y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 4$. Đường thẳng $x = k$ ($0 < k < \ln 4$) chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1 = 2S_2$.

A. $k = \frac{2}{3} \ln 4$.

B. $k = \ln 2$.

C. $k = \ln \frac{8}{3}$.

D. $k = \ln 3$.



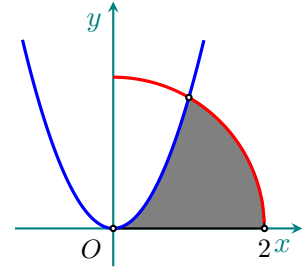
Câu 313. Cho hình (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = \sqrt{3}x^2$, cung tròn có phương trình $y = \sqrt{4 - x^2}$ (với $0 \leq x \leq 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng

A. $\frac{4\pi + \sqrt{3}}{12}$.

B. $\frac{4\pi - \sqrt{3}}{12}$.

C. $\frac{4\pi + 2\sqrt{3} - 3}{6}$.

D. $\frac{5\sqrt{3} - 2\pi}{3}$.



Câu 314.

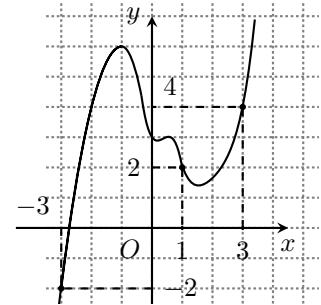
Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = 2f(x) - (x + 1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $g(-3) > g(3) > g(1)$.

B. $g(1) > g(-3) > g(3)$.

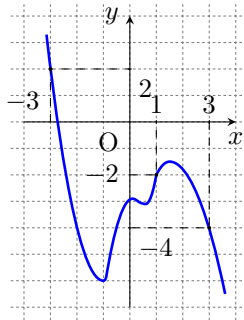
C. $g(3) > g(-3) > g(1)$.

D. $g(1) > g(3) > g(-3)$.



Câu 315. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên.

Đặt $g(x) = 2f(x) + (x + 1)^2$.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $g(1) < g(3) < g(-3)$.

B. $g(1) < g(-3) < g(3)$.

C. $g(3) = g(-3) < g(1)$.

D. $g(3) = g(-3) > g(1)$.

Câu 316. Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - \frac{1}{2}$ và $g(x) = dx^2 + ex + 1$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-3; -1; 1$ (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

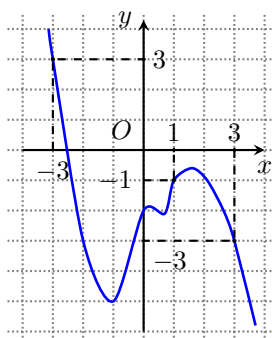
A. $\frac{9}{2}$.

B. 8.

C. 4.

D. 5.

Câu 317. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên.



Đặt $g(x) = 2f(x) + x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $g(3) < g(-3) < g(1)$.
 B. $g(1) < g(3) < g(-3)$.
 C. $g(1) < g(-3) < g(3)$.
 D. $g(-3) < g(3) < g(1)$.

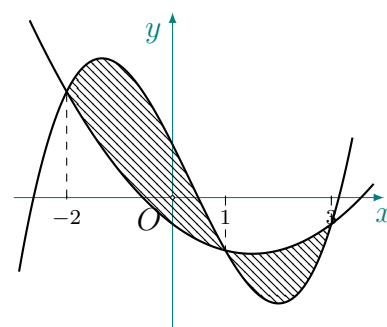
Câu 318. Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + \frac{3}{4}$ và

$$g(x) = dx^2 + ex - \frac{3}{4} \quad (a, b, c, d, e \in \mathbb{R}).$$

Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-2; 1; 3$ (tham khảo hình vẽ).

Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

- A. $\frac{253}{48}$.
 B. $\frac{125}{24}$.
 C. $\frac{125}{48}$.
 D. $\frac{253}{24}$.



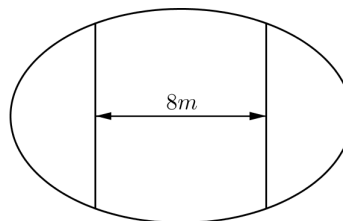
2. Bài toán thực tế sử dụng diện tích hình phẳng.

Câu 319. Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{120}t^2 + \frac{58}{45}t$ (m/s), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có giá tốc bằng a (m/s²) (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A . Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

- A. 25 (m/s).
 B. 36 (m/s).
 C. 30 (m/s).
 D. 21 (m/s).

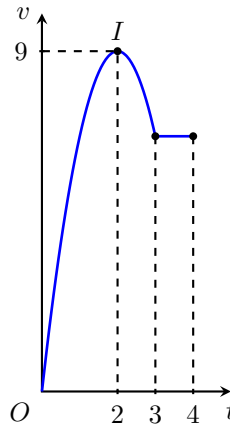
Câu 320. Ông An có một mảnh vườn hình Elip có độ dài trục lớn

bằng $16m$ và độ dài trục bé bằng $10m$. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng $8m$ và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng (như hình vẽ). Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng/ m^2 . Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn.)



- A. 7.862.000 đồng.
 B. 7.653.000 đồng.
 C. 7.128.000 đồng.
 D. 7.826.000 đồng.

Câu 321. Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 3 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2; 9)$ với trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường



s mà vật di chuyển được trong 4 giờ đó.

- A. $s = 26,5$ km. B. $s = 28,5$ km. C. $s = 27$ km. D. $s = 24$ km.

Câu 322. Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{180}t^2 + \frac{11}{18}t$ m/s, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 5 giây so với A và có gia tốc bằng a m/s² (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 10 giây thì đuổi kịp A . Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

- A. 22 m/s. B. 15 m/s. C. 10 m/s. D. 7 m/s.

3. Thể tích giới hạn bởi các đồ thị (tròn xoay).

Câu 323. Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a, x = b$ ($a < b$), xung quanh trục Ox .

- A. $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$. B. $V = \int_a^b f^2(x)dx$. C. $V = \pi \int_a^b f(x)dx$. D. $V = \pi \int_a^b |f(x)|dx$.

Câu 324. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ ($a < b$) Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức

- A. $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$. B. $V = 2\pi \int_a^b f^2(x)dx$.
C. $V = \pi^2 \int_a^b f^2(x)dx$. D. $V = \pi^2 \int_a^b f(x)dx$.

Câu 325. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^3 + 3, y = 0, x = 0, x = 2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$. B. $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3) dx$.
C. $V = \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$. D. $V = \int_0^2 (x^2 + 3) dx$.

Câu 326. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2 + \sin x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = \pi$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

- A. $V = 2(\pi + 1)$. B. $V = 2\pi(\pi + 1)$. C. $V = 2\pi^2$. D. $V = 2\pi$.

Câu 327. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{x^2 + 1}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

- A. $V = \frac{4\pi}{3}$. B. $V = 2\pi$. C. $V = \frac{4}{3}$. D. $V = 2$.

Câu 328. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường thẳng $y = x^2 + 2, y = 0, x = 1, x = 2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $V = \pi \int_1^2 (x^2 + 2)^2 dx$. B. $V = \int_1^2 (x^2 + 2)^2 dx$.
C. $V = \pi \int_1^2 (x^2 + 2) dx$. D. $V = \int_1^2 (x^2 + 2) dx$.

Câu 329. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = e^x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

- A. $V = \frac{\pi e^2}{2}$. B. $V = \frac{\pi(e^2 + 1)}{2}$. C. $V = \frac{e^2 - 1}{2}$. D. $V = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2}$.

Câu 330. Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2(x - 1)e^x$, trục tung và trục hoành. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox .

- A. $V = 4 - 2e$. B. $V = (4 - 2e)\pi$. C. $V = e^2 - 5$. D. $V = (e^2 - 5)\pi$.

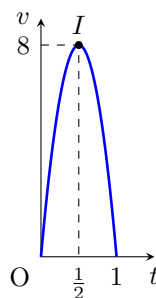
4. Thể tích tính theo mặt cắt $S(x)$.

Câu 331. Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 1$ và $x = 3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $1 \leq x \leq 3$ thì được thiết diện là một hình chữ nhật có độ dài hai cạnh là $3x$ và $\sqrt{3x^2 - 2}$.

- A. $V = 32 + 2\sqrt{15}$. B. $V = \frac{124\pi}{3}$.
C. $V = \frac{124}{3}$. D. $V = (32 + 2\sqrt{15})\pi$.

5. Bài toán thực tế và ứng dụng thể tích.

Câu 332. Một người chạy trong thời gian 1 giờ, vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol với đỉnh $I\left(\frac{1}{2}; 8\right)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng s đường người đó chạy được trong khoảng thời gian 45 phút, kể từ khi bắt đầu chạy.



- A. $s = 4,0$ km. B. $s = 2,3$ km. C. $s = 4,5$ km. D. $s = 5,3$ km.

6. Ứng dụng tích phân vào bài toán liên môn (lý, hóa, sinh, kinh tế).

Câu 333. Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{100}t^2 + \frac{13}{30}t$ (m/s), trong đó t (giây) là khoảng thời gian từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 10 giây so với A và có gia tốc a (m/s²) (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A . Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

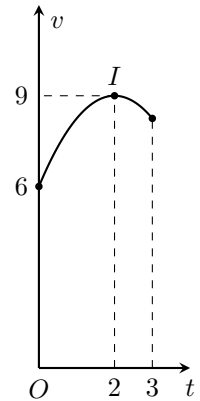
- A. 15 (m/s).. B. 9 (m/s).. C. 42 (m/s).. D. 25 (m/s)..

Câu 334. Một ô tô đang chạy với vận tốc 10m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét ?

- A. 0,2m. B. 2m. C. 10m. D. 20m.

Câu 335.

Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2; 9)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó.



- A. $s = 24,25$ (km). B. $s = 26,75$ (km).
C. $s = 24,75$ (km). D. $s = 25,25$ (km).

Chương 4. Số phức

§1. Khái niệm số phức

1. Xác định các yếu tố cơ bản của số phức.

Câu 336 (QG17,101). Số phức nào dưới đây là số thuần ảo?

- A. $z = -2 + 3i$. B. $z = 3i$. C. $z = -2$. D. $z = \sqrt{3} + i$.

Câu 337 (QG17,101). Cho hai số phức $z_1 = 5 - 7i$ và $z_2 = 2 + 3i$. Tìm số phức $z = z_1 + z_2$.

- A. $z = 7 - 4i$. B. $z = 2 + 5i$. C. $z = -2 + 5i$. D. $z = 3 - 10i$.

Câu 338 (QG17,102). Cho số phức $z = 1 - i + i^3$. Tìm phần thực a và phần ảo b của z .

- A. $a = 0, b = 1$. B. $a = -2, b = 1$. C. $a = 1, b = 0$. D. $a = 1, b = -2$.

Câu 339. Cho số phức $z = 2 + i$. Tính $|z|$.

- A. $|z| = 3$. B. $|z| = 5$. C. $|z| = 2$. D. $|z| = \sqrt{5}$.

Câu 340. Số phức $-3 + 7i$ có phần ảo bằng

- A. 3. B. -7. C. -3. D. 7.

Câu 341. Số phức $5 + 6i$ có phần thực bằng

- A. -5.. B. 5.. C. -6.. D. 6..

Câu 342. Số phức có phần thực bằng 1 và phần ảo bằng 3 là

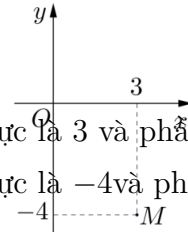
- A. $-1 - 3i$. B. $1 - 3i$. C. $-1 + 3i$. D. $1 + 3i$.

Câu 343. Cho số phức $z = 3 - 2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $\bar{z}$

- A. Phần thực bằng -3 và Phần ảo bằng $-2i$. B. Phần thực bằng -3 và Phần ảo bằng -2 .
C. Phần thực bằng 3 và Phần ảo bằng $2i$. D. Phần thực bằng 3 và Phần ảo bằng 2.

Câu 344. Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn

của số phức z . Tìm phần thực và phần ảo của số phức z .



- A. Phần thực là -4 và phần ảo là 3. B. Phần thực là 3 và phần ảo là $-4i$.
C. Phần thực là 3 và phần ảo là -4 . D. Phần thực là -4 và phần ảo là $3i$.

Câu 345. Kí hiệu a, b lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức $3 - 2\sqrt{2}i$. Tìm a, b .

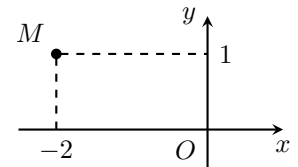
- A. $a = 3; b = 2$. B. $a = 3; b = 2\sqrt{2}$. C. $a = 3; b = \sqrt{2}$. D. $a = 3; b = -2\sqrt{2}$.

Câu 346. Cho số phức $z = 1 - 2i$. Điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $w = iz$ trên mặt phẳng tọa độ?

- A. $Q(1; 2)$. B. $N(2; 1)$. C. $M(1; -2)$. D. $P(-2; 1)$.

Câu 347.

Số phức nào dưới đây có điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là điểm M như hình bên?



- A. $z_4 = 2 + i$. B. $z_2 = 1 + 2i$. C. $z_3 = -2 + i$. D. $z_1 = 1 - 2i$.

Câu 348. Tìm số phức z thỏa mãn $z + 2 - 3i = 3 - 2i$.

- A. $z = 1 - 5i$. B. $z = 1 + i$. C. $z = 5 - 5i$. D. $z = 1 - i$.

Câu 349. Cho số phức $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = -3 + i$. Tìm điểm biểu diễn số phức $z = z_1 + z_2$ trên mặt phẳng tọa độ.

- A. $N(4; -3)$. B. $M(2; -5)$. C. $P(-2; -1)$. D. $Q(-1; 7)$.

Câu 350. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 4 = 0$. Gọi M, N lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Tính $T = OM + ON$ với O là gốc tọa độ.

- A. $T = 2\sqrt{2}$. B. $T = 2$. C. $T = 8$. D. $T = 4$.

Câu 351. Cho hai số phức $z_1 = 1 - 3i$ và $z_2 = -2 - 5i$. Tìm phần ảo b của số phức $z = z_1 - z_2$.

- A. $b = -2$. B. $b = 2$. C. $b = 3$. D. $b = -3$.

Câu 352. Cho số phức $z = 2 - 3i$. Tìm phần thực a của z .

- A. $a = 2$. B. $a = 3$. C. $a = -3$. D. $a = -2$.

Câu 353. Tìm tất cả các giá trị thực x, y sao cho $x^2 - 1 + yi = -1 + 2i$.

- A. $x = -\sqrt{2}, y = 2$. B. $x = \sqrt{2}, y = 2$. C. $x = 0, y = 2$. D. $x = \sqrt{2}, y = -2$.

Câu 354. Tìm số phức liên hợp của số phức $z = i(3i + 1)$.

- A. $\bar{z} = 3 - i$. B. $\bar{z} = -3 + i$. C. $\bar{z} = 3 + i$. D. $\bar{z} = -3 - i$.

Câu 355. Tính môđun của số phức z biết $\bar{z} = (4 - 3i)(1 + i)$.

- A. $|z| = 25\sqrt{2}$. B. $|z| = 7\sqrt{2}$. C. $|z| = 5\sqrt{2}$. D. $|z| = \sqrt{2}$.

Câu 356. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z + 1 + 3i - |z|i = 0$. Tính $S = a + 3b$.

- A. $S = \frac{7}{3}$. B. $S = -5$. C. $S = 5$. D. $S = -\frac{7}{3}$.

Câu 357. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $3z^2 - z + 1 = 0$. Tính $P = |z_1| + |z_2|$.

- A. $P = \frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $P = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. C. $P = \frac{2}{3}$. D. $P = \frac{\sqrt{14}}{3}$.

Câu 358. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 5$ và $|z + 3| = |z + 3 - 10i|$. Tìm số phức $w = z - 4 + 3i$.

- A. $w = -3 + 8i$. B. $w = 1 + 3i$. C. $w = -1 + 7i$. D. $w = -4 + 8i$.

Câu 359. Cho số phức z thỏa mãn $|z + 3| = 5$ và $|z - 2i| = |z - 2 - 2i|$. Tính $|z|$.

- A. $|z| = 17$. B. $|z| = \sqrt{17}$. C. $|z| = \sqrt{10}$. D. $|z| = 10$.

Câu 360. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z - 3i| = 5$ và $\frac{z}{z-4}$ là số thuần ảo?

- A. 0. B. Vô số. C. 1. D. 2.

Câu 361. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất số phức z thỏa mãn $z\bar{z}$ và $|z - \sqrt{3} + i| = m$. Tìm số phần tử của S .

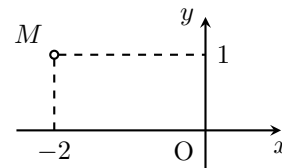
- A. 2. B. 4. C. 1. D. 3.

2. Biểu diễn hình học cơ bản của số phức.

Câu 362.

Điểm M trong hình vẽ bên là biểu diễn số phức

- A. $z = -2 + i$. B. $z = 1 - 2i$. C. $z = 2 + i$. D. $z = 1 + 2i$.



Câu 363. Xét các số phức z thỏa mãn $(\bar{z} + 2i)(z - 2)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

- A. 2. B. $2\sqrt{2}$. C. 4. D. $\sqrt{2}$.

Câu 364. Xét các số phức z thỏa mãn $(\bar{z} - 2i)(z + 2)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

- A. $2\sqrt{2}$. B. $\sqrt{2}$. C. 2. D. 4.

3. Câu hỏi lý thuyết.

Câu 365. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z - 6 - i) + 2i = (7 - i)z$?

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 4.

§2. Phép cộng, trừ và nhân số phức

1. Thực hiện phép tính.

Câu 366. Cho hai số phức $z_1 = 4 - 3i$ và $z_2 = 7 + 3i$. Tìm số phức $z = z_1 - z_2$.

- A. $z = 11$. B. $z = 3 + 6i$. C. $z = -1 - 10i$. D. $z = -3 - 6i$.

Câu 367. Cho hai số phức $z_1 = 1 + i$ và $z_2 = 2 - 3i$. Tính môđun của số phức $z_1 + z_2$

- A. $|z_1 + z_2| = \sqrt{13}$. B. $|z_1 + z_2| = \sqrt{5}$. C. $|z_1 + z_2| = 1$. D. $|z_1 + z_2| = 5$.

Câu 368. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z + 2 + i = |z|$. Tính $S = 4a + b$.

- A. $S = 4$. B. $S = 2$. C. $S = -2$. D. $S = -4$.

Câu 369. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z + 2 - i| = 2\sqrt{2}$ và $(z - 1)^2$ là số thuần ảo?

- A. 0. B. 4. C. 3. D. 2.

2. Xác định các yếu tố cơ bản của số phức qua các phép toán.

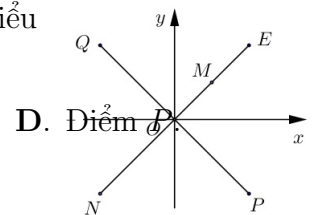
Câu 370. Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(3x + yi) + (4 - 2i) = 5x + 2i$ với i là đơn vị ảo.

- A. $x = -2; y = 4$. B. $x = 2; y = 4$. C. $x = -2; y = 0$. D. $x = 2; y = 0$.

Câu 371. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm M là điểm biểu diễn

của số phức z (như hình vẽ bên). Điểm nào trong hình vẽ là điểm biểu diễn của số phức $2z$?

- A. Điểm N . B. Điểm Q . C. Điểm E .



- D. Điểm P .

3. Bài toán tập hợp điểm.

Câu 372. Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(2x - 3yi) + (1 - 3i) = x + 6i$ với i là đơn vị ảo.

- A. $x = -1; y = -3$. B. $x = -1; y = -1$. C. $x = 1; y = -1$. D. $x = 1; y = -3$.

Câu 373. Xét các điểm số phức z thỏa mãn $(\bar{z} + i)(z + 2)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

- A. 1. B. $\frac{5}{4}$. C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

§3. Phép chia số phức

1. Bài toán quy về giải phương trình, hệ phương trình nghiệm thực.

Câu 374. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z - 4 - i) + 2i = (5 - i)z$.

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 4.

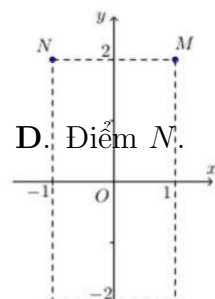
Câu 375. Tìm hai số x và y thỏa mãn $(2x - 3yi) + (3 - i) = 5x - 4i$ với i là đơn vị ảo.

- A. $x = -1; y = -1$. B. $x = -1; y = 1$. C. $x = 1; y = -1$. D. $x = 1; y = 1$.

Câu 376. Cho số phức z thỏa mãn $(1 + i)z = 3 - i$.

Hỏi điểm biểu diễn của z là điểm nào trong các điểm M, N, P, Q ở hình bên ?

- A. Điểm P . B. Điểm Q . C. Điểm M .



- D. Điểm N .

Câu 377. Tính môđun của số phức z thỏa mãn $z(2-i) + 13i = 1$.

- A. $|z| = \sqrt{34}$. B. $|z| = 34$. C. $|z| = \frac{5\sqrt{34}}{3}$. D. $|z| = \frac{\sqrt{34}}{3}$.

Câu 378. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $(1+i)z + 2\bar{z} = 3 + 2i$. Tính $P = a + b$.

- A. $P = \frac{1}{2}$. B. $P = 1$. C. $P = -1$. D. $P = -\frac{1}{2}$.

Câu 379. Xét số phức z thỏa mãn $(1+2i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} - 2 + i$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. $\frac{3}{2} < |z| < 2$. B. $|z| > 2$. C. $|z| < \frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$.

Câu 380. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z + 3i| = \sqrt{13}$ và $\frac{z}{z+2}$ là số thuần ảo?

- A. Vô số. B. 2. C. 0. D. 1.

Câu 381. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z - 5 - i) + 2i = (6 - i)z$?

- A. 1. B. 3. C. 4. D. 2.

Câu 382. Cho số phức $z = 2 + 5i$. Tìm số phức $w = iz + \bar{z}$.

- A. $w = 7 - 3i$. B. $w = -3 - 3i$. C. $w = 3 + 7i$. D. $w = -7 - 7i$.

Câu 383. Hỏi có bao nhiêu số phức z thỏa mãn đồng thời các điều kiện: $|z - i| = 5$ và z^2 là số thuần ảo?

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 0.

Câu 384. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z + 2 + i - |z|(1+i) = 0$ và $|z| > 1$ Tính $P = a + b$

- A. $P = -1$. B. $P = -5$. C. $P = 3$. D. $P = 7$.

2. Bài toán tập hợp điểm.

Câu 385. Cho các số phức z thỏa mãn $|z| = 4$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = (3 + 4i)z + i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

- A. $r = 4$. B. $r = 5$. C. $r = 20$. D. $r = 22$.

Câu 386. Xét các số phức $a = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - 4 - 3i| = \sqrt{5}$ Tính $P = a + b$ khi $|z + 1 - 3i| + |z - 1 + i|$ đạt giá trị lớn nhất.

- A. $P = 10$. B. $P = 4$. C. $P = 6$. D. $P = 8$.

§4. Phương trình bậc hai hệ số thực

1. Giải phương trình. Tính toán biểu thức nghiệm.

Câu 387. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - z + 6 = 0$. Tính $P = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$.

- A. $P = \frac{1}{6}$. B. $P = \frac{1}{12}$. C. $P = -\frac{1}{6}$. D. $P = 6$.

Câu 388. Phương trình nào dưới đây nhận hai số phức $1 + \sqrt{2}i$ và $1 - \sqrt{2}i$ là nghiệm?

- A. $z^2 + 2z + 3 = 0$. B. $z^2 - 2z - 3 = 0$. C. $z^2 - 2z + 3 = 0$. D. $z^2 + 2z - 3 = 0$.

Câu 389. Kí hiệu z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $4z^2 - 16z + 17 = 0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $w = iz_0$?

A. $M_1\left(\frac{1}{2}; 2\right)$. B. $M_2\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$. C. $M_3\left(-\frac{1}{4}; 1\right)$. D. $M_4\left(\frac{1}{4}; 1\right)$.

Câu 390. Kí hiệu z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + z + 1 = 0$. Tính $P = z_1^2 + z_2^2 + z_1 z_2$.

A. $P = 1$. B. $P = 2$. C. $P = -1$. D. $P = 0$.

Câu 391. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $4z^2 - 4z + 3 = 0$ Giá trị của biểu thức $|z_1| + |z_2|$ bằng

A. $3\sqrt{2}$. B. $2\sqrt{3}$. C. 3. D. $\sqrt{3}$.

2. Phương trình quy về bậc hai.

Câu 392. Kí hiệu z_1, z_2, z_3 và z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $z^4 - z^2 - 12 = 0$. Tính tổng $T = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|$.

A. $T = 4$. B. $T = 2\sqrt{3}$. C. $4 + 2\sqrt{3}$. D. $T = 2 + 2\sqrt{3}$.

§5. Cực trị

1. Phương pháp hình học.

Câu 393. Xét các số phức z thỏa mãn $|z + 2 - i| + |z - 4 - 7i| = 6\sqrt{2}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $|z - 1 + i|$. Tính $P = m + M$.

A. $P = \sqrt{13} + \sqrt{73}$. B. $P = \frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}}{2}$. C. $P = 5\sqrt{2} + \sqrt{73}$. D. $P = \frac{5\sqrt{2} + \sqrt{73}}{2}$.

HÌNH HỌC 12

Chương 1. Khối đa diện

§1. Khái niệm về khối đa diện

1. Nhận diện hình đa diện, khối đa diện.

Câu 394 (QG17,101). Hình hộp chữ nhật có ba kích thước đôi một khác nhau có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 4 mặt phẳng. B. 3 mặt phẳng. C. 6 mặt phẳng. D. 9 mặt phẳng.

Câu 395 (QG17,102). Mặt phẳng $(AB'C')$ chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành các khối đa diện nào?

- A. Một khối chóp tam giác và một khối chóp ngũ giác.
- B. Một khối chóp tam giác và một khối chóp tứ giác.
- C. Hai khối chóp tam giác.
- D. Hai khối chóp tứ giác.

Câu 396. Hình lăng trụ tam giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 4 mặt phẳng. B. 1 mặt phẳng. C. 2 mặt phẳng. D. 3 mặt phẳng.

2. Xác định số đỉnh, cạnh, mặt bên của một khối đa diện.

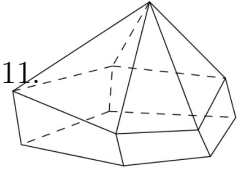
Câu 397. Hình đa diện trong hình vẽ bên có bao nhiêu mặt?

A. 6.

B. 10.

C. 12.

D. 11.



3. Phép biến hình trong không gian.

Câu 398. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng 2, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và $\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M = 2$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\sqrt{3}$..

B. 2..

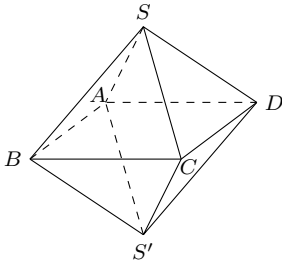
C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$..

D. 1..

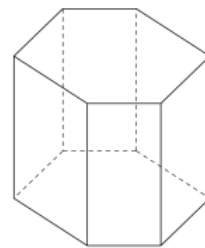
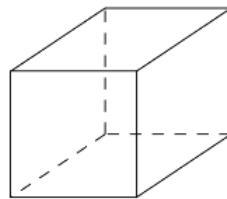
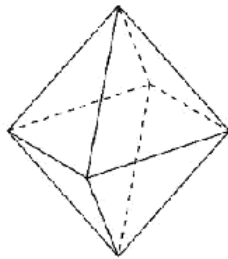
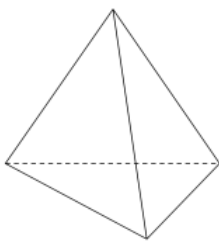
§2. Khối đa diện lồi và khối đa diện đều

1. Nhận diện loại đa diện đều.

Câu 399. Cho hình bát diện đều cạnh a . Gọi S là tổng diện tích tất cả các mặt của hình bát diện đó. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = 4\sqrt{3}a^2$.B. $S = \sqrt{3}a^2$.C. $S = 2\sqrt{3}a^2$.D. $S = 8a^2$.

Câu 400. Hình đa diện nào dưới đây không có tâm đối xứng ?



A. Tứ diện đều.

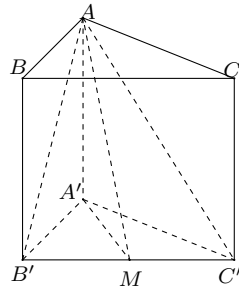
B. Bát diện đều.

C. Hình lập phương.

D. Lăng trụ lục giác đều.

Câu 401. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$, mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với đáy một góc 60° . Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \frac{3a^3}{8}$.B. $V = \frac{9a^3}{8}$.C. $V = \frac{a^3}{8}$.D. $V = \frac{3a^3}{4}$.



§3. Khái niệm về thể tích của khối đa diện

1. Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của khối đa diện.

Câu 402. Cho khối lăng trụ có đáy là hình vuông cạnh a và chiều cao bằng $4a$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

- A. $4a^3$.. B. $\frac{16}{3}a^3$.. C. $\frac{4}{3}a^3$.. D. $16a^3$..

2. Tính thể tích các khối đa diện.

Câu 403. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

- A. $V = a^3$. B. $V = \frac{a^3}{3}$. C. $V = \frac{a^3}{6}$. D. $V = \frac{a^3}{2}$.

Câu 404. Thể tích của khối chóp có chiều cao bằng h và diện tích đáy bằng B là

- A. $V = \frac{1}{3}Bh$. B. $V = \frac{1}{6}Bh$. C. $V = Bh$. D. $V = \frac{1}{2}Bh$.

Câu 405. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$, SA vuông góc với đáy và mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

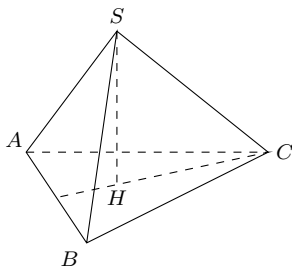
- A. $V = \frac{a^3}{3}$. B. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}$. C. $V = a^3$. D. $V = 3a^3$.

Câu 406. Cho khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a , cạnh bên gấp hai lần cạnh đáy. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

- A. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{2}$. B. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{6}$. C. $V = \frac{\sqrt{14}a^3}{2}$. D. $V = \frac{\sqrt{14}a^3}{6}$.

Câu 407. Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $2a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

- A. $V = \frac{\sqrt{13}a^3}{12}$. B. $V = \frac{\sqrt{11}a^3}{12}$. C. $V = \frac{\sqrt{11}a^3}{6}$. D. $V = \frac{\sqrt{11}a^3}{4}$.



Câu 408. Cho khối chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, $SA = 4$, $AB = 6$, $BC = 10$ và $CA = 8$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

- A. $V = 40$. B. $V = 192$. C. $V = 32$. D. $V = 24$.

Câu 409. Cho khối chóp có đáy hình vuông cạnh a và chiều cao bằng $2a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

- A. $4a^3$. B. $\frac{2}{3}a^3$. C. $2a^3$. D. $AB = a$.

Câu 410. Cho khối lăng trụ có đáy là hình vuông cạnh a và chiều cao bằng $2a$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

- A. $\frac{2}{3}a^3$. B. $\frac{4}{3}a^3$. C. $2a^3$. D. $4a^3$.

Câu 411. Tính thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, biết $AC = a\sqrt{3}$.

- A. $V = a^3$. B. $V = \frac{3\sqrt{6}a^3}{4}$. C. $V = 3\sqrt{3}a^3$. D. $V = \frac{1}{3}a^3$.

Câu 412. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{2}a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{6}$. B. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{4}$. C. $V = \sqrt{2}a^3$. D. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

Câu 413. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$ và thể tích bằng a^3 . Tính chiều cao h của hình chóp đã cho.

- A. $h = \frac{\sqrt{3}a}{6}$. B. $h = \frac{\sqrt{3}a}{2}$. C. $h = \frac{\sqrt{3}a}{3}$. D. $h = \sqrt{3}a$.

Câu 414. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy và SC tạo với mặt phẳng (SAB) một góc 30° . Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

- A. $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{3}$. B. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$. C. $V = \frac{2a^3}{3}$. D. $V = \sqrt{2}a^3$.

Câu 415. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi M , N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB , BC và E là điểm đối xứng với B qua D . Mặt phẳng (MNE) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh A có thể tích V . Tính V .

- A. $V = \frac{7\sqrt{2}a^3}{216}$. B. $V = \frac{11\sqrt{2}a^3}{216}$. C. $V = \frac{13\sqrt{2}a^3}{216}$. D. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{18}$.

Câu 416. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

- A. $V = \frac{a^3}{2}$. B. $V = a^3$. C. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{9}$. D. $V = \frac{a^3}{3}$.

Câu 417. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng $\sqrt{5}$, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và 2, hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M = \sqrt{5}$. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

- A. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$. B. $\frac{2\sqrt{15}}{3}$. C. $\sqrt{5}$. D. $\frac{\sqrt{15}}{3}$.

Câu 418. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB , AC và AD đôi một vuông góc với nhau; $AB = 6a$, $AC = 7a$ và $AD = 4a$. Gọi M , N , P tương ứng là trung điểm các cạnh BC , CD , DB . Tính thể tích V của tứ diện $AMNP$.

- A. $V = \frac{7}{2}a^3$. B. $V = 14a^3$. C. $V = \frac{28}{3}a^3$. D. $V = 7a^3$.

Câu 419. Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng 12 và G là trọng tâm tam giác BCD . Tính thể tích V của khối chóp $A.GBC$.

- A. $V = 3$. B. $V = 4$. C. $V = 6$. D. $V = 5$.

Câu 420. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , cạnh $AC = 2\sqrt{2}$. Biết AC' tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60° và $AC' = 4$. Tính thể tích V của khối đa diện $ABCB'C'$. A. B. C. D.

- A. $V = \frac{8}{3}$. B. $V = \frac{16}{3}$. C. $V = \frac{8\sqrt{3}}{3}$. D. $V = \frac{16\sqrt{3}}{3}$.

Câu 421. Tính thể tích V của khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a .

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 422. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt đáy, SD tạo với mặt phẳng (SAB) một góc bằng 30° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{18}$. B. $V = \sqrt{3}a^3$. C. $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{3}$. D. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

Câu 423. Xét khối tứ diện $ABCD$ có cạnh $AB = x$ và các cạnh còn lại đều bằng $2\sqrt{3}$. Tìm x để thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.

- A. $x = \sqrt{6}$. B. $x = \sqrt{14}$. C. $x = 3\sqrt{2}$. D. $x = 2\sqrt{3}$.

Câu 424. Xét khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A , SA vuông góc với đáy, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng 3. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) . Tính $\cos \alpha$ khi thể tích khối chóp $S.ABC$ nhỏ nhất.

- A. $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. B. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\cos \alpha = \frac{2}{3}$.

Câu 425. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng 2, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và $\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

- A. 2. B. 1. C. $\sqrt{3}$. D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

- A. $\frac{V'}{V} = \frac{1}{2}$. B. $\frac{V'}{V} = \frac{1}{4}$. C. $\frac{V'}{V} = \frac{2}{3}$. D. $\frac{V'}{V} = \frac{5}{8}$.

3. Các bài toán khác (góc, khoảng cách,...) liên quan đến thể tích khối đa diện.

Câu 426. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $\sqrt{2}a$. Tam giác SAD cân tại S và mặt bên (SAD) vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{4}{3}a^3$. Tính khoảng cách h từ B đến mặt phẳng (SCD) .

- A. $h = \frac{2}{3}a$. B. $h = \frac{4}{3}a$. C. $h = \frac{8}{3}a$. D. $h = \frac{3}{4}a$.

Câu 427. Cho hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ có cạnh bằng 1, lần lượt nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Gọi S là điểm đối xứng với B qua đường thẳng DE . Thể tích của khối đa diện $ABCDSEF$ bằng

- A. $\frac{7}{6}$. B. $\frac{11}{12}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{5}{6}$.

Chương 2. Mặt nón, mặt trụ, mặt cầu

§1. Khái niệm về mặt tròn xoay

1. Thể tích khối nón, khối trụ.

Câu 428 (QG17,101). Tính thể tích V của khối trụ có bán kính đáy $r = 4$ và chiều cao $h = 4\sqrt{2}$.

- A. $V = 128\pi$. B. $V = 64\sqrt{2}\pi$. C. $V = 32\pi$. D. $V = 32\sqrt{2}\pi$.

Câu 429 (QG17,102). Cho khối nón có bán kính đáy $r = \sqrt{3}$ và chiều cao $h = 4$. Tính thể tích V của khối nón đã cho.

- A. $V = \frac{16\pi\sqrt{3}}{3}$. B. $V = 4\pi$. C. $V = 16\pi\sqrt{3}$. D. $V = 12\pi$.

Câu 430. Cho hình nón có bán kính đáy $r = \sqrt{3}$ và độ dài đường sinh $l = 4$. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón đã cho.

- A. $S_{xq} = 12\pi$. B. $S_{xq} = 4\sqrt{3}\pi$. C. $S_{xq} = \sqrt{39}\pi$. D. $S_{xq} = 8\sqrt{3}\pi$.

Câu 431. Thể tích của khối trụ tròn xoay có bán kính r và chiều cao h bằng

- A. $\frac{1}{3}\pi r^2 h$. B. $2\pi r h$. C. $\frac{4}{3}\pi r^2 h$. D. $\pi r^2 h$.

Câu 432 (QG17,102). Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng $3a$. Hình nón (N) có đỉnh A và đường tròn đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD . Tính diện tích xung quanh S_{xq} của (N) .

- A. $S_{xq} = 6\pi a^2$. B. $S_{xq} = 3\sqrt{3}\pi a^2$. C. $S_{xq} = 12\pi a^2$. D. $S_{xq} = 6\sqrt{3}\pi a^2$.

Câu 433. Cho khối (N) có bán kính đáy bằng 3 và diện tích xung quanh bằng 15π . Tính thể tích V của khối nón (N)

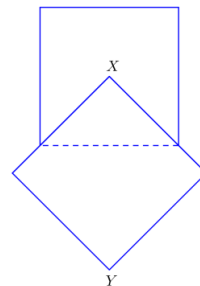
- A. $V = 12\pi$. B. $V = 20\pi$. C. $V = 36\pi$. D. $V = 60\pi$.

Câu 434. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h . Tính thể tích V của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ đã cho.

- A. $V = \frac{\pi a^2 h}{9}$. B. $V = \frac{\pi a^2 h}{3}$. C. $V = 3\pi a^2 h$. D. $V = \frac{\pi a^2 h}{9}$.

Câu 435. Cho hai hình vuông có cùng cạnh bằng 5

được xếp chồng lên nhau sao cho đỉnh X của một hình vuông là tâm của hình vuông còn lại (như hình vẽ). Tính thể tích V của vật thể tròn xoay khi quay mô hình trên xung quanh trục XY .



- A. $V = \frac{125(1 + \sqrt{2})\pi}{6}$. B. $V = \frac{125(5 + 2\sqrt{2})\pi}{12}$.
C. $V = \frac{125(5 + 4\sqrt{2})\pi}{24}$. D. $V = \frac{125(2 + \sqrt{2})\pi}{4}$.

Câu 436. Trong không gian cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = a$ và $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Tính thể tích V của khối nón nhận được khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC .

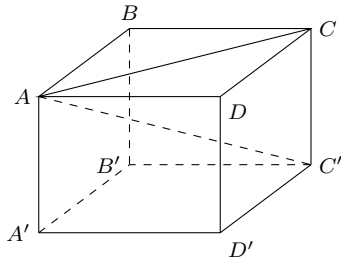
A. $V = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$. B. $V = \sqrt{3}\pi a^3$. C. $V = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{9}$. D. $V = \pi a^3$.

Câu 437 (QG17,101). Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các cạnh đều bằng $a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối nón có đỉnh S và đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$.

A. $V = \frac{\pi a^3}{2}$. B. $V = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{6}$. C. $V = \frac{\pi a^3}{6}$. D. $V = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{2}$.

Câu 438. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AD = 8$, $CD = 6$, $AC' = 12$. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ có hai đường tròn đáy là hai đường tròn ngoại tiếp hai hình chữ nhật $ABCD$ và $A'B'C'D'$.

A. $S_{tp} = 576\pi$. B. $S_{tp} = 10(2\sqrt{11} + 5)\pi$.
C. $S_{tp} = 26\pi$. D. $S_{tp} = 5(4\sqrt{11} + 5)\pi$.



Câu 439. Tính thể tích V của khối trụ ngoại tiếp hình lập phương có cạnh bằng a .

A. $V = \frac{\pi a^3}{4}$. B. $V = \pi a^3$. C. $V = \frac{\pi a^3}{6}$. D. $V = \frac{\pi a^3}{2}$.

Câu 440. Cho mặt cầu (S) tâm O , bán kính $R = 3$. Mặt phẳng (P) cách O một khoảng bằng 1 và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có tâm (H) . Gọi T là giao điểm của tia HO với (S) , tính thể tích V của khối nón có đỉnh T và đáy là hình tròn (C) .

A. $V = \frac{32\pi}{3}$. B. $V = 16\pi$. C. $V = \frac{16\pi}{3}$. D. $V = 32\pi$.

Câu 441. Cho hình nón (N) có đường sinh tạo với đáy một góc 60° . Mặt phẳng qua trục của (N) cắt (N) được thiết diện là một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1. Tính thể tích V của khối nón giới hạn bởi (N) .

A. $V = 9\sqrt{3}\pi$. B. $V = 9\pi$. C. $V = 3\sqrt{3}\pi$. D. $V = 3\pi$.

Câu 442. Cho hình nón đỉnh S có chiều cao $h = a$ và bán kính đáy $r = 2a$. Mặt phẳng (P) đi qua S cắt đường tròn đáy tại A và B sao cho $AB = 2\sqrt{3}a$. Tính khoảng cách d từ tâm của đường tròn đáy đến (P) .

A. $d = \frac{\sqrt{3}a}{2}$. B. $d = a$. C. $d = \frac{\sqrt{5}a}{5}$. D. $d = \frac{\sqrt{2}a}{2}$.

2. Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, độ dài đường sinh, chiều cao, bán kính đáy, t

Câu 443. Diện tích xung quanh của hình trụ tròn xoay có bán kính đáy r và độ dài đường sinh l bằng

A. πrl . B. $4\pi rl$. C. $2\pi rl$. D. $\frac{4}{3}\pi rl$.

Câu 444. Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = a$ và $AC = \sqrt{3}a$. Tính độ dài đường sinh l của hình nón, nhận được khi quay tam giác ABC xung quanh trục AB .

- A. $l = a$. B. $l = \sqrt{2}a$. C. $l = \sqrt{3}a$. D. $l = 2a$.

Câu 445. Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng $3\pi a^2$ và bán kính đáy bằng a . Tính độ dài đường sinh l của hình nón đã cho.

- A. $l = \frac{\sqrt{5}a}{2}$. B. $l = 2\sqrt{2}a$. C. $l = \frac{3a}{2}$. D. $l = 3a$.

Câu 446. Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng $3\pi a^2$ và bán kính đáy bằng a . Độ dài đường sinh của hình nón đã cho bằng

- A. $2\sqrt{2}a$. B. $3a$. C. $2a$. D. $\frac{3a}{2}$.

Câu 447. Trong không gian, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 1$ và $AD = 2$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Quay hình chữ nhật đó xung quanh trục MN , ta được một hình trụ. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ đó.

- A. $S_{tp} = 4\pi$. B. $S_{tp} = 2\pi$. C. $S_{tp} = 6\pi$. D. $S_{tp} = 10\pi$.

Câu 448. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 4. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ có một đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tam giác BCD và chiều cao bằng chiều cao của tứ diện $ABCD$

- A. $S_{xq} = \frac{15\sqrt{2}\pi}{3}$. B. $S_{xq} = 8\sqrt{2}\pi$. C. $S_{xq} = \frac{15\sqrt{3}\pi}{3}$. D. $S_{xq} = 8\sqrt{3}\pi$.

3. Bài toán thực tế về khối nón, khối trụ.

Câu 449. Một chiếc bút chì có dạng khối lăng trụ lục giác đều có cạnh đáy $3mm$ và chiều cao bằng $200mm$. Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều dài của bút và đáy là hình tròn có bán kính $1mm$. Giả định $1m^3$ gỗ có giá a triệu đồng, $1m^3$ than chì có giá $9a$ triệu đồng. Khi đó giá nguyên liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào dưới đây?

- A. $97,03a$ (đồng).. B. $10,33a$ (đồng).. C. $9,7a$ (đồng).. D. $103,3a$ (đồng)..

Câu 450. Một chiếc bút chì khối lăng trụ lục giác đều có cạnh đáy $3mm$ và chiều cao bằng $200mm$. Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều dài của bút chì và đáy là hình tròn bán kính $1mm$. Giả định $1m^3$ gỗ có giá trị a (triệu đồng), $1m^3$ than chì có giá trị $8a$ (triệu đồng). khi đó giá nguyên vật liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào sau đây?

- A. $9,7a$ (đồng). B. $97,03.a$ (đồng). C. $90,7.a$ (đồng). D. $9,07.a$ (đồng).

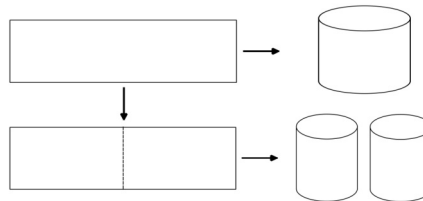
Câu 451. Một chiếc bút chì có dạng khối lăng trụ lục giác đều có cạnh đáy $3mm$ và chiều cao $200mm$. Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều dài của bút và đáy là hình tròn có bán kính $1mm$. Giả định $1m^3$ gỗ có giá α (triệu đồng), $1m^3$ than chì có giá 7α (triệu đồng). Khi đó giá nguyên vật liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào dưới đây?

- A. $84,5.\alpha$ (đồng). B. $9,07.\alpha$ (đồng). C. $8,45.\alpha$ (đồng). D. $90,07.\alpha$ (đồng).

Câu 452. Từ một tấm tôn hình chữ nhật kích thước $50cm \times 240cm$, người ta làm các thùng đựng nước hình trụ có chiều cao bằng $50cm$, theo hai cách sau (xem hình minh họa dưới đây) :

- Cách 1 : Gò tấm tôn ban đầu thành mặt xung quanh của thùng.
- Cách 2 : Cắt tấm tôn ban đầu thành hai tấm bằng nhau, rồi gò mỗi tấm đó thành mặt xung quanh của một thùng.

Kí hiệu V_1 là thể tích của thùng gò được theo cách 1 và V_2 là tổng thể tích của hai thùng gò được theo cách 2. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.



- A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}$. B. $\frac{V_1}{V_2} = 1$. C. $\frac{V_1}{V_2} = 2$. D. $\frac{V_1}{V_2} = 4$.

§2. Mặt cầu

1. Bài toán sử dụng định nghĩa, tính chất, vị trí tương đối.

Câu 453. Cho mặt cầu bán kính R ngoại tiếp một hình lập phương cạnh a . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a = 2\sqrt{3}R$. B. $a = \frac{\sqrt{3}R}{3}$. C. $a = 2R$. D. $a = \frac{2\sqrt{3}R}{3}$.

Câu 454. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp một hình lập phương có cạnh bằng $2a$.

- A. $R = \frac{\sqrt{3}a}{3}$. B. $R = a$. C. $R = 2\sqrt{3}a$. D. $R = \sqrt{3}a$.

Câu 455. Diện tích mặt cầu bán kính R bằng

- A. $\frac{4}{3}\pi R^2$. B. $2\pi R^2$. C. $4\pi R^2$. D. πR^2 .

Câu 456. Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác BCD vuông tại C , AB vuông góc với mặt phẳng (BCD) , $AB = 5a$, $BC = 3a$ và $CD = 4a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

- A. $R = \frac{5a\sqrt{2}}{3}$. B. $R = \frac{5a\sqrt{3}}{3}$. C. $R = \frac{5a\sqrt{2}}{2}$. D. $R = \frac{5a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 457 (QG17,102). Cho mặt cầu (S) có bán kính bằng 4, hình trụ (H) có chiều cao bằng 4 và hai đường tròn đáy nằm trên (S) . Gọi V_1 là thể tích của khối trụ (H) và V_2 là thể tích của khối cầu (S) . Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

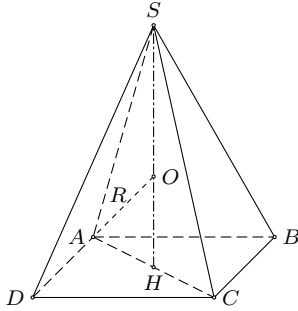
- A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{9}{16}$. B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{3}$. C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{16}$. D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{3}$.

Câu 458. Cho hình trụ có diện tích xung quanh bằng 50π và độ dài đường sinh bằng đường kính của đường tròn đáy. Tính bán kính r của đường tròn đáy.

- A. $r = \frac{5\sqrt{2\pi}}{2}$. B. $r = 5$. C. $r = 5\sqrt{\pi}$. D. $r = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Câu 459. Trong tất cả các hình chóp tứ giác đều nội tiếp mặt cầu có bán kính bằng 9, tính thể tích V của khối chóp có thể tích lớn nhất.

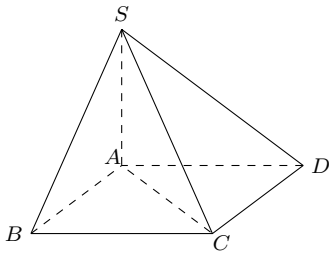
- A. $V = 144$. B. $V = 576$. C. $V = 576\sqrt{2}$. D. $V = 144\sqrt{6}$.



2. Khối cầu ngoại tiếp khối đa diện.

Câu 460. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = 3a$, $BC = 4a$, $SA = 12a$ và SA vuông góc với đáy. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

- A. $R = \frac{5a}{2}$. B. $R = \frac{17a}{2}$. C. $R = \frac{13a}{2}$. D. $R = 6a$.



Câu 461. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = 2a$ và $AA' = 2a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABB'C'$.

- A. $R = 3a$. B. $R = \frac{3a}{4}$. C. $R = \frac{3a}{2}$. D. $R = 2a$.

Câu 462. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $3\sqrt{2}a$, cạnh bên bằng $5a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

- A. $R = \sqrt{3}a$. B. $R = \sqrt{2}a$. C. $R = \frac{25a}{8}$. D. $R = 2a$.

Câu 463. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 1, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

- A. $V = \frac{5\sqrt{15}\pi}{18}$. B. $V = \frac{5\sqrt{15}\pi}{54}$. C. $V = \frac{4\sqrt{3}\pi}{27}$. D. $V = \frac{5\pi}{3}$.

3. Bài toán tổng hợp về khối nón, khối trụ, khối cầu.

Câu 464. Cho mặt cầu tâm O , bán kính R . Xét mặt phẳng (P) thay đổi cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn (C) . Hình nón (N) có đỉnh S nằm trên mặt cầu, có đáy là đường tròn (C) và có chiều cao là h ($h > R$). Tính h để thể tích khối nón được tạo nên bởi (N) có giá trị lớn nhất.

- A. $h = \sqrt{3}R$. B. $h = \sqrt{2}R$. C. $h = \frac{4R}{3}$. D. $h = \frac{3R}{2}$.

Chương 3. Phương pháp tọa độ trong không gian

§1. Hệ tọa độ trong không gian

1. Tìm tọa độ điểm, véc-tơ liên quan đến hệ trục $Oxyz$.

Câu 465. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -4; 3)$ và $B(2; 2; 7)$. Trung điểm của đoạn AB có tọa độ là

- A. $(1; 3; 2)$. B. $(2; 6; 4)$. C. $(2; -1; 5)$. D. $(4; -2; 10)$.

Câu 466 (QG17,102). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2; 2; 1)$. Tính độ dài đoạn thẳng OA .

- A. $OA = 3$. B. $OA = 9$. C. $OA = \sqrt{5}$. D. $OA = 5$.

Câu 467. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(2; 3; -1)$, $N(-1; 1; 1)$ và $P(1; m-1; 2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N .

- A. $m = -6$. B. $m = 0$. C. $m = -4$. D. $m = 2$.

Câu 468. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{a} = (2; 1; 0)$ và $\vec{b} = (-1; 0; -2)$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

- A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{25}$. B. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{2}{5}$.
C. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{2}{25}$. D. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{5}$.

Câu 469. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; -2; 3)$ và $B(-1; 2; 5)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB .

- A. $I(-2; 2; 1)$. B. $I(1; 0; 4)$. C. $I(2; 0; 8)$. D. $I(2; -2; -1)$.

Câu 470. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho các điểm $A(3; -4; 0)$, $B(-1; 1; 3)$ và $C(3; 1; 0)$. Tìm tọa độ điểm D trên trục hoành sao cho $AD = BC$.

- A. $D(-2; 0; 0)$ hoặc $D(-4; 0; 0)$. B. $D(0; 0; 0)$ hoặc $D(-6; 0; 0)$.
C. $D(6; 0; 0)$ hoặc $D(12; 0; 0)$. D. $D(0; 0; 0)$ hoặc $D(6; 0; 0)$.

2. Tích vô hướng và ứng dụng.

Câu 471. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 0; 2)$ và đi qua điểm $A(0; 1; 1)$. Xét các điểm B, C, D thuộc (S) sao cho AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng

- A. $\frac{8}{3}$. B. 4. C. $\frac{4}{3}$. D. 8.

3. Phương trình mặt cầu (xác định tâm, bán kính, viết PT mặt cầu đơn giản, vị trí tương đ

Câu 472. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : (x+3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 2$. Tâm của (S) có tọa độ là

- A. $(-3; -1; 1)$.. B. $(-3; 1; -1)$.. C. $(3; -1; 1)$.. D. $(3; 1; -1)$..

Câu 473. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): (x-5)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 3$ có bán kính bằng

A. $\sqrt{3}$.B. $2\sqrt{3}$.

C. 3.

D. 9.

Câu 474. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu

$$(S) : (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 9.$$

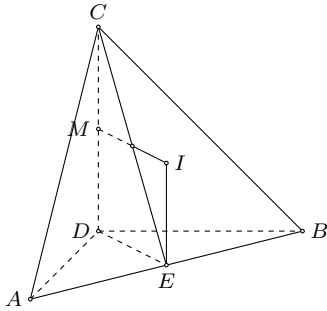
Tìm tọa độ tâm I và tính bán kính R của (S) .

A. $I(-1; 2; 1)$ và $R = 3$.B. $I(1; -2; -1)$ và $R = 3$.C. $I(-1; 2; 1)$ và $R = 9$.D. $I(1; -2; -1)$ và $R = 9$.

Câu 475. Trong không gian với hệ tọa độ, $Oxyz$ tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 4)^2 = 20$.

A. $I(-1; 2; -4)$, $R = 5\sqrt{2}$.B. $I(-1; 2; -4)$, $R = 2\sqrt{5}$.C. $I(-1; 2; -4)$, $R = 20$.D. $I(1; -2; 4)$, $R = 2\sqrt{5}$.

Câu 476. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2; 0; 0)$, $B(0; -2; 0)$ và $C(0; 0; -2)$. Gọi D là điểm khác O sao cho DA, DB, DC đôi một vuông góc với nhau và $I(a; b; c)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Tính $S = a + b + c$.

A. $S = -4$.B. $S = -1$.C. $S = -2$.D. $S = -3$.

4. Các bài toán cực trị.

Câu 477 (QG17,102). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z + m = 0$ là phương trình của một mặt cầu.

A. $m > 6$.B. $m \geq 6$.C. $m \leq 6$.D. $m < 6$.

Câu 478. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : x^2 + (y + 2)^2 + (z - 2)^2 = 8$. Tìm bán kính R của (S) .

A. $R = 8$.B. $R = 4$.C. $R = 2\sqrt{2}$.D. $R = 64$.

Câu 479. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : (x - 5)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 9$. Tính bán kính R của (S) .

A. $R = 3$.B. $R = 18$.C. $R = 9$.D. $R = 6$.

Câu 480. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-2; 1; 2)$ và đi qua điểm $A(1; -2; -1)$. Xét các điểm B, C, D thuộc (S) sao cho AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng

A. 72.

B. 216.

C. 108.

D. 36.

Câu 490. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): 2x + y + 3z - 1 = 0$ có một vectơ pháp tuyến là

- A. $\vec{n}_4 = (1; 3; 2)$. B. $\vec{n}_1 = (3; 1; 2)$. C. $\vec{n}_3 = (2; 1; 3)$. D. $\vec{n}_2 = (-1; 3; 2)$.

Câu 491. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x - z + 2 = 0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (P) ?

- A. $\vec{n}_4 = (-1; 0; -1)$. B. $\vec{n}_1 = (3; -1; 2)$. C. $\vec{n}_3 = (3; -1; 0)$. D. $\vec{n}_2 = (3; 0; -1)$.

Câu 492. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; 1; 1)$, $B(2; 1; 0)$, $C(1; -1; 2)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC có phương trình là

- A. $x + 2y - 2z + 1 = 0$. B. $x + 2y - 2z - 1 = 0$.
C. $3x + 2z - 1 = 0$. D. $3x + 2z + 1 = 0$.

3. Viết phương trình mặt phẳng.

Câu 493. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $A(2; -1; 2)$ và song song với mặt phẳng $(P): 2x - y + 3z + 2 = 0$ có phương trình là

- A. $2x - y + 3z - 9 = 0$. B. $2x - y + 3z + 11 = 0$.
C. $2x - y - 3z + 11 = 0$. D. $2x - y + 3z - 11 = 0$.

Câu 494. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(5; -4; 2)$ và $B(1; 2; 4)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB có phương trình là

- A. $2x - 3y - z + 8 = 0$. B. $3x - y + 3z - 13 = 0$.
C. $2x - 3y - z - 20 = 0$. D. $3x - y + 3z - 25 = 0$.

Câu 495. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; 1; 1)$ và $B(1; 2; 3)$. Viết phương trình của mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB .

- A. $x + y + 2z - 3 = 0$. B. $x + y + 2z - 6 = 0$.
C. $x + 3y + 4z - 7 = 0$. D. $x + 3y + 4z - 26 = 0$.

Câu 496. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1; 0; 0)$; $B(0; -2; 0)$; $C(0; 0; 3)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng (ABC) ?

- A. $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{1} = 1$. B. $\frac{x}{-2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{3} = 1$. C. $\frac{x}{1} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{3} = 1$. D. $\frac{x}{3} + \frac{y}{1} + \frac{z}{-2} = 1$.

Câu 497. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(2; 0; 0)$, $N(0; -1; 0)$ và $P(0; 0; 2)$ Mặt phẳng (MNP) có phương trình là

- A. $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 0$. B. $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = -1$.
C. $\frac{x}{2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{2} = 1$. D. $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 1$.

Câu 498. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 2; 1)$ và $B(2; 1; 0)$ Mặt phẳng qua A và vuông góc với AB có phương trình là

- A. $3x - y - z - 6 = 0$. B. $3x - y - z + 6 = 0$.
C. $x + 3y + z - 5 = 0$. D. $x + 3y + z - 6 = 0$.

4. Tìm tọa độ điểm liên quan đến mặt phẳng.

Câu 499. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : x - 2y + z - 5 = 0$. Điểm nào dưới đây thuộc (P) ?

- A. $Q(2; -1; 5)$. B. $P(0; 0; -5)$. C. $N(-5; 0; 0)$. D. $M(1; 1; 6)$.

Câu 500. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1; -2; 0)$, $B(0; -1; 1)$, $C(2; 1; -1)$ và $D(3; 1; 4)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt phẳng cách đều bốn điểm đó ?

- A. 1 mặt phẳng. B. 4 mặt phẳng.
C. 7 mặt phẳng. D. Có vô số mặt phẳng.

Câu 501. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3; -1; 1)$ Hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (Oyz) là điểm

- A. $M(3; 0; 0)$. B. $N(0; -1; 1)$. C. $P(0; -1; 0)$. D. $Q(0; 0; 1)$.

Câu 502. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : 6x - 2y + z - 35 = 0$ và điểm $A(-1; 3; 6)$. Gọi A' là điểm đối xứng với A qua (P) , tính OA' .

- A. $OA' = 3\sqrt{26}$. B. $OA' = 5\sqrt{3}$. C. $OA' = \sqrt{46}$. D. $OA' = \sqrt{186}$.

Câu 503. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 1; 2)$ Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$ lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho $OA = OB = OC \neq 0$?

- A. 3. B. 1. C. 4. D. 8.

5. Khoảng cách.

Câu 504. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x + 4y + 2z + 4 = 0$ và điểm $A(1; -2; 3)$. Tính khoảng cách d từ A đến (P) .

- A. $d = \frac{5}{9}$. B. $d = \frac{5}{29}$. C. $d = \frac{5}{\sqrt{29}}$. D. $d = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

6. Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng, giữa mặt cầu và mặt phẳng.

Câu 505. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2; 1; 1)$ và mặt phẳng $(P) : 2x + y + 2z + 2 = 0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 1. Viết phương trình của mặt cầu (S) .

- A. $(S): (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 8$. B. $(S): (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 10$.
C. $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 8$. D. $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 10$.

Câu 506. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu có tâm $I(1; 2; -1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P) : x - 2y - 2z - 8 = 0$?

- A. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 3$. B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 3$.
C. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$. D. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 9$.

Câu 507. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(3; 2; -1)$ và đi qua điểm $A(2; 1; 2)$. Mặt phẳng nào dưới đây tiếp xúc với (S) tại A ?

- A. $x + y - 3z - 8 = 0$. B. $x - y - 3z + 3 = 0$.
C. $x + y + 3z - 9 = 0$. D. $x + y - 3z + 3 = 0$.

Câu 508. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1; 2; 3)$ và mặt phẳng $(P) : 2x - 2y - z - 4 = 0$. Mặt cầu tâm I tiếp xúc với (P) tại điểm H . Tìm tọa độ điểm H .

- A. $H(-1; 4; 4)$. B. $H(-3; 0; -2)$. C. $H(3; 0; 2)$. D. $H(1; -1; 0)$.

Câu 509. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu đi qua ba điểm $M(2; 3; 3)$, $N(2; -1; -1)$, $P(-2; -1; 3)$ và có tâm thuộc mặt phẳng $(\alpha) : 2x + 3y - z + 2 = 0$?

- A. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z - 10 = 0$. B. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z - 2 = 0$.
C. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 6z + 2 = 0$. D. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z - 2 = 0$.

Câu 510. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, xét các điểm $A(0; 0; 1)$, $B(m; 0; 0)$, $C(0; n; 0)$, $D(1; 1; 1)$ với $m > 0; n > 0$ và $m + n = 1$. Biết rằng khi m, n thay đổi, tồn tại một mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) và đi qua d . Tính bán kính R của mặt cầu đó?

- A. $R = 1$. B. $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $R = \frac{3}{2}$. D. $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 511. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P) : x - 2y + 2z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z + 5 = 0$. Giả sử điểm $M \in (P)$ và $N \in (S)$ sao cho vectơ $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với vectơ $\vec{u}(1; 0; 1)$ và khoảng cách giữa M và N lớn nhất. Tính MN .

- A. $MN = 3$. B. $MN = 1 + 2\sqrt{2}$. C. $MN = 3\sqrt{2}$. D. $MN = 14$.

Câu 512. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; 1)$, $B(3; -1; 1)$ và $C(-1; -1; 1)$. Gọi S_1 là mặt cầu có tâm A , bán kính bằng 2; S_2 và S_3 là hai mặt cầu có tâm lần lượt là B, C và bán kính đều bằng 1. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu $(S_1), (S_2), (S_3)$?

- A. 5. B. 7. C. 6. D. 8.

§3. Phương trình đường thẳng trong không gian

1. Xác định VTCP.

Câu 513. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d : \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{2}$?

- A. $P(1; 1; 2)$.. B. $N(2; -1; 2)$.. C. $Q(-2; 1; -2)$.. D. $M(-2; -2; 1)$..

Câu 514 (QG17,102). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0; -1; 3)$, $B(1; 0; 1)$ và $C(-1; 1; 2)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua A và song song với đường thẳng BC ?

- A. $\begin{cases} x = -2t \\ y = -1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$ B. $x - 2y + z = 0$.
C. $\frac{x}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}$. D. $\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$.

Câu 515. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$ có một véc-tơ chỉ phương là

- A. $\vec{u}_3 = (2; 1; 3)$. B. $\vec{u}_4 = (-1; 2; 1)$. C. $\vec{u}_2 = (2; 1; 1)$. D. $\vec{u}_1 = (-1; 2; 3)$..

Câu 516. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$. Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là

- A. $\vec{u}_1 = (-1; 2; 1)$. B. $\vec{u}_2 = (2; 1; 0)$. C. $\vec{u}_3 = (2; 1; 1)$. D. $\vec{u}_4 = (-1; 2; 0)$.

Câu 517 (QG17,102). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; -2; 3)$ và hai mặt phẳng $(P): x + y + z + 1 = 0$, $(Q): x - y + z - 2 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua A , song song với (P) và (Q) ?

- A. $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 \\ z = -3 - t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3 - 2t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 \\ z = 3 + 2t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 \\ z = 3 - t \end{cases}$.

Câu 518. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; 0)$ và $B(0; 1; 2)$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB ?

- A. $\vec{b} = (-1; 0; 2)$. B. $\vec{c} = (1; 2; 2)$. C. $\vec{d} = (-1; 1; 2)$. D. $\vec{a} = (-1; 0; -2)$.

Câu 519. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; 3)$. Gọi M_1, M_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các trục Ox, Oy . Vectơ nào dưới đây là vectơ chỉ phương của đường thẳng M_1M_2 ?

- A. $\vec{u}_2 = (1; 2; 0)$. B. $\vec{u}_3 = (1; 0; 0)$. C. $\vec{u}_4 = (-1; 2; 0)$. D. $\vec{u}_1 = (0; 2; 0)$.

Câu 520. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 3t \\ z = 5 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$. Vectơ

nào dưới đây là vectơ chỉ phương của d ?

- A. $\vec{u}_3 = (1; 3; -1)$. B. $\vec{u}_4 = (0; 3; -1)$. C. $\vec{u}_2 = (1; -3; -1)$. D. $\vec{u}_1 = (0; 3; 1)$.

Câu 521. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -1; 2)$, $B(-1; 2; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$. Tìm điểm $M(a; b; c)$ thuộc d sao cho $MA^2 + MB^2 = 28$, biết $c < 0$.

- A. $M(-1; 0; -3)$. B. $M(2; 3; 3)$.
C. $M\left(\frac{1}{6}; \frac{7}{6}; -\frac{2}{3}\right)$. D. $M\left(-\frac{1}{6}; -\frac{7}{6}; -\frac{2}{3}\right)$.

2. Viết phương trình đường thẳng.

Câu 522. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 0; 2)$ và đường thẳng d có phương trình: $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A , vuông góc và cắt d .

- A. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{1}$. B. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$.
C. $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$. D. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{1}$.

Câu 523. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ phương trình nào dưới đây là phương trình

chính tắc của đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3t \\ z = -2 + t \end{cases}$?

$$\text{A. } \frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{1}.$$

$$\text{C. } \frac{x+1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-2}.$$

$$\text{B. } \frac{x-1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{-2}.$$

$$\text{D. } \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{1}.$$

Câu 524. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-1; 1; 3)$ và hai đường thẳng $\Delta : \frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{1}$, $\Delta' : \frac{x+1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua M , vuông góc với Δ và Δ' .

$$\text{A. } \begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \quad \text{B. } \begin{cases} x = -t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad \text{C. } \begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad \text{D. } \begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Câu 525 (QG17,101). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1 : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + t \\ z = 2 \end{cases}$, $d_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{2}$ và mặt phẳng $(P) : 2x + 2y - 3z = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua giao điểm của d_1 và (P) , đồng thời vuông góc với d_2 ?

$$\text{A. } 2x - y + 2z + 22 = 0. \quad \text{B. } 2x - y + 2z + 13 = 0.$$

$$\text{C. } 2x - y + 2z - 13 = 0. \quad \text{D. } 2x + y + 2z - 22 = 0.$$

Câu 526. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -2; -3)$, $B(-1; 4; 1)$ và đường thẳng $d : \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của đường thẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng AB và song song với d ?

$$\text{A. } \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}.$$

$$\text{B. } \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+2}{2}.$$

$$\text{C. } \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}.$$

$$\text{D. } \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}.$$

Câu 527. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -3 + t \\ z = 4 - 2t \end{cases}$ và

$d' : \frac{x-4}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng thuộc mặt phẳng chứa d và d' đồng thời cách đều hai đường thẳng đó?

$$\text{A. } \frac{x-3}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{-2}.$$

$$\text{B. } \frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+2}{-2}.$$

$$\text{C. } \frac{x+3}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{-2}.$$

$$\text{D. } \frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{-2}.$$

Câu 528. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$ và đường thẳng $d : \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+7}{-2}$. Đường thẳng đi qua A , vuông góc với d và cắt trục Ox có phương trình là

$$\text{A. } \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases} \quad \text{B. } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \quad \text{C. } \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases} \quad \text{D. } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$$

Câu 529. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta : \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P) : x - 2y - z + 3 = 0$. Đường thẳng nằm trong (P) đồng thời cắt và vuông góc với Δ có phương trình là

A. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = -3 \\ y = -t \\ z = 2t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 \end{cases}$.

Câu 530. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z-3}{4}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng $x + 3 = 0$?

A. $\begin{cases} x = -3 \\ y = -5 - t \\ z = -3 + 4t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = -3 \\ y = -5 + t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = -3 \\ y = -5 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = -3 \\ y = -6 - t \\ z = 7 + 4t \end{cases}$.

Câu 531. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1 : \frac{x-3}{-1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+2}{1}$; $d_2 : \frac{x-5}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P) : x + 2y + 3z - 5 = 0$. Đường thẳng vuông góc với (P) , cắt s_1 và d_2 có phương trình là

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$. B. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{3}$.
C. $\frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{3}$. D. $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}$.

Câu 532. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 \end{cases}$, gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(1; 2; 3)$ và vectơ chỉ phương $\vec{u} = (0; -7; -1)$. Đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có phương trình là:

A. $\begin{cases} x = 1 + 6t \\ y = 2 + 11t \\ z = 3 + 8t \end{cases}$.. B. $\begin{cases} x = -4 + 5t \\ y = -10 + 12t \\ z = -2 + t \end{cases}$..
C. $\begin{cases} x = -4 + 5t \\ y = -10 + 12t \\ z = 2 + t \end{cases}$.. D. $\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$..

Câu 533. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 4t \\ z = 1 \end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(1; 1; 1)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (1; -2; 2)$. Đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có phương trình là

A. $\begin{cases} x = 1 + 7t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 5t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -10 + 11t \\ z = -6 - 5t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -10 + 11t \\ z = 6 - 5t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 4t \\ z = 1 - 5t \end{cases}$.

Câu 534. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 4t \\ z = 1 \end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(1; 1; 1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-2; 1; 2)$. Đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có phương trình là

A. $\begin{cases} x = 1 + 27t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = -18 + 19t \\ y = -6 + 7t \\ z = 11 - 10t \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x = -18 + 19t \\ y = -6 + 7t \\ z = -11 - 10t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + 17t \\ z = 1 + 10t \end{cases}$.

Câu 535. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 2; 1)$, $B\left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$. Đường thẳng đi qua tâm đường tròn nội tiếp của tam giác OAB và vuông góc với mặt phẳng (OAB) có phương trình là

A. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{2}$.

B. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-8}{-2} = \frac{z-4}{2}$.

C. $\frac{x+\frac{1}{3}}{1} = \frac{y-\frac{5}{3}}{-2} = \frac{z-\frac{11}{6}}{2}$.

D. $\frac{x+\frac{2}{9}}{1} = \frac{y-\frac{2}{9}}{-2} = \frac{z-\frac{5}{9}}{2}$.

3. Tìm tọa độ điểm liên quan đến đường thẳng.

Câu 536. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 5 + t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$?

A. $P(1; 2; 5)$. B. $N(1; 5; 2)$. C. $Q(-1; 1; 3)$. D. $M(1; 1; 3)$.

4. Góc.

Câu 537. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(2; 3; 0)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): x + 3y - z + 5 = 0$?

A. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

5. Khoảng cách.

Câu 538. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z + 1 = 0$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{2}$. Tính khoảng cách d giữa Δ và (P) .

A. $d = \frac{1}{3}$. B. $d = \frac{5}{3}$. C. $d = \frac{2}{3}$. D. $d = 2$.

6. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng, giữa đường thẳng và mặt phẳng.

Câu 539. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(3; -1; 1)$ và vuông góc đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{1}$?

A. $3x - 2y + z + 12 = 0$. B. $3x + 2y + z - 8 = 0$.
C. $3x - 2y + z - 12 = 0$. D. $x - 2y + 3z + 3 = 0$.

Câu 540. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; 3; 1)$ và $B(5; -6; -2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M . Tính tỉ số $\frac{AM}{BM}$.

- A. $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}$. B. $\frac{AM}{BM} = 2$. C. $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{3}$. D. $\frac{AM}{BM} = 3$.

7. Bài toán liên quan giữa đường thẳng - mặt phẳng - mặt cầu.

Câu 541. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; -2; 3)$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox . Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu tâm I bán kính IM ?

- A. $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 13$. B. $(x + 1)^2 + y^2 + z^2 = 13$.
C. $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{13}$. D. $(x + 1)^2 + y^2 + z^2 = 17$.

Câu 542 (QG17,102). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x + 1)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 2$ và hai đường thẳng $d: \frac{x - 2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z - 1}{-1}$, $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z - 1}{-1}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của một mặt phẳng tiếp xúc với (S) , song song với d và Δ ?

- A. $x + z + 1 = 0$. B. $x + y + 1 = 0$. C. $y + z + 3 = 0$. D. $x + z - 1 = 0$.

Câu 543. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có phương trình :

$$\frac{x - 10}{5} = \frac{y - 2}{1} = \frac{z + 2}{1}.$$

Xét mặt phẳng $(P): 10x + 2y + mz + 11 = 0$, m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng Δ .

- A. $m = -2$. B. $m = 2$. C. $m = -52$. D. $m = 52$.

Câu 544. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x + 1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z - 5}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 3x - 3y + 2z + 6 = 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. d cắt và không vuông góc với (P) . B. d vuông góc với (P) .
C. d song song với (P) . D. d nằm trong (P) .

Câu 545. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x + 1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z + 2}{2}$ và mặt phẳng $(P): x + y - z + 1 = 0$. Đường thẳng nằm trong (P) đồng thời cắt và vuông góc với Δ có phương trình là

- A. $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -4t \\ z = -3t \end{cases}$.. B. $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 + 4t \\ z = 2 + t \end{cases}$.. C. $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 - 4t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$.. D. $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 + 6t \\ z = 2 + t \end{cases}$..

Câu 546. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 1$ và điểm $A(2; 3; 4)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S) , M thuộc mặt phẳng có phương trình là?

- A. $2x + 2y + 2z - 15 = 0$. B. $x + y + z - 7 = 0$.
C. $2x + 2y + 2z + 15 = 0$. D. $x + y + z + 7 = 0$.

Câu 547. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 9$ và điểm $A(2; 3; -1)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S) , M luôn thuộc mặt phẳng có phương trình

- A. $6x + 8y + 11 = 0$. B. $3x + 4y + 2 = 0$. C. $3x + 4y - 2 = 0$. D. $6x + 8y - 11 = 0$.

Câu 548. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ và $d_2: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-1}$.

- A. $(P): 2x - 2z + 1 = 0$. B. $(P): 2y - 2z + 1 = 0$.
C. $(P): 2x - 2y + 1 = 0$. D. $(P): 2y - 2z - 1 = 0$.

Câu 549 (QG17,101). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 9$, điểm $M(1; 1; 2)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 4 = 0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua M , thuộc (P) và cắt (S) tại hai điểm A, B sao cho AB nhỏ nhất. Biết rằng Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}(1; a; b)$. Tính $T = a - b$.

- A. $T = -2$. B. $T = 1$. C. $T = -1$. D. $T = 0$.

Câu 550 (QG17,102). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(4; 6; 2), B(2; -2; 0)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z = 0$. Xét đường thẳng d thay đổi thuộc (P) và đi qua B , gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên d . Biết rằng khi d thay đổi thì H thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính R của đường tròn đó.

- A. $R = \sqrt{6}$. B. $R = 2$. C. $R = 1$. D. $R = \sqrt{3}$.

Câu 551. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; -2; 6), B(0; 1; 0)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$. Mặt phẳng $(P): ax + by + cz - 2 = 0$ đi qua A, B và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T = a + b + c$.

- A. $T = 3$. B. $T = 5$. C. $T = 2$. D. $T = 4$.

Câu 552. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 16$ và điểm $A(-1; -1; -1)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S) , M luôn thuộc mặt phẳng có phương trình là

- A. $3x + 4y - 2 = 0$. B. $3x + 4y + 2 = 0$. C. $6x + 8y + 11 = 0$. D. $6x + 8y - 11 = 0$.

ĐẠI SỐ & GIẢI TÍCH 11

Chương 2. Tổ hợp. Xác suất. Nhị thức Newton

§1. Hoán vị-chỉnh hợp-tổ hợp

1. Bài toán chỉ sử dụng P hoặc C hoặc A.

Câu 1. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm hai chữ số khác nhau?

A. C_2^7 ..

B. 2^7 ..

C. 7^2 ..

D. A_7^2 ..

Lời giải.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 2. Có bao nhiêu cách chọn hai học sinh từ một nhóm gồm 34 học sinh?

A. 2^{34} .

B. A_{34}^2 .

C. 34^2 .

D. C_{34}^2 .

Lời giải.

Mỗi cách chọn hai học sinh từ một nhóm gồm 34 học sinh là một tổ hợp chập 2 của 34 phần tử nên số cách chọn là C_{34}^2 .

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 3. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm hai chữ số khác nhau?

A. 2^8 .

B. C_8^2 .

C. A_8^2 .

D. 8^2 .

Lời giải.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 4. Cho tập hợp M có 10 phần tử. Số tập con gồm 2 phần tử của M là

A. A_{10}^8 .

B. A_{10}^2 .

C. C_{10}^2 .

D. 10^2 .

Lời giải.

Số tập con gồm 2 phần tử của M là C_{10}^2

Chọn đáp án **(C)**

□

§2. Nhị thức Newton

1. Tìm hệ số, số hạng trong khai triển nhị thức Newton.

Câu 5. Hệ số của x^5 trong khai triển $x(2x - 1)^6 + (x - 3)^8$ bằng

A. -1272 ..

B. 1272 ..

C. -1752 ..

D. 1752 ..

Lời giải.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 6. Hệ số của x^5 trong khai triển nhị thức $x(2x - 1)^6 + (3x - 1)^8$ bằng

A. -13368 .

B. 13368 .

C. -13848 .

D. 13848 .

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } x(2x-1)^6 + (3x-1)^8 &= x \sum_{k=0}^6 C_6^k (2x)^k (-1)^{6-k} + \sum_{l=0}^8 C_8^l (3x)^l (-1)^{8-l} \\ &= x \sum_{k=0}^6 C_6^k (2x)^k (-1)^{6-k} + \sum_{l=0}^8 C_8^l (3x)^l (-1)^{8-l} \end{aligned}$$

Suy ra hệ số của x^5 trong khai triển nhị thức là: $C_6^4 \cdot 2^4 \cdot (-1)^{6-4} + C_8^5 \cdot 3^5 \cdot (-1)^{8-5} = -13368$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 7. Hệ số của x^5 trong khai triển biểu thức $x(x-2)^6 + (3x-1)^8$ bằng

- A. 13548. B. 13668. C. -13668. D. -13548.

Lời giải.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 8. Với n là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^1 + C_n^2 = 55$, số hạng không chứa x trong khai triển của biểu thức $\left(x^3 + \frac{2}{x^2}\right)^n$ bằng

- A. 322560. B. 3360. C. 80640. D. 13440.

Lời giải.

Điều kiện: $n \in \mathbb{N}^*$; $n \geq 2$. Theo đề bài ta có: $C_n^1 + C_n^2 = 55$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{1!(n-1)!} + \frac{n!}{2!(n-2)!} = 55 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} + \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} = 55$$

$$\Leftrightarrow 2n + n(n-1) = 110 \Leftrightarrow n^2 + n - 110 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 10 & (tm) \\ n = -11 & (ktm) \end{cases}$$

$$\text{Ta có khai triển: } \left(x^3 + \frac{2}{x^2}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k x^{3k} \cdot 2^{10-k} \cdot (x^{-2})^{10-k} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k 2^{10-k} x^{5k-20}.$$

Để có hệ số không chứa x thì: $5k - 20 = 0 \Leftrightarrow k = 4$. Hệ số không chứa x là: $C_{10}^4 \cdot 2^6 = 13440$.

Chọn đáp án **(D)** □

§3. Xác suất của biến cố

1. Tính xác suất bằng định nghĩa.

Câu 9. Từ một hộp chứa 9 quả cầu màu đỏ và 6 quả cầu màu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả cầu. Xác suất để lấy được 3 quả cầu màu xanh bằng

- A. $\frac{12}{65}$.. B. $\frac{5}{21}$.. C. $\frac{24}{91}$.. D. $\frac{4}{91}$..

Lời giải.

$$\frac{4}{91}.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 10. Từ một hộp chứa 11 quả cầu đỏ và 4 quả cầu màu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả cầu. Xác suất để lấy được 3 quả cầu màu xanh bằng:

- A. $\frac{4}{455}$. B. $\frac{24}{455}$. C. $\frac{4}{165}$. D. $\frac{33}{91}$.

Lời giải.

Số phần tử không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{15}^3 = 455$ (phần tử).

Gọi A là biến cố: “lấy được 3 quả cầu màu xanh”.

Khi đó, $n(A) = C_4^3 = 4$ (phần tử).

$$\text{Xác suất } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{4}{455}.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 11. Từ một hộp chứa 10 quả cầu màu đỏ và 5 quả cầu màu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả cầu. Xác suất để lấy được 3 quả cầu màu xanh bằng

A. $\frac{2}{91}$.

B. $\frac{12}{91}$.

C. $\frac{1}{12}$.

D. $\frac{24}{91}$.

Lời giải.

Chọn đáp án **A** □

Câu 12. Một hộp chứa 11 quả cầu gồm 5 quả cầu màu xanh và 6 quả cầu màu đỏ. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 2 quả cầu từ hộp đó. Xác suất để 2 quả cầu chọn ra cùng màu bằng

A. $\frac{5}{22}$.

B. $\frac{6}{11}$.

C. $\frac{5}{11}$.

D. $\frac{8}{11}$.

Lời giải.

Chọn ngẫu nhiên 2 quả cầu từ 11 quả cầu nên ta có: $n_\Omega = C_{11}^2 = 55$.

Gọi biến cố A: “Chọn được hai quả cầu cùng màu”. $\Rightarrow n_A = C_5^2 + C_6^2 = 25$. $\Rightarrow P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{25}{55} = \frac{5}{11}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 13. Ba bạn A, B, C mỗi bạn viết ngẫu nhiên lên bảng một số tự nhiên thuộc đoạn [1; 17].

Xác suất để ba số được viết ra có tổng chia hết cho 3 bằng

A. $\frac{1728}{4913}$.

B. $\frac{1079}{4913}$.

C. $\frac{23}{68}$.

D. $\frac{1637}{4913}$.

Lời giải.

Không gian mẫu có số phần tử là $17^3 = 4913$.

Lấy một số tự nhiên từ 1 đến 17 ta có các nhóm số sau:

*) Số chia hết cho 3: có 5 số thuộc tập {3; 6; 9; 12; 15}.

*) Số chia cho 3 dư 1: có 6 số thuộc tập {1; 4; 7; 10; 13; 16}.

*) Số chia cho 3 dư 2: có 6 số thuộc tập {2; 5; 8; 11; 14; 17}.

Ba bạn A, B, C mỗi bạn viết ngẫu nhiên lên bảng một số tự nhiên thuộc đoạn [1; 17] thỏa mãn ba số đó có tổng chia hết cho 3 thì các khả năng xảy ra như sau:

·TH1: Ba số đều chia hết cho 3 có $5^3 = 125$ cách.

·TH2: Ba số đều chia cho 3 dư 1 có $6^3 = 216$ cách.

·TH3: Ba số đều chia cho 3 dư 2 có $6^3 = 216$ cách.

·TH4: Một số chia hết cho 3, một số chia cho 3 dư 1, chia cho 3 dư 2 có $5.6.6.3! = 1080$ cách.

Vậy xác suất cần tìm là $\frac{125 + 216 + 216 + 1080}{4913} = \frac{1637}{4913}$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 14. Ba bạn A, B, C mỗi bạn viết ngẫu nhiên lên bảng một số tự nhiên thuộc đoạn [1; 16].

Xác suất để ba số được viết ra có tổng chia hết cho 3 bằng

A. $\frac{683}{2048}$.

B. $\frac{1457}{4096}$.

C. $\frac{19}{56}$.

D. $\frac{77}{512}$.

Lời giải.Chọn đáp án **(A)** □

Câu 15. Xếp ngẫu nhiên 10 học sinh gồm 2 học sinh lớp 12A, 3 học sinh lớp 12B và 5 học sinh lớp 12C thành một hàng ngang. Xác suất để trong 10 học sinh trên không có 2 học sinh cùng lớp đứng cạnh nhau bằng

- A. $\frac{11}{630}$. B. $\frac{1}{126}$. C. $\frac{1}{105}$. D. $\frac{1}{42}$.

Lời giải.

Kí hiệu học sinh lớp 12A, 12B, 12C lần lượt là A, B, C.

Số cách xếp 10 học sinh thành 1 hàng ngang là $10!$ (cách) $\Rightarrow |\Omega| = 10!$

Ta xếp 5 học sinh lớp 12C trước.

TH1: $C \square C \square C \square C \square C \square$ (quy ước vị trí của $\square$ là vị trí trống), đổi chỗ 5 học sinh đó cho nhau ta có $5!$ Cách xếp. Xếp 5 học sinh còn lại vào 5 vị trí trống ta có $5!$ cách xếp. Vậy trường hợp này có $5!.5!$ cách.

TH2: $\square C \square C \square C \square C \square C$, tương tự như trường hợp 1 ta có $5!.5!$ cách.

TH3: $C \square C \square C \square C \square \square C$, đổi chỗ 5 học sinh đó cho nhau ta có $5!$ Cách xếp.

Ta có 2 vị trí trống liền nhau, chọn 1 học sinh lớp 12A và 1 học sinh lớp 12B để xếp vào 2 vị trí trống đó, 2 học sinh này có thể đổi chỗ cho nhau nên có $C_2^1 \cdot C_3^1 \cdot 2! = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ cách. Xếp 3 học sinh còn lại vào 3 chỗ trống có $3!$ Cách. Vậy trường hợp này có $5!.12.3!$ cách.

TH4: $C \square C \square C \square \square C \square C$

TH5: $C \square C \square \square C \square C \square C$

TH6: $C \square \square C \square C \square C \square C$

Ba trường hợp 4, 5, 6 có cách xếp giống trường hợp 3. Vậy có tất cả $5!.5!.2 + 4.5!.12.3! = 63360$ (cách)

Gọi T là biến cố “Xếp 10 học sinh thành hàng ngang sao cho không có học sinh nào cùng lớp đứng cạnh nhau” $\Rightarrow |A| = 63360$

Vậy xác suất của biến cố T là $P(T) = \frac{63360}{10!} = \frac{11}{630}$

Chọn đáp án **(A)** □**2. Tính xác suất bằng công thức nhân.**

Câu 16. Ba bạn A, B, C mỗi bạn viết ngẫu nhiên lên bảng một số tự nhiên thuộc đoạn $[1; 14]$.

Xác suất để ba số được viết có tổng chia hết cho 3.

- A. $\frac{457}{1372}$.. B. $\frac{307}{1372}$.. C. $\frac{207}{1372}$.. D. $\frac{31}{91}$..

Lời giải.

Ta có không gian mẫu 14^3 .

Ta tìm các trường hợp thuận lợi cho biến cố “ba số được viết có tổng chia hết cho”.

Ta chia các số nguyên thuộc đoạn $[1; 14]$ thành ba loại:

Số chia hết cho 3, tức thuộc tập $\{3; 6; 9; 12\}$.

Số chia cho 3 dư 1, tức thuộc tập $\{1; 4; 7; 10; 13\}$.

Số chia cho 3 dư 2, tức thuộc tập $\{2; 5; 8; 11; 14\}$.

Trường hợp 1: Ba số cùng 1 nhóm Có số cách là $4^3 + 5^3 + 5^3$.

Trường hợp 2: Ba số cùng 3 nhóm khác nhau Có số cách là $4.5.5.3!$.

Vậy xác suất cần tìm là $\frac{4^3 + 2.5^3 + 4.5^2.6}{14^3} = \frac{457}{1372}$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Chương 3. Dãy số - Cấp số cộng- Cấp số nhân

§1. Dãy số

1. Tìm hạng tử trong dãy số.

Câu 17. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log u_1 + \sqrt{2 + \log u_1 - 2 \log u_{10}} = 2 \log u_{10}$ và $u_{n+1} = 2u_n$ với mọi $n \geq 1$ Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > 5^{100}$ bằng

A. 247.

B. 248.

C. 229.

D. 290.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{2 + \log u_1 - 2 \log u_{10}} \geq 0 \Leftrightarrow \log u_1 - 2 \log u_{10} = t^2 - 2$, khi đó giả thiết trở thành: ...

$$\Rightarrow \log u_1 - 2 \log u_{10} = -1 \Leftrightarrow \log u_1 + 1 = 2 \log u_{10} \Leftrightarrow \log (10u_1) = \log (u_{10})^2 \Leftrightarrow 10u_1 = (u_{10})^2 \quad (1).$$

Mà là cấp số nhân với công bội $q = 2 \Rightarrow u_{10} = 2^9 u_1$ (2). Từ (1), (2) suy ra

$$10u_1 = (2^9 u_1)^2 \Leftrightarrow 2^{18} u_1^2 = 10u_1 \Leftrightarrow u_1 = \frac{10}{2^{18}} \Rightarrow u_n = 2^{n-1} \cdot \frac{10}{2^{18}} = \frac{2^n \cdot 10}{2^{19}}.$$

$$\text{Do đó } u_n > 5^{100} \Leftrightarrow \frac{2^n \cdot 10}{2^{19}} > 5^{100} \Leftrightarrow n > \log_2 \left(\frac{5^{100} \cdot 2^{19}}{10} \right) = -\log_2 10 + 100 \log_2 5 + 19 \approx 247,87.$$

Vậy giá trị n nhỏ nhất thỏa mãn là $n = 248$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Chương 4. Giới hạn

§1. Giới hạn của dãy số

1. Dùng phương pháp đặt thừa số.

Câu 18. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+7}$ bằng

A. $+\infty$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. 0.

D. $\frac{1}{7}$.

Lời giải.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 19. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5n+3}$ bằng

A. 0.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $+\infty$.

D. $\frac{1}{5}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5n+3} = 0.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 20. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+5}$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. 0.

C. $+\infty$.

D. $\frac{1}{5}$.

Lời giải.

Chọn đáp án **(B)**

□

§2. Giới hạn của hàm số

1. Dạng vô cùng chia vô cùng, số chia vô cùng.

Câu 21. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x+3}$ bằng

A. $-\frac{2}{3}$.

B. 1.

C. 2.

D. -3.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{3}{x}} = 1$$

Chọn đáp án **(B)**

□

HÌNH HỌC 11

Chương 3. Véc-tơ trong không gian. Quan hệ vuông góc trong không gian

§1. Hai đường thẳng vuông góc

1. Xác định góc giữa hai đường thẳng (dùng định nghĩa).

Câu 22. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = OC$. Gọi M là trung điểm của BC (tham khảo hình bên). Góc giữa hai đường thẳng OM và AB bằng

A. 90° .

B. 30° .

C. 60° .

D. 45° .

Lời giải.

Gọi N là trung điểm của AC ta có MN là đường trung bình của tam giác ABC nên $AB \parallel MN \Rightarrow (\widehat{OM; AB}) = (\widehat{OM; MN})$ Đặt $OA = OB = OC = 1$ ta có:

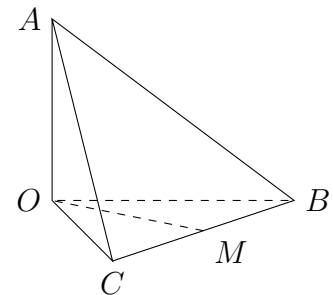
Tam giác OAB vuông cân tại O nên $AB = \sqrt{2} \Rightarrow MN = \frac{\sqrt{2}}{2}$ Tam giác OAC vuông cân tại O

nên $AC = \sqrt{2} \Rightarrow ON = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Tam giác OBC vuông cân tại O nên $BC = \sqrt{2} \Rightarrow OM = \frac{\sqrt{2}}{2}$ Vậy tam giác OMN đều nên $(\widehat{OM; MN}) = \widehat{OMN} = 60^\circ$

Chọn đáp án **(C)**

□



§2. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

1. Xác định quan hệ vuông góc giữa đường thẳng và mặt phẳng, đường thẳng và đường thẳng

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại C , $AC = a$, $BC = a\sqrt{2}$, SA vuông góc với mặt đáy, $SA = a$, góc giữa đường thẳng SB và mặt đáy bằng

- A. 60° .. B. 90° .. C. 30° .. D. 45° ..

Lời giải.

Chọn đáp án **C**

□

2. Xác định góc giữa hai mặt phẳng, đường thẳng và mặt phẳng.

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $AB = a$ và $SB = 2a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

- A. 60° . B. 45° . C. 30° . D. 90° .

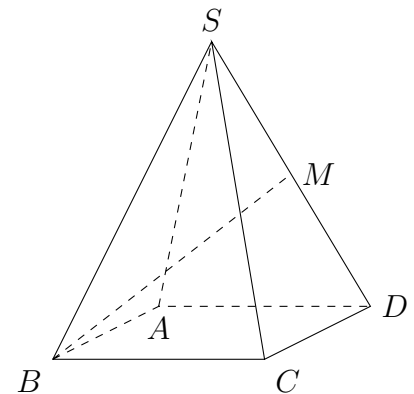
Lời giải.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 25. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm của SD (tham khảo hình vẽ bên). Tang của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
C. $\frac{2}{3}$.
D. $\frac{1}{3}$.



Lời giải.

Gọi G là giao điểm của BM và SO . Từ M kẻ đường thẳng vuông góc với BD tại N . Khi đó ta có $MN \parallel SO \Rightarrow MN \perp (ABCD) \Rightarrow N$ là hình chiếu của M trên $(ABCD) \Rightarrow (BM; (ABCD)) = (\widehat{BM; BD}) = \widehat{MBD}$. Xét tam giác SBD ta có MB và BD là hai đường trung tuyến cắt nhau tại G

$$\Rightarrow G \text{ là trọng tâm tam giác } SBD \Rightarrow OG = \frac{1}{3}SO. \text{ Ta có: } BO = \frac{1}{2}BD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow OG = \frac{a\sqrt{2}}{6}. \Rightarrow \tan \widehat{MBD} = \frac{OG}{OB} = \frac{a\sqrt{2}}{6} \cdot \frac{2}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{3}.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SB = 2a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

- A. 60° . B. 90° . C. 30° . D. 45° .

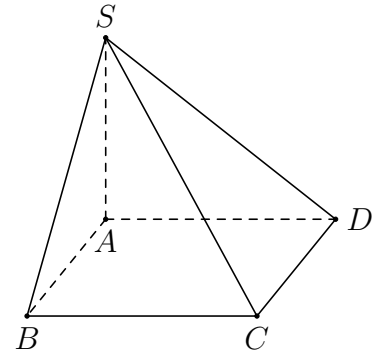
Lời giải.

Ta có AB là hình chiếu của SB trên $(ABCD)$.

Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng góc giữa SB và AB .

Tam giác SAB vuông tại A , $\cos \widehat{ABS} = \frac{AB}{SB} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \widehat{ABS} = 60^\circ$.



Chọn đáp án **A**

□

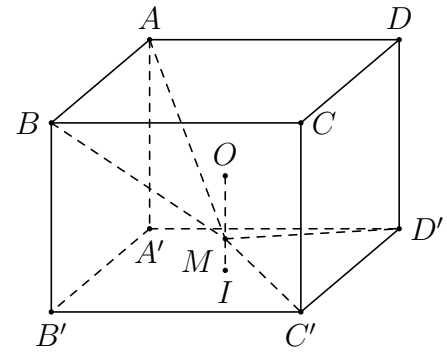
§3. Hai mặt phẳng vuông góc

1. Xác định góc giữa hai mặt phẳng, đường và mặt.

Câu 27.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Gọi I là tâm hình vuông $A'B'C'D'$ và M là điểm thuộc đoạn thẳng OI sao cho $MO = 2MI$ (tham khảo hình vẽ). Khi đó cô-sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) bằng

- A. $\frac{6\sqrt{85}}{85}$. B. $\frac{7\sqrt{85}}{85}$. C. $\frac{17\sqrt{13}}{65}$. D. $\frac{6\sqrt{13}}{65}$.



Lời giải.

Không mất tính tổng quát, ta giả sử các cạnh của hình lập phương bằng 6.

Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của $D'C'$ và AB . Khi đó ta có $MP = \sqrt{IM^2 + IP^2} = \sqrt{10}$, $MQ = \sqrt{34}$, $PQ = 6\sqrt{2}$.

Áp dụng định lý cô-sin ta được

$$\cos PMQ = \frac{MP^2 + MQ^2 - PQ^2}{2MP \cdot MQ} = \frac{-14}{\sqrt{340}}.$$

Góc α là góc giữa hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) ta có

$$\cos \alpha = \frac{14}{\sqrt{340}} = \frac{7\sqrt{85}}{85}.$$

Chọn đáp án **B**

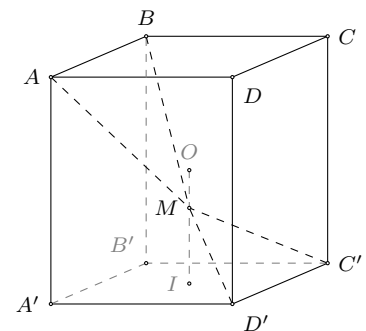
□

Câu 28. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O .

Gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và M là điểm thuộc đoạn thẳng OI sao cho $OM = \frac{1}{2}MI$ (tham khảo hình vẽ).

Khi đó sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) bằng

- A. $\frac{17\sqrt{13}}{65}$. B. $\frac{6\sqrt{85}}{85}$.
C. $\frac{7\sqrt{85}}{85}$. D. $\frac{6\sqrt{13}}{65}$.



Lời giải.Chọn đáp án **(D)** □

Câu 29. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2\sqrt{3}$ và $AA' = 2$ Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B', A'C'$ và BC (tham khảo hình vẽ bên). Cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (MNP) bằng

A. $\frac{6\sqrt{13}}{65}$.

B. $\frac{\sqrt{13}}{65}$.

C. $\frac{17\sqrt{13}}{65}$.

D. $\frac{18\sqrt{13}}{65}$.

Lời giải.

Để thấy $\widehat{(AB'C'); (MNP)} = \widehat{(AB'C'); (MNCB)} =$
 $= 180^\circ - \widehat{(AB'C'); (A'B'C')} - \widehat{(MNBC); (A'B'C')} = 180^\circ - \widehat{(A'BC); (ABC)} - \widehat{(MNBC); (ABC)}$.
 Ta có $\widehat{(A'BC); (ABC)} = \widehat{(A'P; AP)} = \widehat{A'PA} = \arctan \frac{2}{3}$. Và $\widehat{(MNBC); (ABC)} = \widehat{(SP; AP)} =$
 $\widehat{SPA} = \arctan \frac{4}{3}$,

với S là điểm đối xứng với A qua A' , thì $SA = 2AA' = 4$.

$$\text{Suy ra } \cos \widehat{(AB'C'); (MNP)} = \cos \left(180^\circ - \arctan \frac{2}{3} - \arctan \frac{4}{3} \right) = \frac{\sqrt{13}}{65}.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 30. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O .

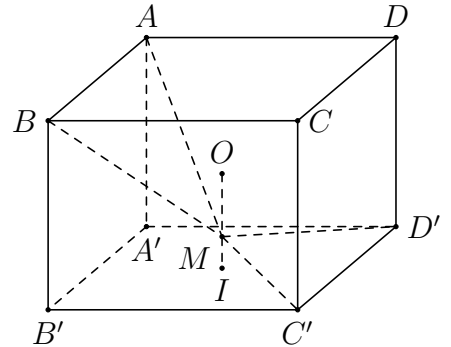
Gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và M là điểm thuộc đường thẳng OI sao cho $MO = 2MI$ (tham khảo hình vẽ). Khi đó sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) bằng:

A. $\frac{6\sqrt{13}}{65}$..

B. $\frac{7\sqrt{85}}{85}$..

C. $\frac{17\sqrt{13}}{65}$..

D. $\frac{6\sqrt{85}}{85}$..

**Lời giải.**

Cách 1: Không giảm tính tổng quát, ta giả sử cạnh hình lập phương bằng 6.

Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ, sao cho gốc tọa độ trùng với điểm B' .

Khi đó, $C' (6; 0; 0)$, $D' (6; 6; 0)$, $M (3; 3; 1)$, $A (0; 6; 6)$, $B (0; 0; 6)$.

$$\overrightarrow{MC'} (3; -3; -1), \overrightarrow{MD'} (3; 3; -1)$$

$$\text{Suy ra vectơ pháp tuyến của } (MC'D') \text{ là } \vec{n}_1 = [\overrightarrow{MC'}, \overrightarrow{MD'}] = (6; 0; 18) = 6(1; 0; 3).$$

$$\overrightarrow{MA} (-3; 3; 5), \overrightarrow{MB} (-3; -3; 5)$$

$$\text{Suy ra vectơ pháp tuyến của } (MAB) \text{ là } \vec{n}_2 = [\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}] = (30; 0; 18) = 6(5; 0; 3).$$

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) , ta có

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{14}{\sqrt{340}}. \text{ Vậy } \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{6\sqrt{85}}{85}.$$

Cách 2: Không giảm tính tổng quát, ta giả sử cạnh hình lập phương bằng 6.

Gọi P, Q lần lượt là trung điểm $D'C'$ và AB . Khi đó, $MP = \sqrt{IM^2 + IP^2} = \sqrt{10}$, $MQ = \sqrt{34}$,

$$PQ = 6\sqrt{2}.$$

$$\cos \widehat{PMQ} = \frac{MP^2 + MQ^2 - PQ^2}{2MP \cdot MQ} = \frac{-14}{\sqrt{340}}.$$

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) , ta có $\cos \alpha = \frac{14}{\sqrt{340}}$.

$$\text{Vậy } \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{6\sqrt{85}}{85}.$$

Chọn đáp án (D) □

§4. Khoảng cách

1. Tính độ dài đoạn thẳng và khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng.

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{a\sqrt{5}}{3}$.. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.. C. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.. D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$..

Lời giải.

Chọn đáp án (B) □

2. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông đỉnh B , $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

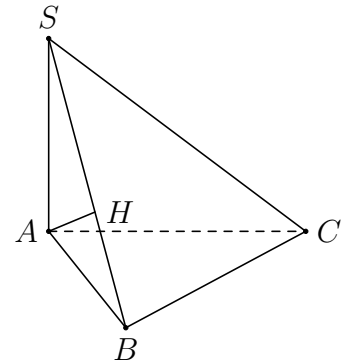
A. $\frac{2\sqrt{5}a}{5}$.. B. $\frac{\sqrt{5}a}{3}$.. C. $\frac{2\sqrt{2}a}{3}$.. D. $\frac{\sqrt{5}a}{5}$..

Lời giải.

Trong tam giác SAB dựng AH vuông góc SB thì $AH \perp (SBC)$

Do đó khoảng cách cần tìm là AH .

$$\text{Ta có } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{5}{4a^2} \text{ suy ra } AH = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$



Chọn đáp án (A) □

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại C , $BC = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\sqrt{2}a$.. B. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$.. C. $\frac{a}{2}$.. D. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$..

Lời giải.

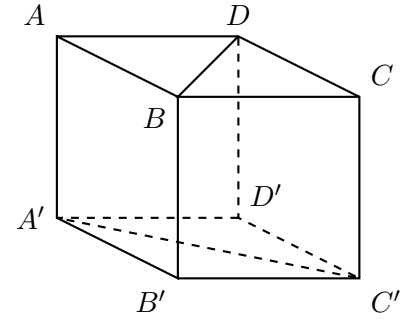
Chọn đáp án (B) □

3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.

Câu 34. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có

cạnh bằng a (tham khảo hình bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng

- A. $\sqrt{3}a$.
 B. a .
 C. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$.
 D. $\sqrt{2}a$.



Lời giải.

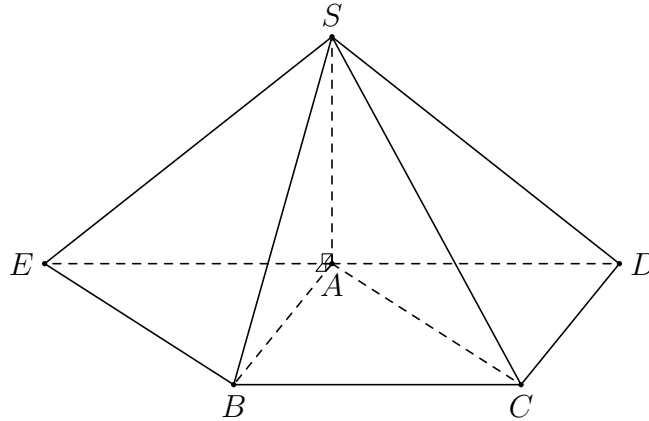
Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB bằng

- A. $\frac{\sqrt{6}a}{2}$. B. $\frac{2a}{3}$. C. $\frac{a}{2}$. D. $\frac{a}{3}$.

Lời giải.



Dựng hình bình hành $ACBE$ ta có $AC \parallel (SBE)$ nên $AC, SB = d(A, (SBE)) = h$.

Do AS, AB, AE đôi một vuông góc nhau nên $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{9}{4a^2}$.

Như vậy $d(A, (SBE)) = h = \frac{2a}{3}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 36. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau, $OA = a$ và $OB = OC = 2a$. Gọi M là trung điểm của BC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng OM và AB bằng

- A. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. B. a . C. $\frac{2\sqrt{5}a}{5}$. D. $\frac{\sqrt{6}a}{3}$.

Lời giải.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 37. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau, $OA = OB = a; OC = 2a$. Gọi M là trung điểm của AB . Khoảng cách giữa hai đường thẳng OM và AC bằng.

- A. $\frac{\sqrt{2}a}{3}$.. B. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.. C. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$.. D. $\frac{2a}{3}$..

Lời giải.

Gắn hệ tọa độ $Oxyz$, $O(0; 0; 0)$, $A(a; 0; 0)$, $B(0; a; 0)$, $C(0; 0; 2a)$, $M\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0\right)$

$\overrightarrow{AC}(-a; 0; 2a)$, $\overrightarrow{OC}(0; 0; 2a)$, $\overrightarrow{OM} = \left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0\right)$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng OM và AC bằng $d(OM, AC) = \frac{|[\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{OC}|}{|[\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AC}]|} = \frac{2a}{3}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

GIẢI TÍCH 12

Chương 1. Ứng dụng đạo hàm để khảo sát hàm số

§1. Sự đồng biến và nghịch biến của hàm số

1. Xét tính đơn điệu của hàm số cho bởi công thức.

Câu 38. Cho hàm số $y = x^3 + 3x + 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
- C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Lời giải.

hàm số $y = x^3 + 3x + 2$ có đạo hàm $y' = 3x^2 + 3$ dương $\forall x \in \mathbb{R}$ nên Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$-$
y	$-\infty$	-1	-2	-1	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-1; 0)$..
- B. $(1; +\infty)$..
- C. $(-\infty; 1)$..
- D. $(0; 1)$..

Lời giải.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 40. Hàm số $y = \frac{2}{x^2 + 1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(0; +\infty)$.
- B. $(-1; 1)$.
- C. $(-\infty; +\infty)$.
- D. $(-\infty; 0)$.

Lời giải.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 41 (QG17,102). Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A. $y = \frac{x+1}{x+3}$.
- B. $y = x^3 + x$.
- C. $y = \frac{x-1}{x-2}$.
- D. $y = -x^3 - 3x$.

Lời giải.

Ta có

$$\left(\frac{x+1}{x+3}\right)' = \frac{2}{(x+3)^2} > 0 \text{ với mọi } x \neq -3.$$

$$(x^3 + 3x)' = 3(x^2 + 1) > 0 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

$$\left(\frac{x-1}{x-2}\right)' = \frac{-1}{(x-2)^2} < 0 \text{ với mọi } x \neq 2.$$

$$(-x^3 - 3x)' = -3(x^2 + 1) < 0 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Từ đây suy ra $y = x^3 + 3x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.Chọn đáp án **(B)** □**Câu 42 (QG17,102).** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$. B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
 C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$. D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Lời giải.

TXD: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0. \\ x = 2. \end{cases}$ Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	0	-4	$+\infty$	

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên $(0, 2)$.Chọn đáp án **(A)** □**Câu 43.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
 B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
 C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
 D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải.Vì $f'(x) = x^2 + 1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nên Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ Chọn đáp án **(D)** □**Câu 44.** Hỏi hàm số $y = 2x^4 + 1$ đồng biến trên khoảng nào ?

- A. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$. B. $(0; +\infty)$. C. $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. D. $(-\infty; 0)$.

Lời giải.

$$y = 2x^4 + 1 \Rightarrow y' = 8x^3.$$

Với $x \in (0, +\infty) \Rightarrow y' > 0 \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ Chọn đáp án **(B)** □

Câu 45. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(\frac{1}{3}; 1)$. B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; \frac{1}{3})$.
 C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(\frac{1}{3}; 1)$. D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 4x + 1 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = \frac{1}{3}$. Nên $y' < 0 \forall x \in (\frac{1}{3}; 1)$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 46. Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
 B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
 C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
 D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Lời giải.

$y' = \frac{3}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1); (-1; +\infty)$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 47. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A. $y = 3x^3 + 3x - 2$. B. $y = 2x^3 - 5x + 1$. C. $y = x^4 + 3x^2$. D. $y = \frac{x-2}{x+1}$.

Lời giải.

Ta có $y' > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, (3x^3 + 3x - 2)' = 9x^2 + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 48. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'		+	0	-	+

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$.
 B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
 C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.
 D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

Lời giải.

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -2), (2; +\infty)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(-2; 0), (0; 2)$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 49. Cho hàm số $y = \sqrt{2x^2 + 1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$. B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
 C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$. D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 1}}$. Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘			$+\infty$
			1		

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 50. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
- C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Lời giải.

Xét hàm số có $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) \Rightarrow y' > 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 1) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1; 0) \cup (1; +\infty)$
 $\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$ và nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 51. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$				
y	$+\infty$	$\searrow$		0	$\nearrow$		4	$\searrow$		$-\infty$

- A. $(-2; +\infty)$.
- B. $(-2; 3)$.
- C. $(3; +\infty)$.
- D. $(-\infty; -2)$.

Lời giải.

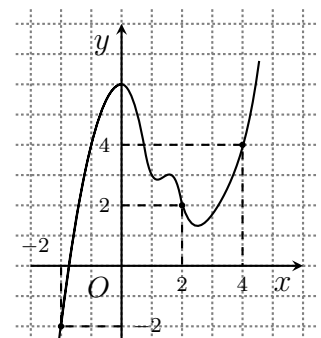
Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 52.

Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $h(x) = 2f(x) - x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $h(4) = h(-2) > h(2)$.
- B. $h(4) = h(-2) < h(2)$.
- C. $h(2) > h(4) > h(-2)$.
- D. $h(2) > h(-2) > h(4)$.



Lời giải.

Chọn đáp án **(C)**

□

2. Xét tính đơn điệu dựa vào bảng biến thiên, đồ thị.

Câu 53. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$-$
y			3		3	

Diagram illustrating the mapping of y values to x intervals:

- $y = -\infty$ maps to $x = -2$
- $y = 3$ maps to $x = 0$
- $y = -1$ maps to $x = 2$
- $y = -\infty$ maps to $x = +\infty$

- A. $(-2; 0)$. B. $(-\infty; -2)$. C. $(0; 2)$. D. $(0; +\infty)$.

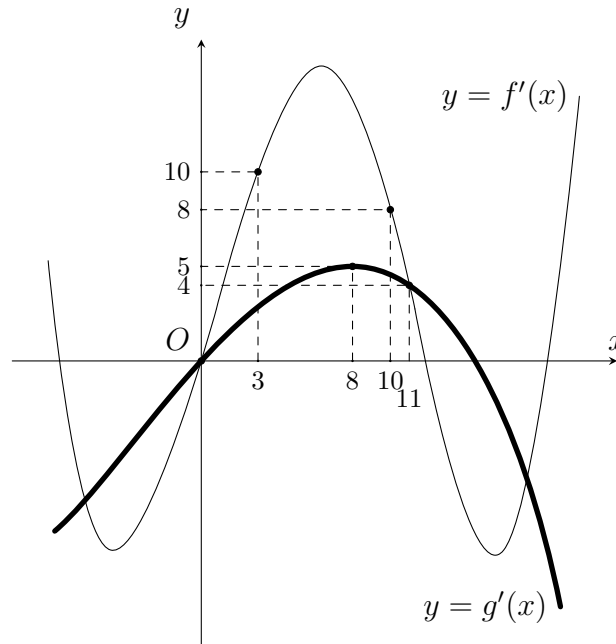
Lời giải.

Quan sát bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-2; 0)$ và $(2; +\infty)$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 54. Cho hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$. Hai hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên, trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị của hàm số $y = g'(x)$.



Hàm số $h(x) = f(x+4) - g\left(2x - \frac{3}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $\left(5; \frac{31}{5}\right)$. B. $\left(\frac{9}{4}; 3\right)$. C. $\left(\frac{31}{5}; +\infty\right)$. D. $\left(6; \frac{25}{4}\right)$.

Lời giải.

Kẻ đường thẳng $y = 10$ cắt đồ thị hàm số $y = f'(x)$ tại $A(a; 10)$, $a \in (8; 10)$. Khi đó ta có

$$\begin{cases} f(x+4) > 10, \text{ khi } 3 < x+4 < a \\ g\left(2x - \frac{3}{2}\right) \leq 5, \text{ khi } 0 \leq 2x - \frac{3}{2} < 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x+4) > 10, \text{ khi } -1 < x < 4 \\ g\left(2x - \frac{3}{2}\right) \leq 5, \text{ khi } \frac{3}{4} \leq x \leq \frac{25}{4} \end{cases}$$

Do đó $h'(x) = f'(x+4) - 2g'\left(2x - \frac{3}{2}\right) > 0$ khi $\frac{3}{4} \leq x < 4$.

Kiểu đánh giá khác:

Ta có $h'(x) = f'(x+4) - 2g'\left(2x - \frac{3}{2}\right)$.

Dựa vào đồ thị, $\forall x \in \left(\frac{9}{4}; 3\right)$, ta có $\frac{25}{4} < x + 4 < 7$, $f(x + 4) > f(3) = 10$;

$3 < 2x - \frac{3}{2} < \frac{9}{2}$, do đó $g\left(2x - \frac{3}{2}\right) < f(8) = 5$.

Suy ra $h'(x) = f'(x + 4) - 2g'\left(2x - \frac{3}{2}\right) > 0, \forall x \in \left(\frac{9}{4}; 3\right)$. Do đó hàm số đồng biến trên $\left(\frac{9}{4}; 3\right)$.

Chọn đáp án **B** □

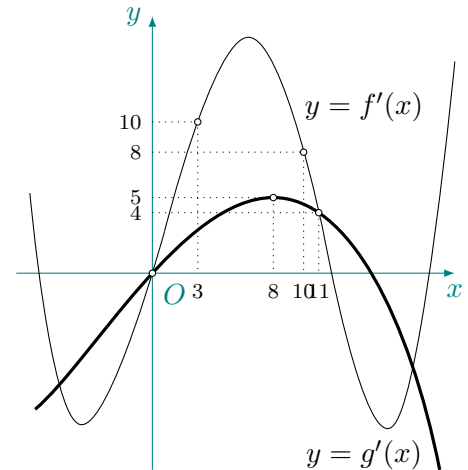
Câu 55. Cho hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$. Hai hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên, trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị của hàm số $y = g'(x)$. Hàm số $h(x) = f(x + 6) - g\left(2x + \frac{5}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\frac{21}{5}; +\infty\right)$.

B. $\left(\frac{1}{4}; 1\right)$.

C. $\left(3; \frac{21}{5}\right)$.

D. $\left(4; \frac{17}{4}\right)$.



Lời giải.

Chọn đáp án **B** □

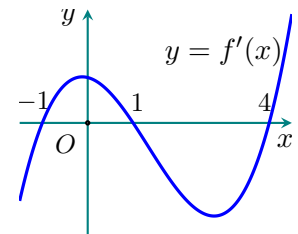
Câu 56. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = f(2 - x)$ đồng biến trên khoảng

A. $(1; 3)$.

B. $(2; +\infty)$.

C. $(-2; 1)$.

D. $(-\infty; -2)$.



Lời giải.

Hàm số $y = f(2 - x)$ đồng biến $y' = -f'(2 - x) > 0 \Leftrightarrow f'(2 - x) < 0$. Nhìn đồ thị $\Leftrightarrow 2 - x < -1$ hoặc $1 < 2 - x < 4 \Leftrightarrow x > 3$ hoặc $-2 < x < 1$

Chọn đáp án **C** □

3. Tìm tham số m để hàm số đơn điệu.

Câu 57. Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m + 9)x + 5$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

A. 7.

B. 4.

C. 6.

D. 5.

Lời giải.

$y' = -3x^2 - 2mx + 4m + 9$. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; +\infty) \Leftrightarrow y' = 0$ nghiệm kép hoặc vô nghiệm $\Rightarrow \Delta' = m^2 + 3(4m + 9) \leq 0 \Rightarrow -9 \leq m \leq -3 \Rightarrow$ có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Chọn đáp án **A** □

Câu 58. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = x^3 + mx - \frac{1}{5x^5}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

- A. 5. B. 3. C. 0. D. 4.

Lời giải.

$y = x^3 + mx - \frac{1}{5x^5}$ Ta có:

$$y' = 3x^2 + m - \frac{1}{5} \cdot (-5x^{-6}) = 3x^2 + m + \frac{1}{x^6} > 0 \quad \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow -m < 3x^2 + \frac{1}{x^6} = f(x) \quad \forall x \in (0; +\infty)$$

$$\Rightarrow -m < \min_{(0; +\infty)} f(x)$$

$$f(x) = 3x^2 + \frac{1}{x^6} = x^2 + x^2 + x^2 + \frac{1}{x^6} \geq 4\sqrt[4]{1} = 4 \Rightarrow \min_{(0; +\infty)} f(x) = 4$$

$$\Leftrightarrow -m < 4 \Leftrightarrow m > -4$$

Mà m là số nguyên âm $\Rightarrow m \in \{-3; -2; -1\}$. Vậy có 3 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 59. Cho hàm số $y = \frac{mx + 4m}{x + m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S .

- A. 5. B. 4. C. Vô số. D. 3.

Lời giải.

$y' < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4$. Vậy S có 3 phần tử.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 60. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x + 2}{x + 5m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -10)$?

- A. 2. B. Vô số. C. 1. D. 3.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-5m\}$.

$$y' = \frac{5m - 2}{(x + 5m)^2}.$$

$$\text{Hàm số đồng biến trên } (-\infty; -10) \Leftrightarrow \begin{cases} 5m - 2 > 0 \\ -5m \geq -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{2}{5} \\ m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{5} < m \leq 2.$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{1; 2\}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 61. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x + 1}{x + 3m}$ nghịch biến trên khoảng $(6; +\infty)$.

- A. 3.. B. Vô số.. C. 0.. D. 6..

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x \neq -3m$. $y' = \frac{3m - 1}{(x + 3m)^2}$. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(6; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y' < 0 \\ -3m \notin (6; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m - 1 < 0 \\ -3m \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{3} \\ m \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m < \frac{1}{3}.$$

Vậy có 3 giá trị nguyên.

Chọn đáp án **A** □

Câu 62. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+2}{x+3m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -6)$?

A. 2.

B. 6.

C. Vô số.

D. 1.

Lời giải.

Chọn đáp án **A** □

Câu 63. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $m \leq 0$ hoặc $1 \leq m < 2$.

B. $m \leq 0$.

C. $\leq m < 2$.

D. $m \geq 2$.

Lời giải.

$$y' = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}(\tan x - m) - \frac{1}{\cos^2 x}(\tan x - 2)}{(\tan x - m)^2} = \frac{2 - m}{\cos^2 x (\tan x - m)^2}.$$

Hàm số đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ khi và chỉ khi hàm số xác định trên $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ và $y' \geq 0 \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x \neq m, & \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \\ 2 - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ 1 \leq m \leq 2. \end{cases}$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 64. Hỏi có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = (m^2 - 1)x^3 + (m - 1)x^2 - x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 3.

Lời giải.

Ta có $y' = 3(m^2 - 1)x^2 + 2(m - 1)x - 1$.

Trường hợp 1. Nếu $m = 1$ ta có $y' = -1 < 0$ nên thỏa mãn.

Trường hợp 1. Nếu $m = 1$ ta có $y' = -4x - 1 < 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{4}$ không thỏa mãn.

Trường hợp 1. Nếu $m \neq \pm 1$ thì để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$y \leq 0, \forall x \in (-\infty; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ \Delta' = 4m^2 - 2m - 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ -\frac{1}{2} \leq m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m < 1.$$

Do yêu cầu đề bài m là số nguyên nên $m = 0$. Vậy có 2 số m thỏa mãn.

Chọn đáp án **A** □

Câu 65. Cho hàm số $y = \frac{mx - 2m - 3}{x - m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S .

A. 5.

B. 4.

C. Vô số.

D. 3.

Lời giải.

Xét hàm số $y = \frac{mx - 2m - 3}{x - m} \Rightarrow y' = \frac{-m^2 + 2m + 3}{(x - m)^2}$ hàm số đồng biến trên các khoảng xác định
 $\Leftrightarrow y' > 0 \Leftrightarrow -m^2 + 2m + 3 > 0 \Leftrightarrow m \in (-1; 3) \Rightarrow m = -2; -1; 0 \Rightarrow$ Tập S có 3 phần tử nguyên.
 Chọn đáp án **D** □

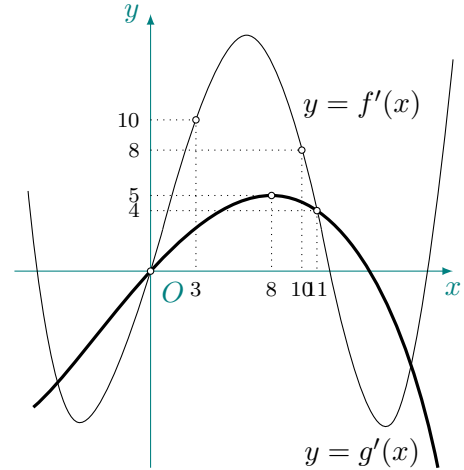
4. Ứng dụng tính đơn điệu để chứng minh bất, giải pt, bpt, hệ pt.

Câu 66. Cho hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$.

Hai hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên, trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị của hàm số $y = g'(x)$.

Hàm số $h(x) = f(x + 3) - g\left(2x - \frac{7}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây:

- A. $\left(\frac{13}{4}; 4\right) ..$ B. $\left(7; \frac{29}{4}\right) ..$
 C. $\left(6; \frac{36}{5}\right) ..$ D. $\left(\frac{36}{5}; +\infty\right) ..$



Lời giải.

Với mọi $x \in (3; 8)$ thì $f'(x) \geq 10 \geq 2g'(x)$. $h'(x) = f'(x + 3) - 2g'\left(2x - \frac{7}{2}\right) > 0$.

Kiểm tra $\begin{cases} x + 3 \in (3; 8) \\ 2x - \frac{7}{2} \in (3; 8) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0; 5) \\ x \in \left(\frac{13}{4}; \frac{23}{4}\right) \end{cases} \Rightarrow x \in \left(\frac{13}{4}; 5\right)$. Nên ta chọn đáp án $x \in \left(\frac{13}{4}; 4\right)$.

Chọn đáp án **A** □

§2. Cực trị của hàm số

1. Tìm cực trị của hàm số cho bởi công thức.

Câu 67. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			3		0		$+\infty$
	$-\infty$						

Tìm giá trị cực đại y_{CD} và giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số đã cho.

- A. $y_{CD} = 3$ và $y_{CT} = -2$. B. $y_{CD} = 2$ và $y_{CT} = 0$.
 C. $y_{CD} = -2$ và $y_{CT} = 2$. D. $y_{CD} = 3$ và $y_{CT} = 0$.

Lời giải.

Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$, giá trị cực đại $y_{CD} = 3$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$, giá trị cực tiểu $y_{CT} = 0$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 68. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	5	1	$+\infty$	

Đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4.

B. 2.

C. 3.

D. 5.

Lời giải.

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 69. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y					

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số có bốn điểm cực trị.

B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.

C. Hàm số không có cực đại.

D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -5$.

Lời giải.

Nhìn bảng biến thiên ta dễ dàng thấy được hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 70. Tìm giá trị cực đại y_{CD} của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$.

A. $y_{CD} = 4$.

B. $y_{CD} = 1$.

C. $y_{CD} = 0$.

D. $y_{CD} = -1$.

Lời giải.

Ta có $y = x^3 - 3x + 2$; $y' = 3x^2 - 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y		4			

Chọn đáp án **A**

□

Câu 71. Hàm số $y = \frac{2x+3}{x+1}$ có bao nhiêu điểm cực trị?
 A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.

Lời giải.

Ta có $y' = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0$, với mọi $x \neq -1$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 72. Đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai điểm cực trị A và B . Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB ?

A. $P(1; 0)$. B. $M(0; -1)$. C. $N(1; -10)$. D. $Q(-1; 10)$.

Lời giải.

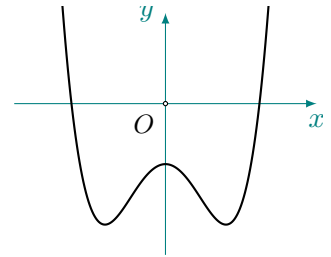
Hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có $y' = 3x^2 - 6x - 9$ nên có hai điểm cực trị $A(-1; 6)$, $B(3; -26)$.
 Phương trình đường thẳng qua AB là $8x + y + 2 = 0$. Vậy $N(1; -10) \in AB$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 73. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$)

có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 2..
 B. 3..
 C. 0..
 D. 1..



Lời giải.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 74. Đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 5$ có hai điểm cực trị A và B . Tính diện tích S của tam giác OAB với O là gốc tọa độ.

A. $S = 9$. B. $S = \frac{10}{3}$. C. $S = 5$. D. $S = 10$.

Lời giải.

Hai điểm cực tiểu và cực đại lần lượt là $A(0; 5)$ và $B(2; 9)$. Diện tích $S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 = 5$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 75. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2mx^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn 1.

A. $m > 0$. B. $m < 1$. C. $0 < m < \sqrt[3]{4}$. D. $0 < m < 1$.

Lời giải.

$$y' = 4x^3 - 4mx = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - m) = 0.$$

Hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $m > 0$.

Tìm được ba điểm cực trị là $O(0; 0)$, $A(\sqrt{m}; -m^2)$, $B(-\sqrt{m}; -m^2)$.

Gọi H là trung điểm AB thì diện tích tam giác OAB là $\frac{1}{2}OH \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{m} \cdot m^2$.

Diện tích tam giác phải lớn hơn 0 và nhỏ hơn 1 theo yêu cầu bài toán, suy ra $0 < m < 1$.

Chọn đáp án **(D)** □

2. Tìm cực trị dựa vào BBT, đồ thị.

Câu 76. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$				3				$+\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$
 0 0

Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- A. Hàm số có ba điểm cực trị. B. Hàm số có giá trị cực đại bằng 3.
 C. Hàm số có giá trị cực trị bằng 0. D. Hàm số có hai điểm cực tiểu.

Lời giải.

Mệnh đề "Hàm số có giá trị cực trị đại bằng 0." sai vì theo bảng biến thiên "Hàm số có giá trị cực trị đại bằng 3."

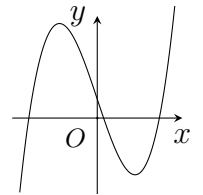
Chọn đáp án **C**

□

Câu 77.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 2. B. 0. C. 3. D. 1.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta khẳng định hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 78. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$				3				$+\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$
 -2 -2

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(0; 1)$. B. $(-\infty; 0)$. C. $(1; +\infty)$. D. $(-1; 0)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 79. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + 3x^2$ trên đoạn $[-4; -1]$ bằng

- A. -4 . B. -16 . C. 0 . D. 4 .

Lời giải.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 83. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. Cực tiểu của hàm số bằng -3 .
 B. Cực tiểu của hàm số bằng 1 .
 C. Cực tiểu của hàm số bằng -6 .
 D. Cực tiểu của hàm số bằng 2 .

Lời giải.

$$\text{Ta có: } y' = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2}; y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên. Thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và giá trị cực tiểu bằng $y(1) = 2$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 84. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Hàm số đạt cực đại tại điểm

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$			5		$-\infty$

</

- A. $x = 1$.
 B. $x = 0$.
 C. $x = 5$.
 D. $x = 2$.

Lời giải.

Quan sát bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt tiểu tại điểm $x = 0$ và đạt cực đại tại điểm $x = 2$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 85. Biết $M(0; 2), N(2; -2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
 Tính giá trị của hàm số tại $x = -2$.

- A. $y(-2) = 2$.
 B. $y(-2) = 22$.
 C. $y(-2) = 6$.
 D. $y(-2) = -18$.

Lời giải.

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Vì $M(0; 2), N(2; -2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số nên:

$$\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases} \quad (1); \quad \begin{cases} y(0) = 2 \\ y(2) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ 8a + 4b + 2c + d = -2 \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $a = 1; b = -3; c = 0; d = 2 \Rightarrow y = x^3 - 3x^2 + 2 \Rightarrow y(-2) = -18$.

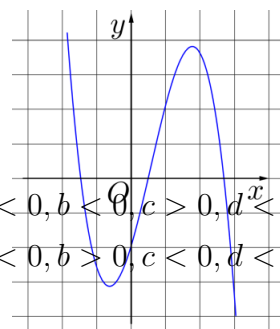
Chọn đáp án **(D)** □

Câu 86. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có

đồ thị như hình vẽ bên.

Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.
 B. $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.
 C. $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$.
 D. $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$.



Lời giải.

Dựa vào 2 nhánh vô tận của đồ thị suy ra hệ số $a < 0$.

Dựa vào giao điểm đồ thị với trục tung ở dưới nên $d < 0$

Dựa vào hoành độ 2 điểm cực trị trái dấu nên $3a \cdot c < 0 \Rightarrow c > 0$

Trung điểm của 2 điểm cực trị có hoành độ dương nên $\frac{-b}{3a} > 0 \Rightarrow b > 0$.

Chọn đáp án **A**

□

3. Tìm m để hàm số đạt cực trị tại 1 điểm x_0 cho trước.**Câu 87.** Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$.**A.** $m = 1$.**B.** $m = -1$.**C.** $m = 5$.**D.** $m = -7$.**Lời giải.**Ta có $f'(x) = x^2 - 2mx + m^2 - 4$. Điều kiện cần để hàm số đã cho đạt cực đại tại $x = 3$ là

$$f'(3) = 0 \Leftrightarrow 9 - 6m + m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 6m + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 5. \end{cases}$$

Khi $m = 1$, hàm số trở thành $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 3$ và $f'(x) = x^2 - 2x - 3$.

Ta có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$\frac{14}{3}$	-6	$+\infty$	

Hàm số không đạt cực đại tại $x = 3$.Khi $m = 5$, hàm số trở thành $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 21x + 3$, $f'(x) = x^2 - 10x + 21$,

Ta có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	3	7	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	30	$\frac{58}{3}$	$+\infty$	

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = 3$. Do đó điều kiện để hàm số đã cho đạt cực đại tại $x = 3$ là $m = 5$.Chọn đáp án **C**

□

Câu 88. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m - 4)x^5 - (m^2 - 16)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?**A.** 8..**B.** Vô số..**C.** 7..**D.** 9..**Lời giải.**Ta có $y' = 8x^7 + 5(m - 4)x^4 - 4(m^2 - 16)x^3 = x^3[8x^4 + 5(m - 4)x - 4(m^2 - 16)] = x^3.g(x)$ với $g(x) = 8x^4 + 5(m - 4)x - 4(m^2 - 16)$.Trường hợp 1: $g(0) = 0 \Leftrightarrow m^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 4$.Với $m = 4$ có $y' = 8x^7$ và đổi dấu từ âm sang dương qua $x = 0$ suy ra $x = 0$ là cực tiểu của hàm số.Với $m = -4$ có $y' = 8x^4(x^3 - 5)$ và không đổi dấu qua $x = 0$ nên $x = 0$ không là cực trị của hàm

số.

Trường hợp 2: $g(0) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 4$.

Để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0 \Leftrightarrow g(0) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow -4 < m < 4$.

Với $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 89. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m - 3)x^5 - (m^2 - 9)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

A. 4.

B. 7.

C. 6.

D. Vô số.

Lời giải.

Chọn đáp án **(C)** □

4. Tìm m để hàm số, đồ thị hàm số trùng phương có cực trị thỏa mãn điều kiện.

Câu 90. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = (2m - 1)x + 3 + m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

A. $m = \frac{3}{2}$.

B. $m = \frac{3}{4}$.

C. $m = -\frac{1}{2}$.

D. $m = \frac{1}{4}$.

Lời giải.

Phương trình d' qua hai cực trị là $y = -2x + 1$. Để d, d' vuông góc với nhau thì $-2(2m - 1) = -1 \Leftrightarrow m = \frac{3}{4}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 91. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ có hai điểm cực trị A và B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 4 với O là gốc tọa độ.

A. $m = -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}; m = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

B. $m = -1; m = 1$.

C. $m = 1$.

D. $m \neq 0$.

Lời giải.

Ta có $A(0; 4m^3), B(2m; 0)$. Suy ra OA vuông góc với OB . Do đó $S_{\triangle OAB} = 4m^4 = 4$. Vậy $m = 1; m = -1$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 92. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = (m - 1)x^4 - 2(m - 3)x^2 + 1$ không có cực đại.

A. $1 \leq m \leq 3$.

B. $m \leq 1$.

C. $m \geq 1$.

D. $1 < m \leq 3$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4(m - 1)x^3 - 4(m - 3)x = 4x((m - 1)x^2 - m + 3)$.

Xét với $m = 1 \Rightarrow y = 4x^2 + 1$ hàm số không có cực đại. Vậy $m = 1$ thỏa mãn (1).

Xét với $m > 1$ khi đó hàm số là hàm bậc 4 trùng phương với hệ số $a > 0$ để hàm số không có cực đại thì $y' = 0$ chỉ có một nghiệm duy nhất $x = 0$.

Hay $(m - 1)x^2 - m + 3 = 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow x^2 = \frac{m - 3}{m - 1} \leq 0 \Leftrightarrow 1 < m \leq 3$ (2).

Xét với $m < 1$ hàm số bậc 4 trùng phương có hệ số $a < 0$ luôn có cực đại. (3)

Kết luận: Từ (1), (2), (3) ta có để hàm số không có cực đại thì $1 \leq m \leq 3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 93. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 1)x$ có hai điểm cực trị là A và B sao cho A, B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $y = 5x - 9$. Tính tổng tất cả các phần tử của S .

- A. 0. B. 6. C. -6. D. 3.

Lời giải.

Ta có $y' = x^2 - 2mx + m^2, y' = 0 \Leftrightarrow x = m - 1, x = m + 1$.

Đồ thị hàm số luôn có hai điểm cực trị $A\left(m - 1; \frac{1}{3}(m - 1)^2(m + 2)\right)$ và $B\left(m + 1; \frac{1}{3}(m + 1)^2(m - 2)\right)$.

Trung điểm I của AB có tọa độ: $I\left(m; \frac{m^3 - 3m}{3}\right)$. Yêu cầu đề bài thỏa mãn khi và chỉ khi I thuộc đường thẳng $y = 5x - 9$, hay

$$\frac{m^3 - 3m}{3} = 5m - 9 \Leftrightarrow m^3 - 18m + 27 = 0.$$

Suy ra tổng các phần tử của S bằng 0.

Chọn đáp án (A) □

Câu 94. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

- A. $m = -\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$. B. $m = -1$. C. $m = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$. D. $m = 1$.

Lời giải.

$$y = x^4 + 2mx^2 + 1; y' = 4x^3 + 4mx; y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; \\ x^2 = -m \end{cases}$$

Dựa vào đây ta thấy m phải là 1 giá trị nhỏ hơn 0 nên ta loại đi đáp án C và D.

Thử với đáp án B: với $m = -1$ ta có $y' = 0$ có 3 nghiệm $x = 0; x = -1; x = 1$

$$y(0) = 1; y(-1) = 0; y(1) = 0$$

$\Rightarrow$ 3 điểm cực trị của là: $A(0; 1); B(-1; 0); C(1; 0)$.

Ta thử lại bằng cách vẽ 3 điểm A, B, C trên cùng hệ trục tọa độ và tam giác này vuông cân.

Chọn đáp án (B) □

5. Tìm m để hàm số, đồ thị hàm số các hàm số khác có cực trị thỏa mãn điều kiện.

Câu 95. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = x^8 + (m - 2)x^5 - (m^2 - 4)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

- A. 3. B. 5. C. 4. D. Vô số.

Lời giải.

Ta có $y' = 8x^7 + 5(m - 2)x^4 - 4(m^2 - 4)x^3$.

Đặt $g(x) = 8x^4 + 5(m - 2)x - 4(m^2 - 4)$. Có 2 trường hợp cần xét liên quan $(m^2 - 4)$:

- Trường hợp 1: $m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$

+ Khi $m = 2 \Rightarrow y' = 8x^7 \Rightarrow x = 0$ là điểm cực tiểu.

+ Khi $m = -2 \Rightarrow y' = x^4(8x^4 - 20) \Rightarrow x = 0$ không là điểm cực tiểu.

- Trường hợp 2: $m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$. Khi đó $x = 0$ không là nghiệm của $g(x)$.
Ta có x^3 đổi dấu từ $-$ sang $+$ khi qua $x_0 = 0$, do đó
 $y' = x^3.g(x)$ đổi dấu từ $-$ sang $+$ khi qua $x_0 = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} g(x) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 < 0$.

Kết hợp các trường hợp giải được ta nhận $m \in \{2; 1; 0; -1\}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 96. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 7 điểm cực trị?

- A. 3. B. 5. C. 6. D. 4.

Lời giải.

Xét hàm số $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m$

có $y' = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 0 \Leftrightarrow 12x(x^2 - x - 2) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Lập BBT của đồ thị hàm số $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m$ ta có : Đồ thị hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ được vẽ bằng cách :

+) Lấy đối xứng phần đồ thị hàm số nằm phía dưới trục Ox qua trục Ox .

+) Xóa đi phần đồ thị bên dưới trục Ox .

Do đó để đồ thị hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 7 điểm cực trị thì :

$$\begin{cases} f(0) > 0 \\ f(-1) < 0 \\ f(2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -5 + m < 0 \\ -32 + m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 5. \text{ Do } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; 4\}$$

Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **D**

□

§3. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

1. GTLN, GTNN trên đoạn $[a; b]$.

Câu 97. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$ trên đoạn $[0; \sqrt{3}]$.

- A. $M = 9$. B. $M = 8\sqrt{3}$. C. $M = 1$. D. $M = 6$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } f'(x) = 4x^3 - 4x. \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 1. \end{cases} \quad f(0) = 3, f(1) = 2, f(\sqrt{3}) = 6. \text{ Vậy } M = 6.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 98. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^2 + \frac{2}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

- A. $m = \frac{17}{4}$. B. $m = 10$. C. $m = 5$. D. $m = 3$.

Lời giải.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ta có $y' = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2x^3 - 2}{x^2}$. Bảng biến thiên:

x	$\frac{1}{2}$	1	2	
y'		-	0	+
y	$\frac{17}{4}$		3	5

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 99. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 9$ trên đoạn $[-2; 3]$ bằng

A. 201.

B. 2.

C. 9.

D. 54.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[-2; 3]$.

Ta có $y' = 4x^3 - 8x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-2; 3] \\ x = \pm\sqrt{2} \in [-2; 3] \end{cases}.$$

Ta có $f(-2) = 9$, $f(3) = 54$, $f(0) = 9$, $f(-\sqrt{2}) = 5$, $f(\sqrt{2}) = 5$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 3]$ bằng $f(3) = 54$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 100. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - x^2 + 13$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

A. 25.

B. $\frac{51}{4}$.

C. 13.

D. 85.

Lời giải.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 101. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ trên đoạn $[2; 4]$.

A. $\min_{[2;4]} y = 6$.B. $\min_{[2;4]} y = -2$.C. $\min_{[2;4]} y = -3$.D. $\min_{[2;4]} y = \frac{19}{3}$.

Lời giải.

$$y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}.$$

$$y' = \frac{2x(x - 1) - x^2 - 3}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 & \text{loại} \\ x = 3 & \text{thỏa mãn} \end{cases}.$$

Có $y(2) = 7$; $y(3) = 6$; $y(4) = \frac{19}{3} \Rightarrow \min_{[2;4]} y = 6$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 102. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 4x^2 + 5$ trên đoạn $[-2; 3]$ bằng

A. 50.

B. 5.

C. 1.

D. 122.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } f'(x) = 4x^3 - 8x \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(-2) = 5 \\ f(-\sqrt{2}) = 1 \\ f(0) = 5 \\ f(\sqrt{2}) = 1 \\ f(3) = 50 \end{cases} \Rightarrow \underset{[-2; 3]}{\text{Max}} f(x) = 50.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 103 (QG17,101). Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^3 - 7x^2 + 11x - 2$ trên đoạn $[0; 2]$.

A. $m = 11$.

B. $m = 0$.

C. $m = -2$.

D. $m = 3$.

Lời giải.

$y' = 3x^2 - 14x + 11$ có hai nghiệm $x = 1 \in [0; 2]$, $x = -\frac{11}{3} \notin [0; 2]$

$y(0) = -2$; $y(1) = 3$; $y(2) = 0$ do đó $m = \min_{[0; 2]} y = -2$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 104. Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[2; 4]} y = 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m < -1$.

B. $3 < m \leq 4$.

C. $m > 4$.

D. $1 \leq m < 3$.

Lời giải.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 105. Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[1; 2]} y + \max_{[1; 2]} y = \frac{16}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m \leq 0$.

B. $m > 4$.

C. $0 < m \leq 2$.

D. $2 < m \leq 4$.

Lời giải.

Do hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ liên tục và đơn điệu trên đoạn $[1; 2]$

nên ta có $\min_{[1; 2]} y + \max_{[1; 2]} y = \frac{1+m}{2} + \frac{2+m}{3} = \frac{16}{3} \Leftrightarrow m = 5$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 106. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^4 - x^2 + 13$ trên đoạn $[-2; 3]$.

A. $m = \frac{51}{4}$.

B. $m = \frac{49}{4}$.

C. $m = 13$.

D. $m = \frac{51}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Có } y' = 4x^3 - 2x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \min y = \frac{51}{4} \text{ tại } x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 107. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng 3. Số phần tử của S là

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 6.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x + m$ trên $[0; 2]$ ta có : $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

BBT :

x	0	1	2	
y'		-	0	+
y	m	$m - 2$	$m + 2$	

TH1 : $2 + m < 0 \Leftrightarrow m < -2 \Rightarrow \max_{[0;2]} y = -(-2 + m) = 2 - m \Leftrightarrow 2 - m = 3 \Leftrightarrow m = -1$ (loại)

TH2 : $\begin{cases} m + 2 > 0 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 0 \Leftrightarrow \max_{[0;2]} y = 2 - m = 3 \Leftrightarrow m = -1$ (nhận)

TH3 : $\begin{cases} m > 0 \\ -2 + m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 2 \Leftrightarrow \max_{[0;2]} y = 2 + m = 3 \Leftrightarrow m = 1$ (nhận)

TH4 : $-2 + m > 0 \Leftrightarrow m > 2 \Leftrightarrow \max_{[0;2]} y = 2 - m = 3 \Leftrightarrow m = -1$ (loại)

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 108. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{3}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. 144 m/s.

B. 36 m/s.

C. 243 m/s.

D. 27 m/s.

Lời giải.

Vận tốc của vật được tính bởi: $v(t) = -t^2 + 12t$. Ta có $v'(t) = -2t + 12$. Bảng biến thiên:

t	0	6	9	
v'		+	0	-
v	0	36	27	

Dựa vào bảng biến thiên ta có vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng 36 m/s.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 109. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. 24 m/s.

B. 108 m/s.

C. 18 m/s.

D. 64 m/s.

Lời giải.

Vận tốc $v = v(t) = s' = -\frac{3}{2}t^2 + 12t$. Ta cần tìm giá trị lớn nhất của hàm $v(t)$ với $t \in [0; 6]$. Dễ tính được giá trị lớn nhất đó bằng 24 m/s, đạt được tại thời điểm $t = 4$.

Chọn đáp án **(A)**

□

2. GTLN, GTNN trên khoảng.

Câu 110. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$			
y'	+	0	-	0	+		
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

A. $y_{CD} = 3$.

B. $y_{CT} = 3$.

C. $\min_{\mathbb{R}} y = -1$.

D. $\max_{\mathbb{R}} y = 3$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra $y_{CD} = 5$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 111. Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3x + \frac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

A. $\min_{(0;+\infty)} y = 3\sqrt[3]{9}$.

B. $\min_{(0;+\infty)} y = 7$.

C. $\min_{(0;+\infty)} y = \frac{33}{5}$.

D. $\min_{(0;+\infty)} y = 2\sqrt[3]{9}$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3 - \frac{8}{x^3}$. $y' = 0 \Leftrightarrow 3 - \frac{8}{x^3} \Leftrightarrow x = \frac{2}{\sqrt[3]{3}} \Rightarrow y = \frac{9}{\sqrt[3]{3}} = 3\sqrt[3]{9}$. Bảng biến thiên

x	0	$\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$	$+\infty$		
y'		-	0	+	
y	$+\infty$	$\searrow$	$3\sqrt[3]{9}$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $\min_{(0;+\infty)} y = 3\sqrt[3]{9}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 112. Ông A dự định sử dụng hết $5m^2$ kính để làm bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

A. $1,01 m^3$..

B. $0,96 m^3$..

C. $1,33 m^3$..

D. $1,51 m^3$..

Lời giải.

Chọn đáp án **A**

□

3. Ứng dụng GTNN, GTLN trong bài toán phương trình, bpt, hệ pt.

Câu 113. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $\sqrt[3]{m+3} + \sqrt[3]{m+3} \sin x = \sin x$ có nghiệm thực?

A. 5.

B. 7.

C. 3.

D. 2.

Lời giải.

Ta có: $\sqrt[3]{m+3\sqrt[3]{m+3\sin x}} = \sin x \Leftrightarrow m+3\sqrt[3]{m+3\sin x} = \sin^3 x$.

Đặt $\sqrt[3]{m+3\sin x} = u \Rightarrow m+3\sin x = u^3$ thì phương trình trên trở thành $m+3u = \sin^3 x$

Đặt $\sin x = v$ thì ta được $\begin{cases} m+3v = u^3 \\ m+3u = v^3 \end{cases} \Rightarrow 3(v-u) + (v-u)(v^2+uv+u^2) = 0 \Leftrightarrow (v-u)(3+v^2+uv+u^2) = 0$

Do $3+v^2+uv+u^2 > 0, \forall u, v$ nên phương trình trên tương đương $u = v$. Suy ra $\sqrt[3]{m+3\sin x} = \sin x \Leftrightarrow m = \sin^3 x - 3\sin x$.

Đặt $\sin x = t (-1 \leq t \leq 1)$ và xét hàm $f(t) = t^3 - 3t$ trên $[-1; 1]$ có $f'(t) = 3t^2 - 3 \leq 0, \forall t \in [-1; 1]$

Nên hàm số nghịch biến trên $[-1; 1] \Rightarrow -1 = f(1) \leq f(t) \leq f(-1) = 2 \Rightarrow -2 \leq m \leq 2$. Vậy $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

Chọn đáp án (A) □

4. Bài toán ứng dụng, tối ưu, thực tế.

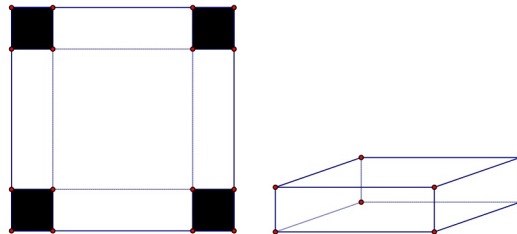
Câu 114. Ông A dự định sử dụng hết 5,5 m² kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

- A. 1,17 m³. B. 1,01 m³. C. 1,51 m³. D. 1,40 m³.

Lời giải.

Chọn đáp án (A) □

Câu 115. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



- A. $x = 6$. B. $x = 3$. C. $x = 2$. D. $x = 4$.

Lời giải.

Thể tích của hộp là

$$(12-2x)^2 = \frac{1}{4} \cdot 4x(12-2x)^2 \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{(4x+12-2x+12-2x)^3}{27} = 128.$$

Dấu bằng xảy ra khi $4x = 12 - 2x \Leftrightarrow x = 2$. Vậy $x = 2$ thì thể tích hộp lớn nhất.

Chọn đáp án (B) □

Câu 116. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 9t^2$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. 216(m/s).

B. 30(m/s).

C. 400(m/s).

D. 54(m/s).

Lời giải.

Vận tốc tại thời điểm t là $v(t) = s'(t) = -\frac{3}{2}t^2 + 18t$

nên vận tốc lớn nhất của vật đạt được khi $v'(t) = -3t + 18 = 0 \Leftrightarrow t = 6$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 117. Ông A dự định sử dụng hết 6,5 m² kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

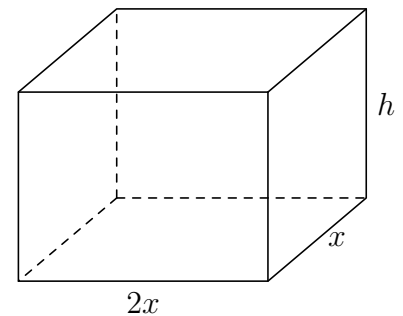
A. 2,26 m³.B. 1,61 m³.C. 1,33 m³.D. 1,50 m³.**Lời giải.**

Ta có $2x^2 + 2xh + 4xh = 6,5 \Leftrightarrow h = \frac{6,5 - 2x^2}{6x}$.

Do $h > 0, x > 0$ nên $6,5 - 2x^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{\sqrt{13}}{2}$.

Lại có $V = 2x^2h = \frac{6,5x - 2x^3}{3} = f(x)$, với $x \in \left(0; \frac{\sqrt{13}}{2}\right)$

$f'(x) = \frac{13}{6} - 2x^2, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{39}}{6}$.



x	0	$\frac{\sqrt{39}}{6}$	$\frac{\sqrt{13}}{2}$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		$\frac{13\sqrt{39}}{54}$	

Vậy $V \leq f\left(\frac{\sqrt{39}}{6}\right) = \frac{13\sqrt{39}}{54} \approx 1,50 \text{ m}^3$.

Chọn đáp án **(D)**

□

§4. Đường tiệm cận

1. Bài toán xác định các đường tiệm cận của hàm số (không chứa tham số) hoặc biết BBT,

Câu 118. Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16}$.

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

Lời giải.

$x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x = -4$ hay $x = 4$. Ta có $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16} = \infty$

và $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+1}{x-4} = \frac{5}{0}$. Nên đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 119. Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$

A. $x = 1$.

B. $y = -1$.

C. $y = 2$.

D. $x = -1$.

Lời giải.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ và $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x+1}{x+1} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x+1}{x+1} = +\infty$
nên $x = -1$ là phương trình tiệm cận đứng.

Chọn đáp án **(D)** □**Câu 120.** Tìm số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1}$.

A. 3.

B. 1.

C. 0.

D. 2.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 1$ do đó đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Lại có: $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = -\frac{3}{2}$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\frac{3}{2}$. $\lim_{x \rightarrow -1^+} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^-} y = -\infty$.

Do đó đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là $x = -1$.

Chọn đáp án **(D)** □**Câu 121.** Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$ là

A. 3.

B. 2.

C. 0.

D. 1.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = [-9; +\infty) \setminus \{-1; 0\}$.

Ta có $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = -\infty \end{cases} \Rightarrow x = -1$ là tiệm cận đứng.

Ngoài ra $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = \frac{1}{6}$ nên $x = 0$ không thể là một tiệm cận được.

Chọn đáp án **(D)** □**Câu 122.** Đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây có tiệm cận đứng?

A. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

B. $y = \frac{1}{x^2+x+1}$.

C. $y = \frac{1}{x^4+1}$.

D. $y = \frac{1}{x^2+1}$.

Lời giải.

Hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ có mẫu thức có nghiệm $x = 0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận đứng.

Chọn đáp án **(A)** □**Câu 123.** Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+x}$ là

A. 0.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải.Chọn đáp án **(D)** □**Câu 124.** Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

A. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.

C. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$.

D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = 1$ và $x = -1$.

Lời giải.

Vì $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ nên hàm số có tiệm cận ngang $y = 1$

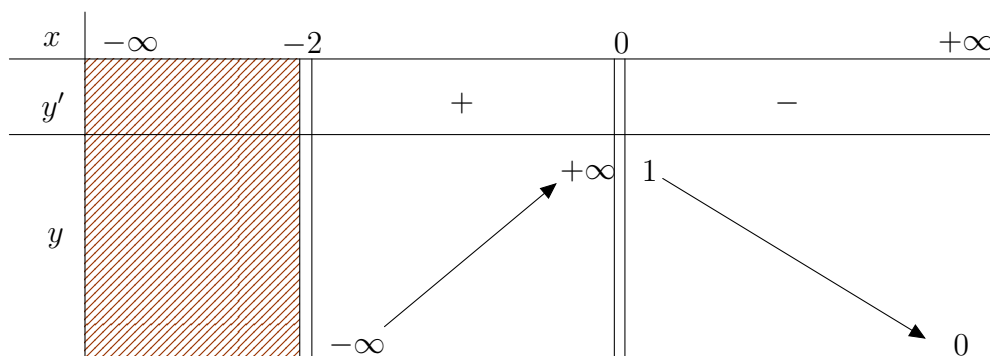
Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ nên hàm số có tiệm cận ngang $y = -1$

Vậy hàm số có 2 tiệm cận ngang.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 125. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Hỏi đồ thị của hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?



A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Lời giải.

$\lim_{x \rightarrow -2^+} y = -\infty$ nên $x = -2$ là TCD. $\lim_{x \rightarrow 0} y = +\infty$ nên $x = 0$ là TCD. $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0$ nên $y = 0$ là TCN.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 126. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận đứng

A. $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$. B. $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$. C. $y = \sqrt{x^2 - 1}$. D. $y = \frac{x}{x + 1}$.

Lời giải.

+) Đáp án A: $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \frac{(x - 2)(x - 1)}{x - 1} = x - 2 \Rightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

+) Đáp án B: Ta có: $x^2 + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

+) Đáp án C: Đồ thị hàm số chỉ có TCN.

+) Đáp án D: Có $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x + 1} = \infty \Rightarrow x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 127. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x + 25} - 5}{x^2 + x}$ là

A. 2..

B. 0..

C. 1..

D. 3..

Lời giải.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 128. Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x - 1 - \sqrt{x^2 + x + 3}}{x^2 - 5x + 6}$

A. $x = -3$ và $x = -2$.

B. $x = -3$.

C. $x = 3$ và $x = 2$.

D. $x = 3$.

Lời giải.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$

nhưng $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x - 1 - \sqrt{x^2 + x + 3}}{x^2 - 5x + 6} = -\frac{7}{6}$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x - 1 - \sqrt{x^2 + x + 3}}{x^2 - 5x + 6} = -\frac{7}{6}$

và $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x - 1 - \sqrt{x^2 + x + 3}}{x^2 - 5x + 6} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x - 1 - \sqrt{x^2 + x + 3}}{x^2 - 5x + 6} = -\infty$

nên chỉ $x = 3$ là phương trình tiệm cận đứng (Chú ý: Dùng Casio để tìm lim)

Chọn đáp án **(D)**

□

2. Bài toán xác định các đường tiệm cận của hàm số có chứa tham số.

Câu 129. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \frac{x + 1}{\sqrt{mx^2 + 1}}$

A. Không có giá trị thực nào của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

B. $m < 0$.

C. $m = 0$.

D. $m > 0$.

Lời giải.

Để hàm số có 2 tiệm cận ngang thì phải tồn tại $\lim_{x \rightarrow +\infty} y \neq \lim_{x \rightarrow -\infty} y$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{mx^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{m + \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{m}}, \text{ tồn tại khi } m > 0$$

$$\text{Có } \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{mx^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{-\sqrt{m + \frac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{\sqrt{m}}, \text{ tồn tại khi } m > 0$$

Khi đó hiển nhiên $\lim_{x \rightarrow +\infty} y \neq \lim_{x \rightarrow -\infty} y$. Vậy $m > 0$.

Chọn đáp án **(D)**

□

§5. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

1. Nhận dạng đồ thị, bảng biến thiên.

Câu 130.

Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây.

Hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = -x^3 + x^2 - 1$.

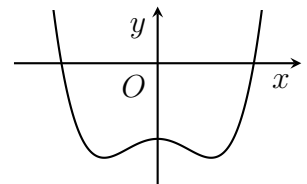
B. $y = x^4 - x^2 - 1$.

C. $y = x^3 - x^2 - 1$.

D. $y = -x^4 + x^2 - 1$.

Lời giải.

Từ đồ thị ta được hàm số là đa thức bậc 4 trùng phương có hệ số a dương và hệ số b âm nên chọn $y = x^4 - x^2 - 1$.



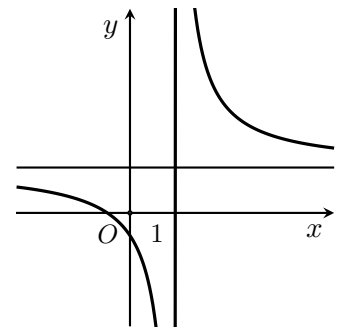
Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 131.

Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ với a, b, c, d là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
 B. $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
 C. $y' > 0, \forall x \neq 1$.
 D. $y' < 0, \forall x \neq 1$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số đồng biến trên các khoảng xác định.

Nên hàm số không xác định tại $x = 1$ và $y' > 0, \forall x \neq 1$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 132. Cho hàm số $y = (x - 2)(x^2 + 1)$ có đồ thị (C) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. (C) cắt trục hoành tại hai điểm.
 B. (C) cắt trục hoành tại một điểm.
 C. (C) không cắt trục hoành.
 D. (C) cắt trục hoành tại ba điểm.

Lời giải.

$$(C) \cap Ox \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

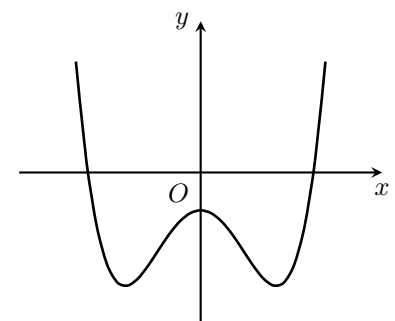
Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 133 (QG17,102).

Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ với a, b, c là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt.
 B. Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt.
 C. Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm trên tập số thực.
 D. Phương trình $y' = 0$ có đúng một nghiệm thực.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số có ba điểm cực trị. Do đó phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt.

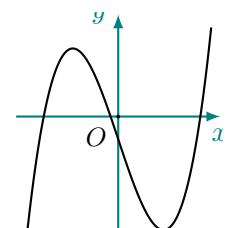
Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 134. Đường cong trong hình vẽ bên

là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

- A. $y = -x^4 + x^2 - 1$.
 B. $y = x^4 - 3x^2 - 1$.
 C. $y = -x^3 - 3x - 1$.
 D. $y = x^3 - 3x - 1$.



Lời giải.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 135.

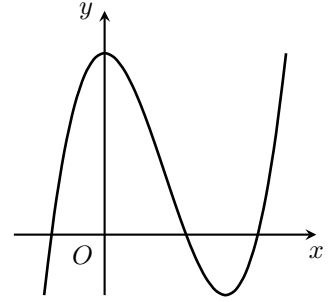
Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây.
Hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = x^4 - 2x^2 + 1.$

B. $y = -x^4 + 2x^2 + 1.$

C. $y = -x^3 + 3x^2 + 1.$

D. $y = x^3 - 3x^2 + 3.$

**Lời giải.**

Đây là đồ thị của hàm số có dạng $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, hơn nữa ta thấy khi $x \rightarrow +\infty$ thì $y \rightarrow +\infty$ do đó $a > 0$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 136.

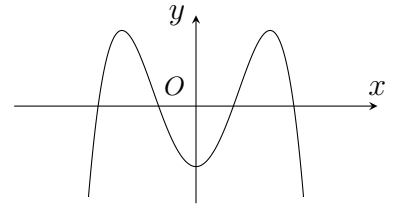
Đường cong trong hình vẽ bên là của hàm số nào dưới đây?

A. $y = x^4 - 3x^2 - 1.$

B. $y = x^3 - 3x^2 - 1.$

C. $y = -x^3 + 3x^2 - 1.$

D. $y = -x^4 + 3x^2 - 1.$

**Lời giải.**

Vì đồ thị có dạng hình chữ M nên không thể là đồ thị hàm số bậc ba.

Vì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = -\infty$ nên chọn $y = -x^4 + 3x^2 - 1$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 137. Đường cong trong hình vẽ bên

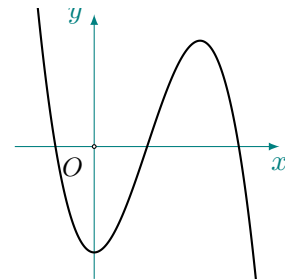
là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

A. $y = x^3 - 3x^2 - 2.$

B. $y = x^4 - x^2 - 2.$

C. $y = -x^4 + x^2 - 2.$

D. $y = -x^3 + 3x^2 - 2.$

**Lời giải.**

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 138. Đường cong trong hình bên là đồ thị

của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?

A. $y = -x^2 + x - 1.$

B. $y = -x^3 + 3x + 1.$

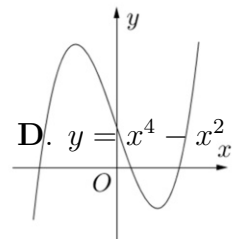
C. $y = x^3 - 3x + 1.$

D. $y = x^4 - x^2 + 1.$

Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số ta loại đi 2 đáp án A và C.

Dựa vào đồ thị hàm số ta suy ra bảng biến thiên của hàm số có dạng



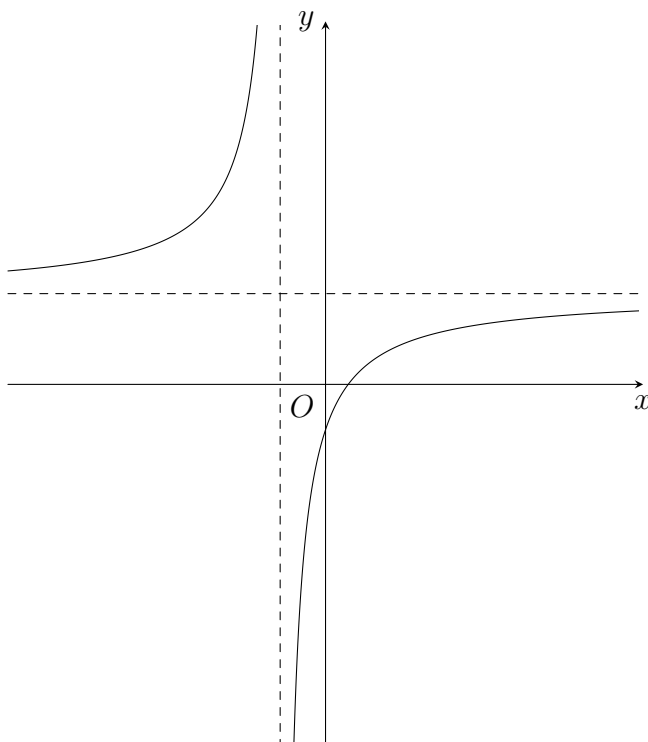
x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+
y						

Như vậy ta thấy $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt và y' trái dấu với hệ số của a nên hệ số $a > 0$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 139. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào?



A. $y = \frac{2x+3}{x+1}$.

B. $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

C. $y = \frac{2x-2}{x-1}$.

D. $y = \frac{2x+1}{x-1}$.

Lời giải.

Tiệm cận đứng $x = -1$. Tiệm cận ngang $y = 2$. Không đi qua điểm $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

Đồ thị hàm số có dạng của hàm số đồng biến nên chọn

Hoặc ta có thể xét đồ thị đi qua điểm $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ nên chọn

Chọn đáp án **B**

□

Câu 140. Đường cong trong hình bên

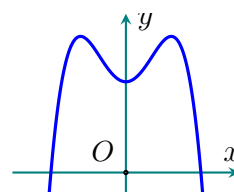
là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

A. $y = -x^4 + 2x^2 + 2$.

B. $y = x^4 - 2x^2 + 2$.

C. $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

D. $y = -x^3 + 3x^2 + 2$.



Lời giải.

Quan sát đồ thị hàm số ta thấy đây là dạng đồ thị hàm bậc bốn trùng phương với hệ số a âm. Vậy chỉ có đáp án A thỏa mãn.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 141. Đồ thị của hàm số $y = \frac{x-2}{x^2-4}$ có bao nhiêu tiệm cận?

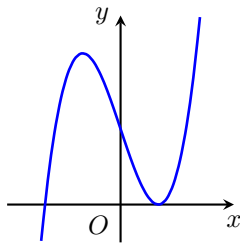
- A. 0. B. 3. C. 1. D. 2.

Lời giải.

Ta có $y = \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{1}{x+2}$. Do đó, đồ thị của hàm số này có một đường tiệm cận đứng $x = -2$ và một đường tiệm cận ngang $y = 0$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 142. Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây.



Hàm số đó là hàm số nào?

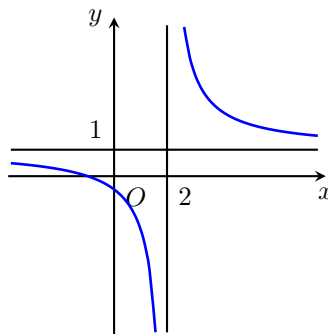
- A. $y = x^3 - 3x + 2$. B. $y = x^4 - x^2 + 1$. C. $y = x^4 + x^2 + 1$. D. $y = -x^3 + 3x + 2$.

Lời giải.

Dựa vào hình vẽ, ta thấy đây là đồ thị của hàm số bậc 3 và hệ số $a > 0$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 143. Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với a, b, c, d là các số thực.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

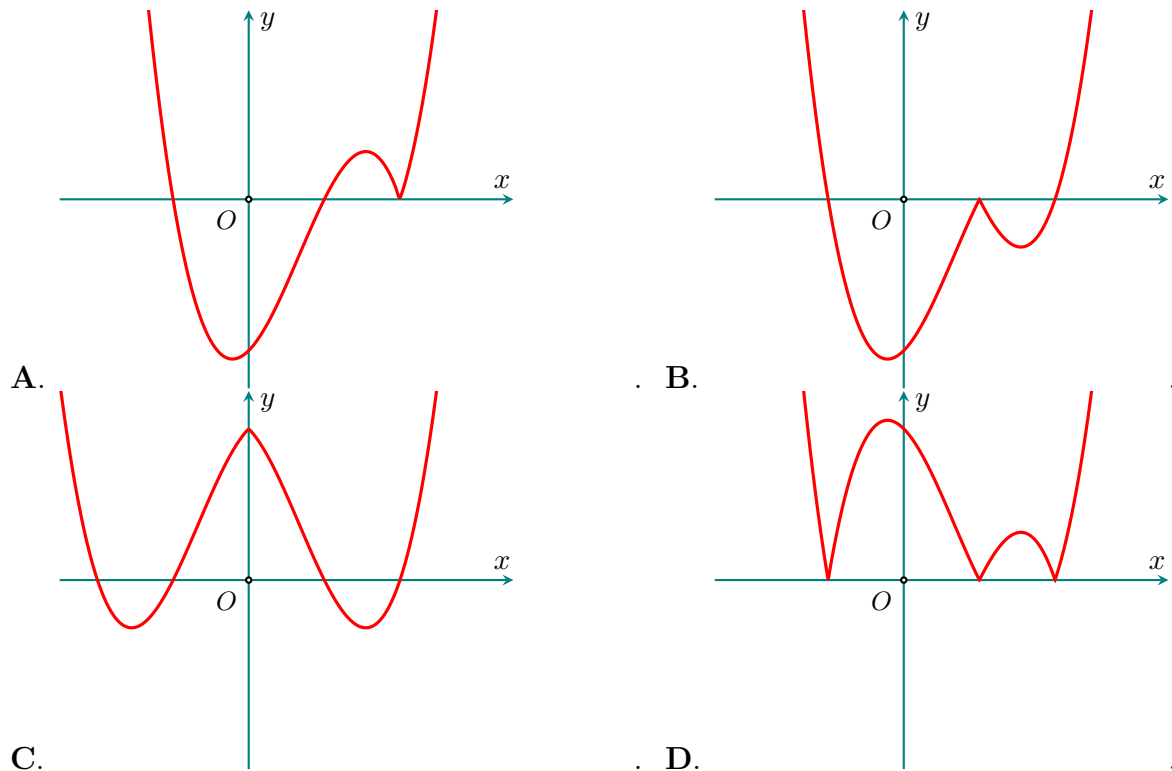
- A. $y' < 0, \forall x \neq 2$. B. $y' < 0, \forall x \neq 1$. C. $y' > 0, \forall x \neq 2$. D. $y' > 0, \forall x \neq 1$.

Lời giải.

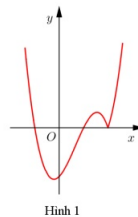
Theo hình vẽ ta có hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định và có tiệm cận đứng là $x = 2 \Rightarrow y' < 0, \forall x \neq 2$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 144. Hình nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = |x-2|(x^2-1)$?



Lời giải.



Đồ thị của hàm số $y = |x - 2|(x^2 - 1)$ là

Cách 2: Hàm số $y = (x - 2)(x^2 - 1)$ có bảng xét dấu là

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$(x - 2)$	$-$	$ $	$-$	$-$	$+$
$(x^2 - 1)$	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-$	0	$+$	0	$+$

Hàm số $y = |x - 2|(x^2 - 1)$ có bảng xét dấu là

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$ x - 2 $	$+$	$ $	$+$	$+$	$+$
$(x^2 - 1)$	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+$	0	$-$	0	$+$

Từ bảng xét dấu ta nhận xét đồ thị hàm số $y = |x - 2|(x^2 - 1)$.

Trên các khoảng $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$ và $(1; 2)$ lấy đối xứng đồ thị hàm số $y = (x - 2)(x^2 - 1)$.

Trên khoảng $(2; +\infty)$ là đồ thị hàm số $y = (x - 2)(x^2 - 1)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 145. Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{2}x^2$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ (M, N khác A) thỏa mãn $y_1 - y_2 = 6(x_1 - x_2)$?

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 3.

Lời giải.* Nhận xét đây là hàm số trùng phương có hệ số $a > 0$.

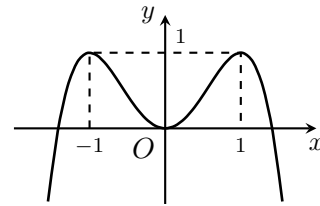
* Ta có $y' = x^3 - 7x$ nên suy ra hàm số có 3 điểm cực trị

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{7} \\ x_0 = \sqrt{7} \end{cases}$$
* Phương trình tiếp tuyến tại $A(x_0; y_0)$ (là đường thẳng qua hai điểm M, N) có hệ số góc:
 $k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 6$. Do đó để tiếp tuyến tại $A(x_0; y_0)$ có hệ số góc $k = 6 > 0$ và cắt (C) tại hai điểm
phân biệt $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ thì $-\sqrt{7} < x_0 < 0$ và $x_0 \neq -\frac{\sqrt{21}}{3}$ (hoành độ điểm uốn).

* Ta có phương trình: $y'(x_0) = 6 \Leftrightarrow x_0^3 - 7x_0 - 6 = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_0 = -2 \\ x_0 = -1 \\ x_0 = 3(l) \end{cases}$$
Vậy có 2 điểm A thỏa yêu cầu.Chọn đáp án **(B)**

□

2. Biện luận số giao điểm dựa vào đồ thị, bảng biến thiên.**Câu 146.** Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2$ có đồ thị như hình bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $-x^4 + 2x^2 = m$ có bốn nghiệm thực phân biệt.A. $m > 0$.B. $0 \leq m \leq 1$.C. $0 < m < 1$.D. $m < 1$.**Lời giải.**Dựa vào đồ thị, phương trình có bốn nghiệm thực phân biệt khi $0 < m < 1$.Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 147. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 2]$

và có đồ thị như hình vẽ bên.

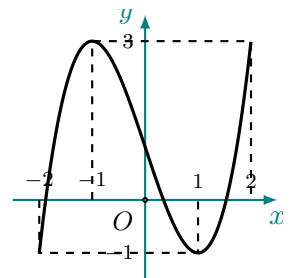
Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) - 4 = 0$ trên đoạn $[-2; 2]$ là

A. 3..

B. 1..

C. 2..

D. 4..

**Lời giải.**Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 148.

liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm thực phân biệt.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	$-$		$+$	0	$-$
y	$+\infty$			2	$-\infty$

- A. $[-1; 2]$. B. $(-1; 2)$. C. $(-1; 2]$. D. $(-\infty; 2]$.

Lời giải.

Nhìn bảng biến thiên ta thấy $f(x) = m$ có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-1 < m < 2$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 152. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = -mx$ cắt đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - m + 2$ tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho $AB = BC$.

- A. $m \in (-\infty; 3)$. B. $m \in (-\infty; -1)$. C. $m \in (-\infty; +\infty)$. D. $m \in (1; +\infty)$.

Lời giải.

Để đường thẳng $y = -mx$ cắt đồ thị hàm số (C): $y = x^3 - 3x^2 - m + 2$ tại ba điểm phân biệt là phương trình hoành độ giao điểm $(x - 1)(x^2 - 2x - 2 + m) = 0$ có ba nghiệm phân biệt, giải ra được $m < 3$.

Nhận thấy (C) có điểm uốn $U(1; -m)$ luôn thuộc đường thẳng $y = -mx$ nên để thỏa mãn yêu cầu đề bài thì $m < 3$.

Chọn đáp án **(A)** □

3. Sự tương giao của hai đồ thị (liên quan đến tọa độ giao điểm).

Câu 153. Đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$ và đồ thị của hàm số $y = -x^2 + 4$ có tất cả bao nhiêu điểm chung?

- A. 0. B. 4. C. 1. D. 2.

Lời giải.

$$x^4 - 2x^2 + 2 = -x^2 + 4 \Leftrightarrow x^4 - x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 154. Cho hàm số $y = x^3 - 3x$ có đồ thị (C). Tìm số giao điểm của (C) và trục hoành.

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.

Lời giải.

Ta có $y = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{3}$. Do đó số giao điểm (C) và trục hoành là 3.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 155. Biết rằng đường thẳng $y = -2x + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + x + 2$ tại điểm duy nhất; kí hiệu $(x_0; y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0 .

- A. $y_0 = 4$. B. $y_0 = 0$. C. $y_0 = 2$. D. $y_0 = -1$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng và đồ thị hàm số là:

$$x^3 + x + 2 = -2x + 2 \Leftrightarrow x^3 + 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$y(0) = 2.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 156. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = mx - m + 1$ cắt đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + x + 2$ tại ba điểm A, B, C phân biệt sao cho $AB = BC$.

A. $m \in (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$.

B. $m \in \mathbb{R}$.

C. $m \in \left(-\frac{1}{5}; 4\right) \cup (4; +\infty)$.

D. $m \in (-2; +\infty)$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + x + 2$ có tâm đối xứng là $I(1; 1)$ luôn nằm trên đường thẳng $y = mx - m + 1$ nên chỉ cần đường thẳng cắt đồ thị tại ba điểm phân biệt thì sẽ thỏa mãn đề bài. Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và đường thẳng là $x^3 - 3x^2 + x + 2 = mx - m + 1 \Leftrightarrow (x - 1)((x - 1)^2 - (m + 2)) = 0$.

Phương trình này có 3 nghiệm phân biệt khi $m + 2 > 0 \Leftrightarrow m > -2$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 157. Cho hàm số $y = \frac{x - 2}{x + 2}$ có đồ thị (C) . Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của (C) . Xét tam giác đều ABI có hai đỉnh A, B thuộc (C) , đoạn thẳng AB có độ dài bằng:

A. $2\sqrt{2}$.

B. 4.

C. 2.

D. $2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Dễ thấy hệ số góc của đường thẳng IA là $k = \tan 165^\circ = \sqrt{3} - 2$.

Suy ra $IA : y = (\sqrt{3} - 2)(x + 2) + 1$.

Hoành độ điểm A thỏa mãn $(\sqrt{3} - 2)(x + 2) + 1 = 1 - \frac{4}{(x + 2)} \Rightarrow (x + 2)^2 = \frac{4}{2 - \sqrt{3}}$

Suy ra $IA = \sqrt{(x + 2)^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{\frac{4}{2 - \sqrt{3}} + (\sqrt{3} - 2)^2 \cdot \frac{4}{2 - \sqrt{3}}} = 4$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 158. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^4 - \frac{14}{3}x^2$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ ($M, N \neq A$) thỏa mãn $y_1 - y_2 = 8(x_1 - x_2)$?

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 3.

Lời giải.

Cách 1: Gọi d là tiếp tuyến của (C) tại A . $y' = \frac{4}{3}x^3 - \frac{28}{3}x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{7} \\ x = 0 \\ x = \sqrt{7} \end{cases}$.

Do đó tiếp tuyến tại A cắt (C) tại $M, N \Rightarrow x_A \in (-\sqrt{7}; \sqrt{7})$.

Ta có: $y_1 - y_2 = 8(x_1 - x_2) \Rightarrow \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 8 \Rightarrow k_d = 8$

$$\frac{4}{3}x_A^3 - \frac{28}{3}x_A = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 3 \\ x_A = -1 \\ x_A = -2 \end{cases} \text{ . Đối chiếu điều kiện: } \begin{cases} x_A = -1 \\ x_A = -2 \end{cases} \text{ . Vậy có 2 điểm } A \text{ thỏa ycbt.}$$

Cách 2: Gọi $A\left(a; \frac{1}{3}a^4 - \frac{14}{3}a^2\right)$ là tọa độ tiếp điểm

$$\text{Phương trình tiếp tuyến tại } A \text{ là } d: y = \left(\frac{4}{3}a^3 - \frac{28}{3}a\right)(x - a) + \frac{1}{3}a^4 - \frac{14}{3}a^2$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là:

$$\frac{1}{3}x^4 - \frac{28}{3}x^2 = \left(\frac{4}{3}a^3 - \frac{28}{3}a\right)(x - a) + \frac{1}{3}a^4 - \frac{14}{3}a^2$$

$$\Leftrightarrow (x - a)^2(x^2 + 2ax + 3a^2 - 14) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x^2 + 2ax + 3a^2 - 14 = 0 \quad (1) \end{cases}$$

Để (C) cắt d tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác a

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ 6a^2 - 14 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-\sqrt{7}; \sqrt{7}) \setminus \left\{\pm \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\right\}.$$

$$\text{Theo đề bài: } y_1 - y_2 = 8(x_1 - x_2) \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}a^3 - \frac{28}{3}a\right)(x_1 - x_2) = 8(x_1 - x_2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3}a^3 - \frac{28}{3}a = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = -1 \\ a = -2 \end{cases}.$$

$$\text{Đối chiếu điều kiện: } \begin{cases} a = -1 \\ a = -2 \end{cases} \text{ . Vậy có 2 điểm } A \text{ thỏa đề bài.}$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 159. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ có đồ thị (C) . Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của (C) .

Xét tam giác đều ABI có hai đỉnh A, B thuộc (C) , đoạn thẳng AB có độ dài bằng

- A. $\sqrt{6}$. B. $2\sqrt{3}$. C. 2. D. $2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $(C): y = \frac{x-1}{x+2} = 1 - \frac{3}{x+2}$ có $I(-2; 1)$ là giao điểm của hai đường tiệm cận.

$$\text{Xét } \begin{cases} A\left(a-2; 1-\frac{3}{a}\right) \in (C) \\ B\left(b-2; 1-\frac{3}{b}\right) \in (C) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA} = \left(a; -\frac{3}{a}\right) \\ \overrightarrow{IB} = \left(b; -\frac{3}{b}\right) \end{cases} \text{ và } \begin{cases} IA = \sqrt{a^2 + \frac{9}{a^2}} \\ IB = \sqrt{b^2 + \frac{9}{b^2}} \end{cases}$$

$$\text{Tam giác } ABI \text{ đều khi và chỉ khi } \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ \cos(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) = \cos 60^\circ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + \frac{9}{a^2} = b^2 + \frac{9}{b^2} \\ \frac{\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}}{IA \cdot IB} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + \frac{9}{a^2} = b^2 + \frac{9}{b^2} \quad (1) \\ \frac{ab + \frac{9}{ab}}{a^2 + \frac{9}{a^2}} = \frac{1}{2} \quad (2) \end{cases}$$

Từ (2) ta suy ra $ab > 0$ và $a^2 \neq b^2$ (do $A \neq B$).

$$\text{Từ (1) ta suy ra } (a^2 - b^2) \left(1 - \frac{9}{a^2 b^2}\right) = 0 \Rightarrow ab = 3.$$

Với $ab = 3$, thay vào (2) ta tìm được $a^2 + \frac{9}{a^2} = 12$. Vậy $AB = IA = \sqrt{a^2 + \frac{9}{a^2}} = 2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 160. Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ có đồ thị (C) . Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của (C) .

Xét tam giác đều ABI có hai đỉnh A, B thuộc (C) , đoạn thẳng AB có độ dài bằng

- A. $2\sqrt{3}$. B. $2\sqrt{2}$. C. $\sqrt{3}$. D. $\sqrt{6}$.

Lời giải.

Chọn đáp án **(A)** □

4. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số.

Câu 161. Cho hàm số $y = \frac{1}{6}x^4 - \frac{7}{3}x^2$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ thỏa mãn $y_1 - y_2 = 4(x_1 - x_2)$?

- A. 3. B. 0. C. 1. D. 2.

Lời giải.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 162. Cho hàm số $y = \frac{-x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(a; 1)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của a để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua A . Tổng giá trị tất cả phần tử của S bằng

- A. 1. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{5}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

$$\text{TXD: } x = R \setminus \{1\}; y' = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

Giả sử tiếp tuyến đi qua $A(a; 1)$ là tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = x_0$,

$$\text{khi đó phương trình tiếp tuyến có dạng: } y = \frac{-1}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + \frac{-x_0+2}{x_0-1} \quad (d)$$

$$\text{Vì } A \in d \text{ nên thay tọa độ điểm } A \text{ vào phương trình đường thẳng } d \text{ ta có: } 1 = \frac{-1}{(x_0-1)^2}(a-x_0) + \frac{-x_0+2}{x_0-1}$$

$$\Leftrightarrow -a + x_0 - x_0^2 + 3x_0 - 2 = x_0^2 - 2x_0 + 1 \Leftrightarrow 2x_0^2 - 6x_0 + 3 + a = 0 \quad (*)$$

Để chỉ có 1 tiếp tuyến duy nhất đi qua A thì phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow 9 - 2(3+a) = 0$

$$\Leftrightarrow 3 - 2a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2} \Rightarrow S = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

Chọn đáp án **(B)** □

Chương 2. Hàm số lũy thừa- Hàm số mũ và Hàm số lô-ga-rít

§1. Lũy thừa

1. Tính giá trị của biểu thức chứa lũy thừa.

Câu 163. Rút gọn biểu thức $P = x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{x}$ với $x > 0$.

- A. $P = x^{\frac{1}{8}}$. B. $P = x^2$. C. $P = \sqrt{x}$. D. $P = x^{\frac{2}{9}}$.

C. $D = (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x^2 - x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ và $x \neq 2$.

Chọn đáp án **(D)**

□

2. Đạo hàm hàm số lũy thừa.

Câu 169. Với a là số thực dương tùy ý, $\ln(7a) - \ln(3a)$ bằng

A. $\frac{\ln(7a)}{\ln(3a)}$..

B. $\frac{\ln 7}{\ln 3}$..

C. $\ln \frac{7}{3}$..

D. $\ln(4a)$..

Lời giải.

Chọn đáp án **(C)**

□

§3. Lô-ga-rít

1. Tính giá trị biểu thức chứa lô-ga-rít.

Câu 170. Cho a là số thực dương khác 1. Tính $I = \log_{\sqrt{a}} a$.

A. $I = \frac{1}{2}$.

B. $I = 0$.

C. $I = -2$.

D. $I = 2$.

Lời giải.

$$I = \log_{\sqrt{a}} a = \log_{a^{\frac{1}{2}}} a = 2 \log_a a = 2$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 171. Với a, b là các số thực dương tùy ý và a khác 1, đặt $P = \log_a b^3 + \log_{a^2} b^6$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $P = 9 \log_a b$.

B. $P = 27 \log_a b$.

C. $P = 15 \log_a b$.

D. $P = 6 \log_a b$.

Lời giải.

$$P = \log_a b^3 + \log_{a^2} b^6 = 3 \log_a b + \frac{1}{2} \cdot 6 \log_a b = 6 \log_a b$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 172 (QG17,102). Cho a là số thực dương khác 1. Mệnh đề nào dưới đây đúng với mọi số thực dương x, y ?

A. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.

B. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x + \log_a y$.

C. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a(x - y)$.

D. $\log_a \frac{x}{y} = \frac{\log_a x}{\log_a y}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức sách giáo khoa $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 173. Với a là số thực dương bất kỳ, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log(3a) = 3 \log a$. B. $\log a^3 = \frac{1}{3} \log a$. C. $\log a^3 = 3 \log a$. D. $\log(3a) = \frac{1}{3} \log a$.

Lời giải.

Ta có: $\log a^3 = 3 \log a$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 174 (QG17,102). Cho $\log_a b = 2$ và $\log_a c = 3$. Tính $P = \log_a (b^2 c^3)$.

- A. $P = 31$. B. $P = 13$. C. $P = 30$. D. $P = 108$.

Lời giải.

Ta có $P = \log_a (b^2 c^3) = 2 \log_a b + 3 \log_a c = 2.2 + 3.3 = 13$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 175. Cho a là số thực dương tùy ý khác 1. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $\log_2 a = \log_a 2$. B. $\log_2 a = \frac{1}{\log_2 a}$. C. $\log_2 a = \frac{1}{\log_a 2}$. D. $\log_2 a = -\log_a 2$.

Câu 176. Với mọi a, b, x là các số thực dương thỏa mãn $\log_2 x = 5 \log_2 a + 3 \log_2 b$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $x = 3a + 5b$. B. $x = 5a + 3b$. C. $x = a^5 + b^3$. D. $x = a^5 b^3$.

Lời giải.

Ta có $\log_2 x = 5 \log_2 a + 3 \log_2 b = \log_2 a^5 + \log_2 b^3 = \log_2 (a^5 b^3) \Rightarrow x = a^5 b^3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 177. Cho a là số thực dương khác 2. Tính $I = \log_a \left(\frac{a^2}{4} \right)$.

- A. $I = \frac{1}{2}$. B. $I = 2$. C. $I = -\frac{1}{2}$. D. $I = -2$.

Lời giải.

$I = \log_{\frac{a}{2}} \left(\frac{a}{2} \right)^2 = 2 \log_{\frac{a}{2}} \left(\frac{a}{2} \right) = 2$ (vì $a \neq 2$)

Chọn đáp án (B) □

Câu 178. Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$. B. $\ln(ab) = \ln a \cdot \ln b$.
C. $\ln \frac{a}{b} = \frac{\ln a}{\ln b}$. D. $\ln \frac{a}{b} = \ln b - \ln a$.

Lời giải.

log tích bằng tổng log, log thương bằng hiệu log tử log mẫu.

Chọn đáp án (A) □

Câu 179. Cho a là số thực dương, $a \neq 1$ và $P = \log_{\sqrt[3]{a}} a^3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $P = 3$. B. $P = 1$. C. $P = 9$. D. $P = \frac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{\sqrt[3]{a}} a^3 = \log_{a^{\frac{1}{3}}} a^3 = 9 \log_a a = 9$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 180. Cho $\log_a x = 3$, $\log_b x = 4$ với a, b là các số thực lớn hơn 1. Tính $P = \log_{ab} x$.

- A. $P = \frac{7}{12}$. B. $P = \frac{1}{12}$. C. $P = 12$. D. $P = \frac{12}{7}$.

Lời giải.

$\log_a x = 3$, $\log_b x = 4$, $a, b > 1$ nên $x > 1$ và $\log_x a = \frac{1}{3}$, $\log_x b = \frac{1}{4}$ nên $\log_x a + \log_x b = \frac{7}{12}$ do đó $\log_x ab = \frac{7}{12}$. Vậy $\log_{ab} x = \frac{1}{\log_x ab} = \frac{12}{7}$

Chọn đáp án (D) □

Câu 181. Cho x, y là các số thực lớn hơn 1 thỏa mãn $x^2 + 9y^2 = 6xy$. Tính $M = \frac{1+\log_{12} x + \log_{12} y}{2\log_{12}(x+3y)}$.

- A. $M = \frac{1}{4}$. B. $M = 1$. C. $M = \frac{1}{2}$. D. $M = \frac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $x^2 + 9y^2 = 6xy \Leftrightarrow (x + 3y)^2 = 12xy$ nên $M = \frac{1+\log_{12} x + \log_{12} y}{2\log_{12}(x+3y)} = \frac{\log_{12}(12xy)}{\log_{12}(x+3y)^2} = 1$.

Chọn đáp án **(B)**

Câu 182. Với các số thực dương x, y tùy ý, đặt $\log_3 x = \alpha, \log_3 y = \beta$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $\log_{27} \left(\frac{\sqrt{x}}{y} \right)^3 = 9 \left(\frac{\alpha}{2} - \beta \right)$. B. $\log_{27} \left(\frac{\sqrt{x}}{y} \right)^3 = \frac{\alpha}{2} + \beta$.
C. $\log_{27} \left(\frac{\sqrt{x}}{y} \right)^3 = 9 \left(\frac{\alpha}{2} + \beta \right)$. D. $\log_{27} \left(\frac{\sqrt{x}}{y} \right)^3 = \frac{\alpha}{2} - \beta$.

Câu 183. Cho $\log_3 a = 2$ và $\log_2 b = \frac{1}{2}$. Tính $I = 2\log_3 [\log_3 (3a)] + \log_{\frac{1}{4}} b^2$.

- A. $I = \frac{5}{4}$. B. $I = 4$. C. $I = 0$. D. $I = \frac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $I = 2\log_3 [\log_3 (3a)] + \log_{\frac{1}{4}} b^2 = 2\log_3 (\log_3 3 + \log_3 a) + \log_{2^{-2}} b^2$

$$\Rightarrow I = 2\log_3 (1 + 2) - \frac{1}{2} \cdot 2\log_2 b = 2\log_3 3 - \log_2 b = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Chọn đáp án **(D)**

Câu 184. Với mọi số thực dương a và b thỏa mãn $a^2 + b^2 = 8ab$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $\log(a + b) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$. B. $\log(a + b) = 1 + \log a + \log b$.
C. $\log(a + b) = \frac{1}{2}(1 + \log a + \log b)$. D. $\log(a + b) = \frac{1}{2} + \log a + \log b$.

Lời giải.

$$a^2 + b^2 = 8ab \Leftrightarrow (a + b)^2 = 10ab \Leftrightarrow \log(a + b)^2 = \log(10ab) \Leftrightarrow \log(a + b) = \frac{1}{2}(1 + \log a + \log b)$$

Chọn đáp án **(C)**

2. Biến đổi, rút gọn, biểu diễn biểu thức chứa lô-ga-rít.

Câu 185. Với a là số thực dương tùy ý, $\ln(5a) - \ln(3a)$ bằng

- A. $\frac{\ln(5a)}{\ln(3a)}$. B. $\ln(2a)$. C. $\ln \frac{5}{3}$. D. $\frac{\ln 5}{\ln 3}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \ln(5a) - \ln(3a) = \ln \frac{5a}{3a} = \ln \frac{5}{3}.$$

Chọn đáp án **(C)**

Câu 186. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_3 \left(\frac{3}{a} \right)$ bằng

- A. $1 - \log_3 a$. B. $3 - \log_3 a$. C. $\vec{n}_3 = (2; 1; 3)$. D. $\vec{n}_2 = (-1; 3; 2)$.

Lời giải.

Chọn đáp án **(A)**

Câu 187. Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. $\log_2 \left(\frac{2a^3}{b} \right) = 1 + 3\log_2 a - \log_2 b$. B. $\log_2 \left(\frac{2a^3}{b} \right) = 1 + \frac{1}{3}\log_2 a - \log_2 b$.

$$\text{C. } \log_2 \left(\frac{2a^3}{b} \right) = 1 + 3\log_2 a + \log_2 b.$$

$$\text{D. } \log_2 \left(\frac{2a^3}{b} \right) = 1 + \frac{1}{3}\log_2 a + \log_2 b.$$

Lời giải.

$$\log_2 \left(\frac{2a^3}{b} \right) = \log_2 (2a^3) - \log_2 (b) = \log_2 2 + \log_2 a^3 - \log_2 b = 1 + 3\log_2 a - \log b.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 188. Đặt $a = \log_2 3, b = \log_5 3$. Hãy biểu diễn $\log_6 45$ theo a và b .

$$\text{A. } \log_6 45 = \frac{a + 2ab}{ab}.$$

$$\text{B. } \log_6 45 = \frac{2a^2 - 2ab}{ab}.$$

$$\text{C. } \log_6 45 = \frac{a + 2ab}{ab + b}.$$

$$\text{D. } \log_6 45 = \frac{2a^2 - 2ab}{ab + b}.$$

Lời giải.

$$\log_6 45 \frac{\log_3 45}{\log_3 6} = \frac{\log_3 (3^2 \cdot 5)}{\log_3 (2 \cdot 3)} = \frac{2 + \log_3 5}{1 + \log_3 2} = \frac{2 + \frac{1}{b}}{1 + \frac{1}{a}} = \frac{2ab + a}{ab + b}.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 189. Cho các số thực dương a, b , với $a \neq 1$ Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

$$\text{A. } \log_{a^2}(ab) = \frac{1}{2} \log_a b.$$

$$\text{B. } \log_{a^2}(ab) = 2 + 2 \log_a b.$$

$$\text{C. } \log_{a^2}(ab) = \frac{1}{4} \log_a b.$$

$$\text{D. } \log_{a^2}(ab) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_a b.$$

Lời giải.

$$\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{2} \log_a(ab) = \frac{1}{2}(1 + \log_a b) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_a b.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 190. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a \neq 1, a \neq \sqrt{b}$ và $\log_a b = \sqrt{3}$. Tính $P =$

$$\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$\text{A. } P = -5 + 3\sqrt{3}.$$

$$\text{B. } P = -1 + \sqrt{3}.$$

$$\text{C. } P = -1 - \sqrt{3}.$$

$$\text{D. } P = -5 - 3\sqrt{3}.$$

Lời giải.

$$\text{Ta có } \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{1}{2} \frac{\log_a b - 1}{\frac{1}{2} \log_a b - 1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 2} = -1 - \sqrt{3}.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 191. Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $\log_{3a+2b+1}(9a^2 + b^2 + 1) + \log_{6ab+1}(3a + 2b + 1) = 2$. Giá trị của $a + 2b$ bằng

$$\text{A. } 6.$$

$$\text{B. } 9.$$

$$\text{C. } \frac{7}{2}.$$

$$\text{D. } \frac{5}{2}.$$

Lời giải.

$$\text{Ta có } a > 0, b > 0 \text{ nên } \begin{cases} 3a + 2b + 1 > 1 \\ 9a^2 + b^2 + 1 > 1 \\ 6ab + 1 > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_{3a+2b+1}(9a^2 + b^2 + 1) > 0 \\ \log_{6ab+1}(3a + 2b + 1) > 0 \end{cases}.$$

Áp dụng BDT Cô-si cho hai số dương ta được

$$\begin{aligned} \log_{3a+2b+1}(9a^2 + b^2 + 1) + \log_{6ab+1}(3a + 2b + 1) &\geq 2\sqrt{\log_{3a+2b+1}(9a^2 + b^2 + 1) \cdot \log_{6ab+1}(3a + 2b + 1)} \\ &\Rightarrow 2 \geq 2\sqrt{\log_{6ab+1}(9a^2 + b^2 + 1)} \Rightarrow \log_{6ab+1}(9a^2 + b^2 + 1) \leq 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 9a^2 + b^2 + 1 \leq 6ab + 1 \Rightarrow (3a - b)^2 \leq 0 \Rightarrow 3a = b$$

Với $3a = b$, dấu “=” của bất đẳng thức đầu tiên đã xảy ra nên

$$\log_{3a+2b+1}(9a^2 + b^2 + 1) = \log_{6ab+1}(3a + 2b + 1) = 1 \Leftrightarrow \log_{3b+1}(2b^2 + 1) = \log_{2b^2+1}(3b + 1) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2b^2 + 1 = 3b + 1 \Leftrightarrow 2b^2 - 3b = 0 \Leftrightarrow b = \frac{3}{2} \text{ (vì } b > 0)$$

$$\text{Vậy } a + 2b = \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 192. Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $\log_{2a+2b+1}(4a^2 + b^2 + 1) + \log_{4ab+1}(2a + 2b + 1) = 2$. Giá trị của $a + 2b$ bằng

A. $\frac{15}{4}$.

B. 5.

C. 4.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Chọn đáp án **A**

□

3. So sánh các biểu thức lô-ga-rít.

Câu 193. Cho hai số thực a và b , với $1 < a < b$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. $\log_a b < 1 < \log_b a$.

B. $1 < \log_a b < \log_b a$.

C. $\log_b a < \log_a b < 1$.

D. $\log_b a < 1 < \log_a b$.

Lời giải.

$$\log_b a < 1 < \log_a b.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 194. Cho $a > 0; b > 0$ thỏa mãn $\log_{4a+5b+1}(16a^2 + b^2 + 1) + \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1) = 2$. Giá trị của $a + 2b$ bằng:

A. 9..

B. 6..

C. $\frac{27}{4}$..

D. $\frac{20}{3}$..

Lời giải.

Áp dụng BDT Cauchy: $16a^2 + b^2 \geq 8ab$. Suy ra

$$\log_{4a+5b+1}(16a^2 + b^2 + 1) + \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1) \geq \log_{4a+5b+1}(8ab + 1) + \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1) \geq 2$$

$$\text{Dấu = xảy ra: } \begin{cases} \log_{4a+5b+1}(8ab + 1) = 1 \\ 4a = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow a + 2b = \frac{27}{4}.$$

Chọn đáp án **C**

□

§4. Hàm số mũ. Hàm số lô-ga-rít

1. Tập xác định của hàm số mũ, hàm số lô-ga-rít.

Câu 195. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \log_3(x^2 - 4x + 3)$.

A. $\mathcal{D} = (2 - \sqrt{2}; 1) \cup (3; 2 + \sqrt{2})$.

B. $\mathcal{D} = (1; 3)$.

C. $\mathcal{D} = (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.

D. $\mathcal{D} = (-\infty; 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x^2 - 4x + 3 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$

Chọn đáp án **C** □

Câu 196 (QG17,102). Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_2(2x + 1)$.

A. $y' = \frac{1}{(2x+1)\ln 2}$.

B. $y' = \frac{2}{(2x+1)\ln 2}$.

C. $y' = \frac{2}{2x+1}$.

D. $y' = \frac{1}{2x+1}$.

Lời giải.

Chọn đáp án **B** □

Câu 197. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_5 \frac{x-3}{x+2}$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

B. $D = (-\infty; -2) \cup [3; +\infty)$.

C. $D = (-2; 3)$.

D. $D = (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\frac{x-3}{x+2} > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$

Chọn đáp án **D** □

Câu 198. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \log_2(x^2 - 2x - 3)$.

A. $\mathcal{D} = (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$.

B. $\mathcal{D} = [-1; 3]$.

C. $\mathcal{D} = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

D. $\mathcal{D} = (-1; 3)$.

Lời giải.

$x^2 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 199. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \log(x^2 - 2x - m + 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. $m \geq 0$.

B. $m < 0$.

C. $m \leq 2$.

D. $m > 2$.

Lời giải.

Hàm số $y = \log(x^2 - 2x - m + 1)$ xác định $\Leftrightarrow x^2 - 2x - m + 1 > 0$

Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ bất phương trình $x^2 - 2x - m + 1 > 0$ xảy ra với mọi x

$\Leftrightarrow \Delta = 4 + 4(m - 1) < 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 200. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \ln(x^2 - 2x + m + 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. $m = 0$.

B. $0 < m < 3$.

C. $m < -1$ hoặc $m > 0$.

D. $m > 0$.

Lời giải.

$x^2 - 2x + m + 1 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' = 1 - m - 1 < 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Chọn đáp án **D** □

2. Tính đạo hàm hàm số mũ, hàm số lô-ga-rít.

Câu 201. Tính đạo hàm của hàm số $y = 13^x$.

- A. $y' = x \cdot 13^{x-1}$. B. $y' = 13^x \cdot \ln 13$. C. $y' = 13^x$. D. $y' = \frac{13^x}{\ln 13}$.

Lời giải.

$$y' = 13^x \cdot \ln 13.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 202. Cho hàm số $f(x) = 2^x \cdot 7^x$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai** ?

- A. $f(x) < 1 \Leftrightarrow x + x^2 \log_2 7 < 0$. B. $f(x) < 1 \Leftrightarrow x \ln 2 + x^2 \ln 7 < 0$.
C. $f(x) < 1 \Leftrightarrow x \log_7 2 + x^2 < 0$. D. $f(x) < 1 \Leftrightarrow 1 + x \log_2 7 < 0$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} f(x) < 1 &\Leftrightarrow 2^x \cdot 7^{x^2} < 1 \Leftrightarrow 7^{x^2} < 2^{-x} \Leftrightarrow x^2 \cdot \ln 7 < -x \cdot \ln 2 \Leftrightarrow x \ln 2 + x^2 \ln 7 < 0 \\ &\Leftrightarrow x + x^2 \log_2 7 < 0 \Leftrightarrow x \log_7 2 + x^2 < 0. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 203. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x+1}{4^x}$.

- A. $y' = \frac{1 - 2(x+1) \ln 2}{2^{2x}}$. B. $y' = \frac{1 + 2(x+1) \ln 2}{2^{2x}}$.
C. $y' = \frac{1 - 2(x+1) \ln 2}{2^{x^2}}$. D. $y' = \frac{1 + 2(x+1) \ln 2}{2^{x^2}}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} y &= \frac{x+1}{4^x} \\ y' &= \frac{4^x - 4^x \cdot (x+1) \ln 4}{4^{2x}} = \frac{1 - 2(x+1) \ln 2}{2^{2x}}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 204. Tính đạo hàm của hàm số $y = \ln(1 + \sqrt{x+1})$.

- A. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}(1 + \sqrt{x+1})}$. B. $y' = \frac{1}{1 + \sqrt{x+1}}$.
C. $y' = \frac{1}{\sqrt{x+1}(1 + \sqrt{x+1})}$. D. $y' = \frac{2}{\sqrt{x+1}(1 + \sqrt{x+1})}$.

Lời giải.

$$(\ln(1 + \sqrt{x+1}))' = \frac{(1 + \sqrt{x+1})'}{1 + \sqrt{x+1}} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}(1 + \sqrt{x+1})}$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 205. Tìm đạo hàm của hàm số $y = \log x$.

- A. $y' = \frac{1}{x}$. B. $y' = \frac{\ln 10}{x}$. C. $y' = \frac{1}{x \ln 10}$. D. $y' = \frac{1}{10 \ln x}$.

Lời giải.

$$y = \log x \Rightarrow y' = (\log x)' = \frac{1}{x \ln 10}.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 206. Cho hàm số $y = \frac{\ln x}{x}$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $2y' + xy'' = -\frac{1}{x^2}$. B. $y' + xy'' = \frac{1}{x^2}$. C. $y' + xy'' = -\frac{1}{x^2}$. D. $2y' + xy'' = \frac{1}{x^2}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}, y'' = \frac{-3 + 2 \ln x}{x^3}$.

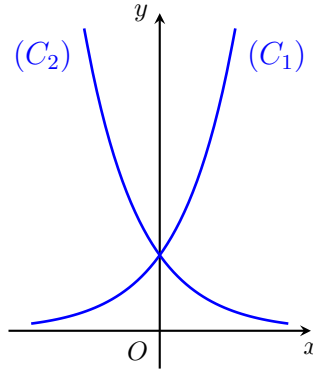
Khi đó $2y' + xy'' = 2 \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2} + x \cdot \frac{-3 + 2 \ln x}{x^3} = \frac{2 - 2 \ln x - 3 + 2 \ln x}{x^3} = \frac{-1}{x^2}$.

Chọn đáp án (A)

□

3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số mũ, lô-ga-rít.

Câu 207. Cho hai hàm số $y = a^x, y = b^x$ với a, b là hai số thực dương khác 1, lần lượt có đồ thị là (C_1) và (C_2) như hình bên.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $0 < a < b < 1$. B. $0 < b < 1 < a$. C. $0 < a < 1 < b$. D. $0 < b < a < 1$.

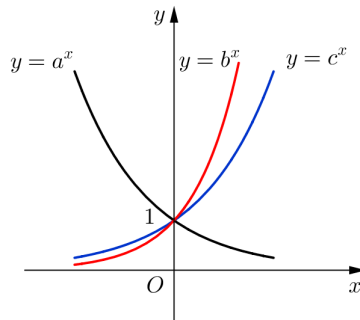
Lời giải.

Theo hình vẽ ta có hàm $y = a^x$ đồng biến $\Rightarrow a > 1$ và hàm số $y = b^x$ nghịch biến $\Rightarrow b < 1$

Chọn đáp án (B)

□

Câu 208. Cho ba số thực dương a, b, c khác 1. Đồ thị các hàm số $y = a^x, y = b^x, y = c^x$ được cho trong hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- A. $a < b < c$. B. $a < c < b$. C. $b < c < a$. D. $c < a < b$.

Lời giải.

Từ đồ thị suy ra $0 < a < 1 < c < b$

Chọn đáp án (B)

□

Câu 209. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = \ln(x^2 + 1) - mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$

- A. $(-\infty; -1]$. B. $(-\infty; -1)$. C. $[-1; 1]$. D. $[1; +\infty)$.

Lời giải.

$$y = \ln(x^2 + 1) - mx + 1 \text{ đồng biến trên } (-\infty; +\infty) \Leftrightarrow y' = \frac{2x}{x^2 + 1} - m \geq 0, \forall x \in (-\infty; +\infty).$$

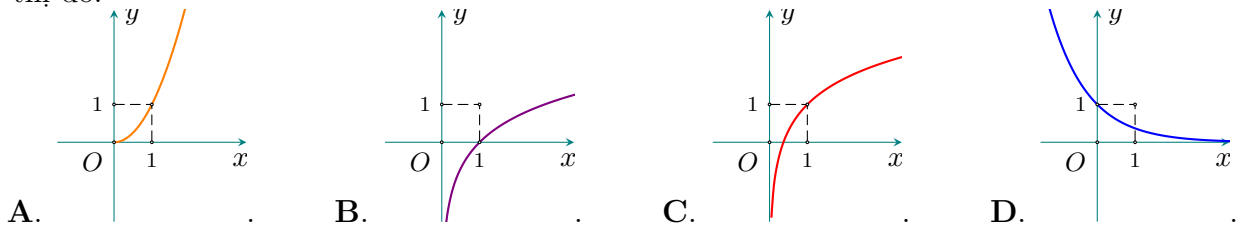
$$\Leftrightarrow g(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \geq m, \forall x \in (-\infty; +\infty). \text{ Mà } g'(x) = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Dựa vào bảng biến thiên của $g(x)$ ta có: $\frac{2x}{x^2 + 1} \geq m, \forall x \in (-\infty; +\infty) \Leftrightarrow m \leq -1$

Chọn đáp án **A**

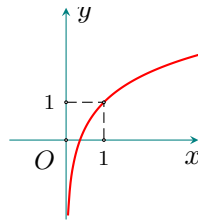
□

Câu 210. Cho hàm số $f(x) = x \ln x$. Đồ thị nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = f'(x)$. Tìm đồ thị đó.



Lời giải.

Ta có $f'(x) = (x \ln x)' = \ln x + 1, \forall x > 0. f'(1) = 1$. Hàm số $f'(x) = \ln x + 1, x \neq 0$ có điều kiện $x > 0$, nên loại đáp án A và D. Hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x = \frac{1}{e} < 1$ nên loại B. Đồ thị hàm số $f'(x) = \ln x + 1$ là :



Chọn đáp án **C**

□

4. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức chứa hàm mũ, hàm lô-ga-rít.

Câu 211. Xét các số thực a, b thỏa mãn $a > b > 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = \log_{\frac{a}{b}}^2(a^2) + 3\log_b\left(\frac{a}{b}\right)$.

A. $P_{\min} = 19$. B. $P_{\min} = 13$. C. $P_{\min} = 14$. D. $P_{\min} = 15$.

Lời giải.

$$\text{ta có } P = \log_{\frac{a}{b}}^2(a^2) + 3\log_b\left(\frac{a}{b}\right) = [2\log_{\frac{a}{b}}a]^2 + 3\log_b\left(\frac{a}{b}\right) = 4\left[\log_{\frac{a}{b}}\left(\frac{a}{b} \cdot b\right)\right]^2 + 3\log_b\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$P = 4\left[1 + \log_{\frac{a}{b}}b\right]^2 + 3\log_b\left(\frac{a}{b}\right). \text{ Đặt } t = \log_{\frac{a}{b}}b > 0 \text{ (vì } a > b > 1),$$

$$\text{Ta có } P = 4(1+t)^2 + \frac{3}{t} = 4t^2 + 8t + \frac{3}{t} + 4 = f(t).$$

$$\text{Nên } f'(t) = 8t + 8 - \frac{3}{t^2} = \frac{8t^3 + 8t^2 - 3}{t^2} = \frac{(2t-1)(4t^2 + 6t + 3)}{t^2}$$

$$\text{Vậy } f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}. \text{ Khảo sát hàm số, ta có } P_{\min} = f\left(\frac{1}{2}\right) = 15.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 212. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3 \frac{1-xy}{x+2y} = 3xy + x + 2y - 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = x + y$.

A. $P_{\min} = \frac{9\sqrt{11} - 19}{9}$.

B. $P_{\min} = \frac{9\sqrt{11} + 19}{9}$.

$$\text{C. } P_{\min} = \frac{18\sqrt{11} - 29}{21}.$$

$$\text{D. } P_{\min} = \frac{2\sqrt{11} - 3}{3}.$$

Lời giải.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 213. Xét hàm số $f(t) = \frac{9^t}{9^t + m^2}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $f(x) + f(y) = 1$ với mọi số thực x, y thỏa mãn $e^{x+y} \leq e(x+y)$. Tìm số phần tử của S .

A. 0.

B. 1.

C. Vô số.

D. 2.

Lời giải.

$$e^{x+y} \leq e(x+y) \Leftrightarrow e^{x+y-1} \leq x+y \Leftrightarrow e^{x+y-1} - 1 \leq x+y-1$$

Xét $g(t) = e^t - t - 1$ với $t \in \mathbb{R}$

$g'(t) = e^t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 0$. Bảng biến thiên của $g(t)$ như sau.

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(t)$	$-$	0	$+$
$g(t)$	$+\infty$	0	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy $g(t) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$, tức là $e^{x+y-1} - 1 \geq x+y-1$, kết hợp với giả thiết suy ra $e^{x+y-1} = x+y \Leftrightarrow x+y = 1$. Từ đó, với $x+y = 1$, $f(x) + f(y) = f(x) + f(1-x) = \frac{9^x}{9^x + m^2} + \frac{9^{1-x}}{9^{1-x} + m^2} = \frac{9^x}{9^x + m^2} + \frac{9}{9 + 9^x \cdot m^2} = \frac{m^2 u^2 + 18u + 9m^2}{m^2 u^2 + (m^4 + 9)u + 9m^2}$ với $u = 9^x > 0$.
 $f(x) + f(1-x) = 1 \quad \forall x \Leftrightarrow m^4 + 9 = 18 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{3}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 214. Xét các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_2 \frac{1-ab}{a+b} = 2ab + a + b - 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = a + 2b$.

$$\text{A. } P_{\min} = \frac{2\sqrt{10} - 3}{2}. \quad \text{B. } P_{\min} = \frac{3\sqrt{10} - 7}{2}. \quad \text{C. } P_{\min} = \frac{2\sqrt{10} - 1}{2}. \quad \text{D. } P_{\min} = \frac{2\sqrt{10} - 5}{2}.$$

Lời giải.

Giả thiết tương đương với $\log_2(2-2ab) + (2-2ab) = \log_2(a+b) + (a+b) \Leftrightarrow 2-2ab = a+b$ do hàm $f(t) = \log_2 t + t$ đồng biến trên tập xác định.

$$\text{Rút } a \text{ theo } b \text{ thay vào } P, \text{ khi đó } P_{\min} = \frac{2\sqrt{10} - 3}{2}.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

5. Bài toán thực tế.

Câu 215. Một người gửi tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất 6,6%/ năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau một năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền ban đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?

A. 11 năm..

B. 10 năm..

C. 13 năm..

D. 12 năm..

Lời giải.Chọn đáp án **A** □

Câu 216. Một người gửi 50 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 6%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó nhận được số tiền nhiều hơn 100 triệu đồng bao gồm gốc và lãi? Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra.

A. 13 năm.

B. 14 năm.

C. 12 năm.

D. 11 năm.

Lời giải.

Số tiền sau x năm được tính bằng công thức $S = A(1 + 0,06)^x$. Do số tiền ban đầu là 50 triệu nên $50(1,06)^x > 100 \Rightarrow x \geq 12$. Vậy sau ít nhất 12 năm số tiền sẽ lớn hơn 100 triệu.

Chọn đáp án **C** □

Câu 217. Một người gửi tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất 6,1 %/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền gửi ban đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?

A. 13 năm.

B. 10 năm.

C. 11 năm.

D. 12 năm.

Lời giải.Chọn đáp án **D** □

Câu 218. Một người gửi 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 0,4%/tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau đúng 6 tháng, người đó được lĩnh số tiền (cả vốn ban đầu và lãi) gần nhất với số nào dưới đây, nếu trong thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi?

A. 102.424.000 đồng. B. 102.423.000 đồng. C. 102.016.000 đồng. D. 102.017.000 đồng.

Lời giải.

Ta có: $T = P(1 + r)^n = 100(1 + 0,4\%)^6 \approx 102,424$ triệu.

Chọn đáp án **A** □

Câu 219. Ông A vay ngắn hạn ngân hàng 100 triệu đồng, với lãi suất 12%/năm. Ông muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách : Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau và trả hết tiền nợ sau đúng 3 tháng kể từ ngày vay. Hỏi, theo cách đó, số tiền m mà ông A sẽ phải trả cho ngân hàng trong mỗi lần hoàn nợ là bao nhiêu ? Biết rằng, lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian ông A hoàn nợ.

A. $m = \frac{100 \cdot (1,01)^3}{3}$ (triệu đồng).B. $m = \frac{(1,01)^3}{(1,01)^3 - 1}$ (triệu đồng).

$$\text{C. } m = \frac{100 \times 1,03}{3} \text{ (triệu đồng).}$$

$$\text{D. } m = \frac{120.(1,12)^3}{(1,12)^3 - 1} \text{ (triệu đồng).}$$

Lời giải.

Lãi suất $12\% / \text{năm} = 1\% / \text{tháng}$ (do vay ngắn hạn).

Sau tháng 1, ông A còn nợ $100.1,01 - m$ (triệu).

Sau tháng 2, ông còn nợ $(100.1,01 - m).1,01 - m = 100.1,01^2 - 2,01m$ (triệu).

Sau tháng 3, ông hết nợ do đó

$$(100.1,01^2 - 2,01m).1,01 - m = 100.1,01^3 - 3,0301m = 0 \Rightarrow m = \frac{100.1,01^3}{3,0301} = \frac{1,01^3}{1,01^3 - 1} \text{ (triệu đồng).}$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 220. Đầu năm 2016, ông A thành lập một công ty. Tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong năm 2016 là 1 tỷ đồng. Biết rằng cứ sau mỗi năm thì tổng số tiền dùng để trả lương cho nhân viên trong cả năm đó tăng thêm 15% so với năm trước. Hỏi năm nào dưới đây là năm đầu tiên mà tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong cả năm lớn hơn 2 tỷ đồng?

A. Năm 2023.

B. Năm 2022.

C. Năm 2021.

D. Năm 2020.

Lời giải.

Áp dụng công thức $(1 + 0,15)^m > 2 \Leftrightarrow m > 4,9594$. Vậy sau 5 năm tức là năm 2021.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 221. Một người gửi tiết kiệm vào ngân hàng với lãi suất $7,5\% / \text{năm}$. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền đã gửi, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?

A. 11 năm.

B. 9 năm.

C. 10 năm.

D. 12 năm.

Lời giải.

Áp dụng công thức: $S_n = A(1 + r)^n \Rightarrow n = \log_{(1+r)} \left(\frac{S_n}{A} \right) \Rightarrow n = \log_{(1+7,5\%)}(2) \approx 9,6$.

Chọn đáp án **(C)** □

§5. Phương trình mũ và phương trình lô-ga-rít

1. Phương trình cơ bản.

Câu 222. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $3^x = m$ có nghiệm thực.

A. $m \geq 1$.

B. $m \geq 0$.

C. $m > 0$.

D. $m \neq 0$.

Lời giải.

Vì $3^x > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên phương trình $3^x = m$ có nghiệm thực khi $m > 0$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 223. Phương trình $5^{2x+1} = 125$ có nghiệm là

- A. $x = \frac{3}{2}$. B. $x = \frac{5}{2}$. C. $x = 1$. D. $x = 3$.

Lời giải.

Chọn đáp án **C** □

Câu 224. Tìm nghiệm của phương trình $\log_2(x - 5) = 4$.

- A. $x = 21$. B. $x = 3$. C. $x = 11$. D. $x = 13$.

Lời giải.

Điều kiện: $x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > 5$.

Pt $\Leftrightarrow x - 5 = 2^4 \Leftrightarrow x = 21$ (thỏa điều kiện).

Chọn đáp án **A** □

Câu 225 (QG17,102). Tìm nghiệm của phương trình $\log_2(1 - x) = 2$.

- A. $x = -4$. B. $x = -3$. C. $x = 3$. D. $x = 5$.

Lời giải.

Điều kiện: $x < 1$. Ta có

$$\log_2(1 - x) = 2 \Leftrightarrow 1 - x = 4 \Leftrightarrow x = -3.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -3$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 226 (QG17,102). Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x - 1) + \log_{\frac{1}{2}}(x + 1) = 1$.

- A. $S = \{2 + \sqrt{5}\}$. B. $S = \{2 - \sqrt{5}; 2 + \sqrt{5}\}$.
C. $S = \{3\}$. D. $S = \left\{\frac{3 + \sqrt{13}}{2}\right\}$.

Lời giải.

Tập xác định $D = (1; +\infty)$. Với $x \in D$, phương trình đã cho tương đương với

$$\log_{\sqrt{2}}(x - 1) + \log_{\frac{1}{2}}(x + 1) = 1 \Leftrightarrow 2\log_2(x - 1) - \log_2(x + 1) = 1 \Leftrightarrow \log_2 \frac{(x-1)^2}{(x+1)} = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 2x + 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{5} \text{ (chọn)} \\ x = 2 - \sqrt{5} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 227. Phương trình $2^{2x+1} = 32$ có nghiệm là

- A. $x = \frac{5}{2}$. B. $x = 2$. C. $x = \frac{3}{2}$. D. $x = 3$.

Lời giải.

Ta có $2^{2x+1} = 32 \Leftrightarrow 2x + 1 = 5 \Leftrightarrow x = 2$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 228. Tìm nghiệm của phương trình $\log_{25}(x + 1) = \frac{1}{2}$.

- A. $x = -6$. B. $x = 6$. C. $x = 4$. D. $x = \frac{23}{2}$.

Lời giải.

Điều kiện $x > -1$. Phương trình tương đương với $x + 1 = 25^{\frac{1}{2}} = 5 \Rightarrow x = 4$

Chọn đáp án **C** □

Câu 229. Tập nghiệm S của phương trình $\log_3(2x+1) - \log_3(x-1) = 1$.

- A. $S = \{4\}$. B. $S = \{3\}$. C. $S = \{-2\}$. D. $S = \{1\}$.

Lời giải.

Điều kiện $x > 1$.

Phương trình tương đương với $\log_3 \frac{2x+1}{x-1} = 1 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-1} = 3 \Leftrightarrow 2x+1 = 3x-3 \Rightarrow x = 4$

Chọn đáp án (A) □

Câu 230. Giải phương trình $\log_4(x-1) = 3$.

- A. $x = 63$. B. $x = 65$. C. $x = 80$. D. $x = 82$.

Lời giải.

Điều kiện $x > 1$.

Phương trình $\Leftrightarrow x-1 = 64 \Leftrightarrow x = 65$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 231. Tập nghiệm của phương trình $\log_3(x^2-7) = 2$ là

- A. $\{-\sqrt{15}; \sqrt{15}\} ..$ B. $\{-4; 4\} ..$ C. $\{4\} ..$ D. $\{-4\} ..$

Lời giải.

Chọn đáp án (B) □

2. Phương pháp đưa về cùng cơ số.

Câu 232. Tìm nghiệm của phương trình $3^{x-1} = 27$.

- A. $x = 9$. B. $x = 3$. C. $x = 4$. D. $x = 10$.

Lời giải.

$3^{x-1} = 27 \Leftrightarrow 3^{x-1} = 3^3 \Leftrightarrow x-1 = 3 \Leftrightarrow x = 4$

Chọn đáp án (C) □

Câu 233. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$.

- A. $S = \{-3; 3\}$. B. $S = \{4\}$.
C. $S = \{3\}$. D. $S = \{-\sqrt{10}; \sqrt{10}\}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq 1$. Ta có: $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3 \Rightarrow \log_2(x^2-1) = 3 \Rightarrow x^2-1 = 2^3 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$.

Đối chiếu điều kiện, ta được $x = 3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 234. Tổng giá trị tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x \cdot \log_{81} x = \frac{2}{3}$ bằng

- A. $\frac{82}{9}$. B. $\frac{80}{9}$. C. 9. D. 0.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 0$.

$$\log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x \cdot \log_{81} x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \log_3 x \cdot \log_{3^2} x \cdot \log_{3^3} x \cdot \log_{3^4} x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} (\log_3 x)^4 = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow (\log_3 x)^4 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = 2 \\ \log_3 x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3^2 = 9 & (tm) \\ x_2 = 3^{-2} = \frac{1}{9} & (tm) \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = 9 + \frac{1}{9} = \frac{82}{9}.$$

Chọn đáp án **A**

□

3. Phương pháp đặt ẩn phụ.

Câu 235. Cho phương trình $4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$. Khi đặt $t = 2^x$, ta được phương trình nào dưới đây?

- A. $2t^2 - 3 = 0$. B. $t^2 + t - 3 = 0$. C. $4t - 3 = 0$. D. $t^2 + 2t - 3 = 0$.

Lời giải.

$$4^x + 2^{x+1} - 3 = 0 \Leftrightarrow (2^2)^x + 2 \cdot 2^x - 3 = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 3 = 0.$$

Thay $t = 2^x$ ta được $t^2 + 2t - 3 = 0$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 236. Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m^2 - 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

- A. 3.. B. 5.. C. 2.. D. 1..

Lời giải.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 237. Tìm tập hợp các giá trị của tham số thực m để phương trình $6^x + (3 - m)2^x - m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.

- A. $[3; 4]$. B. $[2; 4]$. C. $(2; 4)$. D. $(3; 4)$.

Lời giải.

Ta có: $6^x + (3 - m)2^x - m = 0 \Leftrightarrow \frac{6^x + 3 \cdot 2^x}{2^x + 1} = m$

Xét hàm số $f(x) = \frac{6^x + 3 \cdot 2^x}{2^x + 1}$ xác định trên $\mathbb{R}$,

có $f'(x) = \frac{12^x \cdot \ln 3 + 6^x \cdot \ln 6 + 3 \cdot 2^x \cdot \ln 2}{(2^x + 1)^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Suy ra $0 < x < 1 \Leftrightarrow f(0) < f(x) < f(1) \Leftrightarrow 2 < f(x) < 4$ vì $f(0) = 2, f(1) = 4$

Vậy phương trình (1) có nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$ khi $m \in (2; 4)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 238. Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3^2 x - m \log_3 x + 2m - 7 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 x_2 = 81$.

- A. $m = -4$. B. $m = 4$. C. $m = 81$. D. $m = 44$.

Lời giải.

Đặt $t = \log_3 x$. Phương trình trở thành $t^2 - mt + 2m - 7 = 0 \quad (*)$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1 x_2 = 81 \Rightarrow \log_3(x_1 x_2) = \log_3 x_1 + \log_3 x_2 = \log_3 81 = 4$.

Do đó phương trình $(*)$ có hai nghiệm thỏa mãn $t_1 + t_2 = 4$ vậy $m = 4$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 239. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x - 2^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt.

- A. $m \in (-\infty; 1)$. B. $m \in (0; +\infty)$. C. $m \in (0; 1]$. D. $m \in (0; 1)$.

Lời giải.

Xét phương trình $4^x - 2^{x+1} + m = 0$.

Đặt $2^x = t > 0$, phương trình đã cho trở thành $t^2 - 2t + m = 0$.

Ta có $\Delta' = 1 - m$.

Phương trình đã cho có 2 nghiệm thực phân biệt khi phương trình $t^2 - 2t + m = 0$ có 2 nghiệm dương phân biệt, khi đó

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m > 0 \\ 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 240. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $16^x - m \cdot 4^{x+1} + 5m^2 - 45 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

- A. 13. B. 3. C. 6. D. 4.

Lời giải.

Đặt $t = 4^x, t > 0$. Phương trình đã cho trở thành $t^2 - 4mt + 5m^2 - 45 = 0$ (*).

Với mỗi nghiệm $t > 0$ của phương trình (*) sẽ tương ứng với duy nhất một nghiệm x của phương trình ban đầu. Do đó, yêu cầu bài toán tương đương phương trình (*) có hai nghiệm dương phân biệt. Khi đó

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 45 > 0 \\ 4m > 0 \\ 5m^2 - 45 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\sqrt{5} < m < 3\sqrt{5} \\ m > 0 \\ \begin{cases} m < -3 \\ m > 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow 3 < m < 3\sqrt{5}.$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{4; 5; 6\}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 241. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $9^x - m \cdot 3^{x+1} + 3m^2 - 75 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

- A. 8. B. 4. C. 19. D. 5.

Lời giải.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 242. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $16^x - 2 \cdot 12^x + (m - 2)9^x = 0$ có nghiệm dương?

- A. 1. B. 2. C. 4. D. 3.

Lời giải.

Xét phương trình $16^x - 2.12^x + (m - 2).9^x = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^{2x} - 2.\left(\frac{4}{3}\right)^x + m - 2 = 0$ Đặt $t = \left(\frac{4}{3}\right)^x > 0$ ta được $t^2 - 2t + m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2 + 2t - t^2 (*)$. Để phương trình đã cho có nghiệm dương $x > 0$ thì phương trình $(*)$ có nghiệm $t = \left(\frac{4}{3}\right)^x > 1$. Xét hàm $f(t) = 2 + 2t - t^2, t \in (1; +\infty)$ có: $f'(t) = 2 - 2t < 0, \forall t > 1$ nên hàm số nghịch biến trên $(1; +\infty)$. Suy ra $f(t) < f(1) = 3 \Rightarrow m < 3$. Mà m nguyên dương nên $m \in \{1; 2\}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 243. Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình $9^x - 2.3^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 1$.

A. $m = 6$.

B. $m = -3$.

C. $m = 3$.

D. $m = 1$.

Lời giải.

Đặt $t = 3^x > 0$. Phương trình đã cho trở thành: $t^2 - 6t + m = 0 (*)$.

Phương trình $(*)$ có hai nghiệm dương khi $\begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 9 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 9 (**).$

Gọi t_1, t_2 là hai nghiệm của $(*)$. Ta có: $x_1 = \log_3 t_1; x_2 = \log_3 t_2$.

Mà $x_1 + x_2 = 1$ nên $\log_3 t_1 + \log_3 t_2 = 1 \Rightarrow t_1.t_2 = 3 \Rightarrow m = 3$ (thỏa $(**)$).

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 244. Xét các số nguyên dương a, b sao cho phương trình $a \ln^2 x + b \ln x + 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $5 \log^2 x + b \log x + a = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn $x_1 x_2 > x_3 x_4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $S_{\min}$ của $S = 2a + 3b$.

A. $S_{\min} = 30$.

B. $S_{\min} = 25$.

C. $S_{\min} = 33$.

D. $S_{\min} = 17$.

Lời giải.

Xét hai phương trình $at^2 + bt + 5 = 0$ (1) và $5t^2 + bt + a = 0$ (2). (1) có hai nghiệm t_1, t_2 và (2) có hai nghiệm t_3, t_4 . Để hai phương trình có nghiệm thì $\Delta > 0 \Leftrightarrow b^2 > 20a$. Giả sử $t_1 = \ln x_1; t_2 = \ln x_2; t_3 = \log x_3; t_4 = \log x_4$. Theo giả thiết $x_1 x_2 > x_3 x_4 \Leftrightarrow e^{t_1+t_2} > 10^{t_3+t_4}$, theo Viet ta có $e^{-\frac{b}{a}} > 10^{-\frac{b}{5}}$, dẫn đến $a > \frac{5}{\ln 10} > 2$. Vì a nguyên, nên giá trị nhỏ nhất của $a = 3$, suy ra giá trị nhỏ nhất của $b = 8$. Vậy $S_{\min} = 30$.

Chọn đáp án **(A)** □

4. Phương pháp hàm số, đánh giá.

Câu 245. Cho phương trình $7^x + m = \log_7(x - m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-25; 25)$ để phương trình trên có nghiệm?

A. 9..

B. 25..

C. 24..

D. 26..

Lời giải.

$$7^x + m = \log_7(x - m) \Leftrightarrow 7^x + x = \log_7(x - m) + x - m$$

$$\Leftrightarrow x = \log_7(x - m) \Leftrightarrow m = x - 7^x$$

$$g(x) = x - 7^x \Leftrightarrow g'(x) = 1 - 7^x \ln 7$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \log_7 \frac{1}{\ln 7}$$

Do đó $m \leq -0,85, m \in (-25; 25) \Rightarrow -25 < m \leq -0,85 \Rightarrow m \in \{-24; -23; \dots; -1\}$.

Vậy có 24 giá trị nguyên của m .

Chọn đáp án **C** □

Câu 246. Hỏi phương trình $3x^2 - 6x + \ln(x+1)^3 + 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Lời giải.

Điều kiện: $x > -1$. Phương trình đã cho tương đương với $3x^2 - 6x + 3\ln(x+1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + \ln(x+1) = 0$. Xét hàm $y = x^2 - 2x + \ln(x+1), y' = 2(x-1) + \frac{1}{x+1}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ (thỏa mãn điều kiện).

$$y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx -0,38; y\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 0,67 \Rightarrow y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) y\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < 0.$$

Vậy đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Chọn đáp án **C** □

Câu 247. Cho phương trình $5^x + m = \log_5(x-m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-20; 20)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 20.

B. 19.

C. 9.

D. 21.

Lời giải.

Điều kiện $x > m$

Ta có $5^x + m = \log_5(x-m) \Leftrightarrow 5^x + x = x - m + \log_5(x-m) \quad (1).$

Xét hàm số $f(t) = 5^t + t, f'(t) = 5^t \ln 5 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$

Do đó từ (1) suy ra $x = \log_5(x-m) \Leftrightarrow m = x - 5^x$.

Xét hàm số $g(x) = x - 5^x, g'(x) = 1 - 5^x \cdot \ln 5, g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \log_5 \frac{1}{\ln 5} = -\log_5 \ln 5 = x_0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\log_5 \ln 5$	$+\infty$
$g'(x)$		$+$ 0 $-$	
$g(x)$	$-\infty$	$g(x_0)$	$-\infty$

Do đó để phương trình có nghiệm thì $m \leq g(x_0) \approx -0,92$.

Các giá trị nguyên của $m \in (-20; 20)$ là $\{-19; -18; \dots; -1\}$, có 19 giá trị m thỏa mãn.

Chọn đáp án **B** □

Câu 248. Cho phương trình $2^x + m = \log_2(x-m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-18; 18)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 9.

B. 19.

C. 17.

D. 18.

Lời giải.

Chọn đáp án **C** □

Câu 249. Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên trong đoạn $[-2017; 2017]$ để phương trình $\log(mx) = 2\log(x+1)$ có nghiệm duy nhất?

- A. 2017. B. 4014. C. 2018. D. 4015.

Lời giải.

Điều kiện $x > -1$. $\log(mx) = 2\log(x+1) \Leftrightarrow \log(mx) = \log(x+1)^2$. $mx = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow m = x + \frac{1}{x} + 2$.

Xét hàm số $f(x) = x + \frac{1}{x} + 2, x \in (-1; +\infty)$.

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Bảng biến thiên.

x	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	0	+
$f(x)$	0	$+\infty$	4	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\begin{cases} m < 1 \\ m = 4 \end{cases}$

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $[-2017; 2017]$.

Chọn đáp án **C**

□

5. Bài toán thực tế.

Câu 250. Số lượng của loại vi khuẩn A trong một phòng thí nghiệm được tính theo công thức $s(t) = s(0) \cdot 2^t$, trong đó $s(0)$ là số lượng vi khuẩn A lúc ban đầu, $s(t)$ là số lượng vi khuẩn A có sau t phút. Biết sau 3 phút thì số lượng vi khuẩn A là 625 nghìn con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc ban đầu, số lượng vi khuẩn A là 10 triệu con ?

- A. 48 phút. B. 19 phút. C. 7 phút. D. 12 phút.

Lời giải.

$s(3) = s(0) \cdot 2^3 \Rightarrow s(0) = \frac{s(3)}{2^3} = 78125$. $s(t) = \frac{10000000}{78125} = 128 \Rightarrow t = 7$

Chọn đáp án **C**

□

§6. Bất phương trình mũ và lô-ga-rít

1. Bất phương trình cơ bản.

Câu 251. Giải bất phương trình $\log_2(3x-1) > 3$.

- A. $x > 3$. B. $\frac{1}{3} < x < 3$. C. $x < 3$. D. $x > \frac{10}{3}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > \frac{1}{3}$. BPT $\Leftrightarrow 3x-1 > 8 \Leftrightarrow x > 3$. Kết hợp điều kiện ta được $x > 3$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 252. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) < \log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$

- A. $S = (2; +\infty)$. B. $S = (-\infty; 2)$. C. $S = (\frac{1}{2}; 2)$. D. $S = (-1; 2)$.

Lời giải.

$$\text{ĐKXD: } \begin{cases} x+1 > 0 \\ 2x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x > \frac{1}{2} \quad (*)$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+1) < \log_{\frac{1}{2}}(2x-1) \Leftrightarrow x+1 > 2x-1 \Leftrightarrow x-2 < 0 \Leftrightarrow x < 2 \text{ Kết hợp } (*) \Rightarrow S = \left(\frac{1}{2}; 2\right)$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 253. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $5^{x+1} - \frac{1}{5} > 0$.

- A. $S = (1; +\infty)$. B. $S = (-1; +\infty)$. C. $S = (-2; +\infty)$. D. $S = (-\infty, -2)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } 5^{x+1} - \frac{1}{5} > 0 \Leftrightarrow 5^{x+1} > 5^{-1} \Leftrightarrow x+1 > -1 \Leftrightarrow x > -2.$$

Chọn đáp án **C**

□

2. Phương pháp đưa về cùng cơ số.

Câu 254. Tập hợp nghiệm của bất phương trình $2^{2x} < 2^{x-6}$ là

- A. $(0; 6)$. B. $(-\infty; 6)$. C. $(0; 64)$. D. $(6; +\infty)$.

Lời giải.

$$\text{TXD: } D = \mathbb{R}$$

$$\text{Ta có: } 2^{2x} < 2^{x+6} \Leftrightarrow 2x < x+6 \Leftrightarrow x < 6$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty; 6)$

Chọn đáp án **B**

□

3. Phương pháp đặt ẩn phụ.

Câu 255. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2^2 x - 5\log_2 x + 4 \geq 0$.

- A. $S = (-\infty; 2) \cup [16; +\infty)$. B. $S = [2; 16]$.
C. $S = (0; 2] \cup [16; +\infty)$. D. $S = (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$.

Lời giải.

Bất phương trình có nghĩa khi $x > 0$.

$$\text{Đặt } t = \log_2 x \text{ bất phương trình thành } t^2 - 5t + 4 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 4 \text{ hay } t \leq 1.$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x \geq 4 \text{ hay } \log_2 x \leq 1 \Leftrightarrow x \geq 2^4 \text{ hay } x \leq 2$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (0; 2] \cup [16; +\infty)$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 256. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2^2 x - 2\log_2 x + 3m - 2 < 0$ có nghiệm thực.

- A. $m < 1$. B. $m < \frac{2}{3}$. C. $m < 0$. D. $m \leq 1$.

Lời giải.

Đặt $t = \log_2 x$. Với mỗi giá trị của t , luôn có một giá trị x tương ứng. Bất phương trình đã cho trở thành $t^2 - 2t + 3m - 2 < 0$; $\Delta' = 3 - 3m$.

Vì hệ số $a = 1 > 0$, bất phương trình $t^2 - 2t + 3m - 2 < 0$ có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m < 1$.

Chọn đáp án **A**

□

Chương 3. Nguyên hàm, tích phân và ứng dụng

§1. Nguyên hàm

1. Định nghĩa, tính chất và nguyên hàm cơ bản.

Câu 257 (QG17,101). Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 3x$.

A. $\int \cos 3x dx = 3 \sin 3x + C$.

B. $\int \cos 3x dx = \frac{\sin 3x}{3} + C$.

C. $\int \cos 3x dx = -\frac{\sin 3x}{3} + C$.

D. $\int \cos 3x dx = \sin 3x + C$.

Lời giải.

$$\int \cos 3x dx = \frac{1}{3} \int \cos 3x d(3x) = \frac{\sin 3x}{3} + C$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 258. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x$ là

A. $x^4 + x^2 + C$.

B. $3x^2 + 1 + C$.

C. $x^3 + x + C$.

D. $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \int (x^3 + x) dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 259. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + x^2$ là

A. $4x^3 + 2x + C$.

B. $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C$.

C. $x^4 + x^2 + C$.

D. $x^5 + x^3 + C$.

Lời giải.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 260. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x^2$ là

A. $x^4 + x^3 + C$.

B. $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + C$.

C. $3x^2 + 2x + C$.

D. $x^3 + x^2 + C$.

Lời giải.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 261. $\int_1^2 \frac{dx}{3x-2}$ bằng

A. $2 \ln 2$.

B. $\frac{1}{3} \ln 2$.

C. $\frac{2}{3} \ln 2$.

D. $\ln 2$.

Lời giải.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 262 (QG17,101). Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 3 - 5 \sin x$ và $f(0) = 10$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(x) = 3x + 5 \cos x + 5$.

B. $f(x) = 3x + 5 \cos x + 2$.

C. $f(x) = 3x - 5 \cos x + 2$.

D. $f(x) = 3x - 5 \cos x + 15$.

Lời giải.

$$f(x) = \int (3 - 5 \sin x) dx = 3x + 5 \cos x + C. \text{ Do } f(0) = 10 \Rightarrow 5 + C = 10 \Rightarrow C = 5.$$

Vậy hàm số là $f(x) = 3x + 5 \sin x + 5$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 263 (QG17,102). Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{5x-2}$.

A. $\int \frac{dx}{5x-2} = \frac{1}{5} \ln |5x-2| + C.$

B. $\int \frac{dx}{5x-2} = -\frac{1}{2} \ln(5x-2) + C.$

C. $\int \frac{dx}{5x-2} = 5 \ln |5x-2| + C.$

D. $\int \frac{dx}{5x-2} = \ln |5x-2| + C.$

Lời giải.

Ta có $\int \frac{dx}{5x-2} = \int \frac{1}{5(5x-2)} d(5x-2) = \frac{1}{5} \ln |5x-2| + C.$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 264. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 7^x$.

A. $\int 7^x dx = 7^x \ln 7 + C.$

B. $\int 7^x dx = \frac{7^x}{\ln 7} + C.$

C. $\int 7^x dx = 7^{x+1} + C.$

D. $\int 7^x dx = \frac{7^{x+1}}{x+1} + C.$

Câu 265. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

A. $F(x) = \cos x - \sin x + 3.$

B. $F(x) = -\cos x + \sin x + 3.$

C. $F(x) = -\cos x + \sin x - 1.$

D. $F(x) = -\cos x + \sin x + 1.$

Lời giải.

Ta có $F(x) = \int f(x) dx = -\cos x + \sin x + C$. Mà $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ nên $C = 1$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 266. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2 \sin x$.

A. $\int 2 \sin x dx = 2 \cos x + C.$

B. $\int 2 \sin x dx = \sin^2 x + C.$

C. $\int 2 \sin x dx = \sin 2x + C.$

D. $\int 2 \sin x dx = -2 \cos x + C.$

Lời giải.

Ta có $\int 2 \sin x dx = 2 \int \sin x dx = -2 \cos x + C$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 267. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x-1}$.

A. $\int f(x) dx = \frac{2}{3} (2x-1) \sqrt{2x-1} + C.$

B. $\int f(x) dx = \frac{1}{3} (2x-1) \sqrt{2x-1} + C.$

C. $\int f(x) dx = -\frac{1}{3} (2x-1) \sqrt{2x-1} + C.$

D. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} (2x-1) \sqrt{2x-1} + C.$

Lời giải.

$$\int \sqrt{2x-1} dx = \frac{1}{2} \int (2x-1)^{\frac{1}{2}} d(2x-1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} (2x-1) \sqrt{2x-1} + c.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 268. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 2x$.

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C.$

B. $\int f(x) dx = -\frac{1}{2} \sin 2x + C.$

C. $\int f(x) dx = 2 \sin 2x + C.$

D. $\int f(x) dx = -2 \sin 2x + C.$

Lời giải.

Áp dụng công thức $\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$ với $a \neq 0$;
thay $a = 2$ và $b = 0$ để có kết quả.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 269. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 + \frac{2}{x^2}$.

A. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C.$

B. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + C.$

Lời giải.

Ta có $\int \left(x^2 + \frac{2}{x^2}\right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C.$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 270. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 1$ là

A. $x^3 + C.$

B. $\frac{x^3}{3} + x + C.$

C. $6x + C.$

D. $x^3 + x + C.$

Lời giải.

Ta có: $\int (3x^2 + 1) dx = x^3 + x + C$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 271. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$. Tìm $F(x)$.

A. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{3}{2}.$

B. $F(x) = 2e^x + x^2 - \frac{1}{2}.$

C. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{5}{2}.$

D. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}.$

Lời giải.

Ta có $\int f(x) dx = \int (e^x + 2x) dx = e^x + x^2 + C \Rightarrow F(0) = 1 + C = \frac{3}{2} \Rightarrow C = \frac{1}{2} \Rightarrow F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 272. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{x-1}$ và $F(2) = 1$. Tính $F(3)$.

A. $F(3) = \ln 2 - 1.$

B. $F(3) = \ln 2 + 1.$

C. $F(3) = \frac{1}{2}.$

D. $F(3) = \frac{7}{4}.$

Lời giải.

$F(x) = \int f(x)dx = \int \frac{1}{x-1}dx = \ln|x-1| + C. F(2) = 1 \Leftrightarrow \ln 1 + C = 1 \Leftrightarrow C = 1.$

Vậy $F(x) = \ln|x-1| + 1$. Suy ra $F(3) = \ln 2 + 1$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 273. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{2}{2x-1}$, $f(0) = 1$ và $f(1) = 2$

Giá trị của biểu thức $f(-1) + f(3)$ bằng

A. $4 + \ln 15.$

B. $2 + \ln 15.$

C. $3 + \ln 15.$

D. $\ln 15.$

Lời giải.

Ta có: $f(x) = \int f'(x) dx = 2 \int \frac{1}{2x-1} dx = \ln|2x-1| + C = \ln|2x-1| + C$

$f(0) = C = 1 \Leftrightarrow f(x) = \ln|2x-1| + 1 \Rightarrow f(-1) = \ln 3 + 1; f(3) = \ln 5 + 1 \Rightarrow f(-1) + f(3) = \ln 3 + \ln 5 + 2 = \ln 15 + 2$

Chọn đáp án **(C)** □

2. Phương pháp đổi biến số.

Câu 274. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{2}{9}$ và $f'(x) = 2x[f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

- A. $-\frac{35}{36}$. B. $-\frac{2}{3}$. C. $-\frac{19}{36}$. D. $-\frac{2}{15}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 2x[f(x)]^2 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = 2x \Leftrightarrow \left[\frac{1}{f(x)} \right]' = -2x \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} = -x^2 + C$.

Từ $f(2) = -\frac{2}{9}$ suy ra $C = -\frac{1}{2}$.

Do đó $f(1) = \frac{1}{-1^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{2}{3}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 275. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{5}$ và $f'(x) = x^3[f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

- A. $-\frac{4}{35}$. B. $-\frac{71}{20}$. C. $-\frac{79}{20}$. D. $-\frac{4}{5}$.

Lời giải.

Chọn đáp án **(D)** □

3. Phương pháp nguyên hàm từng phần.

Câu 276. Cho $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^{2x}$.

- A. $\int f'(x)e^{2x}dx = -x^2 + 2x + C$. B. $\int f'(x)e^{2x}dx = -x^2 + x + C$.
C. $\int f'(x)e^{2x}dx = 2x^2 - 2x + C$. D. $\int f'(x)e^{2x}dx = -2x^2 + 2x + C$.

Lời giải.

$F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của $f(x)e^{2x}$ nên $2x = f(x)e^{2x}$. Đặt $\begin{cases} u = e^{2x} \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2e^{2x}dx \\ v = f(x) \end{cases}$
 $\Rightarrow \int f'(x)e^{2x}dx = f(x)e^{2x} - 2 \int f(x)e^{2x}dx = 2x - 2x^2 + C$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 277. Cho hàm số $f'(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{25}$ và $f'(x) = 4x^3 \cdot [f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng?

- A. $-\frac{41}{100}$. B. $-\frac{1}{10}$. C. $-\frac{391}{400}$. D. $-\frac{1}{40}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 4x^3 \cdot [f(x)]^2 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = 4x^3$.

Lấy nguyên hàm hai vế ta có $\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^2}dx = \int 4x^3dx \Leftrightarrow \frac{f^{-1}(x)}{-1} = x^4 + C$.

Thay $x = 2$ vào hai vế ta có: $\frac{-1}{25} = 16 + C \Leftrightarrow C = 9$.

Vậy $-\frac{1}{f(x)} = x^4 + 9$, do đó $-\frac{1}{f(1)} = 1 + 9 = 10 \Leftrightarrow f(1) = -\frac{1}{10}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 278. Cho $F(x) = -\frac{1}{3x^3}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x) \ln x$.

A. $\int f'(x) \ln x \, dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{5x^5} + C.$

B. $\int f'(x) \ln x \, dx = \frac{\ln x}{x^3} - \frac{1}{5x^5} + C.$

C. $\int f'(x) \ln x \, dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C.$

D. $\int f'(x) \ln x \, dx = -\frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C.$

Lời giải.

Từ giả thiết, $\frac{f(x)}{x} = (F(x))' = \left(-\frac{1}{3x^3}\right)' = \frac{1}{x^4}$. Suy ra $f(x) = \frac{1}{x^3}$.

Để tính $\int f'(x) \ln x \, dx$, dùng tích phân từng phần với $u = \ln x$ và $dv = f'(x) \, dx$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 279. Cho $F(x) = \frac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x) \ln x$.

A. $\int f'(x) \ln x \, dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2}\right) + C.$

B. $\int f'(x) \ln x \, dx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} + C.$

C. $\int f'(x) \ln x \, dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) + C.$

D. $\int f'(x) \ln x \, dx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2} + C.$

Lời giải.

$\int f'(x) \ln x \, dx = \int \ln x \, df(x) = f(x) \ln x - \int \frac{f(x)}{x} \, dx = f(x) \ln x - \frac{1}{2x^2} + C$. Mặt khác, $\frac{f(x)}{x} = \left(\frac{1}{2x^2}\right)' \Rightarrow f(x) \ln x = -\frac{\ln x}{x^2}$. Vậy $\int f'(x) \ln x \, dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2}\right) + C$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 280. Cho $F(x) = (x-1)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^{2x}$.

A. $\int f'(x)e^{2x} \, dx = (4-2x)e^x + C.$

B. $\int f'(x)e^{2x} \, dx = \frac{2-x}{2}e^x + C.$

C. $\int f'(x)e^{2x} \, dx = (2-x)e^x + C.$

D. $\int f'(x)e^{2x} \, dx = (x-2)e^x + C.$

Lời giải.

Ta có $f(x)e^{2x} = F'(x) = xe^x$.

Suy ra $\int f'(x)e^{2x} \, dx = e^{2x} \cdot f(x) - 2 \int f(x)e^{2x} \, dx = xe^x - 2(x-1)e^x = (2-x)e^x + C$

Chọn đáp án **C** □

§2. Tích phân

1. Định nghĩa, tính chất và tích phân cơ bản.

Câu 281. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Tính $I = F(e) - F(1)$.

A. $I = e.$

B. $I = \frac{1}{e}.$

C. $I = \frac{1}{2}.$

D. $I = 1.$

Lời giải.

Ta có $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x} \, dx = \int_1^e \ln x \, d(\ln x) = \left(\frac{(\ln x)^2}{2}\right)\Big|_1^e = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 282. Cho $\int_{-1}^2 f(x) \, dx = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x) \, dx = -1$. Tính $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)] \, dx$.

A. $I = \frac{5}{2}.$

B. $I = \frac{7}{2}.$

C. $I = \frac{17}{2}.$

D. $I = \frac{11}{2}.$

Lời giải.

$$\int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)] dx = \int_{-1}^2 x dx + 2 \int_{-1}^2 f(x) dx - 3 \int_{-1}^2 g(x) dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^2 + 2.2 - 3.(-1) = \frac{17}{2}.$$

Chọn đáp án **C** □**Câu 283.** Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 5$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2 \sin x] dx$.

A. 7.

B. $5 + \frac{\pi}{2}$.

C. 3.

D. $5 + \pi$.**Lời giải.**

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2 \sin x] dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x dx = 5 - 2 \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 7$$

Chọn đáp án **A** □**Câu 284.** $\int_1^2 e^{3x-1} dx$ bằngA. $\frac{1}{3}(e^5 - e^2)$.B. $\frac{1}{3}e^5 - e^2$.C. $e^5 - e^2$.D. $\frac{1}{3}(e^5 + e^2)$.**Lời giải.**

$$\text{Ta có } \int_1^2 e^{3x-1} dx = \frac{1}{3} e^{3x-1} \Big|_1^2 = \frac{1}{3}(e^5 - e^2).$$

Chọn đáp án **A** □**Câu 285.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1; 2]$, $f(1) = 1$ và $f(2) = 2$. Tính $I = \int_1^2 f'(x) dx$ A. $I = 1$.B. $I = -1$.C. $I = 3$.D. $I = \frac{7}{2}$.**Lời giải.**

$$I = \int_1^2 f'(x) dx = f(x) \Big|_1^2 = f(2) - f(1) = 2 - 1 = 1.$$

Chọn đáp án **A** □**Câu 286.** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Tính $I = F(e) - F(1)$.A. $I = e$.B. $I = \frac{1}{e}$.C. $I = \frac{1}{2}$.D. $I = 1$.**Lời giải.**

$$\text{Ta có } I = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^e \ln x d(\ln x) = \frac{(\ln x)^2}{2} \Big|_1^e = \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án **C** □**Câu 287.** Cho $\int_{-1}^2 f(x) dx = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x) dx = -1$. Tính $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)] dx$.A. $I = \frac{5}{2}$.B. $I = \frac{7}{2}$.C. $I = \frac{17}{2}$.D. $I = \frac{11}{2}$.**Lời giải.**

$$\int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)] dx = \int_{-1}^2 x dx + 2 \int_{-1}^2 f(x) dx - 3 \int_{-1}^2 g(x) dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^2 + 2.2 - 3.(-1) = \frac{17}{2}.$$

Chọn đáp án **C** □**Câu 288.** Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 5$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2 \sin x] dx$.

A. 7.

B. $5 + \frac{\pi}{2}$.

C. 3.

D. $5 + \pi$.

Lời giải.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2 \sin x] dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x dx = 5 - 2 \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 7$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 289. $\int_1^2 \frac{dx}{2x+3}$ bằng

A. $2 \ln \frac{7}{5}$.

B. $\frac{1}{2} \ln 35$.

C. $\ln \frac{7}{5}$.

D. $\frac{1}{2} \ln \frac{7}{5}$.

Lời giải.Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 290. Tích phân $\int_0^2 \frac{dx}{x+3}$ bằng

A. $\frac{16}{225}$.

B. $\log \frac{5}{3}$.

C. $\ln \frac{5}{3}$.

D. $\frac{2}{15}$.

Lời giải.

Ta có: $\int_0^2 \frac{dx}{x+3} = \ln |x+3| \Big|_0^2 = \ln 5 - \ln 3 = \ln \frac{5}{3}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 291. Cho $\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = a \ln 2 + b \ln 3$ với a, b là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a + b = 2$.

B. $a - 2b = 0$.

C. $a + b = -2$.

D. $a + 2b = 0$.

Lời giải.

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = (\ln |x+1| - \ln |x+2|) \Big|_0^1 = 2 \ln 2 - \ln 3 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow a + 2b = 0.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 292. Tính tích phân $I = \int_0^{\pi} \cos^3 x \cdot \sin x dx$.

A. $I = -\frac{1}{4} \pi^4$.

B. $I = -\pi^4$.

C. $I = 0$.

D. $I = -\frac{1}{4}$.

Lời giải.Sử dụng máy tính. $I = 0$.Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 293. Biết $I = \int_3^4 \frac{dx}{x^2+x} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$, với a, b, c là các số nguyên. Tính $S = a + b + c$.

A. $S = 6$.

B. $S = 2$.

C. $S = -2$.

D. $S = 0$.

Lời giải.

$$I = \int_3^4 \frac{dx}{x^2+x}. \text{ Ta có: } \frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}. \text{ Khi đó: } I = \int_3^4 \frac{dx}{x^2+x}$$

$$I = \int_3^4 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = (\ln x - \ln(x+1)) \Big|_3^4 = (\ln 4 - \ln 5) - (\ln 3 - \ln 4) = 4 \ln 2 - \ln 3 - \ln 5.$$

Suy ra: $a = 4, b = -1, c = -1$. Vậy $S = 2$.Chọn đáp án **(B)**

□

2. Phương pháp đổi biến số.

Câu 294. Cho $\int_0^6 f(x)dx = 12$. Tính $I = \int_0^2 f(3x)dx$.

A. $I = 6$.B. $I = 36$.C. $I = 2$.D. $I = 4$.

Lời giải.

$$I = \int_0^2 f(3x)dx = \frac{1}{3} \int_0^6 f(u)du \quad (\text{với } u = 3x) \Rightarrow I = \frac{1}{3}12 = 4$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 295. Tính tích phân $I = \int_1^2 2x\sqrt{x^2-1}dx$ bằng cách đặt $u = x^2 - 1$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I = 2 \int_0^3 \sqrt{u}du$.B. $I = \int_1^2 \sqrt{u}du$.C. $I = \int_0^3 \sqrt{u}du$.D. $I = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{u}du$.

Lời giải.

Đặt $u = x^2 - 1, du = 2xdx$. Đổi cận

x=1	u=0
x=2	u=3

. Vậy $I = \int_0^3 \sqrt{u}du$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 296. Cho $\int_{16}^{55} \frac{dx}{x\sqrt{x+9}} = a \ln 2 + b \ln 5 + c \ln 11$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a - b = -c$.B. $a + b = c$.C. $a + b = 3c$.D. $a - b = -3c$.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{x+9} \Rightarrow t^2 = x+9 \Rightarrow 2t dt = dx$.

Đổi cận: $x = 16 \Rightarrow t = 5$; $x = 55 \Rightarrow t = 8$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int_{16}^{55} \frac{dx}{x\sqrt{x+9}} &= \int_5^8 \frac{2t dt}{(t^2-9)t} = 2 \int_5^8 \frac{dt}{t^2-9} = \frac{1}{3} \left(\int_5^8 \frac{dt}{t-3} - \int_5^8 \frac{dt}{t+3} \right) \\ &= \frac{1}{3} (\ln|x-3| - \ln|x+3|) \Big|_5^8 = \frac{2}{3} \ln 2 + \frac{1}{3} \ln 5 - \frac{1}{3} \ln 11 \end{aligned}$$

Vậy $a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}, c = -\frac{1}{3}$. Mệnh đề $a - b = -c$ đúng.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 297. Cho $\int_0^4 f(x) dx = 16$. Tính tích phân $I = \int_0^2 f(2x) dx$.

A. $I = 32$.B. $I = 8$.C. $I = 16$.D. $I = 4$.

Lời giải.

$I = \int_0^2 f(2x)dx$. Đặt $t = 2x \Rightarrow dt = 2dx$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 2 \Rightarrow t = 4$.

Khi đó: $I = \frac{1}{2} \int_0^4 f(t)dt = \frac{1}{2} \int_0^4 f(x)dx = 8$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 298. Cho $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1} = a + b \ln \frac{1+e}{2}$, với a, b là các số hữu tỉ. Tính $S = a^3 + b^3$.

A. $S = 2$.B. $S = -2$.C. $S = 0$.D. $S = 1$.

Lời giải.

$\int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} dx = \int_0^1 \frac{e^x}{(e^x + 1)e^x} dx$. Đặt $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$,

$I = \int_1^e \frac{1}{t(t+1)} dt = \int_1^e \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \ln \left| \frac{t}{t+1} \right| \Big|_1^e = 1 - \ln \frac{e+1}{2}$. Khi đó $a = 1, b = -1$ suy ra

$S = 0$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 299. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) + f(-x) = \sqrt{2 + 2 \cos 2x}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Tính $I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx$.

A. $I = -6$.

B. $I = 0$.

C. $I = -2$.

D. $I = 6$.

Lời giải.

Đặt $t = -x \Rightarrow dt = -dx$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= - \int_{\frac{3\pi}{2}}^{-\frac{3\pi}{2}} f(-x) dx = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(-x) dx \\ \Rightarrow 2I &= \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{2 + 2 \cos 2x} dx + \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\cos x| dx \\ \Rightarrow I &= \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\cos x| dx = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} (-\cos x) dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-\cos x) dx = 6. \end{aligned}$$

Do đó $I = 6$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 300. Biết $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x} + x\sqrt{x+1}} = \sqrt{a} - \sqrt{b} - c$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $P = a + b + c$

A. $P = 24$.

B. $P = 12$.

C. $P = 18$.

D. $P = 46$.

Lời giải.

Tính $I = \int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x} + x\sqrt{x+1}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})}$. Đặt $t = \sqrt{x} + \sqrt{x+1} \Rightarrow dt = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \right) dx = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}\sqrt{x+1}} dx = \frac{tdx}{2\sqrt{x}\sqrt{x+1}} \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}} = \frac{2dt}{t}$ Suy ra $I = \int_{1+\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \frac{2dt}{t^2} = -\frac{2}{t} \Big|_{1+\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = -2 \left(\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \right) = \sqrt{32} - \sqrt{12} - 2$ Do đó $a = 32; b = 12; c = 2 \Rightarrow a + b + c = 46$.

Chọn đáp án **D**

□

3. Phương pháp tích phân từng phần.

Câu 301. Cho $\int_1^e (1 + x \ln x) dx = ae^2 + be + c$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a + b = c$.

B. $a + b = -c$.

C. $a - b = c$.

D. $a - b = -c$.

Lời giải.

$$\int_1^e (1 + x \ln x) dx = \left(x + \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} \right) \Big|_1^e = e + \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} - 1 + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} + e - \frac{3}{4}.$$

Vậy $a = \frac{1}{4}, b = 1, c = -\frac{3}{4} \Rightarrow a - b = c$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 302. Cho $\int_1^e (2 + x \ln x) dx = a.e^2 + b.e + c$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a + b = -c$. B. $a + b = c$. C. $a - b = c$. D. $a - b = -c$.

Lời giải.

Chọn đáp án **C** □

Câu 303. Tính tích phân $I = \int_1^e x \ln x dx$

- A. $I = \frac{1}{2}$. B. $I = \frac{e^2 - 2}{2}$. C. $I = \frac{e^2 + 1}{4}$. D. $I = \frac{e^2 - 1}{4}$.

Lời giải.

Dùng máy tính kiểm tra từng đáp án hoặc.

$$u = \ln x, dv = x dx \Rightarrow du = \frac{dx}{x}, v = \frac{x^2}{2}.$$

$$I = \frac{x^2 \ln x}{2} \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 304. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 (x+1)f'(x)dx = 10$ và $2f(1) - f(0) = 2$. Tính $I = \int_0^1 f(x)dx$.

- A. $I = -12$. B. $I = 8$. C. $I = 12$. D. $I = -8$.

Lời giải.

$$\int_0^1 (x+1)f(x)dx = 10. \text{ Đặt } u = x+1, du = dx, dv = f'(x)dx, v = f(x).$$

$$I = [(x+1)f(x)] \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)dx = 10 \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = 2f(1) - f(0) - 10 = 2 - 10 = -8.$$

Chọn đáp án **D** □

4. Tích phân của hàm ẩn. Tích phân đặc biệt.

Câu 305. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn $f(1) = 0$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7$ và $\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

- A. $\frac{7}{5}$. B. 1. C. $\frac{7}{4}$. D. 4.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \frac{1}{3} = \int_0^1 x^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{1}{3} x^3 f(x) \Big|_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 x^3 f'(x) dx.$$

$$\text{Vậy nên theo Cauchy-Schwarz ta có } 7 = 7 \left(\int_0^1 x^3 f'(x) dx \right)^2 \leq 7 \int_0^1 (x^3)^2 dx \cdot \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \int_0^1 [f'(x)]^2 dx.$$

Dấu bằng xảy đến khi và chỉ khi $f'(x) = kx^3$, kết hợp $f(1) = 0$ để có $f(x) = \frac{7}{4}(1 - x^4) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Từ đó mà có được $I = \frac{7}{5}$.

Chọn đáp án **A** □

§3. Ứng dụng của tích phân

1. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đồ thị.

Câu 306. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2 + \cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = \frac{\pi}{2}$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

- A. $V = \pi - 1$. B. $V = (\pi - 1)\pi$. C. $V = (\pi + 1)\pi$. D. $V = \pi + 1$.

Lời giải.

Chọn đáp án **C** □

Câu 307. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x, y = 0, x = 0, x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $S = \pi \int_0^2 e^{2x} dx$. B. $S = \int_0^2 e^x dx$. C. $S = \pi \int_0^2 e^x dx$. D. $S = \int_0^2 e^{2x} dx$.

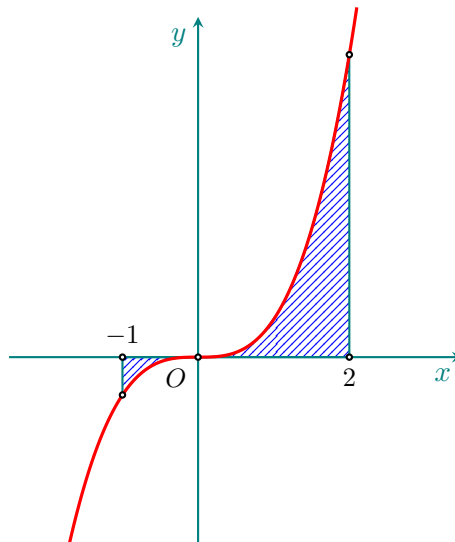
Lời giải.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x, y = 0, x = 0, x = 2$ được tính theo công thức

$$S = \int_0^2 |e^x| dx = \int_0^2 e^x dx.$$

Chọn đáp án **B** □

Câu 308. Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = f(x)$ trục hoành và hai đường thẳng $x = -1, x = -2$ (như hình vẽ bên). Đặt $a = \int_{-1}^0 f(x) dx, b = \int_0^2 f(x) dx$, mệnh đề nào dưới đây đúng?



- A. $S = b - a$. B. $S = b + a$. C. $S = -b + a$. D. $S = -b - a$.

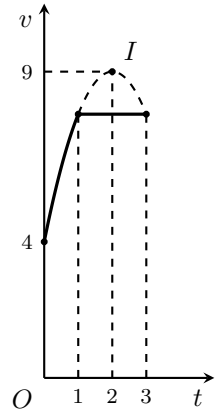
Lời giải.

Ta có $S = \int_{-1}^0 |f(x)| dx + \int_0^2 |f(x)| dx = -a + b = b - a$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 309.

Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(\text{km/h})$ phụ thuộc thời gian $t(\text{h})$ có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2; 9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



A. $s = 23,25(\text{km})$.

B. $s = 21,58(\text{km})$.

C. $s = 15,50(\text{km})$.

D. $s = 13,83(\text{km})$.

Lời giải.

Trong $[0; 1]$, $v(t)$ là một phần của parabol đỉnh $(2; 9)$ và đi qua $(0; 4)$ nên có phương trình $v(t) = -\frac{5}{4}t^2 + 5t + 4$. Tại $t = 1$ được $v(1) = \frac{31}{4}$.

Trong $[1; 3]$, $v(t)$ là một phần của đường thẳng song song trục hoành nên có phương trình $v(t) = \frac{31}{4}$.

Do $v = s'(t)$ nên $s = \int_0^1 \left(-\frac{5}{4}t^2 + 5t + 4\right) dt + \int_1^3 \left(\frac{31}{4}\right) dt = \frac{25912}{1000} \approx 21,58$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 310. Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 1$ và $g(x) = dx^2 + ex + \frac{1}{2}$

$(a, b, c, d, e \in \mathbb{R})$. Biết đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-3, -1, 2$ (tham khảo hình vẽ)

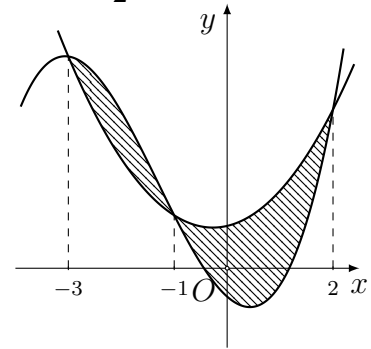
. Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

A. $\frac{253}{48}$..

B. $\frac{125}{125}$..

C. $\frac{12}{48}$..

D. $\frac{12}{48}$..



Lời giải.

Do đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-3, -1, 2$ nên

$$f(x) - g(x) = a(x+3)(x+1)(x-2) \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) - g(x) = a(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Hay } ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - \frac{3}{2} = a(x^3 + 2x^2 - 5x - 6), \forall x \in \mathbb{R}. \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$\text{Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị trên là: } S = \int_{-3}^2 \left| \frac{1}{4}(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) \right| dx \\ = \int_{-3}^{-1} \frac{1}{4}(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) dx + \int_{-1}^2 -\frac{1}{4}(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) dx = \frac{253}{48}.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 311. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - x$ và đồ thị hàm số $y = x - x^2$.

A. $\frac{37}{12}$.

B. $\frac{9}{4}$.

C. $\frac{81}{12}$.

D. 13.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3 - x = x - x^2 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Diện tích cần tính:

$$S = \int_{-2}^1 |x^3 - x - x + x^2| dx = \int_{-2}^0 (x^3 + x^2 - 2x) dx + \int_0^1 (-x^3 - x^2 + 2x) dx = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12}.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 312. Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường

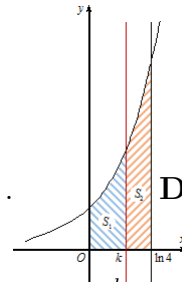
$y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 4$. Đường thẳng $x = k$ ($0 < k < \ln 4$) chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1 = 2S_2$.

A. $k = \frac{2}{3} \ln 4$.

B. $k = \ln 2$.

C. $k = \ln \frac{8}{3}$.

D. $k = \ln 3$.



Lời giải.

Ta có $S_1 = \int_0^k e^x dx = e^x \Big|_0^k = e^k - 1$ và $S_2 = \int_k^{\ln 4} e^x dx = e^x \Big|_k^{\ln 4} = 4 - e^k$.

Ta có $S_1 = 2S_2 \Leftrightarrow e^k - 1 = 2(4 - e^k) \Leftrightarrow k = \ln 3$.

Chọn đáp án **D**

□

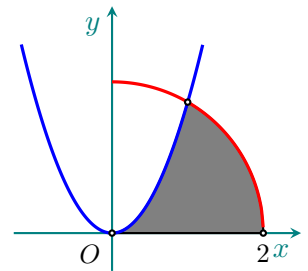
Câu 313. Cho hình (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = \sqrt{3}x^2$, cung tròn có phương trình $y = \sqrt{4 - x^2}$ (với $0 \leq x \leq 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng

A. $\frac{4\pi + \sqrt{3}}{12}$.

B. $\frac{4\pi - \sqrt{3}}{12}$.

C. $\frac{4\pi + 2\sqrt{3} - 3}{6}$.

D. $\frac{5\sqrt{3} - 2\pi}{3}$.



Lời giải.

Ta có: $\sqrt{3}x^2 = \sqrt{4 - x^2} \Leftrightarrow 3x^4 + x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 (TM) \\ x = -1 (L) \end{cases}$

Do đó: $S = \int_0^1 \sqrt{3}x^2 dx + \int_1^2 \sqrt{4 - x^2} dx = \frac{\sqrt{3}}{3} x^3 \Big|_0^1 + \int_1^2 \sqrt{4 - x^2} dx = \frac{\sqrt{3}}{3} + \int_1^2 \sqrt{4 - x^2} dx$

Tính $I = \int_1^2 \sqrt{4 - x^2} dx$. Đặt $x = 2 \sin t \Rightarrow dx = 2 \cos t dt$. Đổi cận $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow \sin t = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6} \\ x = 2 \Rightarrow \sin t = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$$I = \int_1^2 \sqrt{4 - x^2} dx = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sqrt{4 - 4\sin^2 t} \cdot 2 \cos t dt = \int_{\pi/6}^{\pi/2} 4 \cos^2 t dt = \int_{\pi/6}^{\pi/2} 2(\cos 2t + 1) dt = \sin 2t \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} + 2t \Big|_{\pi/6}^{\pi/2}$$

Suy ra $S = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\pi - \sqrt{3}}{6}$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 314.

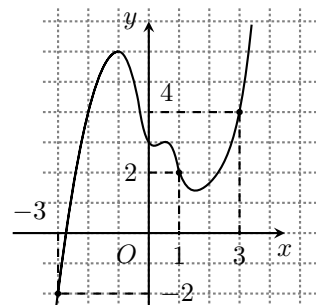
Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = 2f(x) - (x + 1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $g(-3) > g(3) > g(1)$.

B. $g(1) > g(-3) > g(3)$.

C. $g(3) > g(-3) > g(1)$.

D. $g(1) > g(3) > g(-3)$.



Lời giải.

Ta có $g'(x) = 2(f'(x) - (x + 1))$.

Từ $g(3) - g(1) = \int_1^3 g'(x)dx = 2 \int_1^3 (f'(x) - (x + 1))dx < 0$ suy ra $g(3) < g(1)$.

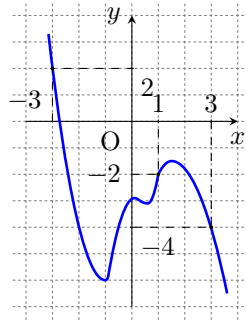
Tương tự $g(3) - g(-3) = \int_{-3}^3 g'(x)dx = 2 \int_{-3}^3 (f'(x) - (x + 1))dx > 0$ suy ra $g(-3) < g(3)$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 315. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên.

Đặt $g(x) = 2f(x) + (x + 1)^2$.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $g(1) < g(3) < g(-3)$.

B. $g(1) < g(-3) < g(3)$.

C. $g(3) = g(-3) < g(1)$.

D. $g(3) = g(-3) > g(1)$.

Lời giải.

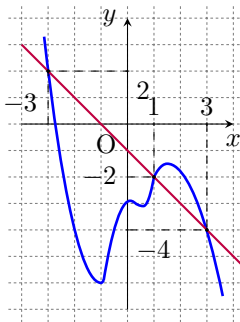
$$g'(x) = 2f'(x)' + 2(x + 1).$$

Từ đồ thị ta có $g'(x) = 0$ có 3 nghiệm là $-3; 1; 3$

và có $g(1) < g(3), g(-3)$.

Mặt khác cũng từ đồ thị ta có $\int_{-3}^1 (-g'(x))dx > \int_1^3 (-g'(x))dx$.

Suy ra $g(3) < g(-3)$.



Vậy ta có $g(1) < g(3) < g(-3)$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 316. Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - \frac{1}{2}$ và $g(x) = dx^2 + ex + 1$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$).

Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-3; -1; 1$ (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

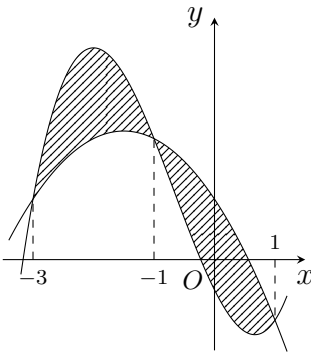
A. $\frac{9}{2}$.

B. 8.

C. 4.

D. 5.

Lời giải.



Do $(C): y = f(x)$ và $(C'): y = g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $-3; -1$ và 1 nên

$$f(x) - g(x) = A(x + 3)(x + 1)(x - 1)$$

Từ giả thiết ta có $f(0) - g(0) = -\frac{3}{2}$ nên $-3A = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow f(x) - g(x) = \frac{1}{2}(x + 3)(x + 1)(x - 1) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

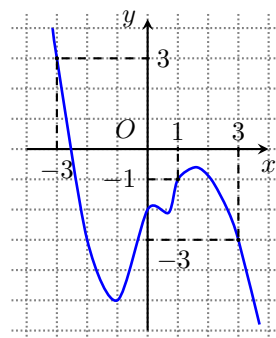
Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$\begin{aligned} S &= \int_{-3}^{-1} [f(x) - g(x)] dx + \int_{-1}^1 [g(x) - f(x)] dx \\ &= \int_{-3}^{-1} \left[\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \right] dx - \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \right] dx = 2 - (-2) = 4. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 317. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên.



Đặt $g(x) = 2f(x) + x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $g(3) < g(-3) < g(1)$.

B. $g(1) < g(3) < g(-3)$.

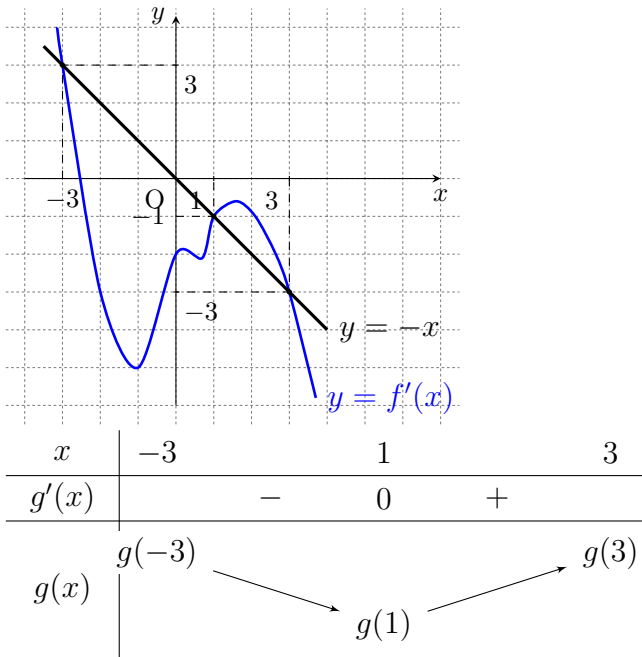
C. $g(1) < g(-3) < g(3)$.

D. $g(-3) < g(3) < g(1)$.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = 2f'(x) + 2x = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -x$. Từ hình bên suy ra $g'(x) = 0$ tại $x = -3$, $x = 1$ hoặc $x = 3$.

Hơn nữa, trong khoảng $(-3; 1)$ đồ thị $y = f'(x)$ nằm dưới đồ thị $y = -x$ nên $g'(x)$ âm trong khoảng $(-3; 1)$. Xét tương tự trong khoảng $(1; 3)$, ta được bảng biến thiên của $g(x)$ như sau.



Cần so sánh $g(-3)$ với $g(3)$. Ta có: $g(3) - g(-3) = \int_{-3}^3 g'(x) dx = 2 \int_{-3}^3 [f'(x) + x] dx =$
 $= -2 \int_{-3}^1 [(-x) - f'(x)] dx + 2 \int_1^3 [f'(x) - (-x)] dx = 2(-S_1 + S_2) < 0 \Rightarrow g(3) < g(-3),$
 trong đó S_1, S_2 là diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f'(x)$ và $y = -x$, tương ứng khi $-3 < x < 1$ và $1 < x < 3$.

Chọn đáp án (B)

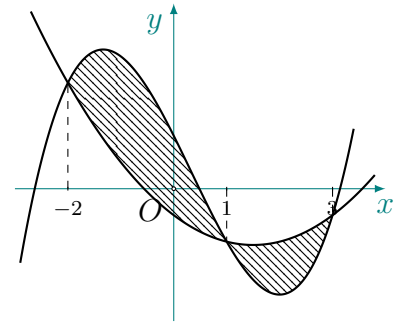
□

Câu 318. Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + \frac{3}{4}$ và $g(x) = dx^2 + ex - \frac{3}{4}$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$).

Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-2; 1; 3$ (tham khảo hình vẽ).

Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

- A. $\frac{253}{48}$. B. $\frac{125}{24}$.
 C. $\frac{125}{48}$. D. $\frac{24}{253}$.



Lời giải.

Chọn đáp án (A)

□

2. Bài toán thực tế sử dụng diện tích hình phẳng.

Câu 319. Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{120}t^2 + \frac{58}{45}t$ (m/s), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có giá tốc bằng a (m/s²) (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A . Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

- A. 25 (m/s). B. 36 (m/s). C. 30 (m/s). D. 21 (m/s).

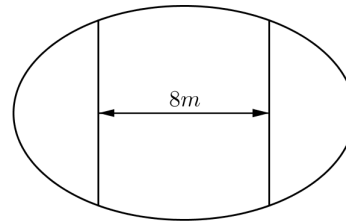
Lời giải.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 320. Ông An có một mảnh vườn hình Elip có độ dài trục lớn

bằng $16m$ và độ dài trục bé bằng $10m$. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng $8m$ và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng (như hình vẽ). Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng/ m^2 . Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn.)



- A. 7.862.000 đồng. B. 7.653.000 đồng. C. 7.128.000 đồng. D. 7.826.000 đồng.

Lời giải.

Giả sử elip có phương trình $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Từ giả thiết ta có $2a = 16 \Rightarrow a = 8$ và $2b = 10 \Rightarrow b = 5$

Vậy phương trình của elip là $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{25} = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{5}{8}\sqrt{64 - x^2} & (E_1) \\ y = \frac{5}{8}\sqrt{64 - x^2} & (E_2) \end{cases}$

Khi đó diện tích dải vườn được giới hạn bởi các đường (E_1) ; (E_2) ; $x = -4$; $x = 4$ và diện tích của dải vườn là $S = 2 \int_{-4}^4 \frac{5}{8}\sqrt{64 - x^2} dx = \frac{5}{2} \int_0^4 \sqrt{64 - x^2} dx$

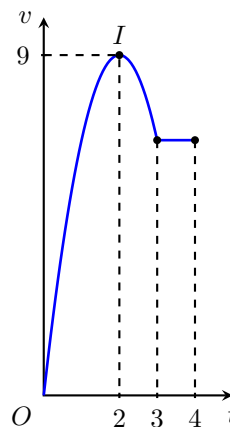
Tính tích phân này bằng phép đổi biến $x = 8 \sin t$, ta được $S = 80 \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$

Khi đó số tiền là $T = 80 \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \cdot 100000 = 7652891,82 \simeq 7.653.000$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 321. Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 3 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2; 9)$ với trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường



s mà vật di chuyển được trong 4 giờ đó.

- A. $s = 26,5$ km. B. $s = 28,5$ km. C. $s = 27$ km. D. $s = 24$ km.

Lời giải.

Theo giả thiết, đỉnh của parabol là $I(2; 9)$ nên phương trình của nó có dạng $y = 9 - a(x - 2)^2$. Và do parabol đi qua gốc tọa độ nên $a = \frac{9}{4}$. Phần đoạn thẳng trong đồ thị có phương trình

$$y = \frac{27}{4} \quad (3 \leq x \leq 4). \text{ Quãng đường mà vật di chuyển được trong 4 giờ là } s = \int_0^3 \left(-\frac{9}{4}x^2 + 9x \right) dx + \int_3^4 \frac{27}{4} dx = 27.$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 322. Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{180}t^2 + \frac{11}{18}t$ m/s, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 5 giây so với A và có gia tốc bằng a m/s² (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 10 giây thì đuổi kịp A . Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

- A. 22 m/s. B. 15 m/s. C. 10 m/s. D. 7 m/s.

Lời giải.

+ Từ đề bài, ta suy ra: tính từ lúc chất điểm A bắt đầu chuyển động cho đến khi bị chất điểm B bắt kịp thì A đi được 15 giây, B đi được 10 giây.

+ Biểu thức vận tốc của chất điểm B có dạng

$$v_B(t) = \int a dt = at + C, \text{ lại có } v_B(0) = 0 \text{ nên } v_B(t) = at.$$

+ Từ lúc chất điểm A bắt đầu chuyển động cho đến khi bị chất điểm B bắt kịp thì quãng đường hai chất điểm đi được là bằng nhau. Do đó

$$\int_0^{15} \left(\frac{1}{180}t^2 + \frac{11}{18}t \right) dt = \int_0^{10} at dt \Leftrightarrow 75 = 50a \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}.$$

Từ đó, vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng $v_B(10) = \frac{3}{2} \cdot 10 = 15$ m/s.

Chọn đáp án **B** □

3. Thể tích giới hạn bởi các đồ thị (tròn xoay).

Câu 323. Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a, x = b$ ($a < b$), xung quanh trục Ox .

- A. $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$ B. $V = \int_a^b f^2(x) dx.$ C. $V = \pi \int_a^b f(x) dx.$ D. $V = \pi \int_a^b |f(x)| dx.$

Lời giải.

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 324. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ ($a < b$) Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức

- A. $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$ B. $V = 2\pi \int_a^b f^2(x) dx.$
C. $V = \pi^2 \int_a^b f^2(x) dx.$ D. $V = \pi^2 \int_a^b f(x) dx.$

Lời giải.

Công thức tính thể tích khối tròn xoay tạo thành là: $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 325. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^3 + 3, y = 0, x = 0, x = 2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx..$

B. $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3) dx..$

C. $V = \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx..$

D. $V = \int_0^2 (x^2 + 3) dx..$

Lời giải.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 326. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2 + \sin x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = \pi$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = 2(\pi + 1).$

B. $V = 2\pi(\pi + 1).$

C. $V = 2\pi^2.$

D. $V = 2\pi.$

Lời giải.

Ta có $-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 2 + \sin x \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq \sqrt{3}$

Do vậy đường cong $y = \sqrt{2 + \sin x}$ không cắt trục hoành.

Vậy, ta có $V = \pi \int_0^\pi (2 + \sin x) dx = (2x - \cos x) \Big|_0^\pi = 2\pi(\pi + 1).$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 327. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{x^2 + 1}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = \frac{4\pi}{3}.$

B. $V = 2\pi.$

C. $V = \frac{4}{3}.$

D. $V = 2.$

Lời giải.

Ta có $V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x^2 + 1})^2 dx = \frac{4\pi}{3}.$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 328. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường thẳng $y = x^2 + 2, y = 0, x = 1, x = 2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V = \pi \int_1^2 (x^2 + 2)^2 dx.$

B. $V = \int_1^2 (x^2 + 2)^2 dx.$

C. $V = \pi \int_1^2 (x^2 + 2) dx.$

D. $V = \int_1^2 (x^2 + 2) dx.$

Lời giải.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 329. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = e^x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = \frac{\pi e^2}{2}$.

B. $V = \frac{\pi(e^2 + 1)}{2}$.

C. $V = \frac{e^2 - 1}{2}$.

D. $V = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2}$.

Lời giải.

$$V = \pi \int_0^1 (e^x)^2 dx = \frac{\pi}{2} e^{2x} \Big|_0^1 = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2}$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 330. Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2(x - 1)e^x$, trục tung và trục hoành. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox .

A. $V = 4 - 2e$.

B. $V = (4 - 2e)\pi$.

C. $V = e^2 - 5$.

D. $V = (e^2 - 5)\pi$.

Lời giải.

Xét giao điểm $2(x - 1)e^x = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Thể tích cần tính:

$$V = \pi \int_0^1 [2(x - 1)e^x]^2 dx = 4\pi \int_0^1 (x - 1)^2 e^{2x} dx = \pi(e^2 - 5) \text{ (dùng máy tính thử)}.$$

Chọn đáp án **(D)** □

4. Thể tích tính theo mặt cắt $S(x)$.

Câu 331. Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 1$ và $x = 3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $1 \leq x \leq 3$ thì được thiết diện là một hình chữ nhật có độ dài hai cạnh là $3x$ và $\sqrt{3x^2 - 2}$.

A. $V = 32 + 2\sqrt{15}$.

B. $V = \frac{124\pi}{3}$.

C. $V = \frac{124}{3}$.

D. $V = (32 + 2\sqrt{15})\pi$.

Lời giải.

Diện tích thiết diện hình chữ nhật là: $S(x) = 3x\sqrt{3x^2 - 2}$.

Thể tích V cần tìm là: $V = \int_1^3 S(x) dx = \int_1^3 3x\sqrt{3x^2 - 2} dx$.

Đặt $t = \sqrt{3x^2 - 2} \Leftrightarrow t^2 = 3x^2 - 2 \Rightarrow t dt = 3x dx, x = 1 \Rightarrow t = 1; x = 3 \Rightarrow t = 5$. Khi đó

$$V = \int_1^5 t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 \Big|_1^5 = \frac{124}{3}.$$

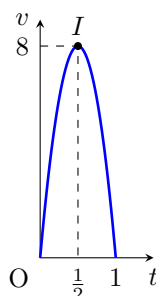
Chọn đáp án **(C)** □

5. Bài toán thực tế và ứng dụng thể tích.

Câu 332. Một người chạy trong thời gian 1 giờ, vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol

với đỉnh $I\left(\frac{1}{2}; 8\right)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên.

Tính quãng s đường người đó chạy được trong khoảng thời gian 45 phút, kể từ khi bắt đầu chạy.



- A. $s = 4,0$ km. B. $s = 2,3$ km. C. $s = 4,5$ km. D. $s = 5,3$ km.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có hàm vận tốc là $v(t) = -32t^2 + 32t$. Vậy $s = \int_0^{\frac{3}{4}} (-32t^2 + 32t) dt = 4,5$ km.

Chọn đáp án **C**

□

6. Ứng dụng tích phân vào bài toán liên môn (lý, hóa, sinh, kinh tế).

Câu 333. Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{100}t^2 + \frac{13}{30}t$ (m/s), trong đó t (giây) là khoảng thời gian từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 10 giây so với A và có gia tốc a (m/s^2) (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A . Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

- A. 15 (m/s).. B. 9 (m/s).. C. 42 (m/s).. D. 25 (m/s)..

Lời giải.

Quãng đường chất điểm A đi được từ lúc bắt đầu tới lúc gặp nhau:

$$s_1 = \int_0^{25} \left(\frac{1}{100}t^2 + \frac{13}{30}t \right) dt = \frac{375}{2}.$$

Vận tốc chất điểm B : $v(t) = at + C$. B xuất phát từ trạng thái nghỉ nên $v(0) = 0 \Rightarrow C = 0$

Quãng đường B đi từ lúc xuất phát đến khi gặp nhau: $s_2 = \int_0^{15} at dt$

$$\text{Suy ra: } \frac{225a}{2} = \frac{375}{2} \Leftrightarrow a = \frac{5}{3}.$$

Vậy vận tốc B lúc gặp nhau là $v = \frac{5}{3} \cdot 15 = 25$ (m/s).

Chọn đáp án **D**

□

Câu 334. Một ô tô đang chạy với vận tốc $10m/s$ thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét ?

- A. $0,2m$. B. $2m$. C. $10m$. D. $20m$.

Lời giải.

Ô tô còn đi thêm được 2 giây.

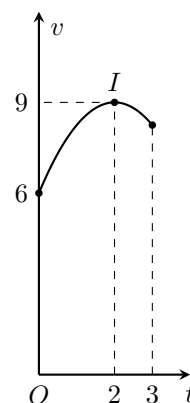
$$\text{Quãng đường cần tìm là } s = \int_0^2 v(t) dt = \int_0^2 (-5t + 10) dt = \left(-\frac{5t^2}{2} + 10t \right) \Big|_0^2 = 10(m).$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 335.

Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(\text{km/h})$ phụ thuộc thời gian $t(\text{h})$ có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2; 9)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó.



A. $s = 24, 25(\text{km})$.

B. $s = 26, 75(\text{km})$.

C. $s = 24, 75(\text{km})$.

D. $s = 25, 25(\text{km})$.

Lời giải.

Ta có $v(t) = -\frac{3}{4}t^2 + 3t + 6$. Quãng đường đi được $s = \int_0^3 v(t)dt = 24, 75$.

Chọn đáp án **C**

□

Chương 4. Số phức

§1. Khái niệm số phức

1. Xác định các yếu tố cơ bản của số phức.

Câu 336 (QG17,101). Số phức nào dưới đây là số thuần ảo?

A. $z = -2 + 3i$.

B. $z = 3i$.

C. $z = -2$.

D. $z = \sqrt{3} + i$.

Lời giải.

Số phức thuần ảo là số phức có phần thực bằng 0 nên chọn $z = 3i$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 337 (QG17,101). Cho hai số phức $z_1 = 5 - 7i$ và $z_2 = 2 + 3i$. Tìm số phức $z = z_1 + z_2$.

A. $z = 7 - 4i$.

B. $z = 2 + 5i$.

C. $z = -2 + 5i$.

D. $z = 3 - 10i$.

Lời giải.

$$z = z_1 + z_2 = 5 - 7i + 2 + 3i = 7 - 4i.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 338 (QG17,102). Cho số phức $z = 1 - i + i^3$. Tìm phần thực a và phần ảo b của z .

A. $a = 0, b = 1$.

B. $a = -2, b = 1$.

C. $a = 1, b = 0$.

D. $a = 1, b = -2$.

Lời giải.

Ta có $z = 1 - i + i^3 = 1 - 2i$. Vậy phần thực của z là 1, phần ảo của z là -2 .

Chọn đáp án **D**

□

Câu 339. Cho số phức $z = 2 + i$. Tính $|z|$.

A. $|z| = 3$.

B. $|z| = 5$.

C. $|z| = 2$.

D. $|z| = \sqrt{5}$.

Lời giải.

$$|z| = \sqrt{2^2 + 1} = \sqrt{5}.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 340. Số phức $-3 + 7i$ có phần ảo bằng

A. 3.

B. -7 .

C. -3 .

D. 7.

Lời giải.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 341. Số phức $5 + 6i$ có phần thực bằng

- A. $-5..$ B. $5..$ C. $-6..$ D. $6..$

Lời giải.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 342. Số phức có phần thực bằng 1 và phần ảo bằng 3 là

- A. $-1 - 3i.$ B. $1 - 3i.$ C. $-1 + 3i.$ D. $1 + 3i.$

Lời giải.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 343. Cho số phức $z = 3 - 2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $\bar{z}$

- A. Phần thực bằng -3 và Phần ảo bằng $-2i.$ B. Phần thực bằng -3 và Phần ảo bằng $-2.$
C. Phần thực bằng 3 và Phần ảo bằng $2i.$ D. Phần thực bằng 3 và Phần ảo bằng $2.$

Lời giải.

Số phức liên hợp của z là $3 + 2i$, phần thực 3, phần ảo 2.

Chọn đáp án **(D)**

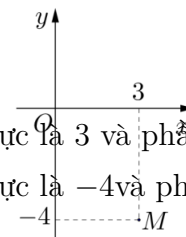
□

Câu 344. Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn

của số phức z . Tìm phần thực và phần ảo của số

phức z .

- A. Phần thực là -4 và phần ảo là 3. B. Phần thực là 3 và phần ảo là $-4i.$
C. Phần thực là 3 và phần ảo là $-4.$ D. Phần thực là -4 và phần ảo là $3i.$



Lời giải.

Điểm M trong hệ trục Oxy có hoành độ $x = 3$ và tung độ $y = -4$.

Vậy số phức z có phần thực là 3 và phần ảo là -4 .

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 345. Kí hiệu a, b lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức $3 - 2\sqrt{2}i$. Tìm a, b .

- A. $a = 3; b = 2.$ B. $a = 3; b = 2\sqrt{2}.$ C. $a = 3; b = \sqrt{2}.$ D. $a = 3; b = -2\sqrt{2}.$

Lời giải.

$z = 3 - 2\sqrt{2}i$ có phần thực là 3 và phần ảo là $-2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 346. Cho số phức $z = 1 - 2i$. Điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $w = iz$ trên mặt phẳng tọa độ?

- A. $Q(1; 2).$ B. $N(2; 1).$ C. $M(1; -2).$ D. $P(-2; 1).$

Lời giải.

$w = iz = i(1 - 2i) = 2 + i$ nên điểm biểu diễn w là $N(2; 1)$

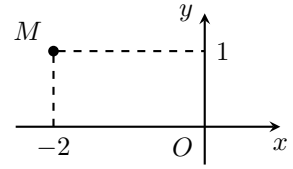
Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 347.

Số phức nào dưới đây có điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là điểm M như hình bên?

- A. $z_4 = 2 + i$. B. $z_2 = 1 + 2i$. C. $z_3 = -2 + i$. D. $z_1 = 1 - 2i$.



Lời giải.

Điểm M có tọa độ là $(-2, 1)$ do đó M biểu diễn số phức $z_3 = -2 + i$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 348. Tìm số phức z thỏa mãn $z + 2 - 3i = 3 - 2i$.

- A. $z = 1 - 5i$. B. $z = 1 + i$. C. $z = 5 - 5i$. D. $z = 1 - i$.

Lời giải.

Ta có $z + 2 - 3i = 3 - 2i \Leftrightarrow z = 1 + i$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 349. Cho số phức $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = -3 + i$. Tìm điểm biểu diễn số phức $z = z_1 + z_2$ trên mặt phẳng tọa độ.

- A. $N(4; -3)$. B. $M(2; -5)$. C. $P(-2; -1)$. D. $Q(-1; 7)$.

Lời giải.

Ta có $z = z_1 + z_2 = -2 - i$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 350. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 4 = 0$. Gọi M, N lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Tính $T = OM + ON$ với O là gốc tọa độ.

- A. $T = 2\sqrt{2}$. B. $T = 2$. C. $T = 8$. D. $T = 4$.

Lời giải.

Giả sử $z_1 = 2i$ và $z_2 = -2i$, ta có $M(0; 2)$ và $N(0; -2)$. Do đó, $T = OM + ON = 4$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 351. Cho hai số phức $z_1 = 1 - 3i$ và $z_2 = -2 - 5i$. Tìm phần ảo b của số phức $z = z_1 - z_2$.

- A. $b = -2$. B. $b = 2$. C. $b = 3$. D. $b = -3$.

Lời giải.

$z = z_1 - z_2 = 1 - 3i - (-2 - 5i) = 3 + 2i \Rightarrow b = 2$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 352. Cho số phức $z = 2 - 3i$. Tìm phần thực a của z .

- A. $a = 2$. B. $a = 3$. C. $a = -3$. D. $a = -2$.

Câu 353. Tìm tất cả các giá trị thực x, y sao cho $x^2 - 1 + yi = -1 + 2i$.

- A. $x = -\sqrt{2}, y = 2$. B. $x = \sqrt{2}, y = 2$. C. $x = 0, y = 2$. D. $x = \sqrt{2}, y = -2$.

Lời giải.

$$\text{Có } x^2 - 1 + yi = -1 + 2i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = -1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 354. Tìm số phức liên hợp của số phức $z = i(3i + 1)$.

- A. $\bar{z} = 3 - i$. B. $\bar{z} = -3 + i$. C. $\bar{z} = 3 + i$. D. $\bar{z} = -3 - i$.

Lời giải.

Ta có $z = i(3i + 1) = 3i^2 + i = -3 + i$, suy ra $\bar{z} = -3 - i$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 355. Tính mô-đun của số phức z biết $\bar{z} = (4 - 3i)(1 + i)$.

- A. $|z| = 25\sqrt{2}$. B. $|z| = 7\sqrt{2}$. C. $|z| = 5\sqrt{2}$. D. $|z| = \sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $\bar{z} = (4 - 3i)(1 + i) = 7 + i \Rightarrow z = 7 - i$. Do đó $|z| = \sqrt{7^2 + (-1)^2} = 5\sqrt{2}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 356. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z + 1 + 3i - |z|i = 0$. Tính $S = a + 3b$.

- A. $S = \frac{7}{3}$. B. $S = -5$. C. $S = 5$. D. $S = -\frac{7}{3}$.

Lời giải.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 357. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $3z^2 - z + 1 = 0$. Tính $P = |z_1| + |z_2|$.

- A. $P = \frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $P = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. C. $P = \frac{2}{3}$. D. $P = \frac{\sqrt{14}}{3}$.

Lời giải.

Phương trình $3z^2 - z + 1 = 0$ có nghiệm $z_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{11}}{6}$.

Do đó $|z_1| = |z_2| = \frac{\sqrt{1+11}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Vậy $P = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 358. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 5$ và $|z + 3| = |z + 3 - 10i|$. Tìm số phức $w = z - 4 + 3i$.

- A. $w = -3 + 8i$. B. $w = 1 + 3i$. C. $w = -1 + 7i$. D. $w = -4 + 8i$.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$). Từ $|z + 3| = |z + 3 - 10i|$, ta có $y = 5$, suy ra $x = 0$. Vậy $w = -4 + 8i$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 359. Cho số phức z thỏa mãn $|z + 3| = 5$ và $|z - 2i| = |z - 2 - 2i|$. Tính $|z|$.

- A. $|z| = 17$. B. $|z| = \sqrt{17}$. C. $|z| = \sqrt{10}$. D. $|z| = 10$.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Dùng công thức tính mô-đun của số phức biến đổi giả thiết đã cho thành hệ phương trình, giải hệ phương trình ta thu được a, b và tính được $|z|$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 360. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z - 3i| = 5$ và $\frac{z}{z-4}$ là số thuần ảo?

- A. 0. B. Vô số. C. 1. D. 2.

Lời giải.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 361. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất số phức z thỏa mãn $z\bar{z}$ và $|z - \sqrt{3} + i| = m$. Tìm số phần tử của S .

A. 2.

B. 4.

C. 1.

D. 3.

Lời giải.

Tập hợp z là giao hai đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ và $(x - \sqrt{3})^2 + (y + 1)^2 = m^2 (m \geq 0)$. Để có duy nhất một số phức z , nghĩa là hai đường tròn tiếp xúc $\Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 = 2 \\ |m - 1| = 2 \end{cases}$. Vậy có 2 giá trị m thỏa mãn.

Chọn đáp án **(A)**

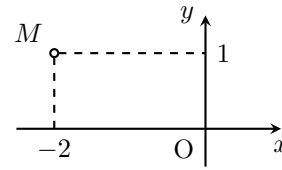
□

2. Biểu diễn hình học cơ bản của số phức.

Câu 362.

Điểm M trong hình vẽ bên là biểu diễn số phức

A. $z = -2 + i$. B. $z = 1 - 2i$. C. $z = 2 + i$. D. $z = 1 + 2i$.



Lời giải.

Điểm $M(-2; 1)$ biểu diễn số phức $z = -2 + i$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 363. Xét các số phức z thỏa mãn $(\bar{z} + 2i)(z - 2)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

A. 2..

B. $2\sqrt{2}$..

C. 4..

D. $\sqrt{2}$..

Lời giải.

Giả sử $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có: $(\bar{z} + 2i)(z - 2) = [x + (2 - y)i](x - 2 + yi) = (x^2 - 2x + y^2 - 2y) + (2x - 2y - 4)i$

$(\bar{z} + 2i)(z - 2)$ là số thuần ảo khi $x^2 - 2x + y^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 364. Xét các số phức z thỏa mãn $(\bar{z} - 2i)(z + 2)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

A. $2\sqrt{2}$.B. $\sqrt{2}$.

C. 2.

D. 4.

Lời giải.

Chọn đáp án **(B)**

□

3. Câu hỏi lý thuyết.

Câu 365. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z - 6 - i) + 2i = (7 - i)z$?

A. 2..

B. 3..

C. 1..

D. 4.

Lời giải.

Đặt $|z| = m \geq 0$ ta có: $|z|(z - 6 - i) + 2i = (7 - i)z$

$\Leftrightarrow z(|z| - 7 + i) = (6 + i)|z| - 2i \Leftrightarrow z[(m - 7) + i] = 6m + (m - 2)i$

$\Rightarrow |z[(m - 7) + i]| = |6m + (m - 2)i|$

$\Leftrightarrow m\sqrt{(m - 7)^2 + 1} = \sqrt{36m^2 + (m - 2)^2}$

$$\Leftrightarrow (m-1)(m^3-13m^2+4)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m^3-13m^2+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m \approx 12,976 \\ m \approx 0,5672 \\ m \approx -0,543(l) \end{cases},$$

thử lại bằng MTCT ta chọn đáp án 3

Chọn đáp án **B**

□

§2. Phép cộng, trừ và nhân số phức

1. Thực hiện phép tính.

Câu 366. Cho hai số phức $z_1 = 4 - 3i$ và $z_2 = 7 + 3i$. Tìm số phức $z = z_1 - z_2$.

- A. $z = 11$. B. $z = 3 + 6i$. C. $z = -1 - 10i$. D. $z = -3 - 6i$.

Lời giải.

$$z = z_1 - z_2 = (4 - 3i) - (7 + 3i) = (4 - 7) + (-3i - 3i) = -3 - 6i.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 367. Cho hai số phức $z_1 = 1 + i$ và $z_2 = 2 - 3i$. Tính môđun của số phức $z_1 + z_2$

- A. $|z_1 + z_2| = \sqrt{13}$. B. $|z_1 + z_2| = \sqrt{5}$. C. $|z_1 + z_2| = 1$. D. $|z_1 + z_2| = 5$.

Lời giải.

$$z_1 + z_2 = 3 - 2i \Rightarrow |z_1 + z_2| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 368. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z + 2 + i = |z|$. Tính $S = 4a + b$.

- A. $S = 4$. B. $S = 2$. C. $S = -2$. D. $S = -4$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} a + 2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ b + 1 = 0 \end{cases}. \text{ Giải ra ta được } b = -1, a = -\frac{3}{4}.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 369. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z + 2 - i| = 2\sqrt{2}$ và $(z - 1)^2$ là số thuần ảo?

- A. 0. B. 4. C. 3. D. 2.

Lời giải.

$$\text{Ta có hệ } \begin{cases} (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 8 \\ (x - 1)^2 - y^2 = 0 \end{cases}. \text{ Giải ra ta được 3 cặp nghiệm.}$$

Chọn đáp án **C**

□

2. Xác định các yếu tố cơ bản của số phức qua các phép toán.

Câu 370. Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(3x + yi) + (4 - 2i) = 5x + 2i$ với i là đơn vị ảo.

- A. $x = -2; y = 4$. B. $x = 2; y = 4$. C. $x = -2; y = 0$. D. $x = 2; y = 0$.

Lời giải.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 371. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm M là điểm biểu diễn

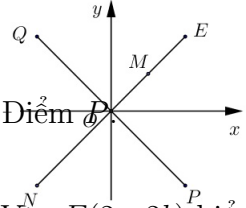
của số phức z (như hình vẽ bên). Điểm nào trong hình vẽ là điểm biểu diễn của số phức $2z$?

A. Điểm N .

B. Điểm Q .

C. Điểm E .

D. Điểm P .



Lời giải.

Xét $M(a, b)$ biểu diễn số phức $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$ trên mặt phẳng phức Oxy . Vậy $E(2a, 2b)$ biểu diễn số phức $2z = 2a + 2bi (a, b \in \mathbb{R})$ trên mặt phẳng phức Oxy .

Chọn đáp án **C**

□

3. Bài toán tập hợp điểm.

Câu 372. Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(2x - 3yi) + (1 - 3i) = x + 6i$ với i là đơn vị ảo.

A. $x = -1; y = -3$.

B. $x = -1; y = -1$.

C. $x = 1; y = -1$.

D. $x = 1; y = -3$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } (2x - 3yi) + (1 - 3i) = x + 6i \Leftrightarrow x + 1 - (3y + 9)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ 3y + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases}.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 373. Xét các điểm số phức z thỏa mãn $(\bar{z} + i)(z + 2)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

A. 1.

B. $\frac{5}{4}$.

C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$.

$$\text{Ta có } (\bar{z} + i)(z + 2) = (x - yi + i)(x + yi + 2) = (x^2 + 2x + y^2 - y) + (x - 2y + 2)i$$

$$\text{Vì } (\bar{z} + i)(z + 2) \text{ là số thuần ảo nên ta có: } x^2 + 2x + y^2 - y = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}.$$

Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có bán kính bằng $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Chọn đáp án **C**

□

§3. Phép chia số phức

1. Bài toán quy về giải phương trình, hệ phương trình nghiệm thực.

Câu 374. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z - 4 - i) + 2i = (5 - i)z$.

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 4.

Lời giải.

Ta có

$$|z|(z - 4 - i) + 2i = (5 - i)z \Leftrightarrow z(|z| - 5 + i) = 4|z| + (|z| - 2)i.$$

Lấy môđun 2 vế phương trình trên ta được

$$|z|\sqrt{(|z| - 5)^2 + 1} = \sqrt{(4|z|)^2 + (|z| - 2)^2}.$$

Đặt $t = |z|, t \geq 0$ ta được

$$t\sqrt{(t-5)^2+1} = \sqrt{(4t)^2+(t-2)^2} \Leftrightarrow (t-1)(t^3-9t^2+4) = 0.$$

Phương trình có 3 nghiệm phân biệt $t \geq 0$ vậy có 3 số phức z thỏa mãn.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 375. Tìm hai số x và y thỏa mãn $(2x - 3yi) + (3 - i) = 5x - 4i$ với i là đơn vị ảo.

A. $x = -1; y = -1$. B. $x = -1; y = 1$. C. $x = 1; y = -1$. D. $x = 1; y = 1$.

Lời giải.

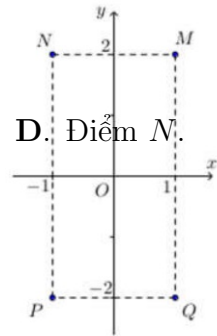
Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 376. Cho số phức z thỏa mãn $(1 + i)z = 3 - i$.

Hỏi điểm biểu diễn của z là điểm nào trong các điểm M, N, P, Q ở hình bên ?

A. Điểm P . B. Điểm Q . C. Điểm M .



D. Điểm N .

Lời giải.

$$(1 + i)z = 3 - i \Rightarrow z = \frac{3 - i}{1 + i} = 1 - 2i \Rightarrow Q(1; -2) \text{ là điểm biểu diễn } z.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 377. Tính môđun của số phức z thỏa mãn $z(2 - i) + 13i = 1$.

A. $|z| = \sqrt{34}$. B. $|z| = 34$. C. $|z| = \frac{5\sqrt{34}}{3}$. D. $|z| = \frac{\sqrt{34}}{3}$.

Lời giải.

$$z(2 - i) + 13i = 1 \Leftrightarrow z = \frac{1 - 13i}{2 - i} \Leftrightarrow z = \frac{(1 - 13i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} \Leftrightarrow z = 3 - 5i.$$

$$|z| = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 378. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $(1 + i)z + 2\bar{z} = 3 + 2i$. Tính $P = a + b$.

A. $P = \frac{1}{2}$. B. $P = 1$. C. $P = -1$. D. $P = -\frac{1}{2}$.

Lời giải.

$$(1 + i)z + 2\bar{z} = 3 + 2i. (1). \text{ Ta có: } z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi.$$

$$\text{Thay vào (1) ta được } (1 + i)(a + bi) + 2(a - bi) = 3 + 2i \Leftrightarrow (a - b)i + (3a - b) = 3 + 2i$$

$$\Leftrightarrow (a - b)i + (3a - b) = 3 + 2i \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 2 \\ 3a - b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow P = -1.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 379. Xét số phức z thỏa mãn $(1 + 2i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} - 2 + i$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $\frac{3}{2} < |z| < 2$. B. $|z| > 2$. C. $|z| < \frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}\bar{z}. \text{ Vậy } (1 + 2i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} - 2 + i \Leftrightarrow (|z| + 2) + (2|z| - 1)i = \left(\frac{\sqrt{10}}{|z|^2}\right)\bar{z}$$

$$\Rightarrow (|z| + 2)^2 + (2|z| - 1)^2 = \left(\frac{10}{|z|^4}\right) \cdot |z|^2 = \frac{10}{|z|^2}. \text{ Đặt } |z|^2 = a > 0.$$

$$\Rightarrow (a + 2)^2 + (2a - 1)^2 = \left(\frac{10}{a^2}\right) \Leftrightarrow a^4 + a^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ a^2 = -2 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \Rightarrow |z| = 1.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 380. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z + 3i| = \sqrt{13}$ và $\frac{z}{z+2}$ là số thuần ảo?

A. Vô số.

B. 2.

C. 0.

D. 1.

Lời giải.

Đặt $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$. $|z + 3i| = \sqrt{13} \Leftrightarrow a^2 + (b+3)^2 = 13$. Do đó, $\frac{z}{z+2} = \frac{a^2 + b^2 + 2a + 2bi}{(a+2)^2 - b^2}$

là số thuần ảo $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + 2a = 0 \\ z \neq -2 \end{cases}$.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} a^2 + (b+3)^2 = 13 \\ a^2 + b^2 + 2a = 0 \end{cases}$ ta được $z = -2$ (loại) và $z = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$

Chọn đáp án (D) □

Câu 381. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z - 5 - i) + 2i = (6 - i)z$?

A. 1.

B. 3.

C. 4.

D. 2.

Lời giải.

Chọn đáp án (B) □

Câu 382. Cho số phức $z = 2 + 5i$. Tìm số phức $w = iz + \bar{z}$.

A. $w = 7 - 3i$.

B. $w = -3 - 3i$.

C. $w = 3 + 7i$.

D. $w = -7 - 7i$.

Lời giải.

$\bar{z} = 2 - 5i \Rightarrow w = i(2 + 5i) + 2 - 5i = -3 - 3i$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 383. Hỏi có bao nhiêu số phức z thỏa mãn đồng thời các điều kiện: $|z - i| = 5$ và z^2 là số thuần ảo?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 0.

Lời giải.

Gọi số phức cần tìm là $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Ta có $|z - i| = 5 \Leftrightarrow a^2 + (b - 1)^2 = 25$.

Và $z^2 = (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$ là số thuần ảo khi $a^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = b^2$.

Khi đó ta có $b^2 + (b - 1)^2 = 25 \Leftrightarrow 2b^2 - 2b - 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 \Rightarrow a = \pm 4, \\ b = -3 \Rightarrow a = \pm 3. \end{cases}$ Vậy có 4 số.

Chọn đáp án (C) □

Câu 384. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z + 2 + i - |z|(1 + i) = 0$ và $|z| > 1$ Tính $P = a + b$

A. $P = -1$.

B. $P = -5$.

C. $P = 3$.

D. $P = 7$.

Lời giải.

$z + 2 + i - |z|(1 + i) = 0 \Leftrightarrow a + bi + 2 + i - \sqrt{a^2 + b^2}(1 + i) = 0$

$\Leftrightarrow a + 2 - \sqrt{a^2 + b^2} + (b + 1 - \sqrt{a^2 + b^2})i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2 - \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \\ b + 1 - \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a - b + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$b = a + 1$

$$\Rightarrow a + 2 - \sqrt{a^2 + (a+1)^2} = 0 \Leftrightarrow a + 2 = \sqrt{2a^2 + 2a + 1} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -2 \\ a^2 + 4a + 4 = 2a^2 + 2a + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -2 \\ a^2 - 2a - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -2 \\ \begin{cases} a = 3 \text{ (tm)} \\ a = -1 \text{ (tm)} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \\ a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$$

$$\text{Vì } |z| > 1 \Rightarrow z = 3 + 4i \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow P = a + b = 3 + 4 = 7$$

Chọn đáp án **D**

□

2. Bài toán tập hợp điểm.

Câu 385. Cho các số phức z thỏa mãn $|z| = 4$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = (3 + 4i)z + i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r = 4$.

B. $r = 5$.

C. $r = 20$.

D. $r = 22$.

Lời giải.

$$w = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow z = \frac{w - i}{3 + 4i} = \frac{x + (y - 1)i}{3 + 4i} = \frac{3x - 4(y - 1) + [3(y - 1) + 4x]i}{25}$$

$$16 = |z|^2 = \left(\frac{3x - 4y + 4}{25} \right)^2 + \left(\frac{4x + 3y - 3}{25} \right)^2 \Rightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 400 \Rightarrow r = 20.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 386. Xét các số phức $a = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - 4 - 3i| = \sqrt{5}$ Tính $P = a + b$ khi $|z + 1 - 3i| + |z - 1 + i|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $P = 10$.

B. $P = 4$.

C. $P = 6$.

D. $P = 8$.

Lời giải.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z

Từ giả thiết, ta có $|z - 4 - 3i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5$ suy ra M thuộc đường tròn (C) tâm $I(4; 3)$, bán kính $R = \sqrt{5}$.

Khi đó $P = MA + MB$, với $A(-1; 3), B(1; -1)$. Ta có $P^2 = MA^2 + MB^2 + 2MA \cdot MB \leq 2(MA^2 + MB^2)$

Gọi $E(0; 1)$ là trung điểm của $AB \Rightarrow ME^2 = \frac{MA^2 + MB^2}{2} - \frac{AB^2}{4}$. Do đó $P^2 \leq 4 \cdot MI^2 + AB^2$ mà $ME \leq CE = 3\sqrt{5}$

suy ra $P^2 \leq 4 \cdot (3\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5})^2 = 200$. Với C là giao điểm của đường thẳng EI với đường tròn (C) .

Vậy $P \leq 10\sqrt{2}$. Dấu xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} MA = MB \\ M \equiv C \end{cases} \Rightarrow M(6; 4) \Rightarrow a + b = 10$.

Chọn đáp án **A**

□

§4. Phương trình bậc hai hệ số thực

1. Giải phương trình. Tính toán biểu thức nghiệm.

Câu 387. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - z + 6 = 0$. Tính $P = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$.

- A. $P = \frac{1}{6}$. B. $P = \frac{1}{12}$. C. $P = -\frac{1}{6}$. D. $P = 6$.

Lời giải.

$$\text{Phương trình } z^2 - z + 6 = 0 \text{ có nghiệm } \begin{cases} z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{23}}{2}i \\ z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{23}}{2}i \end{cases} \Rightarrow P = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{6}$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 388. Phương trình nào dưới đây nhận hai số phức $1 + \sqrt{2}i$ và $1 - \sqrt{2}i$ là nghiệm?

- A. $z^2 + 2z + 3 = 0$. B. $z^2 - 2z - 3 = 0$. C. $z^2 - 2z + 3 = 0$. D. $z^2 + 2z - 3 = 0$.

Lời giải.

Tổng hai số phức là 2 và tích của chúng là 3 nên hai số phức là nghiệm của $z^2 - 2z + 3 = 0$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 389. Kí hiệu z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $4z^2 - 16z + 17 = 0$.

Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $w = iz_0$?

- A. $M_1(\frac{1}{2}; 2)$. B. $M_2(-\frac{1}{2}; 2)$. C. $M_3(-\frac{1}{4}; 1)$. D. $M_4(\frac{1}{4}; 1)$.

Lời giải.

Xét phương trình $4z^2 - 16z + 17 = 0$ có $\Delta' = 64 - 4 \cdot 17 = -4 = (2i)^2$.

Phương trình có hai nghiệm $z_1 = \frac{8 - 2i}{4} = 2 - \frac{1}{2}i$, $z_2 = \frac{8 + 2i}{4} = 2 + \frac{1}{2}i$.

Do z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương nên $z_0 = 2 + \frac{1}{2}i$. Ta có $w = iz_0 = -\frac{1}{2} + 2i$.

Điểm biểu diễn $w = iz_0$ là $M_2(-\frac{1}{2}; 2)$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 390. Kí hiệu z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + z + 1 = 0$. Tính $P = z_1^2 + z_2^2 + z_1 z_2$.

- A. $P = 1$. B. $P = 2$. C. $P = -1$. D. $P = 0$.

Lời giải.

$$\text{Theo Viet, ta có } \begin{cases} z_1 + z_2 = -1 \\ z_1 \cdot z_2 = 1 \end{cases} \text{ Do đó } P = z_1^2 + z_2^2 + z_1 z_2 = (z_1 + z_2)^2 - z_1 z_2 = 0.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 391. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $4z^2 - 4z + 3 = 0$ Giá trị của biểu thức $|z_1| + |z_2|$ bằng

- A. $3\sqrt{2}$. B. $2\sqrt{3}$. C. 3. D. $\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có: $\Delta' = 4 - 3 \cdot 4 = -8 = 8i^2$. $\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$\begin{cases} z_1 = \frac{2 + 2\sqrt{2}i}{4} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ z_2 = \frac{2 - 2\sqrt{2}i}{4} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \end{cases} \Rightarrow |z_1| = |z_2| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow |z_1| + |z_2| = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

2. Phương trình quy về bậc hai.

Câu 392. Kí hiệu z_1, z_2, z_3 và z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $z^4 - z^2 - 12 = 0$. Tính tổng $T = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|$.

A. $T = 4$.

B. $T = 2\sqrt{3}$.

C. $4 + 2\sqrt{3}$.

D. $T = 2 + 2\sqrt{3}$.

Lời giải.

$$z^4 - z^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow (z^2 - 4)(z^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = \pm 2 \\ z = \pm i\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow T = 2 + 2 + \sqrt{3} + \sqrt{3} = 4 + 2\sqrt{3}.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

§5. Cực trị

1. Phương pháp hình học.

Câu 393. Xét các số phức z thỏa mãn $|z + 2 - i| + |z - 4 - 7i| = 6\sqrt{2}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $|z - 1 + i|$. Tính $P = m + M$.

A. $P = \sqrt{13} + \sqrt{73}$. B. $P = \frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}}{2}$. C. $P = 5\sqrt{2} + \sqrt{73}$. D. $P = \frac{5\sqrt{2} + \sqrt{73}}{2}$.

Lời giải.

Gọi M là điểm biểu diễn số phức z , $F_1(-2; 1)$, $F_2(4; 7)$ và $N(1; -1)$.

Từ $|z + 2 - i| + |z - 4 - 7i| = 6\sqrt{2}$ và $F_1F_2 = 6\sqrt{2}$ nên ta có M là đoạn thẳng F_1F_2 . Gọi H là hình chiếu của N lên F_1F_2 , ta có $H\left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

$$\text{Suy ra } P = NH + NF_2 = \frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}}{2}.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

HÌNH HỌC 12

Chương 1. Khối đa diện

§1. Khái niệm về khối đa diện

1. Nhận diện hình đa diện, khối đa diện.

Câu 394 (QG17,101). Hình hộp chữ nhật có ba kích thước đôi một khác nhau có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 4 mặt phẳng.

B. 3 mặt phẳng.

C. 6 mặt phẳng.

D. 9 mặt phẳng.

Lời giải.

Hình hộp chữ nhật không là hình lập phương có các mặt phẳng đối xứng là các mặt phẳng trung trực của các cặp cạnh đối nên có 3 mặt phẳng đối xứng.

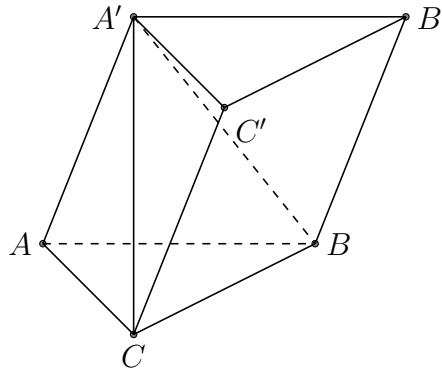
Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 395 (QG17,102). Mặt phẳng $(AB'C')$ chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành các khối đa diện nào?

- A. Một khối chóp tam giác và một khối chóp ngũ giác.
- B. Một khối chóp tam giác và một khối chóp tứ giác.
- C. Hai khối chóp tam giác.
- D. Hai khối chóp tứ giác.

Lời giải.



Có khối chóp tam giác $A'.ABC$ và khối chóp tứ giác $A'.BCC'B'$

Chọn đáp án **(B)**

□

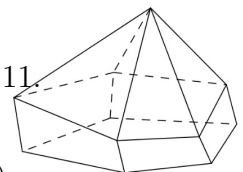
Câu 396. Hình lăng trụ tam giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

- A. 4 mặt phẳng.
- B. 1 mặt phẳng.
- C. 2 mặt phẳng.
- D. 3 mặt phẳng.

2. Xác định số đỉnh, cạnh, mặt bên của một khối đa diện.

Câu 397. Hình đa diện trong hình vẽ bên có bao nhiêu mặt?

- A. 6.
- B. 10.
- C. 12.
- D. 11.



Lời giải.

Đếm được 11 mặt. (Chú ý ta có thể dò lại nhờ định lý Euler $D + M = C + 2$).

Chọn đáp án **(D)**

□

3. Phép biến hình trong không gian.

Câu 398. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng 2, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và $\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M = 2$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

- A. $\sqrt{3}$.
- B. 2.
- C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.
- D. 1.

Lời giải.

Dựng $AK \perp BB' \Rightarrow AK \perp A'A$, tương tự dựng $AE \perp C'C \Rightarrow AE \perp A'A$.

Từ đó $A'A \perp (AKE) \Rightarrow AA' \perp KE$.

Do đó ta có $\begin{cases} EK \perp B'B \\ EK \perp C'C \end{cases} \Rightarrow EK = d(C, BB') = 2$.

Suy ra tam giác AKE vuông tại A , suy ra $AI = 1$ với I là trung điểm của KE . Suy ra $MI = \sqrt{3}$.

$$\text{Do } \begin{cases} A'A \perp (AKE) \\ AM \perp (A'B'C') \end{cases} \Rightarrow MI \perp (AKE).$$

Suy ra $((AKE), (A'B'C')) = (\widehat{MI, AM}) = \widehat{AMI}$.

$$\text{Suy ra } \cos((AKE), (A'B'C')) = \frac{MI}{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Nên } V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot AM = \frac{S_{AKE}}{\cos \alpha} \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 2.$$

Chọn đáp án (B)

□

§2. Khối đa diện lồi và khối đa diện đều

1. Nhận diện loại đa diện đều.

Câu 399. Cho hình bát diện đều cạnh a . Gọi S là tổng diện tích tất cả các mặt của hình bát diện đó. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = 4\sqrt{3}a^2$.

B. $S = \sqrt{3}a^2$.

C. $S = 2\sqrt{3}a^2$.

D. $S = 8a^2$.

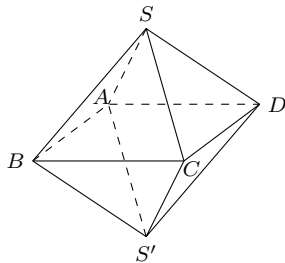
Lời giải.

Hình bát diện đều có 8 mặt đều là các tam giác đều cạnh a nên diện tích

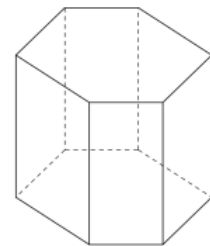
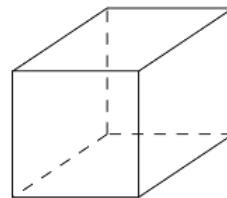
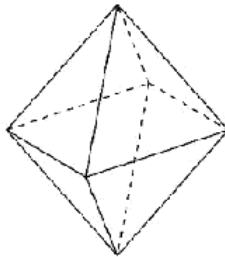
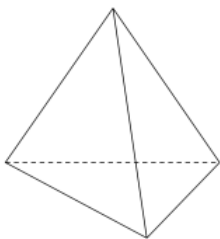
$$S = 8 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}a^2.$$

Chọn đáp án (C)

□



Câu 400. Hình đa diện nào dưới đây không có tâm đối xứng ?



A. Tứ diện đều.

B. Bát diện đều.

C. Hình lập phương.

D. Lăng trụ lục giác đều.

Lời giải.

Tứ diện đều làm gì có tâm đối xứng.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 401. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$, mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với đáy một góc 60° . Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

- A. $V = \frac{3a^3}{8}$. B. $V = \frac{9a^3}{8}$. C. $V = \frac{a^3}{8}$. D. $V = \frac{3a^3}{4}$.

Lời giải.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

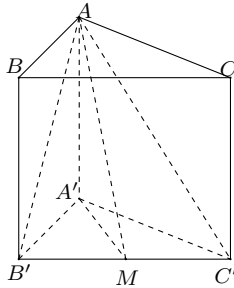
Gọi M là trung điểm $B'C'$.

Khi đó, $\widehat{AMA'} = 60^\circ$, $A'M = \frac{a}{2}$.

$$\text{Suy ra } AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } V = \frac{3a^3}{8}.$$

Chọn đáp án **(A)** □



§3. Khái niệm về thể tích của khối đa diện

1. Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của khối đa diện.

Câu 402. Cho khối lăng trụ có đáy là hình vuông cạnh a và chiều cao bằng $4a$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

- A. $4a^3$.. B. $\frac{16}{3}a^3$.. C. $\frac{4}{3}a^3$.. D. $16a^3$..

Lời giải.

Chọn đáp án **(B)** □

2. Tính thể tích các khối đa diện.

Câu 403. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

- A. $V = a^3$. B. $V = \frac{a^3}{3}$. C. $V = \frac{a^3}{6}$. D. $V = \frac{a^3}{2}$.

Lời giải.

Tam giác ABC vuông cân tại B và $AC = a\sqrt{2}$ do đó $AB = BC = a$.

Thể tích khối lăng trụ là $V = BB' \cdot S_{ABC} = a \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a = \frac{a^3}{2}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 404. Thể tích của khối chóp có chiều cao bằng h và diện tích đáy bằng B là

- A. $V = \frac{1}{3}Bh$. B. $V = \frac{1}{6}Bh$. C. $V = Bh$. D. $V = \frac{1}{2}Bh$.

Lời giải.

Công thức tính thể tích khối chóp có diện tích đáy B và chiều cao h là $V = \frac{1}{3}Bh$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 405. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$, SA vuông góc với đáy và mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = \frac{a^3}{3}$. B. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}$. C. $V = a^3$. D. $V = 3a^3$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $\widehat{SBA} = 60^\circ$ suy ra $SH = AB \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$. Vậy, $V = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot a^2\sqrt{3} = a^3$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 406. Cho khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a , cạnh bên gấp hai lần cạnh đáy. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

- A. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{2}$. B. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{6}$. C. $V = \frac{\sqrt{14}a^3}{2}$. D. $V = \frac{\sqrt{14}a^3}{6}$.

Lời giải.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 407. Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $2a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

- A. $V = \frac{\sqrt{13}a^3}{12}$. B. $V = \frac{\sqrt{11}a^3}{12}$. C. $V = \frac{\sqrt{11}a^3}{6}$. D. $V = \frac{\sqrt{11}a^3}{4}$.

Lời giải.

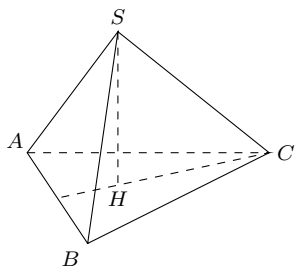
Gọi H là trọng tâm tam giác ABC .

Khi đó SH là chiều cao của khối chóp.

Ta có: $CH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $SH = \sqrt{SC^2 - CH^2} = \frac{\sqrt{33}}{3}$.

Do đó $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{33}}{3} = \frac{\sqrt{11}a^3}{12}$.

Chọn đáp án **(B)** □



Câu 408. Cho khối chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, $SA = 4$, $AB = 6$, $BC = 10$ và $CA = 8$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

- A. $V = 40$. B. $V = 192$. C. $V = 32$. D. $V = 24$.

Lời giải.

Nửa chu vi của tam giác ABC là $p = 12 \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-6)(p-10)(p-8)} = 24 \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 4 = 32$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 409. Cho khối chóp có đáy hình vuông cạnh a và chiều cao bằng $2a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

- A. $4a^3$. B. $\frac{2}{3}a^3$. C. $2a^3$. D. $AB = a$.

Lời giải.

Diện tích đáy của hình chóp là $S_{\text{đáy}} = a^2$.

Thể tích của khối chóp đã cho là $V = \frac{1}{3}S_{\text{đáy}} \times h = \frac{1}{3}a^2 \times 2a = \frac{2}{3}a^3$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 410. Cho khối lăng trụ có đáy là hình vuông cạnh a và chiều cao bằng $2a$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

- A. $\frac{2}{3}a^3$. B. $\frac{4}{3}a^3$. C. $2a^3$. D. $4a^3$.

Lời giải.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 411. Tính thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, biết $AC = a\sqrt{3}$.

- A. $V = a^3$. B. $V = \frac{3\sqrt{6}a^3}{4}$. C. $V = 3\sqrt{3}a^3$. D. $V = \frac{1}{3}a^3$.

Lời giải.

Cạnh của hình lập phương là $\frac{AC'}{\sqrt{3}} = a \Rightarrow$ Thể tích $V = a^3$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 412. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{2}a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{6}$. B. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{4}$. C. $V = \sqrt{2}a^3$. D. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

Lời giải.

$V = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}a\sqrt{2}a^2 = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 413. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$ và thể tích bằng a^3 . Tính chiều cao h của hình chóp đã cho.

- A. $h = \frac{\sqrt{3}a}{6}$. B. $h = \frac{\sqrt{3}a}{2}$. C. $h = \frac{\sqrt{3}a}{3}$. D. $h = \sqrt{3}a$.

Lời giải.

Do đáy là tam giác đều nên $S_{\Delta ABC} = \frac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$.

Mà $V = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.h \Rightarrow h = \frac{3V}{S_{\Delta ABC}} = \frac{3a^3}{a^2\sqrt{3}} = \sqrt{3}a$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 414. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy và SC tạo với mặt phẳng (SAB) một góc 30° . Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

- A. $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{3}$. B. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$. C. $V = \frac{2a^3}{3}$. D. $V = \sqrt{2}a^3$.

Lời giải.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 415. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC và E là điểm đối xứng với B qua D . Mặt phẳng (MNE) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh A có thể tích V . Tính V .

A. $V = \frac{7\sqrt{2}a^3}{216}$. B. $V = \frac{11\sqrt{2}a^3}{216}$. C. $V = \frac{13\sqrt{2}a^3}{216}$. D. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{18}$.

Lời giải.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 416. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V = \frac{a^3}{2}$. B. $V = a^3$. C. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{9}$. D. $V = \frac{a^3}{3}$.

Lời giải.

Gọi H là chân đường vuông góc của A lên cạnh SB

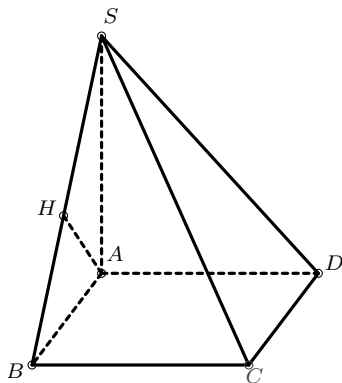
Ta có $SA \perp BC$ và $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$

Mà $AH \perp SB \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Xét $\triangle SAB$ vuông tại A có AH là đường cao $\Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2}$

$\Rightarrow \frac{1}{a^2/2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{SA^2} \Rightarrow SA = a$

Diện tích đáy $ABCD$ là $S_{ABCD} = a^2 \Rightarrow$ thể tích khối chóp $S.ABCD$



$$V = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot a^2 = \frac{a^3}{3}.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 417. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng $\sqrt{5}$, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và 2, hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M = \sqrt{5}$. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$. B. $\frac{2\sqrt{15}}{3}$. C. $\sqrt{5}$. D. $\frac{\sqrt{15}}{3}$.

Lời giải.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 418. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB, AC và AD đôi một vuông góc với nhau; $AB = 6a$, $AC = 7a$ và $AD = 4a$. Gọi M, N, P tương ứng là trung điểm các cạnh BC, CD, DB . Tính thể tích V của tứ diện $AMNP$.

A. $V = \frac{7}{2}a^3$.

B. $V = 14a^3$.

C. $V = \frac{28}{3}a^3$.

D. $V = 7a^3$.

Lời giải.

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}AB.AC.AD = 28a^3 \Rightarrow V_{AMNP} = \frac{1}{4}V_{ABCD} = 7a^3.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 419. Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng 12 và G là trọng tâm tam giác BCD . Tính thể tích V của khối chóp $A.GBC$.

A. $V = 3$.

B. $V = 4$.

C. $V = 6$.

D. $V = 5$.

Lời giải.

$$\frac{d(G, (ABC))}{d(D, (ABC))} = \frac{GI}{DI} = \frac{1}{3} \Rightarrow d(G, (ABC)) = \frac{1}{3}d(D, (ABC)).$$

$$\text{Nên } V_{G.ABC} = \frac{1}{3}d(G, (ABC)) \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}V_{DABC} = 4.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 420. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , cạnh $AC = 2\sqrt{2}$. Biết AC' tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60° và $AC' = 4$. Tính thể tích V của khối đa diện $ABCB'C'$. A. B. C. D.

A. $V = \frac{8}{3}$.

B. $V = \frac{16}{3}$.

C. $V = \frac{8\sqrt{3}}{3}$.

D. $V = \frac{16\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Tính thể tích của khối đa diện $ABCB'C'$ bằng thể tích khối của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ trừ đi thể tích của khối chóp $A.A'B'C'$. Giả sử đường cao của lăng trụ là $C'H$.

Khi đó góc giữa AC' mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{C'AH} = 60^\circ$.

$$\text{Ta có: } \sin 60^\circ = \frac{C'H}{AC'} \Rightarrow C'H = 2\sqrt{3}; S_{\Delta ABC} = 4$$

$$V_{ABC.A'B'C'} = C'H \cdot S_{\Delta ABC} = 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{2})^2 = 8\sqrt{3}.$$

$$V_{A.A'B'C'} = \frac{1}{3}C'H \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot V_{ABC.A'B'C'} = \frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

$$V_{ABCB'C'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{A.A'B'C'} = 8\sqrt{3} - \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{16\sqrt{3}}{3}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 421. Tính thể tích V của khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a .

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

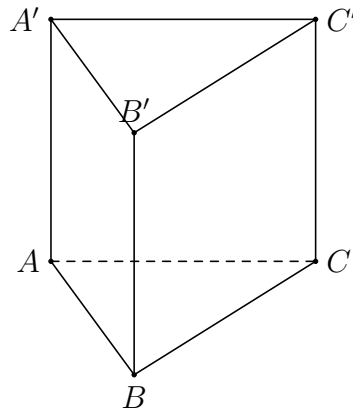
C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.

$$\text{Khối lăng trụ tam giác đều có chiều cao } h = a \text{ và diện tích đáy } S = \frac{1}{2}AH.BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Vậy } V = S.h = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}.$$



Chọn đáp án **(D)** □

Câu 422. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt đáy, SD tạo với mặt phẳng (SAB) một góc bằng 30° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{18}$. B. $V = \sqrt{3}a^3$. C. $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{3}$. D. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải.

Góc giữa SD và mp (SAB) là $DSA = 30^\circ \Rightarrow SA = a \cot 30^\circ = \sqrt{3}a$.

Khi đó $V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}a^2a\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}a^3$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 423. Xét khối tứ diện $ABCD$ có cạnh $AB = x$ và các cạnh còn lại đều bằng $2\sqrt{3}$. Tìm x để thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $x = \sqrt{6}$. B. $x = \sqrt{14}$. C. $x = 3\sqrt{2}$. D. $x = 2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD, AB . Khi đó ta tính được $AM = BM = 3$, suy ra $MN = \sqrt{9 - \frac{x^2}{4}}$.

Gọi h là chiều cao của khối chóp hạ từ đỉnh A , ta có $h = \frac{x \cdot \sqrt{9 - \frac{x^2}{4}}}{3}$ và $h_{\max}$ khi $x = 3\sqrt{2}$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 424. Xét khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A , SA vuông góc với đáy, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng 3. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) . Tính $\cos \alpha$ khi thể tích khối chóp $S.ABC$ nhỏ nhất.

A. $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. B. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\cos \alpha = \frac{2}{3}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm BC và H là chân đường cao kẻ từ A xuống SI , theo giả thiết ta có $AH = 3$ và $\widehat{SIA} = \alpha$. Xét các tam giác vuông AHI, SAI (tương ứng vuông tại H và A),

có $AI = \frac{AH}{\sin \alpha} = \frac{3}{\sin \alpha}$, $HI = \frac{AH}{\tan \alpha} = \frac{3}{\tan \alpha}$. Suy ra $SI = \frac{AI^2}{HI} = \frac{3}{\cos \alpha \cdot \sin \alpha}$.

Diện tích tam giác SBC là $\frac{1}{2}SI \cdot BC = \frac{1}{2}SI \cdot 2AI = \frac{9}{\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha}$.

Để thể tích khối chóp $S.ABC$ nhỏ nhất thì $S_{\triangle SBC}$ phải nhỏ nhất, tức là $\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha$ lớn nhất.

Đặt $t = \cos \alpha$, với $0 \leq t \leq 1$, khi đó $\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha = (1 - \cos^2 \alpha) \cos \alpha = t - t^3 = f(t)$.

Khảo sát hàm số $f(t)$ trên $[0; 1]$, ta tìm được $\max_{[0;1]} f(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 425. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng 2, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và $\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $AM = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. 2.

B. 1.

C. $\sqrt{3}$.D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Gọi N là trung điểm BC .

Kẻ $AE \perp BB'$ tại E , $AF \perp CC'$ tại F .

Ta có $\begin{cases} AE \perp AA' \\ AF \perp AA' \end{cases} \Rightarrow AA' \perp (AEF)$

$\Rightarrow AA' \perp EF \Rightarrow EF \perp BB'$.

Theo giả thiết $AE = 1$, $AF = \sqrt{3}$, $EF = 2$.

Do $AE^2 + AF^2 = EF^2$ nên $\triangle AEF$ vuông tại A .

Gọi $H = EF \cap MN$ thì H là trung điểm đoạn EF , do đó $AH = \frac{1}{2}EF = 1$.

Ta lại có $\begin{cases} AA' \perp (AEF) \\ MN \parallel AA' \end{cases}$

$\Rightarrow MN \perp (AEF) \Rightarrow MN \perp EF$.

$\triangle AMN$ vuông tại A có đường cao AH nên $\frac{1}{AM^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow AM = 2$.

$\triangle AMN$ có $MN = \sqrt{AN^2 + AM^2} = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow S_{BCC'B'} = EF \cdot MN = 2 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = 3V_{ABCC'} = \frac{3}{2}V_{A.BCC'B'} = \frac{1}{2}S_{BCC'B'} \cdot d(A, EF) = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2$.

Chọn đáp án (A) □

A. $\frac{V'}{V} = \frac{1}{2}$.B. $\frac{V'}{V} = \frac{1}{4}$.C. $\frac{V'}{V} = \frac{2}{3}$.D. $\frac{V'}{V} = \frac{5}{8}$.

Lời giải.

$$\frac{V'}{V} = \frac{1}{2}$$

Chọn đáp án (A) □

3. Các bài toán khác (góc, khoảng cách,...) liên quan đến thể tích khối đa diện.

Câu 426. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $\sqrt{2}a$. Tam giác SAD cân tại S và mặt bên (SAD) vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{4}{3}a^3$. Tính khoảng cách h từ B đến mặt phẳng (SCD) .

A. $h = \frac{2}{3}a$.B. $h = \frac{4}{3}a$.C. $h = \frac{8}{3}a$.D. $h = \frac{3}{4}a$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm $AD \Rightarrow SH \perp (ABCD)$. Có $HS = \frac{3V_{S.ABCD}}{S_{ABCD}} = \frac{4a^3}{(\sqrt{2}a)^2}$.

Vẽ $HK \perp SD$ tại $K \Rightarrow HK \perp (SCD)$

$AB // (SCD) \Rightarrow d = d(B; (SCD)) = d(A; (SCD)) = 2d(H; (SCD)) = 2HK$.

Có $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HD^2} \Rightarrow HK = \frac{2}{3}a \Rightarrow d = \frac{4}{3}a$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 427. Cho hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ có cạnh bằng 1, lần lượt nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Gọi S là điểm đối xứng với B qua đường thẳng DE Thể tích của khối đa diện $ABCDSEF$ bằng

A. $\frac{7}{6}$.

B. $\frac{11}{12}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $\frac{5}{6}$.

Lời giải.

Gọi M, I lần lượt là trung điểm của $DF, DE \Rightarrow AM \perp (DCEF)$.

Vì S là điểm đối xứng với B qua $DE \Rightarrow M$ là trung điểm của SA . Suy ra $SA \perp (DCEF)$ và

$$SM = AM = \frac{1}{2}DF = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Khi đó $V_{ABCDSEF} = V_{ADF.BCE} + V_{S.DCEF} = AB.S_{\Delta ADF} + \frac{1}{3}.SM.S_{DCEF} \Rightarrow V_{ABCDSEF} = 1.\frac{1}{2} + \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{2} = \frac{5}{6}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Chương 2. Mặt nón, mặt trụ, mặt cầu

§1. Khái niệm về mặt tròn xoay

1. Thể tích khối nón, khối trụ.

Câu 428 (QG17,101). Tính thể tích V của khối trụ có bán kính đáy $r = 4$ và chiều cao $h = 4\sqrt{2}$.

A. $V = 128\pi$.

B. $V = 64\sqrt{2}\pi$.

C. $V = 32\pi$.

D. $V = 32\sqrt{2}\pi$.

Lời giải.

$$V = 2.\pi.4^2.4\sqrt{2} = 64\sqrt{2}\pi.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 429 (QG17,102). Cho khối nón có bán kính đáy $r = \sqrt{3}$ và chiều cao $h = 4$. Tính thể tích V của khối nón đã cho.

A. $V = \frac{16\pi\sqrt{3}}{3}$.

B. $V = 4\pi$.

C. $V = 16\pi\sqrt{3}$.

D. $V = 12\pi$.

Lời giải.

Thể tích khối nón đã cho là $V = \frac{1}{3}\pi r^2.h = \frac{1}{3}\pi.3.4 = 4\pi$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 430. Cho hình nón có bán kính đáy $r = \sqrt{3}$ và độ dài đường sinh $l = 4$. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón đã cho.

A. $S_{xq} = 12\pi$.

B. $S_{xq} = 4\sqrt{3}\pi$.

C. $S_{xq} = \sqrt{39}\pi$.

D. $S_{xq} = 8\sqrt{3}\pi$.

Lời giải.

$$S_{xq} = \pi rl = 4\sqrt{3}\pi$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 431. Thể tích của khối trụ tròn xoay có bán kính r và chiều cao h bằng

- A. $\frac{1}{3}\pi r^2 h$. B. $2\pi r h$. C. $\frac{4}{3}\pi r^2 h$. D. $\pi r^2 h$.

Lời giải.

Chọn đáp án (D) □

Câu 432 (QG17,102). Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng $3a$. Hình nón (N) có đỉnh A và đường tròn đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD . Tính diện tích xung quanh S_{xq} của (N).

- A. $S_{xq} = 6\pi a^2$. B. $S_{xq} = 3\sqrt{3}\pi a^2$. C. $S_{xq} = 12\pi a^2$. D. $S_{xq} = 6\sqrt{3}\pi a^2$.

Lời giải.

Bán kính đáy $R = \frac{2}{3} \cdot \frac{3a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Suy ra diện tích xung quanh $S_{xq} = \pi R l = \pi a\sqrt{3} \cdot 3a = \pi a^2 3\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 433. Cho khối (N) có bán kính đáy bằng 3 và diện tích xung quanh bằng 15π . Tính thể tích V của khối nón (N)

- A. $V = 12\pi$. B. $V = 20\pi$. C. $V = 36\pi$. D. $V = 60\pi$.

Lời giải.

Gọi l là đường sinh của hình nón, ta có $l = \sqrt{R^2 + h^2}$.

Diện tích xung quanh của hình nón là 15π , suy ra $15\pi = \pi R l \Leftrightarrow 15 = 3 \cdot \sqrt{3^2 + h^2} \Leftrightarrow h = 4$

Thể tích khối nón là $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 12\pi$ (đvtt).

Chọn đáp án (A) □

Câu 434. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h . Tính thể tích V của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ đã cho.

- A. $V = \frac{\pi a^2 h}{9}$. B. $V = \frac{\pi a^2 h}{3}$. C. $V = 3\pi a^2 h$. D. $V = \frac{\pi a^2 h}{9}$.

Lời giải.

Khối trụ ngoại tiếp lăng trụ tam giác đều có hình tròn đáy là hình tròn ngoại tiếp tam giác đáy của lăng trụ, và chiều cao bằng chiều cao lăng trụ.

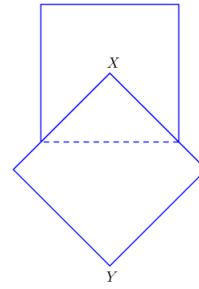
Tam giác đều cạnh a có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $\frac{\sqrt{3}a}{3}$.

Vậy thể tích của khối trụ cần tìm là $V = h \cdot S = h \cdot \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}a}{3}\right)^2 = \frac{\pi a^2 h}{3}$ (đvtt).

Chọn đáp án (B) □

Câu 435. Cho hai hình vuông có cùng cạnh bằng 5

được xếp chồng lên nhau sao cho đỉnh X của một hình vuông là tâm của hình vuông còn lại (như hình vẽ). Tính thể tích V của vật thể tròn xoay khi quay mô hình trên xung quanh trục XY .



A. $V = \frac{125(1 + \sqrt{2})\pi}{6}$.

B. $V = \frac{125(5 + 2\sqrt{2})\pi}{12}$.

C. $V = \frac{125(5 + 4\sqrt{2})\pi}{24}$.

D. $V = \frac{125(2 + \sqrt{2})\pi}{4}$.

Lời giải.

Thể tích hình trụ được tạo thành từ hình vuông $ABCD$ là $V_T = \pi R^2 h = \frac{125\pi}{4}$

Thể tích khối tròn xoay được tạo thành từ hình vuông $XEYF$ là $V_{2N} = \frac{2}{3}\pi R^2 h = \frac{125\pi\sqrt{2}}{6}$

Thể tích khối tròn xoay được tạo thành từ tam giác XDC là $V_{N'} = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{125\pi}{24}$

Thể tích cần tìm $V = V_T + V_{2N} - V_{N'} = 125\pi \frac{5 + 4\sqrt{2}}{24}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 436. Trong không gian cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = a$ và $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Tính thể tích V của khối nón nhận được khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC .

A. $V = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$.

B. $V = \sqrt{3}\pi a^3$.

C. $V = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{9}$.

D. $V = \pi a^3$.

Lời giải.

Khối nón nhận được khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC có bán kính đáy là $AB = a$, đường cao là $AC = \sqrt{3}a$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 437 (QG17,101). Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các cạnh đều bằng $a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối nón có đỉnh S và đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$.

A. $V = \frac{\pi a^3}{2}$.

B. $V = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{6}$.

C. $V = \frac{\pi a^3}{6}$.

D. $V = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{2}$.

Lời giải.

Chọn đáp án **C** □

Câu 438. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AD = 8$, $CD = 6$, $AC' = 12$. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ có hai đường tròn đáy là hai đường tròn ngoại tiếp hai hình chữ nhật $ABCD$ và $A'B'C'D'$.

A. $S_{tp} = 576\pi$.

B. $S_{tp} = 10(2\sqrt{11} + 5)\pi$.

C. $S_{tp} = 26\pi$.

D. $S_{tp} = 5(4\sqrt{11} + 5)\pi$.

Lời giải.

Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 10$,

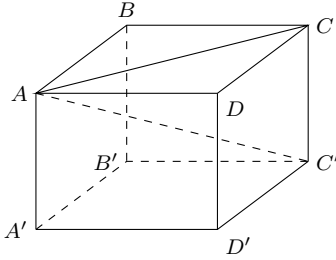
$CC' = \sqrt{AC'^2 - AC^2} = 2\sqrt{11}$.

Do đó hình trụ có bán kính đáy là $r = \frac{AC}{2} = 5$,

đường sinh $l = CC' = 2\sqrt{11}$.

Vậy $S_{tp} = 2\pi rl + 2\pi r^2 = 10(2\sqrt{11} + 5)\pi$.

Chọn đáp án (B) □



Câu 439. Tính thể tích V của khối trụ ngoại tiếp hình lập phương có cạnh bằng a .

- A. $V = \frac{\pi a^3}{4}$. B. $V = \pi a^3$. C. $V = \frac{\pi a^3}{6}$. D. $V = \frac{\pi a^3}{2}$.

Lời giải.

$$V = Bh = \pi R^2 h = \pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 a = \pi \frac{a^3}{2}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 440. Cho mặt cầu (S) tâm O , bán kính $R = 3$. Mặt phẳng (P) cách O một khoảng bằng 1 và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có tâm (H) . Gọi T là giao điểm của tia HO với (S) , tính thể tích V của khối nón có đỉnh T và đáy là hình tròn (C) .

- A. $V = \frac{32\pi}{3}$. B. $V = 16\pi$. C. $V = \frac{16\pi}{3}$. D. $V = 32\pi$.

Lời giải.

Ta có $SH = 4, r = \sqrt{R^2 - HO^2} = 2\sqrt{2}$. Vậy $V = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \pi \cdot 8 = \frac{32\pi}{3}$

Chọn đáp án (A) □

Câu 441. Cho hình nón (N) có đường sinh tạo với đáy một góc 60° . Mặt phẳng qua trục của (N) cắt (N) được thiết diện là một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1. Tính thể tích V của khối nón giới hạn bởi (N) .

- A. $V = 9\sqrt{3}\pi$. B. $V = 9\pi$. C. $V = 3\sqrt{3}\pi$. D. $V = 3\pi$.

Lời giải.

Thiết diện qua trục của (N) là tam giác cân ở đỉnh, đường sinh tạo với đáy một góc 60° suy ra thiết diện tam giác đều.

Tam giác đều có tâm đường tròn nội tiếp trùng với trọng tâm, từ đó tính được cạnh của tam giác thiết diện là $\frac{6}{\sqrt{3}}$ và đường cao là 3. $V = \frac{1}{3} \pi \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{\sqrt{3}} \right)^2 \cdot 3 = 3\pi$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 442. Cho hình nón đỉnh S có chiều cao $h = a$ và bán kính đáy $r = 2a$. Mặt phẳng (P) đi qua S cắt đường tròn đáy tại A và B sao cho $AB = 2\sqrt{3}a$. Tính khoảng cách d từ tâm của đường tròn đáy đến (P) .

- A. $d = \frac{\sqrt{3}a}{2}$. B. $d = a$. C. $d = \frac{\sqrt{5}a}{5}$. D. $d = \frac{\sqrt{2}a}{2}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm AB , O là tâm đường tròn đáy và K là hình chiếu của O lên SH . Khi đó khoảng cách giữa O và (P) là $d = OK$. Ta có $AH = a\sqrt{3}$, $OA = r = 2a$ nên $OH = a$. $\triangle SOH$ vuông cân tại O nên $OK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án **(D)** □

2. Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, độ dài đường sinh, chiều cao, bán kính đáy, t

Câu 443. Diện tích xung quanh của hình trụ tròn xoay có bán kính đáy r và độ dài đường sinh l bằng

- A. πrl . B. $4\pi rl$. C. $2\pi rl$. D. $\frac{4}{3}\pi rl$.

Lời giải.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 444. Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = a$ và $AC = \sqrt{3}a$. Tính độ dài đường sinh l của hình nón, nhận được khi quay tam giác ABC xung quanh trục AB .

- A. $l = a$. B. $l = \sqrt{2}a$. C. $l = \sqrt{3}a$. D. $l = 2a$.

Lời giải.

Đường sinh của hình nón có độ dài bằng đoạn $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 445. Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng $3\pi a^2$ và bán kính đáy bằng a . Tính độ dài đường sinh l của hình nón đã cho.

- A. $l = \frac{\sqrt{5}a}{2}$. B. $l = 2\sqrt{2}a$. C. $l = \frac{3a}{2}$. D. $l = 3a$.

Lời giải.

$$S_{xq} = \pi Rl \Rightarrow l = \frac{S_{xq}}{\pi R} = \frac{3\pi a^2}{\pi a} = 3a.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 446. Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng $3\pi a^2$ và bán kính đáy bằng a . Độ dài đường sinh của hình nón đã cho bằng

- A. $2\sqrt{2}a$. B. $3a$. C. $2a$. D. $\frac{3a}{2}$.

Lời giải.

$$S_{xq} = \pi rl = \pi \cdot a \cdot l = 3\pi a^2 \Rightarrow l = 3a \text{ Vậy } l = 3a$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 447. Trong không gian, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 1$ và $AD = 2$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Quay hình chữ nhật đó xung quanh trục MN , ta được một hình trụ. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ đó.

- A. $S_{tp} = 4\pi$. B. $S_{tp} = 2\pi$. C. $S_{tp} = 6\pi$. D. $S_{tp} = 10\pi$.

Lời giải.

Hình trụ có bán kính đáy $r = 1$, chiều cao $h = 1$ nên có $S_{\varphi} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 4\pi$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 448. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 4. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ có một đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tam giác BCD và chiều cao bằng chiều cao của tứ diện $ABCD$

A. $S_{xq} = \frac{15\sqrt{2}\pi}{3}$. B. $S_{xq} = 8\sqrt{2}\pi$. C. $S_{xq} = \frac{15\sqrt{3}\pi}{3}$. D. $S_{xq} = 8\sqrt{3}\pi$.

Lời giải.

Tứ diện đều cạnh a có chiều cao $h = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow h = \frac{4\sqrt{6}}{3}$. Tam giác BCD đều nên bán kính đường tròn nội tiếp tam giác $r = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{4\sqrt{3}}{6}$. Diện tích xung quanh hình trụ $S = 2\pi rh = 2\pi \cdot \frac{4\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{4\sqrt{6}}{3} = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3}$.

Chọn đáp án **(A)** □

3. Bài toán thực tế về khối nón, khối trụ.

Câu 449. Một chiếc bút chì có dạng khối lăng trụ lục giác đều có cạnh đáy $3mm$ và chiều cao bằng $200mm$. Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều dài của bút và đáy là hình tròn có bán kính $1mm$. Giả định $1m^3$ gỗ có giá a triệu đồng, $1m^3$ than chì có giá $9a$ triệu đồng. Khi đó giá nguyên liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào dưới đây?

A. $97,03a$ (đồng).. B. $10,33a$ (đồng).. C. $9,7a$ (đồng).. D. $103,3a$ (đồng)..

Lời giải.

$$S_{day} = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 = \frac{27\sqrt{3}}{2} \quad V_{go} = \frac{27\sqrt{3}}{2} \cdot 200 = 2700\sqrt{3}; \quad V_{ruot\ chi} = \pi \cdot R^2 \cdot h = 200\pi.$$

$1m^3$ có giá a triệu đồng $\Rightarrow 1mm^3$ có giá $\frac{a}{1000}$ đồng.

Tổng số tiền cần chi mua nguyên liệu là:

$$V_{go} \cdot \frac{a}{1000} + V_{ruot\ chi} \cdot \frac{9a}{1000} = (2700\sqrt{3} - 200\pi) \cdot \frac{a}{1000} + 200\pi \cdot \frac{9a}{1000} \simeq 9,7a.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 450. Một chiếc bút chì khối lăng trụ lục giác đều có cạnh đáy 3 mm và chiều cao bằng 200 mm . Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều dài của bút chì và đáy là hình tròn bán kính 1 mm . Giả định 1 m^3 gỗ có giá trị a (triệu đồng), 1 m^3 than chì có giá trị $8a$ (triệu đồng). khi đó giá nguyên vật liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào sau đây?

A. $9,7.a$ (đồng). B. $97,03.a$ (đồng). C. $90,7.a$ (đồng). D. $9,07.a$ (đồng).

Lời giải.

Thể tích phần phần lõi được làm bằng than chì: $V_r = \pi R^2 h = \pi \cdot 10^{-6} \cdot 0,2 = 0,2 \cdot 10^{-6} \pi \text{ m}^3$.

Thể tích chiếc bút chì khối lăng trụ lục giác đều:

$$V = B \cdot h = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot (3 \cdot 10^{-3})^2 \cdot (0,2) = \frac{27\sqrt{3}}{10} \cdot 10^{-6} \text{ m}^3.$$

Thể tích phần thân bút chì được làm bằng gỗ: $V_t = V - V_r = \frac{27\sqrt{3}}{10} \cdot 10^{-6} - 0,2 \cdot 10^{-6} \pi \text{ m}^3$.

Giá nguyên vật liệu làm một chiếc bút chì:

$$0,2 \cdot 10^{-6} \pi \cdot 8a + \left(\frac{27\sqrt{3}}{10} \cdot 10^{-6} - 0,2 \cdot 10^{-6} \pi \right) a \approx 9,07 \cdot 10^{-6} \cdot a \text{ (triệu đồng)}.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 451. Một chiếc bút chì có dạng khối lăng trụ lục giác đều có cạnh đáy 3 mm và chiều cao 200 mm. Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều dài của bút và đáy là hình tròn có bán kính 1 mm. Giả định 1 m³ gỗ có giá α (triệu đồng), 1m³ than chì có giá 7α (triệu đồng). Khi đó giá nguyên vật liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào dưới đây?

- A. $84,5\alpha$ (đồng). B. $9,07\alpha$ (đồng). C. $8,45\alpha$ (đồng). D. $90,07\alpha$ (đồng).

Lời giải.

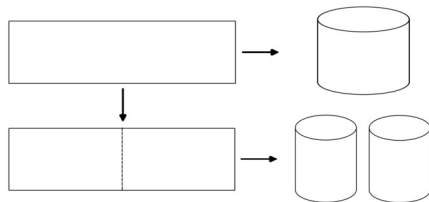
Chọn đáp án **C**

□

Câu 452. Từ một tấm tôn hình chữ nhật kích thước 50cm $\times$ 240cm, người ta làm các thùng đựng nước hình trụ có chiều cao bằng 50cm, theo hai cách sau (xem hình minh họa dưới đây) :

- Cách 1 : Gò tấm tôn ban đầu thành mặt xung quanh của thùng.
- Cách 2 : Cắt tấm tôn ban đầu thành hai tấm bằng nhau, rồi gò mỗi tấm đó thành mặt xung quanh của một thùng.

Kí hiệu V_1 là thể tích của thùng gò được theo cách 1 và V_2 là tổng thể tích của hai thùng gò được theo cách 2. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.



- A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}$. B. $\frac{V_1}{V_2} = 1$. C. $\frac{V_1}{V_2} = 2$. D. $\frac{V_1}{V_2} = 4$.

Lời giải.

Một đường tròn có bán kính r thì có chu vi và diện tích lần lượt là $C = 2\pi r$; $S = \pi r^2 \Rightarrow S = \frac{C^2}{4\pi}$.

Gọi chiều dài tấm tôn là a thì tổng diện tích đáy của thùng theo 2 cách lần lượt là

$$S_1 = \frac{a^2}{4\pi}; S_2 = 2 \cdot \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{4\pi} = \frac{a^2}{8\pi} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = 2 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = 2.$$

Chọn đáp án **C**

□

§2. Mặt cầu

1. Bài toán sử dụng định nghĩa, tính chất, vị trí tương đối.

Câu 453. Cho mặt cầu bán kính R ngoại tiếp một hình lập phương cạnh a . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a = 2\sqrt{3}R$. B. $a = \frac{\sqrt{3}R}{3}$. C. $a = 2R$. D. $a = \frac{2\sqrt{3}R}{3}$.

Lời giải.

Hình lập phương có độ dài đường chéo là $a\sqrt{3}$. Từ đó bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương là $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Do vậy $a = \frac{2\sqrt{3}R}{3}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 454. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp một hình lập phương có cạnh bằng $2a$.

- A. $R = \frac{\sqrt{3}a}{3}$. B. $R = a$. C. $R = 2\sqrt{3}a$. D. $R = \sqrt{3}a$.

Lời giải.

Cạnh hình lập phương bằng $2a$ nên đường chéo hình lập phương bằng $2a\sqrt{3}$ do đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương bằng $a\sqrt{3}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 455. Diện tích mặt cầu bán kính R bằng

- A. $\frac{4}{3}\pi R^2$. B. $2\pi R^2$. C. $4\pi R^2$. D. πR^2 .

Lời giải.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 456. Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác BCD vuông tại C , AB vuông góc với mặt phẳng (BCD) , $AB = 5a$, $BC = 3a$ và $CD = 4a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

- A. $R = \frac{5a\sqrt{2}}{3}$. B. $R = \frac{5a\sqrt{3}}{3}$. C. $R = \frac{5a\sqrt{2}}{2}$. D. $R = \frac{5a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Có } DB = 5a \Rightarrow R = \sqrt{\left(\frac{DB}{2}\right)^2 + \left(\frac{AB^2}{2}\right)} = \frac{5a\sqrt{2}}{2}$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 457 (QG17,102). Cho mặt cầu (S) có bán kính bằng 4, hình trụ (H) có chiều cao bằng 4 và hai đường tròn đáy nằm trên (S) . Gọi V_1 là thể tích của khối trụ (H) và V_2 là thể tích của khối cầu (S) . Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

- A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{9}{16}$. B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{3}$. C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{16}$. D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $V_2 = \frac{256\pi}{3}$. Bán kính đáy của trụ $r = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$, suy ra $V_1 = 4 \cdot \pi (2\sqrt{3})^2 = 48\pi$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 458. Cho hình trụ có diện tích xung quanh bằng 50π và độ dài đường sinh bằng đường kính của đường tròn đáy. Tính bán kính r của đường tròn đáy.

- A. $r = \frac{5\sqrt{2}\pi}{2}$. B. $r = 5$. C. $r = 5\sqrt{\pi}$. D. $r = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } S_{xq} = 2\pi \cdot r \cdot l = 2\pi \cdot r \cdot 2r = 50\pi \Rightarrow r = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 459. Trong tất cả các hình chóp tứ giác đều nội tiếp mặt cầu có bán kính bằng 9, tính thể tích V của khối chóp có thể tích lớn nhất.

A. $V = 144$.

B. $V = 576$.

C. $V = 576\sqrt{2}$.

D. $V = 144\sqrt{6}$.

Lời giải.

Gọi $OH = x$.

Khi đó độ dài cạnh đáy của chóp là $\sqrt{2(81 - x^2)}$.

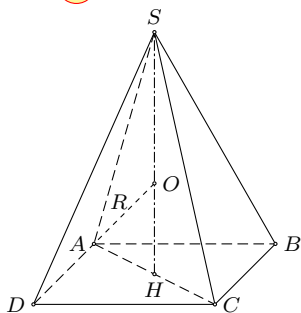
Vậy $V = f(x) = \frac{2}{3}(9 + x)(81 - x^2)$.

$f'(x) = \frac{2}{3}(x + 9)(9 - 3x)$.

Vậy thể tích lớn nhất khi $x = 3$, với $V = 576$

Chọn đáp án **(B)**

□



2. Khôi cầu ngoại tiếp khối đa diện.

Câu 460. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = 3a$, $BC = 4a$, $SA = 12a$ và SA vuông góc với đáy. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $R = \frac{5a}{2}$.

B. $R = \frac{17a}{2}$.

C. $R = \frac{13a}{2}$.

D. $R = 6a$.

Lời giải.

Theo giả thiết ta suy ra $\widehat{SAC} = \widehat{SBC} = \widehat{SDC} = 90^\circ$.

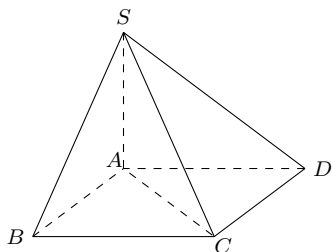
Do đó mặt cầu ngoại tiếp $S.ABCD$ có đường kính là SC .

Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5a$, $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 13a$.

Vậy $R = \frac{SC}{2} = \frac{13a}{2}$

Chọn đáp án **(C)**

□



Câu 461. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = 2a$ và $AA' = 2a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABB'C'$.

A. $R = 3a$.

B. $R = \frac{3a}{4}$.

C. $R = \frac{3a}{2}$.

D. $R = 2a$.

Lời giải.

Ta có $\widehat{AB'C'} = \widehat{ABC'} = 90^\circ$ nên mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABB'C'$ có đường kính AC' .

Do đó bán kính là $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + (2a)^2 + (2a)^2} = \frac{3a}{2}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 462. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $3\sqrt{2}a$, cạnh bên bằng $5a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

- A. $R = \sqrt{3}a$. B. $R = \sqrt{2}a$. C. $R = \frac{25a}{8}$. D. $R = 2a$.

Lời giải.

Xác định nhanh: $ABCD$ là hình vuông nên tâm cầu ngoại tiếp tứ giác nằm trên OS . $ABCD$ là hình vuông cạnh $3\sqrt{2}a \Rightarrow OD = 3a$.

Tọa độ hóa tứ giác đều như sau:

Gốc tọa độ tại O là tâm hình vuông $ABCD$.

Ox trùng với tia OD (chiều dương từ O đến D).

Oy trùng với tia OC (chiều dương từ O đến C).

Oz trùng với tia OS (chiều dương từ O đến S).

Ta được tọa độ điểm: $O(0; 0; 0)$, $S(0; 0; 4a)$, $D(3a; 0; 0)$.

$$\text{Phương trình } OS : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0(t \in \mathbb{R}) \\ z = 4t \end{cases} I \in OS \Rightarrow I(0; 0; 4t)$$

I là tâm mặt cầu tứ diện nên $IS = ID \Leftrightarrow 16(a - t)^2 = 6a^2 + 16t^2 \Leftrightarrow t = \frac{7}{32}a$.

Suy ra $I\left(0; 0; \frac{7}{8}a\right) \Rightarrow IS = R = \frac{25}{8}a$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 463. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 1, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

- A. $V = \frac{5\sqrt{15}\pi}{18}$. B. $V = \frac{5\sqrt{15}\pi}{54}$. C. $V = \frac{4\sqrt{3}\pi}{27}$. D. $V = \frac{5\pi}{3}$.

Lời giải.

Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm AB , tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle SAB$, tâm cầu ngoại tiếp chóp và tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle SBC \Rightarrow MNPQ$ là hình vuông suy ra

$$PN = MQ = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}; NB = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Bán kính hình cầu ngoại tiếp chóp là $R = PB = \sqrt{PN^2 + NB^2} = \frac{\sqrt{15}}{6}$.

$$\text{Thể tích } V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{5\sqrt{15}\pi}{54}.$$

Chọn đáp án **B** □

3. Bài toán tổng hợp về khối nón, khối trụ, khối cầu.

Câu 464. Cho mặt cầu tâm O , bán kính R . Xét mặt phẳng (P) thay đổi cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn (C) . Hình nón (N) có đỉnh S nằm trên mặt cầu, có đáy là đường tròn (C) và có chiều cao là $h(h > R)$. Tính h để thể tích khối nón được tạo nên bởi (N) có giá trị lớn nhất.

- A. $h = \sqrt{3}R$. B. $h = \sqrt{2}R$. C. $h = \frac{4R}{3}$. D. $h = \frac{3R}{2}$.

Lời giải.

Gọi I là tâm mặt cầu và H , r là tâm và bán kính của (C) .

Ta có $IH = h - R$ và $r^2 = R^2 - IH^2 = 2Rh - h^2$.

Thể tích khối nón $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3}h(2Rh - h^2) = \frac{\pi}{3}h.h.(2R - h)$.

Ta có $h.h.(4R - 2h) \leq \left(\frac{h + h + 4R - 2h}{3}\right)^3 = \left(\frac{4R}{3}\right)^3 \Rightarrow h^2(2R - h) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4R}{3}\right)^3$.

Do đó V lớn nhất khi $h = 4R - 2h \Leftrightarrow h = \frac{4R}{3}$.

Chọn đáp án **C**

□

Chương 3. Phương pháp tọa độ trong không gian

§1. Hệ tọa độ trong không gian

1. Tìm tọa độ điểm, véc-tơ liên quan đến hệ trục Oxyz.

Câu 465. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -4; 3)$ và $B(2; 2; 7)$. Trung điểm của đoạn AB có tọa độ là

A. $(1; 3; 2)$.

B. $(2; 6; 4)$.

C. $(2; -1; 5)$.

D. $(4; -2; 10)$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB . Khi đó
$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = 2 \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = -1 \\ z_M = \frac{z_A + z_B}{2} = 5 \end{cases} \Rightarrow M(2; -1; 5).$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 466 (QG17,102). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2; 2; 1)$. Tính độ dài đoạn thẳng OA .

A. $OA = 3$.

B. $OA = 9$.

C. $OA = \sqrt{5}$.

D. $OA = 5$.

Lời giải.

Ta có $OA = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 467. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(2; 3; -1)$, $N(-1; 1; 1)$ và $P(1; m - 1; 2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N .

A. $m = -6$.

B. $m = 0$.

C. $m = -4$.

D. $m = 2$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{NM} = (3; 2; -2)$ và $\overrightarrow{NP} = (2; m - 2; 1)$.

Tam giác MNP vuông tại N khi và chỉ khi $\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NP} = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 468. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{a} = (2; 1; 0)$ và $\vec{b} = (-1; 0; -2)$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{25}$.

B. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{2}{5}$.

$$\text{C. } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{2}{25}.$$

$$\text{D. } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{5}.$$

Lời giải.

$$\text{Ta có } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-2)}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = -\frac{2}{5}$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 469. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; -2; 3)$ và $B(-1; 2; 5)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB .

$$\text{A. } I(-2; 2; 1).$$

$$\text{B. } I(1; 0; 4).$$

$$\text{C. } I(2; 0; 8).$$

$$\text{D. } I(2; -2; -1).$$

Lời giải.

Tọa độ trung điểm I của đoạn AB với $A(3; -2; 3)$ và $B(-1; 2; 5)$ được tính bởi $I(1; 0; 4)$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 470. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho các điểm $A(3; -4; 0)$, $B(-1; 1; 3)$ và $C(3; 1; 0)$. Tìm tọa độ điểm D trên trục hoành sao cho $AD = BC$.

$$\text{A. } D(-2; 0; 0) \text{ hoặc } D(-4; 0; 0).$$

$$\text{B. } D(0; 0; 0) \text{ hoặc } D(-6; 0; 0).$$

$$\text{C. } D(6; 0; 0) \text{ hoặc } D(12; 0; 0).$$

$$\text{D. } D(0; 0; 0) \text{ hoặc } D(6; 0; 0).$$

Lời giải.

$$\text{Ta có } D \in Ox \text{ nên } D(a; 0; 0). \text{ Mặt khác } AD = BC \text{ hay } \sqrt{(a-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ a = 0 \end{cases}$$

Chọn đáp án **(D)**

□

2. Tích vô hướng và ứng dụng.

Câu 471. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 0; 2)$ và đi qua điểm $A(0; 1; 1)$. Xét các điểm B, C, D thuộc (S) sao cho AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng

$$\text{A. } \frac{8}{3}.$$

$$\text{B. } 4.$$

$$\text{C. } \frac{4}{3}.$$

$$\text{D. } 8.$$

Lời giải.

Chọn đáp án **(C)**

□

3. Phương trình mặt cầu (xác định tâm, bán kính, viết PT mặt cầu đơn giản, vị trí tương đối)

Câu 472. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 2$. Tâm của (S) có tọa độ là

$$\text{A. } (-3; -1; 1) ..$$

$$\text{B. } (-3; 1; -1) ..$$

$$\text{C. } (3; -1; 1) ..$$

$$\text{D. } (3; 1; -1) ..$$

Lời giải.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 473. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): (x-5)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 3$ có bán kính bằng

$$\text{A. } \sqrt{3}.$$

$$\text{B. } 2\sqrt{3}.$$

$$\text{C. } 3.$$

$$\text{D. } 9.$$

Lời giải.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 474. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu

$$(S) : (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 9.$$

Tìm tọa độ tâm I và tính bán kính R của (S) .

A. $I(-1; 2; 1)$ và $R = 3$.

B. $I(1; -2; -1)$ và $R = 3$.

C. $I(-1; 2; 1)$ và $R = 9$.

D. $I(1; -2; -1)$ và $R = 9$.

Lời giải.

$I(-1; 2; 1)$ và $R = 3$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 475. Trong không gian với hệ tọa độ, $Oxyz$ tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 4)^2 = 20.$$

A. $I(-1; 2; -4), R = 5\sqrt{2}$.

B. $I(-1; 2; -4), R = 2\sqrt{5}$.

C. $I(-1; 2; -4), R = 20$.

D. $I(1; -2; 4), R = 2\sqrt{5}$.

Lời giải.

Mặt cầu $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 4)^2 = 20$ có tâm $I(1; -2; 4)$, bán kính $R = 2\sqrt{5}$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 476. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2; 0; 0)$, $B(0; -2; 0)$ và $C(0; 0; -2)$.

Gọi D là điểm khác O sao cho DA, DB, DC đôi một vuông góc với nhau và $I(a; b; c)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Tính $S = a + b + c$.

A. $S = -4$.

B. $S = -1$.

C. $S = -2$.

D. $S = -3$.

Lời giải.

Nhận xét $OA = OB = OC$ và OA, OB, OC đôi một vuông góc.

Do đó ta có thể xét trường hợp D là điểm đối xứng với O qua ABC .

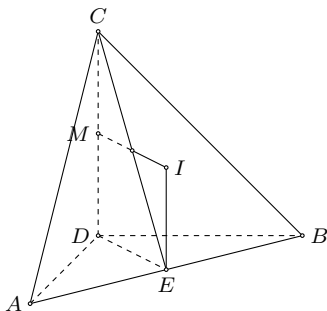
Khi đó $D\left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right)$.

Từ $\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{DE}$,
dẫn đến $I\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

Vậy $S = -1$.

Chọn đáp án **B**

□



4. Các bài toán cực trị.

Câu 477 (QG17,102). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z + m = 0$ là phương trình của một mặt cầu.

- A. $m > 6$. B. $m \geq 6$. C. $m \leq 6$. D. $m < 6$.

Lời giải.

Phương trình đã cho là phương trình của một mặt cầu khi $1 + 1 + 4 - m > 0 \Leftrightarrow m < 6$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 478. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : x^2 + (y + 2)^2 + (z - 2)^2 = 8$. Tìm bán kính R của (S) .

- A. $R = 8$. B. $R = 4$. C. $R = 2\sqrt{2}$. D. $R = 64$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có bán kính $R = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 479. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : (x - 5)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 9$. Tính bán kính R của (S) .

- A. $R = 3$. B. $R = 18$. C. $R = 9$. D. $R = 6$.

Lời giải.

Bán kính $R = \sqrt{9} = 3$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 480. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-2; 1; 2)$ và đi qua điểm $A(1; -2; -1)$. Xét các điểm B, C, D thuộc (S) sao cho AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng

- A. 72. B. 216. C. 108. D. 36.

Lời giải.

Đặt $AB = a, AC = b, AD = c$ thì $ABCD$ là tứ diện vuông đỉnh A , nội tiếp mặt cầu (S) .

Khi đó $ABCD$ là tứ diện đặt ở góc A của hình hộp chữ nhật tương ứng có các cạnh AB, AC, AD và đường chéo AA' là đường kính của cầu. Ta có $a^2 + b^2 + c^2 = 4R^2$.

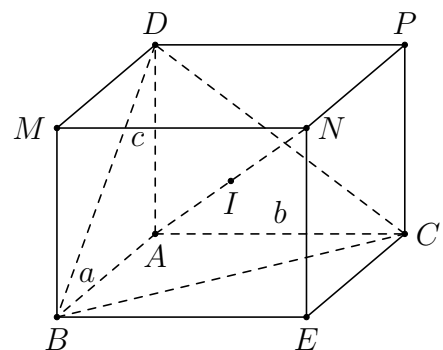
Xét $V = V_{ABCD} = \frac{1}{6}abc \Leftrightarrow V^2 = \frac{1}{36}a^2b^2c^2$.

Mà $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \Leftrightarrow \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}\right)^3 \geq a^2b^2c^2 \Leftrightarrow \left(\frac{4R^2}{3}\right)^3 \geq 36.V^2 \Leftrightarrow V \leq R^3 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{27}$

Với $R = IA = 3\sqrt{3}$.

Vậy $V_{\max} = 36$.

Chọn đáp án **(D)** □



Câu 481. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$ và đi qua điểm $A(5; -2; -1)$. Xét các điểm B, C, D thuộc mặt cầu (S) sao cho AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng?

A. 256..

B. 128..

C. $\frac{256}{3}$..

D. $\frac{128}{3}$..

Lời giải.

Đặt $AB = a, AC = b, AD = c$ thì $ABCD$ là tứ diện vuông đỉnh A , nội tiếp mặt cầu (S) .

Khi đó $ABCD$ là tứ diện đặt ở góc A của hình hộp chữ nhật tương ứng có các cạnh AB, AC, AD và đường chéo AA' là đường kính của cầu. Ta có $a^2 + b^2 + c^2 = 4R^2$.

Xét $V = V_{ABCD} = \frac{1}{6}abc \Leftrightarrow V^2 = \frac{1}{36}a^2b^2c^2$.

Mà $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \Leftrightarrow \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}\right)^3 \geq a^2b^2c^2 \Leftrightarrow \left(\frac{4R^2}{3}\right)^3 \geq 36.V^2 \Leftrightarrow V \leq R^3 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{27}$

Với $R = IA = 4\sqrt{3} \Rightarrow V \leq \frac{256}{3}$. Vậy $V_{\max} = \frac{256}{3}$.

Chọn đáp án **C**

□

§2. Phương trình mặt phẳng

1. Tích có hướng và ứng dụng.

Câu 482. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Oxy) ?

A. $\vec{i} = (1; 0; 0)$.

B. $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

C. $\vec{j} = (0; 1; 0)$.

D. $\vec{m} = (1; 1; 1)$.

Lời giải.

$\vec{k} = (0; 0; 1)$ là vectơ đơn vị của trục Oz nên là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Oxy)

Chọn đáp án **B**

□

Câu 483. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(1; 2; -3)$ và có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; -2; 3)$?

A. $x - 2y + 3z - 12 = 0$.

B. $x - 2y - 3z + 6 = 0$.

C. $x - 2y + 3z + 12 = 0$.

D. $x - 2y - 3z - 6 = 0$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ ta được:

$$(x - 1) - 2(y - 2) + 3(z + 3) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 3z + 12 = 0.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 484. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): 2x + 3y + z - 1 = 0$ có một vectơ pháp tuyến là

A. $\vec{n}_4 = (2; 3; 1)$..

B. $\vec{n}_2 = (-1; 3; 2)$..

C. $\vec{n}_1 = (2; 3; -1)$..

D. $\vec{n}_3 = (1; 3; 2)$..

Lời giải.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 485 (QG17,102). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng (Oyz) ?

A. $y = 0$.

B. $x = 0$.

C. $y - z = 0$.

D. $z = 0$.

Lời giải.

Mặt phẳng (Oyz) vuông góc với trục Ox do đó nó nhận $(1, 0, 0)$ là véc-tơ pháp tuyến, hơn nữa (Oyz) đi qua điểm $O(0, 0, 0)$. Vậy phương trình mặt phẳng (Oyz) là $1(x-0)+0(y-0)+0(z-0) = 0$ hay $x = 0$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 486 (QG17,102). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(4; 0; 1)$ và $B(-2; 2; 3)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB ?

A. $3x - y - z = 0$.

B. $3x + y + z - 6 = 0$.

C. $3x - y - z + 1 = 0$.

D. $6x - 2y - 2z - 1 = 0$.

Lời giải.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 487. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha) : x + y + z - 6 = 0$. Điểm nào dưới đây **không**thuộc (α) ?

A. $N(2; 2; 2)$.

B. $Q(3; 3; 0)$.

C. $P(1; 2; 3)$.

D. $M(1; -1; 1)$.

Lời giải.

Thay tọa độ của M vào phương trình mặt phẳng (α) ta được $1 - 1 + 1 - 6 = -5 \neq 0 \Rightarrow M \notin (\alpha)$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 488. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3; -1; -2)$ và mặt phẳng $(\alpha) : 3x - y + 2z + 4 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua M và song song với (α)

A. $3x + y - 2z - 14 = 0$.

B. $3x - y + 2z + 6 = 0$.

C. $3x - y + 2z - 6 = 0$.

D. $3x - y - 2z + 6 = 0$.

Lời giải.

Mặt phẳng song song với (α) và qua điểm M là $3x - y + 2z - 6 = 0$.

Chọn đáp án **(C)** □

2. Xác định VTPT.

Câu 489. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P) : x + 2y + 3z - 5 = 0$ có một véc-tơ pháp tuyến là

A. $\vec{n}_1 = (3; 2; 1)$.

B. $\vec{n}_3 = (-1; 2; 3)$.

C. $\vec{n}_4 = (1; 2; -3)$.

D. $\vec{n}_2 = (1; 2; 3)$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(P) : x + 2y + 3z - 5 = 0$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_2 = (1; 2; 3)$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 490. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P) : 2x + y + 3z - 1 = 0$ có một vectơ pháp tuyến là

A. $\vec{n}_4 = (1; 3; 2)$.

B. $\vec{n}_1 = (3; 1; 2)$.

C. $\vec{n}_3 = (2; 1; 3)$.

D. $\vec{n}_2 = (-1; 3; 2)$.

Lời giải.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 491. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : 3x - z + 2 = 0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (P) ?

- A. $\vec{n}_4 = (-1; 0; -1)$. B. $\vec{n}_1 = (3; -1; 2)$. C. $\vec{n}_3 = (3; -1; 0)$. D. $\vec{n}_2 = (3; 0; -1)$.

Lời giải.

Có $(P): 3x + 0y - z + 2 = 0$ nên $(3; 0; -1)$ là 1 VTPT của (P) . Chọn D.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 492. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; 1; 1)$, $B(2; 1; 0)$, $C(1; -1; 2)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC có phương trình là

- A. $x + 2y - 2z + 1 = 0$. B. $x + 2y - 2z - 1 = 0$.
C. $3x + 2z - 1 = 0$. D. $3x + 2z + 1 = 0$.

Lời giải.

Chọn đáp án **(A)** □

3. Viết phương trình mặt phẳng.

Câu 493. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $A(2; -1; 2)$ và song song với mặt phẳng $(P): 2x - y + 3z + 2 = 0$ có phương trình là

- A. $2x - y + 3z - 9 = 0$. B. $2x - y + 3z + 11 = 0$.
C. $2x - y - 3z + 11 = 0$. D. $2x - y + 3z - 11 = 0$.

Lời giải.

Gọi mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P) , mặt phẳng (Q) có dạng $2x - y + 3z + D = 0$.

$A(2; -1; 2) \in (Q) \Rightarrow D = -11$.

Vậy mặt phẳng cần tìm là $2x - y + 3z - 11 = 0$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 494. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(5; -4; 2)$ và $B(1; 2; 4)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB có phương trình là

- A. $2x - 3y - z + 8 = 0$. B. $3x - y + 3z - 13 = 0$.
C. $2x - 3y - z - 20 = 0$. D. $3x - y + 3z - 25 = 0$.

Lời giải.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 495. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; 1; 1)$ và $B(1; 2; 3)$. Viết phương trình của mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB .

- A. $x + y + 2z - 3 = 0$. B. $x + y + 2z - 6 = 0$.
C. $x + 3y + 4z - 7 = 0$. D. $x + 3y + 4z - 26 = 0$.

Lời giải.

(P) nhận $\overrightarrow{AB} = (1; 1; 2)$ làm VTPT. (P) qua $A \Rightarrow (P): x + y - 1 + 2(z - 1) = 0 \Leftrightarrow x + y + 2z - 3 = 0$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 496. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1; 0; 0)$; $B(0; -2; 0)$; $C(0; 0; 3)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng (ABC) ?

A. $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{1} = 1$. B. $\frac{x}{-2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{3} = 1$. C. $\frac{x}{1} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{3} = 1$. D. $\frac{x}{3} + \frac{y}{1} + \frac{z}{-2} = 1$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn đi qua 3 điểm A, B, C là: $\frac{x}{1} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{3} = 1$

Chọn đáp án **C** □

Câu 497. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(2; 0; 0)$, $N(0; -1; 0)$ và $P(0; 0; 2)$ Mặt phẳng (MNP) có phương trình là

A. $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 0$. B. $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = -1$.
C. $\frac{x}{2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{2} = 1$. D. $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 1$.

Lời giải.

Phương trình đoạn chắn của mặt phẳng đi qua các điểm $M(2; 0; 0)$, $N(0; -1; 0)$, $P(0; 0; 2)$ là:
 $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 1$

Chọn đáp án **D** □

Câu 498. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 2; 1)$ và $B(2; 1; 0)$ Mặt phẳng qua A và vuông góc với AB có phương trình là

A. $3x - y - z - 6 = 0$. B. $3x - y - z + 6 = 0$.
C. $x + 3y + z - 5 = 0$. D. $x + 3y + z - 6 = 0$.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (3; -1; -1)$. Mặt phẳng (P) vuông góc với AB nên nhận vecto AB làm vecto pháp tuyến. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với AB là: $3(x + 1) - (y - 2) - (z - 1) = 0 \Leftrightarrow 3x - y - z + 6 = 0$

Chọn đáp án **B** □

4. Tìm tọa độ điểm liên quan đến mặt phẳng.

Câu 499. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : x - 2y + z - 5 = 0$. Điểm nào dưới đây thuộc (P) ?

A. $Q(2; -1; 5)$. B. $P(0; 0; -5)$. C. $N(-5; 0; 0)$. D. $M(1; 1; 6)$.

Lời giải.

Ta có $1 - 2.1 + 6 - 5 = 0$ nên $M \in (P)$

Chọn đáp án **D** □

Câu 500. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1; -2; 0)$, $B(0; -1; 1)$, $C(2; 1; -1)$ và $D(3; 1; 4)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt phẳng cách đều bốn điểm đó ?

A. 1 mặt phẳng. B. 4 mặt phẳng.
C. 7 mặt phẳng. D. Có vô số mặt phẳng.

Lời giải.

Ta có phương trình mặt phẳng $(ABC) : x + z - 1 = 0$

$\Rightarrow D \notin (ABC) \Rightarrow 4 A, B, C, D$ không đồng phẳng.

Gọi (P) là mặt phẳng cách đều 4 điểm A, B, C, D : Có 2 trường hợp

+ Có 1 điểm nằm khác phía với 3 điểm còn lại so với mặt phẳng (P) : Có 4 mặt phẳng (P) thỏa

mãn.

+ Mỗi phía của mặt phẳng (P) có 2 điểm: Có 3 mặt phẳng (P) thỏa mãn.

Vậy có 7 mặt phẳng thỏa mãn.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 501. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3; -1; 1)$ Hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (Oyz) là điểm

- A. $M(3; 0; 0)$. B. $N(0; -1; 1)$. C. $P(0; -1; 0)$. D. $Q(0; 0; 1)$.

Lời giải.

Khi chiếu điểm $A(3; -1; 1)$ lên mặt phẳng (Oyz) thì tung độ và cao độ giữ nguyên, hoành độ bằng 0. Vậy $N(0; -1; 1)$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 502. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 6x - 2y + z - 35 = 0$ và điểm $A(-1; 3; 6)$. Gọi A' là điểm đối xứng với A qua (P) , tính OA' .

- A. $OA' = 3\sqrt{26}$. B. $OA' = 5\sqrt{3}$. C. $OA' = \sqrt{46}$. D. $OA' = \sqrt{186}$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (P) và Δ là đường thẳng qua $A; \Delta \perp (P)$. Suy ra

$$\Delta \begin{cases} x = -1 + 6t \\ y = 3 - 2t \\ z = 6 + t \end{cases} \Rightarrow A'(11; -1; 8) \Rightarrow OA' = \sqrt{186}.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 503. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 1; 2)$ Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục $x'Ox, y'Oy, z'Oz$ lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho $OA = OB = OC \neq 0$?

- A. 3. B. 1. C. 4. D. 8.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, với $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$.

Ta có $OA = OB = OC \Leftrightarrow |a| = |b| = |c|$ và $M \in (P) \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2}{c} = 1 (*)$.

Suy ra $\begin{cases} a = b = c \\ a = -b = c \end{cases}$ và $\begin{cases} a = b = -c \\ a = -b = -c \end{cases}$, mà $a = b = -c$ không thỏa mãn điều kiện (*).

Vậy có 3 mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **A**

□

5. Khoảng cách.

Câu 504. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x + 4y + 2z + 4 = 0$ và điểm $A(1; -2; 3)$. Tính khoảng cách d từ A đến (P) .

- A. $d = \frac{5}{9}$. B. $d = \frac{5}{29}$. C. $d = \frac{5}{\sqrt{29}}$. D. $d = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải.

$$d(A; (P)) = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 + 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{29}}.$$

Chọn đáp án **C**

□

6. Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng, giữa mặt cầu và mặt phẳng.

Câu 505. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2; 1; 1)$ và mặt phẳng $(P) : 2x + y + 2z + 2 = 0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 1. Viết phương trình của mặt cầu (S) .

- A. $(S): (x + 2)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 8.$ B. $(S): (x + 2)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 10.$
 C. $(S): (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 8.$ D. $(S): (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 10.$

Lời giải.

$$\text{Có } d = d(I; (P)) = \frac{|2 \cdot 2 + 1 + 2 \cdot 1 + 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = 3.$$

Bán kính mặt cầu là $R = \sqrt{d^2 + 1^2} = \sqrt{10} \Rightarrow (S) : (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 10.$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 506. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu có tâm $I(1; 2; -1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P) : x - 2y - 2z - 8 = 0$?

- A. $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 3.$ B. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 3.$
 C. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 9.$ D. $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 9.$

Lời giải.

Gọi mặt cầu cần tìm là (S) . Ta có (S) là mặt cầu có tâm $I(1; 2; -1)$ và bán kính R .

Vì (S) tiếp xúc với mặt phẳng $(P) : x - 2y - 2z - 8 = 0$

$$\text{nên ta có } R = d(I; (P)) = \frac{|1 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) - 8|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = 3.$$

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 9.$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 507. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(3; 2; -1)$ và đi qua điểm $A(2; 1; 2)$. Mặt phẳng nào dưới đây tiếp xúc với (S) tại A ?

- A. $x + y - 3z - 8 = 0.$ B. $x - y - 3z + 3 = 0.$
 C. $x + y + 3z - 9 = 0.$ D. $x + y - 3z + 3 = 0.$

Lời giải.

$\vec{IA} = (-1; -1; 3)$ suy ra mặt phẳng đi qua $A(2; 1; 2)$ và nhận $\vec{IA} = (-1; -1; 3)$ làm VTPT là: $x + y - 3z + 3 = 0.$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 508. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1; 2; 3)$ và mặt phẳng $(P) : 2x - 2y - z - 4 = 0$. Mặt cầu tâm I tiếp xúc với (P) tại điểm H . Tìm tọa độ điểm H .

- A. $H(-1; 4; 4).$ B. $H(-3; 0; -2).$ C. $H(3; 0; 2).$ D. $H(1; -1; 0).$

Lời giải.

H là hình chiếu của điểm I lên mặt phẳng (P) . Xét (P) có một vtpt là $\vec{n} = (2; -2; -1)$

Phương trình đường thẳng qua I và vuông góc với (P) là $d : \frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{-2} = \frac{z - 3}{-1}$

Tọa độ H là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x - 2y - z - 4 = 0 \\ \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow H(3; 0; 2)$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 509. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu đi qua ba điểm $M(2; 3; 3)$, $N(2; -1; -1)$, $P(-2; -1; 3)$ và có tâm thuộc mặt phẳng $(\alpha) : 2x + 3y - z + 2 = 0$?

- A. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z - 10 = 0$. B. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z - 2 = 0$.
C. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 6z + 2 = 0$. D. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z - 2 = 0$.

Lời giải.

$I(2; -1; 3) \in (\alpha); IM = IN = IP = 4$. Vậy mặt cầu có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z - 2 = 0$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 510. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, xét các điểm $A(0; 0; 1)$, $B(m; 0; 0)$, $C(0; n; 0)$, $D(1; 1; 1)$ với $m > 0; n > 0$ và $m + n = 1$. Biết rằng khi m, n thay đổi, tồn tại một mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) và đi qua d . Tính bán kính R của mặt cầu đó?

- A. $R = 1$. B. $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $R = \frac{3}{2}$. D. $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Gọi $I(1; 1; 0)$ là hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng (Oxy)

Ta có: Phương trình của mặt phẳng (ABC) là: $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + z = 1$

Suy ra phương trình tổng quát của (ABC) là $nx + my + mnz - mn = 0$

Mặt khác $d(I, (ABC)) = \frac{|1 - mn|}{\sqrt{m^2 + n^2 + m^2n^2}} = 1$ (vì $m + n = 1$) và $ID = 1 = d(I, (ABC))$

Nên tồn tại mặt cầu tâm I (là hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng Oxy) tiếp xúc với (ABC) và đi qua D Khi đó $R = 1$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 511. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P) : x - 2y + 2z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z + 5 = 0$. Giả sử điểm $M \in (P)$ và $N \in (S)$ sao cho vectơ $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với vectơ $\vec{u}(1; 0; 1)$ và khoảng cách giữa M và N lớn nhất. Tính MN .

- A. $MN = 3$. B. $MN = 1 + 2\sqrt{2}$. C. $MN = 3\sqrt{2}$. D. $MN = 14$.

Lời giải.

Mặt cầu $(S) : (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 1$, có tâm $I(-1; 2; 1)$ và bán kính $R = 1$. Gọi Δ là

đường thẳng đi qua I và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 0; 1)$, khi đó $\Delta : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 \\ z = 1 + t \end{cases}$.

Đường thẳng Δ cắt (P) tại $M(1; 2; 3)$.

Đường thẳng Δ cắt (S) tại hai điểm $N_1\left(-1 - \frac{1}{\sqrt{2}}; 2; 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $N_2\left(-1 + \frac{1}{\sqrt{2}}; 2; 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Ta có $MN_1 = 2\sqrt{2} + 1$, $MN_2 = 2\sqrt{2} - 1$ nên ta có $MN = 2\sqrt{2} + 1$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 512. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; 1)$, $B(3; -1; 1)$ và $C(-1; -1; 1)$ Gọi S_1 là mặt cầu có tâm A , bán kính bằng 2; S_2 và S_3 là hai mặt cầu có tâm lần lượt là B, C và bán kính đều bằng 1. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu $(S_1), (S_2), (S_3)$?

A. 5.

B. 7.

C. 6.

D. 8.

Lời giải.

Gọi (P) là mặt phẳng tiếp xúc $(S_1), (S_2), (S_3)$ có phương trình dạng $ax + by + cz + d = 0$ với

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \text{ khi đó điều kiện tiếp xúc là } \begin{cases} |a + 2b + c + d| = 2 & (1) \\ |3a - b + c + d| = 1 & (2) \\ |-a - b + c + d| = 1 & (3) \end{cases} \quad (2), (3) \Leftrightarrow a =$$

0 hoặc $b = a + c + d$

$$\text{Nếu } a = 0 \text{ thì } \begin{cases} |2b + c + d| = 2 \\ |-b + c + d| = 1 \end{cases} \Rightarrow |2b + c + d| = 2|-b + c + d| \Leftrightarrow \begin{cases} c + d = 0 \Rightarrow b = 1 \text{ có 1 mặt phẳng } (P) \\ c + d = 4b \Rightarrow |3b| = 1 \text{ có 2 mặt phẳng } (P) \end{cases}$$

$$\text{Nếu } b = a + c + d \text{ thì } \begin{cases} |3b| = 2 \\ |-2a| = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{2}{3}, a = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{có 1 mặt phẳng } (P) \\ b = -\frac{2}{3}, a = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{có 1 mặt phẳng } (P) \\ b = \frac{2}{3}, a = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{có 1 mặt phẳng } (P) \\ b = -\frac{2}{3}, a = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{có 1 mặt phẳng } (P) \end{cases}.$$

Vậy có 7 mặt phẳng thỏa đề bài.

Chọn đáp án **(B)** □

§3. Phương trình đường thẳng trong không gian

1. Xác định VTCP.

Câu 513. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d : \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{2}$?

A. $P(1; 1; 2)$..

B. $N(2; -1; 2)$..

C. $Q(-2; 1; -2)$..

D. $M(-2; -2; 1)$..

Lời giải.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 514 (QG17,102). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0; -1; 3)$, $B(1; 0; 1)$ và $C(-1; 1; 2)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua A và song song với đường thẳng BC ?

$$\text{A. } \begin{cases} x = -2t \\ y = -1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

$$\text{B. } x - 2y + z = 0.$$

$$\text{C. } \frac{x}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}.$$

$$\text{D. } \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}.$$

Lời giải.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 515. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$ có một véc-tơ chỉ phương là

A. $\vec{u}_3 = (2; 1; 3)$. B. $\vec{u}_4 = (-1; 2; 1)$. C. $\vec{u}_2 = (2; 1; 1)$. D. $\vec{u}_1 = (-1; 2; 3)$.

Lời giải.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 516. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$. Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là

A. $\vec{u}_1 = (-1; 2; 1)$. B. $\vec{u}_2 = (2; 1; 0)$. C. $\vec{u}_3 = (2; 1; 1)$. D. $\vec{u}_4 = (-1; 2; 0)$.

Lời giải.

Véc-tơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (-1; 2; 1)$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 517 (QG17,102). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; -2; 3)$ và hai mặt phẳng $(P): x + y + z + 1 = 0$, $(Q): x - y + z - 2 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua A , song song với (P) và (Q) ?

A. $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 \\ z = -3 - t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3 - 2t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 \\ z = 3 + 2t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 \\ z = 3 - t \end{cases}$.

Lời giải.

(P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_1(1; 1; 1)$, (Q) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_2(1; -1; 1)$.

Ta có $[\vec{n}_1, \vec{n}_2] = (2; 0; -2)$.

Đường thẳng cần tìm nhận véc-tơ $\vec{u}(1; 0; -1)$ làm véc-tơ chỉ phương. Vậy phương trình đường

thẳng cần tìm là $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 \\ z = 3 - t. \end{cases}$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 518. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; 0)$ và $B(0; 1; 2)$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng AB ?

A. $\vec{b} = (-1; 0; 2)$. B. $\vec{c} = (1; 2; 2)$. C. $\vec{d} = (-1; 1; 2)$. D. $\vec{a} = (-1; 0; -2)$.

Lời giải.

$\vec{AB} = (-1; 0; 2)$ là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng AB .

Chọn đáp án **A**

□

Câu 519. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; 3)$. Gọi M_1, M_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các trục Ox, Oy . Véc-tơ nào dưới đây là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng M_1M_2 ?

A. $\vec{u}_2 = (1; 2; 0)$. B. $\vec{u}_3 = (1; 0; 0)$. C. $\vec{u}_4 = (-1; 2; 0)$. D. $\vec{u}_1 = (0; 2; 0)$.

Lời giải.

Ta có $M_1(1; 0; 0)$ và $M_2(0; 2; 0)$. Do đó, $\overrightarrow{M_1M_2} = (-1; 2; 0)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng M_1M_2 .

Chọn đáp án **C** □

Câu 520. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 3t \\ z = 5 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$. Vectơ

nào dưới đây là vectơ chỉ phương của d ?

- A. $\vec{u}_3 = (1; 3; -1)$. B. $\vec{u}_4 = (0; 3; -1)$. C. $\vec{u}_2 = (1; -3; -1)$. D. $\vec{u}_1 = (0; 3; 1)$.

Lời giải.

Đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 3t \\ z = 5 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ nhận vectơ $\vec{u} = (0; 3; -1)$ làm VTCP.

Chọn đáp án **B** □

Câu 521. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -1; 2)$, $B(-1; 2; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$. Tìm điểm $M(a; b; c)$ thuộc d sao cho $MA^2 + MB^2 = 28$, biết $c < 0$.

- A. $M(-1; 0; -3)$.

- B. $M(2; 3; 3)$.

- C. $M\left(\frac{1}{6}; \frac{7}{6}; -\frac{2}{3}\right)$.

- D. $M\left(-\frac{1}{6}; -\frac{7}{6}; -\frac{2}{3}\right)$.

Lời giải.

Vì $M \in d$ nên tọa độ M có dạng $M(1+t; 2+t; 1+2t)$.

Ta có $MA^2 + MB^2 = 28 \Leftrightarrow t^2 + (t+3)^2 + (2t-1)^2 + (t+2)^2 + t^2 + (2t-2)^2 = 28$

$\Leftrightarrow 12t^2 - 2t - 10 = 0 \Leftrightarrow t = 1; t = -\frac{5}{6}$.

Với $t = 1 \Rightarrow M(2; 3; 3)$ loại vì $c < 0$.

Với $t = -\frac{5}{6} \Rightarrow M\left(\frac{1}{6}; \frac{7}{6}; -\frac{2}{3}\right)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **C** □

2. Viết phương trình đường thẳng.

Câu 522. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 0; 2)$ và đường thẳng d có phương trình: $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A , vuông góc và cắt d .

- A. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{1}$.

- B. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$.

- C. $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$.

- D. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{1}$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng qua A và vuông góc (d) :

$(x-1) + y + 2(z-2) = 0 \Leftrightarrow x + y + 2z - 5 = 0$ (P). Giao d và (P) là $B(2; 1; 1)$.

Phương trình đường thẳng cần tìm là $AB: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 523. Trong không gian với hệ tọa độ , $Oxyz$ phương trình nào dưới đây là phương trình

chính tắc của đường thẳng d :
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3t \\ z = -2 + t \end{cases} \quad ?$$

A. $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{1}$.

C. $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-2}$.

B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{-2}$.

D. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{1}$.

Lời giải.

Dựa vào phương trình tham số ta suy ra d qua $A(1; 0; -2)$ và có vtcp $\vec{u}(2; 3; 1)$ nên suy ra d có phương trình chính tắc là $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{1}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 524. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-1; 1; 3)$ và hai đường thẳng $\Delta : \frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{1}$, $\Delta' : \frac{x+1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua M , vuông góc với Δ và Δ' .

A. $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = -t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$

Lời giải.

Δ và Δ' có các vecto chỉ phương lần lượt là $\vec{u}_1 = (3; 2; 1)$ và $\vec{u}_2 = (1; 3; -2)$.

Khi đó $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (-7; 7; 7)$ nên đường thẳng vuông góc với d và Δ có một vecto chỉ phương là

$\vec{u} = (-1; 1; 1)$ Do đó phương trình đường thẳng $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 525 (QG17,101). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$d_1 : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + t \\ z = 2 \end{cases}$, $d_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{2}$ và mặt phẳng $(P) : 2x + 2y - 3z = 0$. Phương trình nào

dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua giao điểm của d_1 và (P) , đồng thời vuông góc với d_2 ?

A. $2x - y + 2z + 22 = 0$.

B. $2x - y + 2z + 13 = 0$.

C. $2x - y + 2z - 13 = 0$.

D. $2x + y + 2z - 22 = 0$.

Lời giải.

Xét phương trình $2(1 + 3t) + 2(-2 + t) - 6 = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow d_1 \cap (P) = M(4; -1; 2)$

Mặt phẳng qua M và vuông góc với d_2 nhận $\vec{u}_2 = (2; -1; 2)$ làm vtpt $\Rightarrow$ phương trình mặt phẳng:

$2(x - 4) - (y + 1) + 2(z - 2) = 0 \Rightarrow 2x - y + 2z - 13 = 0$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 526. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -2; -3)$, $B(-1; 4; 1)$ và đường thẳng $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của đường thẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng AB và song song với d ?

- A. $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$.
 B. $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+2}{2}$.
 C. $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$.
 D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$.

Lời giải.

Trung điểm của đoạn AB là $M(0; 1; -1)$, xét d có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; -1; 2)$

$\Rightarrow$ phương trình đường thẳng qua M và song song với d là $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 527. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -3 + t \\ z = 4 - 2t \end{cases}$ và

$d': \frac{x-4}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng thuộc mặt phẳng chứa d và d' đồng thời cách đều hai đường thẳng đó?

- A. $\frac{x-3}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{-2}$.
 B. $\frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+2}{-2}$.
 C. $\frac{x+3}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{-2}$.
 D. $\frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{-2}$.

Lời giải.

Từ giả thiết, d song song với d' , d đi qua điểm $A(2; -3; 4)$ và d' đi qua điểm $B(4; -1; 0)$. Đường thẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán là đường thẳng song song với d và đi qua trung điểm $M(3; -2; 2)$ của AB .

Chọn đáp án **A** □

Câu 528. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+7}{-2}$.

Đường thẳng đi qua A , vuông góc với d và cắt trục Ox có phương trình là

- A. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}$.
 B. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$.
 C. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}$.
 D. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$.

Lời giải.

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm và $B = \Delta \cap Ox \Rightarrow B(b; 0; 0)$ và $\vec{BA} = (1-b; 2; 3)$.

Do $\Delta \perp d$, Δ qua A nên $\vec{BA} \cdot \vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow 2(1-b) + 2 - 6 = 0 \Leftrightarrow b = -1$.

Từ đó Δ qua $B(-1; 0; 0)$, có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{BA} = (2; 2; 3)$ nên $\Delta: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 529. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P): x - 2y - z + 3 = 0$. Đường thẳng nằm trong (P) đồng thời cắt và vuông góc với Δ có phương

trình là

$$\text{A. } \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases} \quad \text{B. } \begin{cases} x = -3 \\ y = -t \\ z = 2t \end{cases} \quad \text{C. } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 + 3t \end{cases} \quad \text{D. } \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 \end{cases}$$

Lời giải.

Chọn đáp án **A** □

Câu 530. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z-3}{4}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng $x+3=0$?

$$\text{A. } \begin{cases} x = -3 \\ y = -5 - t \\ z = -3 + 4t \end{cases} \quad \text{B. } \begin{cases} x = -3 \\ y = -5 + t \\ z = 3 + 4t \end{cases} \quad \text{C. } \begin{cases} x = -3 \\ y = -5 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad \text{D. } \begin{cases} x = -3 \\ y = -6 - t \\ z = 7 + 4t \end{cases}$$

Lời giải.

Chọn $A(1; -5; 3) \in d, B(3; -6; 7) \in d$. Gọi A', B' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B lên $(P) \Rightarrow A'(-3; -5; 3), B'(-3; -6; 7)$. Vectơ CP của hình chiếu là $\overrightarrow{A'B'} = (0; -1; 4)$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 531. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1 : \frac{x-3}{-1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+2}{1}; d_2 : \frac{x-5}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P) : x+2y+3z-5=0$. Đường thẳng vuông góc với (P) , cắt s_1 và d_2 có phương trình là

$$\text{A. } \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3} \quad \text{B. } \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{3} \\ \text{C. } \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{3} \quad \text{D. } \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}$$

Lời giải.

Gọi đường thẳng cần tìm là Δ . Vì $\Delta \perp (P) \Rightarrow \vec{u}_\Delta = \vec{n}_{(P)} = (1; 2; 3)$

Khi đó phương trình đường thẳng Δ có dạng $\frac{x-x_0}{1} = \frac{y-y_0}{2} = \frac{z-z_0}{3}$ Gọi $A = d_1 \cap \Delta \Rightarrow A(3-t; 3-2t; 1-t)$
 $B = d_2 \cap \Delta \Rightarrow B(5-3t'; -1-t'; 3-t')$

Ta thử từng đáp án: Đáp án A:

$$A \in \Delta \Rightarrow \frac{3-t-1}{1} = \frac{3-2t+1}{2} = \frac{-2+t}{3} \Leftrightarrow \frac{2-t}{1} = \frac{4-2t}{2} = \frac{-2+t}{3} \Leftrightarrow 12-6t = -4+2t \Leftrightarrow t=2 \Rightarrow A(1; -1; 0) \\ B \in \Delta \Rightarrow \frac{5-3t'-1}{1} = \frac{-1+2t'+1}{2} = \frac{3-t'}{3} \Leftrightarrow \frac{4-3t'}{1} = t' = \frac{t'+2}{3} \Leftrightarrow t'=1 \Rightarrow B(2; 1; 3)$$

Vậy đáp án A có đường thẳng $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$ vuông góc với mp(P) và cắt d_1 tại $A(1; -1; 0)$, cắt d_2 tại $B(2; 1; 3)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **A** □

Câu 532. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 \end{cases}$, gọi Δ là đường thẳng đi

qua điểm $A(1; 2; 3)$ và vectơ chỉ phương $\vec{u} = (0; -7; -1)$. Đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có phương trình là:

$$\text{A. } \begin{cases} x = 1 + 6t \\ y = 2 + 11t \\ z = 3 + 8t \end{cases} \quad \text{B. } \begin{cases} x = -4 + 5t \\ y = -10 + 12t \\ z = -2 + t \end{cases}$$

$$\text{C. } \begin{cases} x = -4 + 5t \\ y = -10 + 12t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad \text{D. } \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

Lời giải.

Ta có vtcp của d : $\vec{u}_1 = (1; 1; 0)$; VTCP của đường thẳng Δ là $\vec{u}_\Delta = (0; -7; -1)$.

Góc giữa 2 vectơ chỉ phương là: $\cos(\vec{u}_1; \vec{u}_\Delta) = \frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_\Delta}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_\Delta|} < 0$.

Nên ta chọn vtcp của d là: $\vec{u} = (-1; -1; 0)$ ngược hướng với vtcp $\vec{u}_1$

Chuẩn hóa để tìm vtcp của đường phân giác: $\vec{m} = \frac{1}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u} + \frac{1}{|\vec{\Delta}|} \cdot \vec{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-1; -1; 0 \right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(0; -7; -1 \right)$

Chọn $\vec{w} = (5; 12; 1)$ là vtcp của đường phân giác tạm gọi là d' . Loại C và D

Để thấy d và Δ và d' cùng đi qua điểm $A(1; 2; 3)$. $\Rightarrow d' : \frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{12} = \frac{z-3}{1}$

Thay điểm $(-4; -10; 2)$ ở phương trình $\begin{cases} x = -4 + 5t \\ y = -10 + 12t \\ z = 2 + t \end{cases}$ thấy thỏa mãn.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 533. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d : $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 4t \\ z = 1 \end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng đi

qua điểm $A(1; 1; 1)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (1; -2; 2)$. Đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có phương trình là

$$\text{A. } \begin{cases} x = 1 + 7t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 5t \end{cases} \quad \text{B. } \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -10 + 11t \\ z = -6 - 5t \end{cases} \quad \text{C. } \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -10 + 11t \\ z = 6 - 5t \end{cases} \quad \text{D. } \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 4t \\ z = 1 - 5t \end{cases}$$

Lời giải.

Phương trình tham số đường thẳng Δ : $\begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 1 - 2t' \\ z = 1 + 2t' \end{cases}$

Chọn điểm $B(0; 3; -1) \in \Delta$ ta có $\vec{AB} = (-1; 2; -2)$ và $AB = 3$.

Chọn điểm $C(4; 5; 1) \in d$ ta có $\vec{AC} = (3; 4; 0)$ và $AC = 5$.

Ta có $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 5 > 0 \Rightarrow \widehat{BAC} < 90^\circ$. Phân giác của góc nhọn $\widehat{BAC}$ có vectơ chỉ phương

$$\vec{u} = AC \cdot \vec{AB} + AB \cdot \vec{AC} = (4; 22; -10) \text{ hay } \vec{u}' = (2; 11; -5).$$

Kiểm tra các kết quả ta chọn phương án $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -10 + 11t \\ z = 6 - 5t \end{cases}$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 534. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 4t \\ z = 1 \end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng đi

qua điểm $A(1; 1; 1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-2; 1; 2)$. Đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có phương trình là

A. $\begin{cases} x = 1 + 27t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = -18 + 19t \\ y = -6 + 7t \\ z = 11 - 10t \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x = -18 + 19t \\ y = -6 + 7t \\ z = -11 - 10t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + 17t \\ z = 1 + 10t \end{cases}$.

Lời giải.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 535. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 2; 1)$, $B\left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$. Đường thẳng đi qua tâm đường tròn nội tiếp của tam giác OAB và vuông góc với mặt phẳng (OAB) có phương trình là

A. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{2}$.

B. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-8}{-2} = \frac{z-4}{2}$.

C. $\frac{x+\frac{1}{3}}{1} = \frac{y-\frac{5}{3}}{-2} = \frac{z-\frac{11}{6}}{2}$.

D. $\frac{x+\frac{2}{9}}{1} = \frac{y-\frac{2}{9}}{-2} = \frac{z-\frac{5}{9}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $[\vec{OA}; \vec{OB}] = k(1; -2; 2) \Rightarrow$ Vectơ chỉ phương của đường thẳng (d) là $\vec{u} = (1; -2; 2)$.

Chú ý: Với I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC , ta có đẳng thức vectơ sau: $BC \cdot \vec{IA} + CA \cdot \vec{IB} + AB \cdot \vec{IC} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \text{Tọa độ điểm } I \text{ thỏa mãn hệ } \begin{cases} x_I = \frac{BC \cdot x_A + CA \cdot x_B + AB \cdot x_C}{BC + CA + AB} \\ y_I = \frac{BC \cdot y_A + CA \cdot y_B + AB \cdot y_C}{BC + CA + AB} \\ z_I = \frac{BC \cdot z_A + CA \cdot z_B + AB \cdot z_C}{BC + CA + AB} \end{cases}$$

Khi đó, xét tam giác $ABO \Rightarrow$ Tâm nội tiếp của tam giác là $I(0; 1; 1)$.

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $(d): \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{2}$

Chọn đáp án **A**

□

3. Tìm tọa độ điểm liên quan đến đường thẳng.

Câu 536. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 5 + t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$?

A. $P(1; 2; 5)$.

B. $N(1; 5; 2)$.

C. $Q(-1; 1; 3)$.

D. $M(1; 1; 3)$.

Lời giải.

Chọn đáp án **B**

□

4. Góc.

Câu 537. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(2; 3; 0)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P) : x + 3y - z + 5 = 0$?

A. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$

Lời giải.

Chọn đáp án **(B)** □

5. Khoảng cách.

Câu 538. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : 2x - 2y - z + 1 = 0$ và đường thẳng $\Delta : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{2}$. Tính khoảng cách d giữa Δ và (P) .

A. $d = \frac{1}{3}$. B. $d = \frac{5}{3}$. C. $d = \frac{2}{3}$. D. $d = 2$.

Lời giải.

Ta có vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P) : 2x - 2y - z + 1 = 0$ là $\vec{n}_p = (2; -2; 1)$.

Vectơ chỉ phương của đường thẳng $\Delta : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{2}$ là $\vec{u}_\Delta = (2; 1; 2)$.

Mà $\vec{n}_p \cdot \vec{u}_\Delta = 0$ nên $\Delta // (P)$. Vậy $d((P); \Delta) = d(M_0; (P))$ với $M_0(1; -2; 1) \in \Delta$. $d = \frac{|2 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) - 1|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{3} = 2$.

Chọn đáp án **(D)** □

6. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng, giữa đường thẳng và mặt phẳng.

Câu 539. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(3; -1; 1)$ và vuông góc đường thẳng $\Delta : \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{1}$?

A. $3x - 2y + z + 12 = 0$. B. $3x + 2y + z - 8 = 0$.
C. $3x - 2y + z - 12 = 0$. D. $x - 2y + 3z + 3 = 0$.

Lời giải.

Mặt phẳng đi qua điểm $M(3; -1; 1)$ vuông góc với Δ nhận $\vec{u}_\Delta = (3; -2; 1)$ làm vectơ pháp tuyến nên phương trình mặt phẳng là: $3(x-3) - 2(y+1) + (z-1) = 0 \iff 3x - 2y + z - 12 = 0$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 540. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; 3; 1)$ và $B(5; -6; -2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M . Tính tỉ số $\frac{AM}{BM}$.

A. $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}$. B. $\frac{AM}{BM} = 2$. C. $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{3}$. D. $\frac{AM}{BM} = 3$.

Lời giải.

$$M \in (Oxz) \Rightarrow M(x; 0; z) \quad \overrightarrow{AB} = (7; 3; 1) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \sqrt{59} \overrightarrow{AB} = (x+2; -3; z-1)$$

$$\text{và } A, B, M \text{ thẳng hàng} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AB} \quad (k \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = 7k \\ -3 = 3k \\ z-1 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -9 \\ -1 = k \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow M(-9; 0; 0)$$

$$\overrightarrow{BM} = (-14; -6; -2) \Rightarrow BM = \sqrt{118} = 2.AB$$

Chọn đáp án **A**

□

7. Bài toán liên quan giữa đường thẳng - mặt phẳng - mặt cầu.

Câu 541. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; -2; 3)$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox . Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu tâm I bán kính IM ?

A. $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 13$.

B. $(x + 1)^2 + y^2 + z^2 = 13$.

C. $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{13}$.

D. $(x + 1)^2 + y^2 + z^2 = 17$.

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của M trên Ox là $I(1; 0; 0)$. Mà $IM = \sqrt{(1 - 1)^2 + (-2 - 0)^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{13}$

nên phương trình mặt cầu là $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 13$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 542 (QG17,102). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x + 1)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 2$ và hai đường thẳng $d: \frac{x - 2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z - 1}{-1}$, $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z - 1}{-1}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của một mặt phẳng tiếp xúc với (S) , song song với d và Δ ?

A. $x + z + 1 = 0$.

B. $x + y + 1 = 0$.

C. $y + z + 3 = 0$.

D. $x + z - 1 = 0$.

Lời giải.

(S) có tâm $I(-1; 1; -2)$ và bán kính $R = \sqrt{2}$.

d có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_1(1; 2; -1)$, Δ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_2(1; 1; -1)$.

Ta có $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (-1; 0; -1)$. Vì mặt phẳng (P) cần tìm song song với d và Δ nên nó nhận $\vec{n}(1; 0; 1)$ làm véc-tơ chỉ phương.

Phương trình (P) có dạng $x + z + d = 0$.

Vì (S) tiếp xúc với (P) nên

$$d(I, (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|d - 3|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 5 \\ d = 1 \end{cases}$$

Vậy ta được hai mặt phẳng là $x + z + 1 = 0$ và $x + z + 5 = 0$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 543. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có phương trình :

$$\frac{x - 10}{5} = \frac{y - 2}{1} = \frac{z + 2}{1}.$$

Xét mặt phẳng $(P): 10x + 2y + mz + 11 = 0$, m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng Δ .

A. $m = -2$.

B. $m = 2$.

C. $m = -52$.

D. $m = 52$.

Lời giải.

Đường thẳng Δ nhận $(5; 1; 1)$ là 1 VTCP. (P) nhận $(10; 2; m)$ là 1 VTPT.

$(d) \perp (P) \Leftrightarrow (10; 2; m) = k \cdot (5; 1; 1) \Leftrightarrow k = 2$ và $m = 2$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 544. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d : \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-5}{-1}$ và mặt phẳng $(P) : 3x - 3y + 2z + 6 = 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. d cắt và không vuông góc với (P) .

B. d vuông góc với (P) .

C. d song song với (P) .

D. d nằm trong (P) .

Lời giải.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 545. Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $\Delta : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{2}$ và mặt phẳng $(P) : x + y - z + 1 = 0$. Đường thẳng nằm trong (P) đồng thời cắt và vuông góc với Δ có phương trình là

$$\text{A. } \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -4t \\ z = -3t \end{cases} \quad \text{B. } \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 + 4t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad \text{C. } \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 - 4t \\ z = 2 - 3t \end{cases} \quad \text{D. } \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 + 6t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Lời giải.

Đường thẳng d nằm trong (P) đồng thời cắt và vuông góc với Δ

nên có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_d = [\vec{n}_{(P)}, \vec{u}_\Delta] = (1; -4; -3)$ là VTCP của d .

Tọa độ giao điểm của (P) và Δ là $M(3; -2; 2)$, khi đó d đi qua $M(3; -2; 2)$.

$$\text{Vậy phương trình } d \text{ là } \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 - 4t \\ z = 2 - 3t \end{cases}.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 546. Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S) : (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1$ và điểm $A(2; 3; 4)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S) , M thuộc mặt phẳng có phương trình là?

A. $2x + 2y + 2z - 15 = 0$.

B. $x + y + z - 7 = 0$.

C. $2x + 2y + 2z + 15 = 0$.

D. $x + y + z + 7 = 0$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$ và bán kính $R = 1$.

Ta có $IA = \sqrt{3}$. Khi đó $AM = \sqrt{IA^2 - R^2} = \sqrt{2}$.

Hạ $MH \perp AI$ thì $AH = \frac{AM^2}{AI} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ hay $AH = \frac{2}{3}AI \Leftrightarrow \vec{HA} + 2\vec{HI} = \vec{0} \Rightarrow H\left(\frac{4}{3}; \frac{7}{3}; \frac{10}{3}\right)$

Khi đó ta có M thuộc mặt phẳng (P) đi qua H và nhận véc-tơ $\vec{IA} = (1; 1; 1)$ làm véc-tơ pháp tuyến

nên $M \in (P) : x + y + z - 7 = 0$.

Hướng 2. Tính được $AM = \sqrt{IA^2 - R^2} = \sqrt{2}$. M thuộc mặt cầu tâm A bán kính AM và M thuộc (S) .

Tọa độ M là nghiệm hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1 \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 2 \end{cases}$$

hay điểm M thuộc mặt phẳng $(P) : x + y + z - 7 = 0$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 547. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 9$ và điểm $A(2; 3; -1)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S) , M luôn thuộc mặt phẳng có phương trình

A. $6x + 8y + 11 = 0$. B. $3x + 4y + 2 = 0$. C. $3x + 4y - 2 = 0$. D. $6x + 8y - 11 = 0$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; -1; -1)$ và bán kính $R = 3$.

* Ta tính được $AI = 5$, $AM = \sqrt{AI^2 - R^2} = 4$.

* Phương trình mặt cầu (S') tâm $A(2; 3; -1)$, bán kính $AM = 4$ là:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 16.$$

* M luôn thuộc mặt phẳng $(P) = (S) \cap (S')$ có phương trình: $3x + 4y - 2 = 0$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 548. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều hai đường thẳng $d_1 : \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ và $d_2 : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-1}$.

A. $(P) : 2x - 2z + 1 = 0$.

B. $(P) : 2y - 2z + 1 = 0$.

C. $(P) : 2x - 2y + 1 = 0$.

D. $(P) : 2y - 2z - 1 = 0$.

Lời giải.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 549 (QG17,101). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + z^2 = 9$, điểm $M(1; 1; 2)$ và mặt phẳng $(P) : x + y + z - 4 = 0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua M , thuộc (P) và cắt (S) tại hai điểm A, B sao cho AB nhỏ nhất. Biết rằng Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}(1; a; b)$. Tính $T = a - b$.

A. $T = -2$.

B. $T = 1$.

C. $T = -1$.

D. $T = 0$.

Lời giải.

(S) có tâm là O và bán kính $R = 3$, (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 1; 1)$. Ta có $OM = \sqrt{6} \geq d[O, \Delta]$ suy ra $AB = 2\sqrt{R^2 - d^2[O, \Delta]} \geq 2\sqrt{3}$ Đẳng thức xảy ra khi $\Delta \perp OM$ tại M . Khi đó $[\vec{OM}, \vec{n}] = (-1, 1, 0)$ là một vectơ chỉ phương của Δ . Theo giả thiết $\vec{u}(1; a; b)$ là một vectơ chỉ phương của Δ nên $a = -1, b = 0$. Vậy $T = -1$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 550 (QG17,102). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(4; 6; 2), B(2; -2; 0)$ và mặt phẳng $(P) : x + y + z = 0$. Xét đường thẳng d thay đổi thuộc (P) và đi qua B , gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên d . Biết rằng khi d thay đổi thì H thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính R của đường tròn đó.

A. $R = \sqrt{6}$.

B. $R = 2$.

C. $R = 1$.

D. $R = \sqrt{3}$.

Lời giải.

Mặt cầu đường kính AB có tâm $I(3; 2; 1)$ và bán kính $R' = \sqrt{18}$.

H luôn thuộc mặt phẳng (P) và mặt cầu đường kính AB .

Khoảng cách từ I đến (P) là $d = 2\sqrt{3}$. Từ đó suy ra $R = \sqrt{6}$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 551. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; -2; 6)$, $B(0; 1; 0)$ và mặt cầu $(S) : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 25$. Mặt phẳng $(P) : ax + by + cz - 2 = 0$ đi qua A, B và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T = a + b + c$.

A. $T = 3$.

B. $T = 5$.

C. $T = 2$.

D. $T = 4$.

Lời giải.

Chọn đáp án **A** □

Câu 552. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 16$ và điểm $A(-1; -1; -1)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S) , M luôn thuộc mặt phẳng có phương trình là

A. $3x + 4y - 2 = 0$.

B. $3x + 4y + 2 = 0$.

C. $6x + 8y + 11 = 0$.

D. $6x + 8y - 11 = 0$.

Lời giải.

Chọn đáp án **A** □