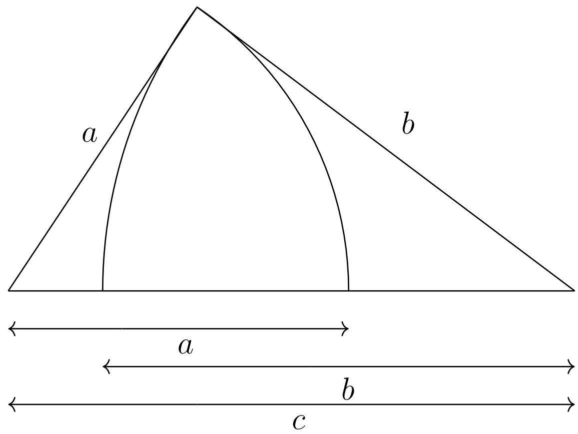
Tiếp cận các bất đẳng thức bằng hình học trực quan

Tạp Chí Và Tư Liệu Toán Học

Ngày 13 tháng 8 năm 2021

1 Từ bất đẳng thức tam giác tới bất đẳng thức Minkowski

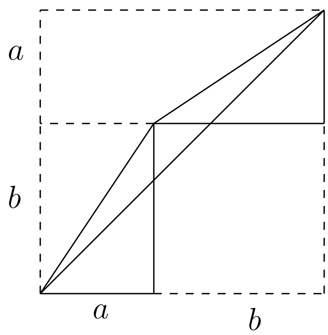
Đây có lẽ là một bất đẳng thức cơ bản nhất mà chúng ta được học ở chương trình phổ thông, nội dung của nó phát biểu như sau:
Bất đẳng thức tam giác. Trong một tam giác thì tổng độ dài 2 cạnh luôn lớn hơn cạnh còn lại.
Chứng minh. Bất đẳng thức này có rất nhiều cách chứng minh đơn giản, có thể sử dụng mối quan hệ đường xiên $-$ hình chiếu hoặc bạn đọc cũng có thể làm như sau: Giả sử rằng $a \geqslant b \geqslant c$, khi đó vẽ các cung tròn như hình vẽ dưới



Như vậy ta dễ dàng suy ra được điều phải chứng minh. Xuất phát từ bất đẳng thức này, ta có thể chứng minh được một số bất đẳng thức quen thuộc khác.
Bài toán 1.0.1. Cho 2 số thực dương a, b. Chứng minh rằng

$$\sqrt{2}\left(a+b\right) \leqslant 2\sqrt{a^2+b^2} \leqslant 2\left(a+b\right)$$

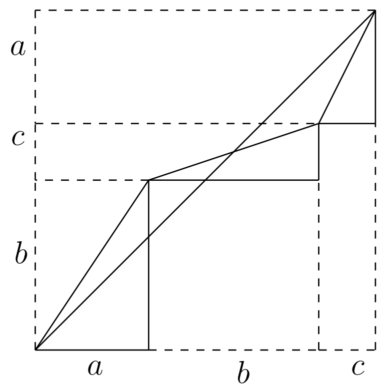
Chứng minh. Ta có thể thấy bóng dáng của bất đẳng thức $AM - RMS$ ở dãy bất đẳng thức trên, như vậy với bài toán này ta sẽ có thêm một cách giải quyết nữa cho 2 đại lượng trung bình AM và RMS. Quan sát hình vẽ dưới đây



Từ hình vẽ trên ta có thể thấy rằng $2\sqrt{a^2+b^2}$ chính là tổng độ dài 2 cạnh huyền của 2 tam giác vuông bằng nhau, $\sqrt{2}(a+b)$ chính là độ dài cạnh huyền của tam giác vuông cân có cạnh là $a+b$, khi đó sử dụng bất đẳng thức tam giác ta dễ dàng suy ra điều phải chứng minh.
Sử dụng ý tưởng tương tự, ta sẽ chứng minh được bất đẳng thức sau
Bài toán 1.0.2. Cho 3 số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\sqrt{2}(a+b+c) \leqslant \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} \leqslant 2(a+b+c)$$

Chứng minh. Tương tự như trên, bạn đọc có thể tự giải quyết nó trước khi quan sát hình vẽ dưới đây

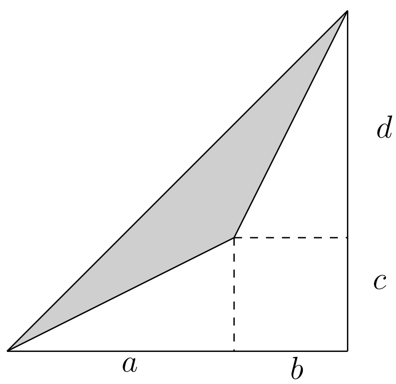


Đến đây mọi việc quá đơn giản rồi, bất đẳng thức được chứng minh!
Có vẻ như ý tưởng sử dụng bất đẳng thức tam giác và mối quan hệ của các cạnh trong tam giác vuông khá hữu hiệu với những bài toán xuất hiện đại lượng $\sqrt{x^2+y^2}$, sau đây tiếp tục là một bài toán rất quen thuộc với chúng có sử dụng ý tưởng này!

Bài toán 1.0.3. Cho các số thực dương a, b, c, d. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{b^2+d^2} \geqslant \sqrt{(a+b)^2+(c+d)^2}$$

Chứng minh. Ở toán phổ thông, chúng ta được biết tới bất đẳng thức này với một số tên gọi như là *bất đẳng thức vector* hoặc *bất đẳng thức Minkowski* hoặc có một số nơi gọi là *bất đẳng thức tọa độ*. Chứng minh của nó khá đơn giản như sau



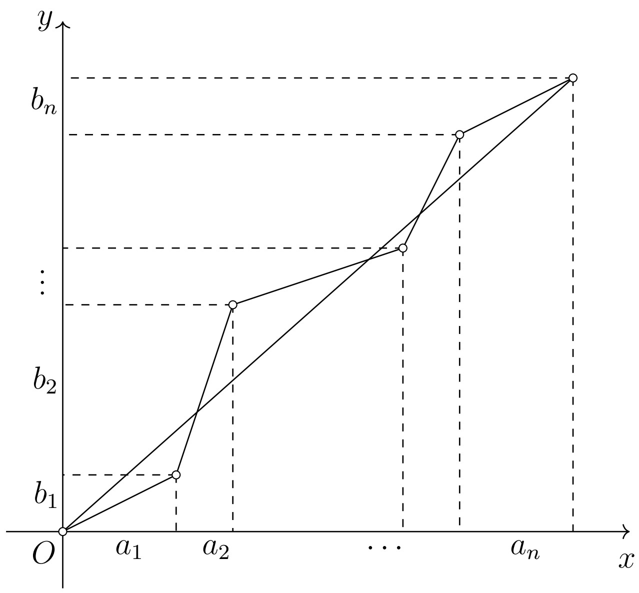
Tới đây ta dễ dàng tính được độ dài các cạnh của tam giác màu xám là

$$\sqrt{a^2+c^2}, \sqrt{b^2+d^2}, \sqrt{(a+b)^2+(c+d)^2}$$

Như vậy theo bất đẳng thức tam giác ta có điều phải chứng minh. Đây là một trường hợp đặc biệt với 2 biến của bất đẳng thức Minkowski, dạng tổng quát của nó được phát biểu như sau: Với các số thực dương $a_i, b_i, i=\overline{1,n}(n \in \mathbb{N}, n>1)$, khi đó ta có

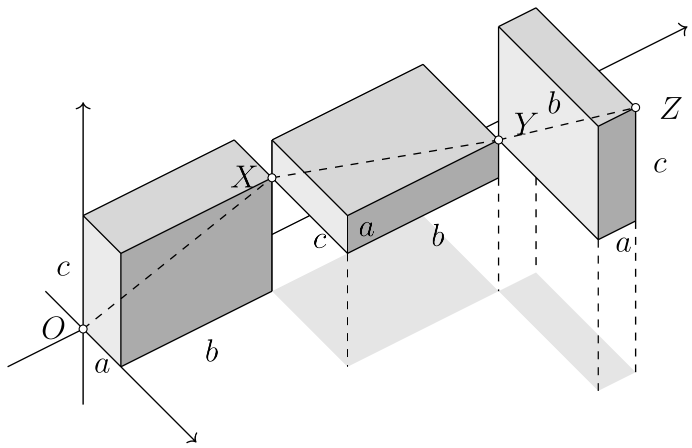
$$\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i^2+b_i^2}$$

Mặc dù dạng tổng quát nhìn có vẻ "rối rắm", tuy nhiên chứng minh của nó hoàn toàn như trường hợp 2 biến, các bạn có thể xem hình bên dưới.



Đến đây mọi chuyện trở nên rất đơn giản rồi! Hoàn toàn tương tự như bài toán 1.0.1 và bài toán 1.0.2 ta dễ dàng suy ra điều phải chứng minh.
Bây giờ sử dụng ý tưởng này ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đã đề cập ở phần trước

$$3\left(a^2+b^2+c^2\right) \geqslant (a+b+c)^2$$



Quan sát hình vẽ trên, ta có $Z(a+b+c, a+b+c, a+b+c)$, như vậy

$$\begin{aligned} OZ \leqslant OX+XY+YZ &\Leftrightarrow \sqrt{3}(a+b+c) \leqslant 3\sqrt{a^2+b^2+c^2} \\ &\Leftrightarrow \frac{a+b+c}{3} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \end{aligned}$$

Hermann Minkowski.
Ông sinh ngày 22 tháng 6 năm 1864 tại Aleksotas, Đế quốc Nga (nay ở Kaunas, Lithuania) trong một gia đình gốc Đức, Ba Lan và Do Thái. Ông mất ngày 12 tháng 1 năm 1909, Göttingen, Đức. Minkowski là một nhà toán học Đức gốc Litva, người đã phát triển hình học của các số và đã sử dụng phương pháp hình học để giải các bài toán khó trong lý thuyết số, vật lý toán và lý thuyết tương đối.

Do là con trai của cha mẹ người Đức sống ở Nga, Minkowski trở về Đức cùng họ vào năm 1872 và trải qua tuổi trẻ của mình tại thành phố hoàng gia Königsberg của nước Phổ. Với tố chất của một thần đồng tài năng, ông bắt đầu theo học tại Đại học Königsberg và Đại học Berlin ở tuổi 15. Ba năm sau, ông được Viện Hàn lâm Khoa học Pháp trao giải "Grand Prix des Sciences Mathématiques" cho bài báo của ông về biểu diễn các con số. dưới dạng tổng của năm hình vuông. Trong những năm thiếu niên của mình ở Königsberg, ông đã gặp và kết bạn với một thần đồng toán học trẻ tuổi khác là David Hilbert - người mà ông đã làm việc chặt chẽ cả tại Königsberg và sau đó là tại Đại học Göttingen.

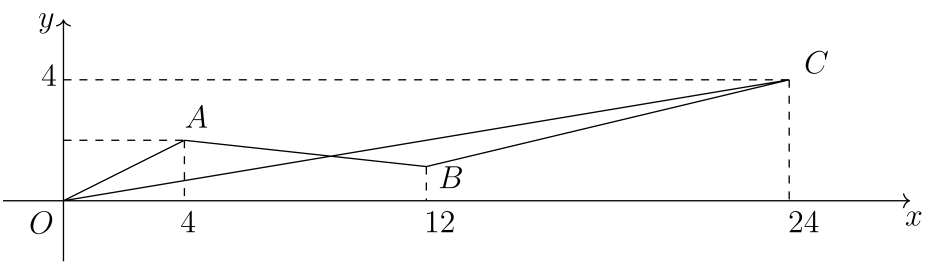
Sau khi lấy bằng tiến sĩ năm 1885, Minkowski dạy toán tại các trường Đại học Bonn (1885 – 1894), Königsberg (1894 – 1896), Zürich (1896 – 1902), và Göttingen (1902 – 1909). Cùng với Hilbert, ông theo đuổi nghiên cứu về lý thuyết electron của nhà vật lý người Hà Lan Hendrik Lorentz và sửa đổi nó trong thuyết tương đối hẹp của Einstein. Trong Raum und Zeit (1907; "Không gian và thời gian") Minkowski đã đưa ra hình học bốn chiều nổi tiếng của mình dựa trên nhóm các phép biến đổi Lorentz của thuyết tương đối hẹp. Công trình chính của ông trong lý thuyết số là Geometrie der Zahlen(1896; "Hình học của các con số"). Hermann Minkowski đã dạy tại Đại học Bonn, Göttingen, Königsberg và Zurich. Tại Viện bách khoa liên bang (Federal Polytechnic Institute), nay là ETH Zurich, và ông là một trong những thầy giáo của Einstein.

Bài toán 1.0.4. Cho 3 số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + 2y + 3z = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{16 + x^2} + 2\sqrt{16 + y^2} + 3\sqrt{16 + z^2}$$

Lời giải.

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy ta xét các điểm $A\,(4; x)\,, B\,(12; x + 2y)\,, C\,(24; x + 2y + 3z)$, từ giả thiết ta suy ra điểm $C(24; 4)$ là điểm cố định.



Ta có

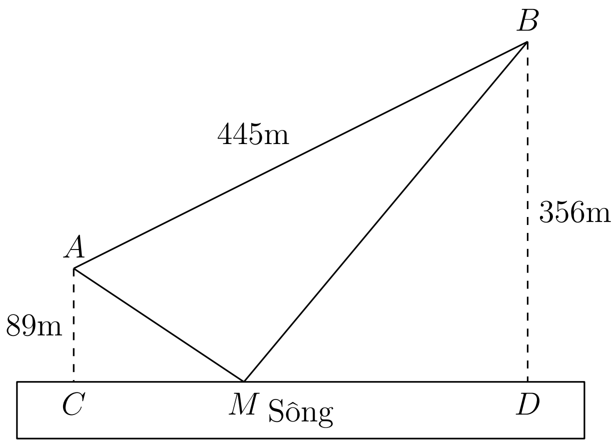
$$\begin{aligned} OA &= \sqrt{x^2+4^2}, \\ AB &= \sqrt{8^2+4y^2} = 2\sqrt{y^2+16}, \\ BC &= \sqrt{12^2+9z^2} = 3\sqrt{z^2+16^2} \end{aligned}$$

Như vậy, ta dễ thấy rằng

$$OA + AB + BC \geqslant OC = \sqrt{24^2+4^2} = 4\sqrt{37}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi O, A, B, C thẳng hàng, hay $x = y = z = \dfrac{2}{3}$. □

Bài toán 1.0.5. Cho hai vị trí A, B cách nhau 455 m, cùng nằm về một phía bờ sông. Khoảng cách từ A và B đến bờ sông lần lượt là 89 m và 356 m. Một người muốn đi từ A đến bờ sông để lấy nước mang về B (như hình vẽ). Tìm đoạn đường ngắn nhất mà người đó có thể đi.



Lời giải.
Gọi $CM = x$. Ta có:
$CD = \sqrt{445^2 - (356-89)^2} = 356$, như vậy đoạn đường người đó phải đi là

$$AM + MB = \sqrt{x^2+89^2} + \sqrt{(356-x)^2+356^2}$$

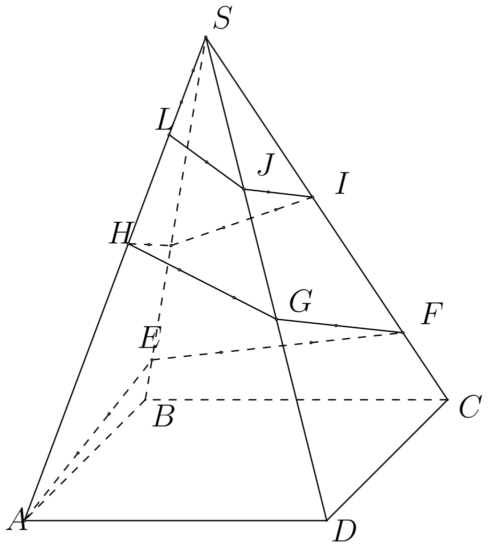
Áp dụng bất đẳng thức $Mincowski$ ta có

$$\sqrt{x^2+89^2} + \sqrt{(356-x)^2+356^2} \geqslant \sqrt{(356-x+x)^2+(89+356)^2} = 89\sqrt{41}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 71.2$. □

Ngoài các bài toán hình phẳng ta cũng có thể vận dụng khéo léo bất đẳng thức tam giác cho một số bài toán về hình học không gian như sau.

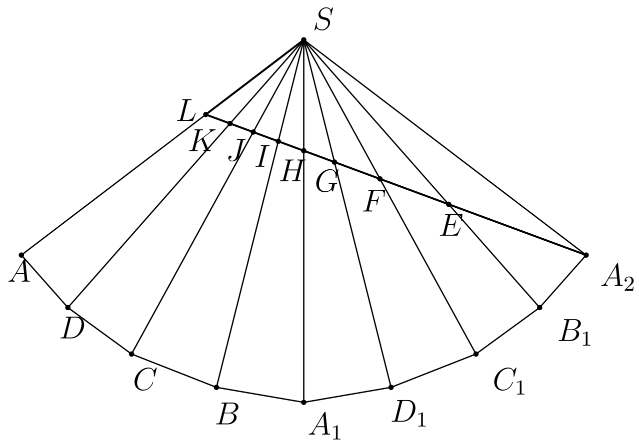
Bài toán 1.0.6. Người ta cần trang trí cho một kim tự tháp hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh bên bằng $200m$, góc $\widehat{ASB} = 15°$ bằng đường gấp khúc dây đèn led vòng quanh kim tự tháp $AEFGHIJKLS$. Trong đó điểm L cố định với $LS = 40m$.



Hỏi khi đó cần dùng ít nhất bao nhiêu mét dây đèn led để trang trí?

Lời giải.

Trải các mặt (cạnh) của hình chóp ra mặt phẳng (2 lần), ta có:
+ SA_1, SA_2 là vị trí của SA ở lần trải thứ nhất và thứ hai.
+ SD_1, SC_1, SB_1 là vị trí của SD, SB, SC ở lần trải thứ hai.



Do $\widehat{ASB} = 15°$, nên $\widehat{ASD} = 15°$. Suy ra $\widehat{ASA_2} = 120°$.
Khi đó, độ dài đường gấp khúc $AEFGHIJKLS$ ngắn nhất khi $A, E, F, G, H, I, J, K, L$ thẳng hàng, tức là $A_2, E, F, G, H, I, J, K, L$ thẳng hàng. Ta có

$$LA_2^2 = SL^2 + SA_2^2 - 2.SL.SA_2.\cos 120° = 40^2 + 200^2 - 2.40.200.\left(-\frac{1}{2}\right) = 49600$$

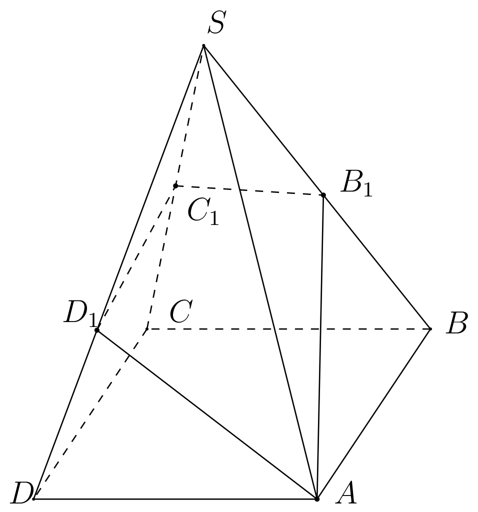
Suy ra $LA_2 = 40\sqrt{31}$. Khi đó, độ dài ngắn nhất của đèn led là

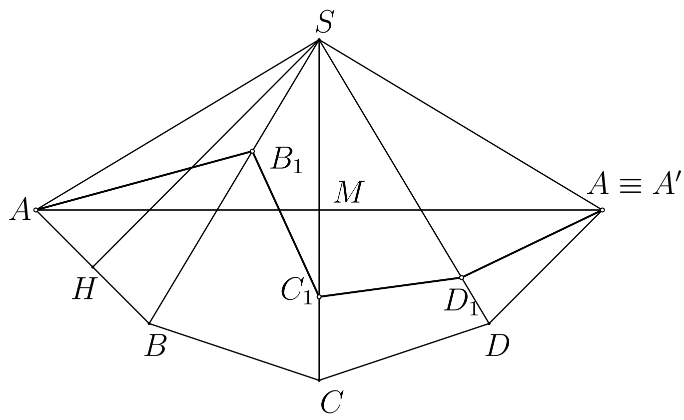
$$SA_2 = SL + LA_2 = 40 + 40\sqrt{31}\,(m)$$

□

Bài toán 1.0.7. Có một mô hình kim tự tháp là một khối chóp tứ giác đều có cạnh bên bằng $6cm$, cạnh đáy bằng $4cm$ được đặt lên bàn trưng bày (đáy nằm trên mặt bàn). Một con kiến đang ở một đỉnh của đáy và có ý định đi một vòng qua tất cả các mặt xung quanh và trở về vị trí ban đầu. Tính quãng đường ngắn nhất mà con kiến có thể đi được.

Lời giải.





Gọi hình chóp đều trong bài là $S.ABCD$. Không giảm tổng quát, giả sử con kiến đang ở đỉnh A của đáy và sẽ đi một vòng qua tất cả các mặt xung quanh và trở về vị trí ban đầu.
Để đi như vậy, con kiến buộc phải đi qua một điểm trên mỗi cạnh bên của hình chóp giả sử là B_1, C_1, D_1 lần lượt thuộc các cạnh SB, SC, SD.
Đường đi ngắn nhất từ A đến B_1 là đường thẳng.
Đường đi ngắn nhất từ B_1 đến C_1 là đường thẳng.
Đường đi ngắn nhất từ C_1 đến D_1 là đường thẳng.
Đường đi ngắn nhất từ D_1 đến A là đường thẳng.
Cắt mặt xung quanh của hình chóp $S.ABCD$ theo cạnh bên SA và đem trải phẳng.
Ký hiệu điểm A' như hình vẽ. Ta có

$$AB_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + D_1A' \geqslant AA'$$

Dấu bằng xảy ra khi A, B_1, C_1, D_1, A' thẳng hàng.
Do $S.ABCD$ là hình chóp đều nên các mặt bên là các tam giác cân bằng nhau.
Gọi H là trung điểm của $AB, M = AA' \cap SC \Rightarrow M$ là trung điểm của AA'.
Theo giả thiết

$$SA = 6, AH = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}.4 = 2$$

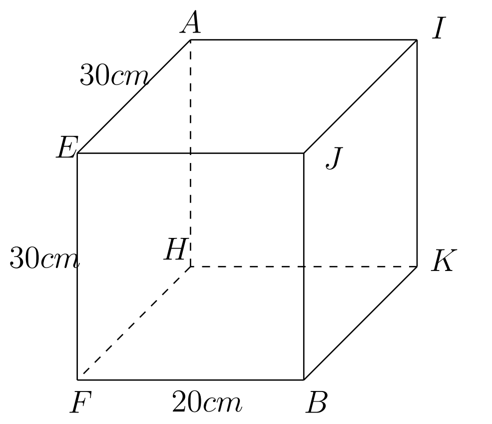
Đặt $\widehat{HSA} = \varphi$.

$$\sin\varphi = \frac{AH}{SA} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ mà } \varphi \text{ nhọn} \Rightarrow \cos\varphi = \sqrt{1 - \sin^2\varphi} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$
$$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi.\cos\varphi = \frac{4\sqrt{2}}{9} \text{ mà } 2\varphi \text{ nhọn} \Rightarrow \cos 2\varphi = \sqrt{1 - \sin^2 2\varphi} = \frac{7}{9}.$$
$$\sin 4\varphi = 2\sin 2\varphi.\cos 2\varphi = \frac{56\sqrt{2}}{81} \Rightarrow AA' = 2AM = 2.SA.\sin 4\varphi = 2.6.\frac{56\sqrt{2}}{81} = \frac{224\sqrt{2}}{27}.$$

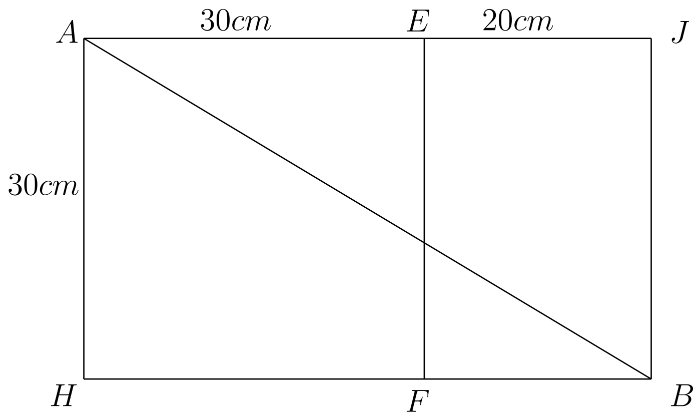
□

Bài toán 1.0.8. Một khối gỗ hình hộp hình nhật có chiều dài, chiều rộng, chiều cao lần lượt là $30cm$,$20cm$ và $30cm$ (hình vẽ). Một con kiến xuất phát từ A muốn tới điểm B thì quãng đường ngắn nhất nó phải đi dài bao nhiêu cm?

Lời giải.



Dùng kỹ thuật giải phẳng. Trải các mặt $AEFH$ và $EFBJ$ ta được



Từ hình vẽ ta thấy quãng đường đi ngắn nhất của con kiến chính là đoạn AB, ta có $AB = \sqrt{AH^2 + HB^2} = 10\sqrt{34}$
Tương tự trải các mặt còn lại của hình hộp ta đều có chung một đáp án. Vậy quãng đường ngắn nhất đi từ A đến B là $AB = 10\sqrt{34}$. □

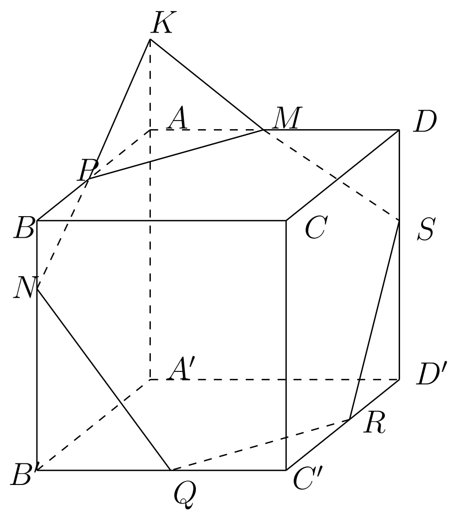
Bài toán 1.0.9. Để chào mừng 20 năm thành lập thành phố A, ban tổ chức quyết định trang trí cho cổng chào có hai cột hình trụ. Các kỹ thuật viên đưa ra phương án quấn xoắn từ chân cột lên đỉnh cột đúng 20 vòng đèn Led cho mỗi cột. Biết bán kính trụ cổng là 30cm và chiều cao cổng là $5\pi\,(m)$. Tính chiều dài dây đèn Led tối thiểu để trang trí hai cột trụ cổng.
Lời giải.
Với cách trang trí quấn xoắn từ chân cột lên đỉnh cột đúng 20 vòng đèn ta có thể trải phẳng cổng chào hình trụ đó 20 vòng để được một hình chữ nhật có chiều cao $5\pi\,(m)$ và chiều ngang là $20.2.0,3\pi = 12\pi\,(m)$ (như hình vẽ).

Theo bất đẳng thức tam giác ta thấy được độ dài đèn Led ngắn nhất bằng

$$AB = \sqrt{(5\pi)^2 + (12\pi)^2} = 13\pi\,(\mathrm{m})$$

Vậy để trang trí hai cột trụ cổng cần ít nhất $26\pi\,(m)$ đèn Led. □

Bài toán 1.0.10. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng 2. Gọi M và N lần lượt thuộc cạnh AD,BB' sao cho $AM = BN$, P là trung điểm của AB. Mặt phẳng (MNP) cắt hình lập phương theo thiết diện có chu vi nhỏ nhất bằng bao nhiêu?
Lời giải.

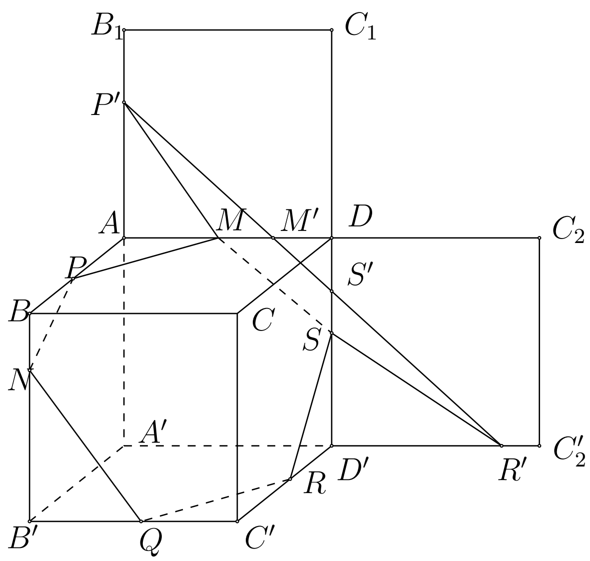


Kéo dài NP cắt AA' tại K, KM cắt DD' tại S.
Ta có

$$\begin{cases} (ADD'A') \parallel (BCC'B') \\ (MNP) \cap (ADD'A') = MS \end{cases} \Rightarrow (MNP) \cap (BCC'B') = NQ \parallel MS \, (Q \in B'C')$$

$$\begin{cases} (ABB'A') \parallel (CDD'C') \\ (MNP) \cap (ABB'A') = NP \end{cases} \Rightarrow (MNP) \cap (CDD'C') = SR \parallel NP \, (R \in C'D')$$

Vậy thiết diện của mặt phẳng (MNP) cắt hình lập phương là lục giác $MPNQRS$.
Dễ dàng chứng minh được $AM = BN = SD' = C'Q$; $PM = PN, RS = RQ, MS = NQ$. và R là trung điểm của $C'D'$.
Đặt P_t là chu vi của thiết diện $MPNQRS \Rightarrow P_t = 2\,(MP + MS + SR)$.
Trải các mặt $ABCD$ và $DCC'D'$ lên mặt phẳng $(ADD'A')$ sao cho các điểm B, C, P của mặt phẳng $ABCD$ lần lượt nằm ở vị trí các điểm B_1, C_1, P' và không cùng thuộc nửa mặt phẳng chứa A', D' có bờ AD; Các điểm C, C', R lần lượt nằm ở vị trí các điểm $C_2, {C_2}', R'$ (hình vẽ)



Khi đó việc giải bài toán hình học không gian được quy về việc giải bài toán hình học phẳng như sau:
Ta có

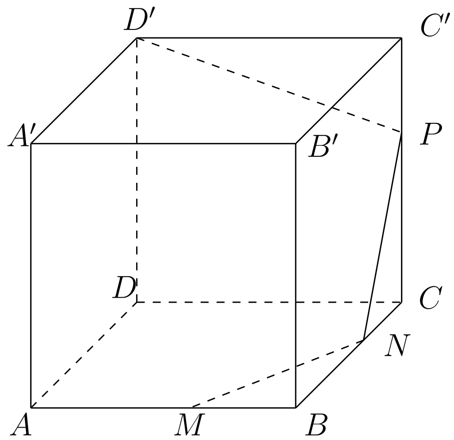
$$P_t = 2\,(MP + MS + SR) = 2\,(MP' + MS + SR') \geqslant 2P'R'$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv M', S \equiv S'$ (M', S' là giao điểm của $P'R'$ với AD, DD').
Khi đó M, N lần lượt là trung điểm của AD và BB'

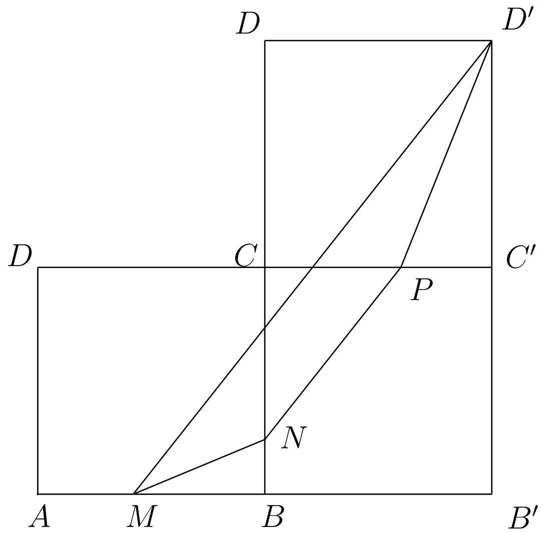
$$\Rightarrow P_t = 2.\left(\frac{2\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{2}\right) = 6\sqrt{2}$$

Vậy chu vi của thiết diện nhỏ nhất bằng $6\sqrt{2}$. □

Bài toán 1.0.11. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1, M là trung điểm của AB. Một con kiến đi từ M đến điểm N thuộc cạnh BC, từ điểm N đi thẳng tới điểm P thuộc cạnh CC', từ điểm P đi thẳng tới điểm D' (điểm N, P thay đổi tùy hướng đi của con kiến). Quãng đường ngắn nhất để con kiến đi từ điểm M đến điểm D' là bao nhiêu?



Lời giải.
Dùng kĩ thuật trải phẳng.
Trải các mặt $(ABCD), (BCC'B'), (CDD'C')$ trên một mặt phẳng.



Quãng đường ngắn nhất để con kiến đi từ điểm M đến điểm D' bằng

$$MN + NP + PD' \geqslant MD'$$

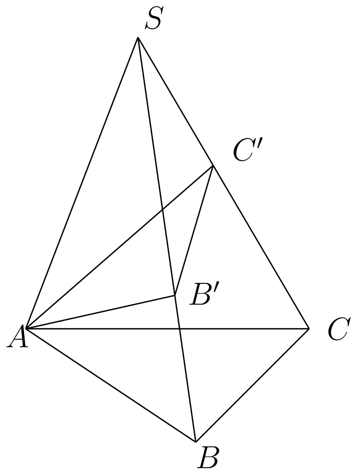
Đẳng thức xảy ra khi M, N, P, D' thẳng hàng.
Tam giác $B'MD'$ vuông tại B' có $B'M = \dfrac{3}{2}, B'D = 2$.
Khi đó

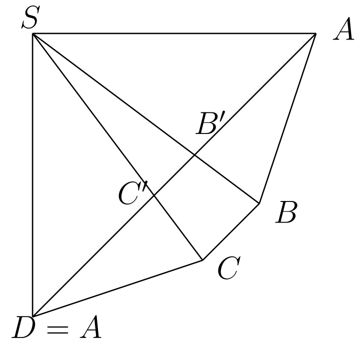
$$MD' = \sqrt{B'M^2 + B'D^2} = \frac{5}{2}$$

□

Bài toán 1.0.12. Một chiếc bánh sinh nhật có dạng hình chóp đều $S.ABC$ có $AB = 1, \widehat{ASB} = 30^0$. Lấy hai điểm B', C' lần lượt thuộc SB, SC. Một người định chia chiếc bánh thành hai phần sao cho chu vi tam giác $AB'C'$ nhỏ nhất. Tìm chu vi đó.

Lời giải.





Giả sử $SA = a, (a > 0)$.
Xét tam giác SAB ta có:

$$AB^2 = SA^2 + SB^2 - 2SA.SB.\cos\widehat{ASB} \Leftrightarrow 1 = a^2 + a^2 - 2.a.a.\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \sqrt{2+\sqrt{3}}$$

Trải phẳng khối chóp ta thấy chu vi tam giác $AB'C'$ là

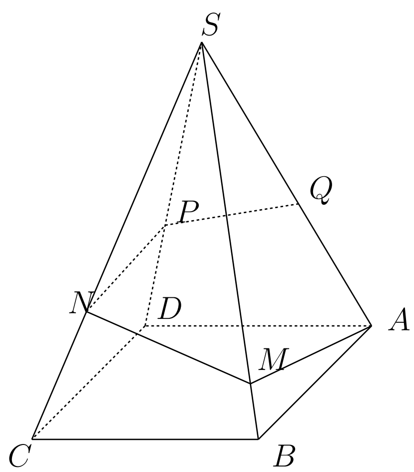
$$\mathbb{C}_{AB'C'} = AB' + B'C' + C'A = AB' + B'C' + C'D \geqslant AD$$

Dấu $" = "$ xảy ra khi A, B', C', D thẳng hàng. Khi đó

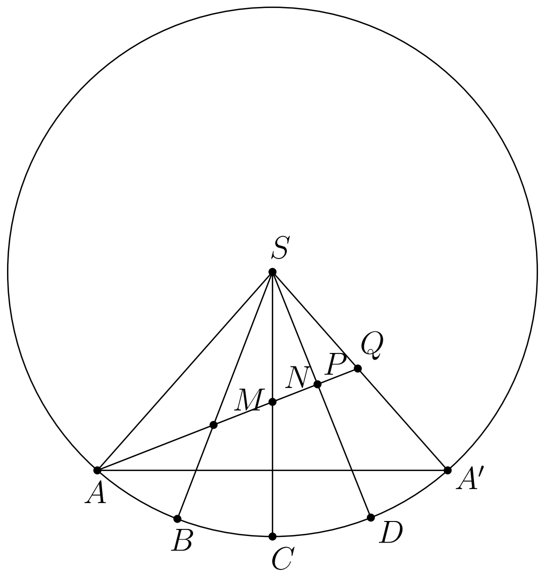
$$\min \mathbb{C}_{AB'C'} = AD = SA\sqrt{2} = a\sqrt{2} = \sqrt{2+\sqrt{3}}.\sqrt{2} = 1 + \sqrt{3}$$

Vậy chu vi cần tìm có giá trị là $1 + \sqrt{3}$. □

Bài toán 1.0.13. Bên cạnh con đường trước khi vào thành phố người ta xây một ngọn tháp đèn lộng lẫy. Ngọn tháp hình tứ giác đều $S.ABCD$ cạnh bên $SA = 600(m), \widehat{ASB} = 15°$. Do có sự cố đường dây điện tại điểm Q (là trung điểm của SA) bị hỏng, người ta tạo ra một con đường từ A đến Q gồm bốn đoạn thẳng: AM, MN, NP, PQ (hình vẽ). Để tiết kiệm kinh phí, kỹ sư đã nghiên cứu và có được chiều dài con đường từ A đến Q ngắn nhất. Tính tỷ số $k = \dfrac{AM + MN}{NP + PQ}$.



Lời giải.



Giả sử trải các mặt hình chóp đều trên đường tròn tâm S và bán kính $R = SA$. Ta có $\Delta SAA'$ có $\widehat{ASA'} = 15^o.4 = 60^o \Rightarrow \Delta SAA'$ đều.
Mà đoạn đường AQ ngắn nhất khi A, M, N, P, Q thẳng hàng.
Khi đó N là trọng tâm $\Delta SAA'$.
Suy ra

$$k = \frac{AM + MN}{NP + PQ} = \frac{AN}{NQ} = 2$$

□

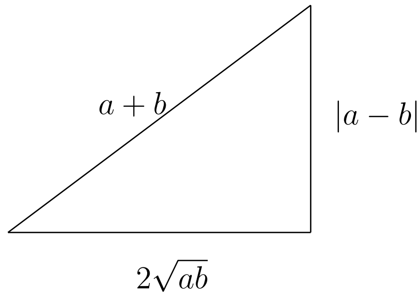
2 Bất đẳng thức liên quan tới các đại lượng trung bình

2.1 Bất đẳng thức trung bình cộng, trung bình nhân.

Đây có lẽ là bất đẳng thức quá đỗi quen thuộc với hệ thống giáo dục ở Việt Nam nói riêng và trên toàn thế giới nói chung, và ở nước ta nó còn được gọi với cái tên là "bất đẳng thức Cô - si (Cauchy)". Ở đây ta sẽ gọi nó là "bất đẳng thức $AM - GM$ (Arithmetic Means - Geometric Means)". Bất đẳng thức này, khi áp dụng cho 2 số thì sẽ được phát biểu đơn giản như sau:
Bất đẳng thức AM - GM. Cho 2 số a, b không âm, khi đó ta có $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$.
Chứng minh. Nếu như bình thường thì ta sẽ giải quyết bài toán này trong vòng 1 nốt nhạc bằng cách biến đổi tương đương, ta có

$$a + b - 2\sqrt{ab} = \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geqslant 0$$

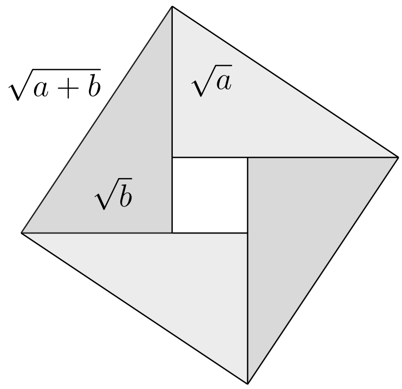
Như vậy ta có điều phải chứng minh! Rất đơn giản phải không nào, tuy nhiên ở đây ta có thể tiếp cận bất đẳng thức này một cách trực quan hơn dựa vào các hình khối hoặc các cách dựng hình. Chúng tôi sẽ bày cho bạn một vài cách thử nhé!
Cách 1.



Bây giờ ta sẽ lợi dụng một định lý rất quen thuộc, đó là định lý Pythagoras, ta dựng một tam giác vuông có độ dài 2 cạnh góc vuông là $2\sqrt{ab}$ và $|a-b|$, khi đó độ dài cạnh huyền sẽ là $a+b$. Như vậy, trong một tam giác thì độ dài cạnh huyền luôn lớn hơn hoặc bằng độ dài cạnh góc vuông nên ta suy ra điều phải chứng minh! Hoặc bạn có thể lý luận bằng tính chất của đường xiên và hình chiếu ta cũng thu được kết quả tương tự!

Nếu các bạn thấy cách này có vẻ hơi "gượng ép" ở việc chọn độ dài đoạn thẳng thì tôi xin giới thiệu cho các bạn thêm một vài cách nữa để thấy được nhiều hướng tiếp cận hơn.

Cách 2. Chúng ta vẫn sẽ sử dụng định lý Pythagoras và thêm nữa là diện tích của hình vuông và tam giác vuông. Bây giờ hãy nhìn hình bên dưới.

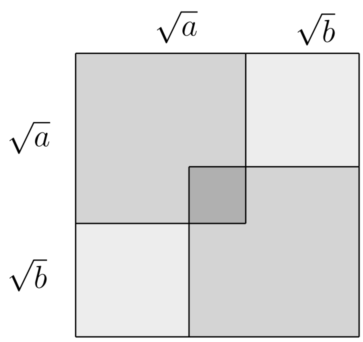


Có vẻ cách này dễ hiểu hơn cách trên rồi, ta không khó để nhận ra rằng tổng diện tích của 4 tam giác bên trong luôn nhỏ hơn diện tích của hình vuông bao quanh có cạnh là $\sqrt{a+b}$, hay nói cách khác

$$\left(\sqrt{a+b}\right)^2 \geqslant 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \Leftrightarrow a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$$

Bạn đã bắt đầu thấy hứng thú với các cách tiếp cận này chưa nào? Chúng ta sẽ tiếp tục với cách nữa nhé!

Cách 3. Nếu bạn không thích các tam giác vuông thì chúng ta sẽ chuyển qua dùng hình vuông vậy, hãy nhìn hình dưới

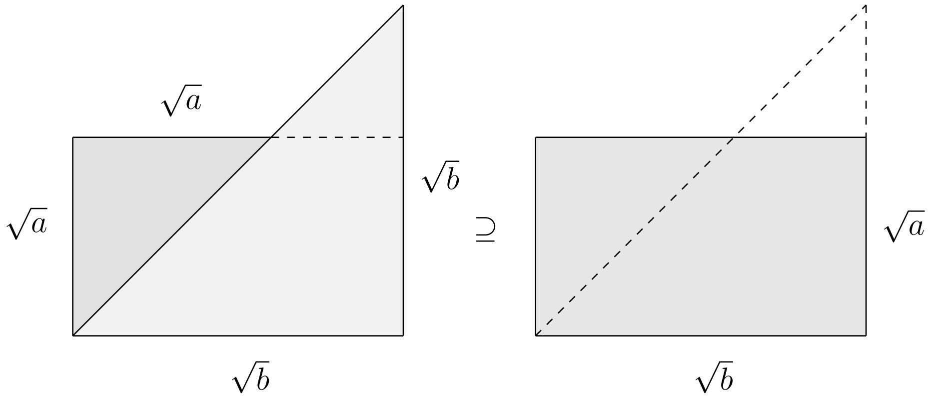


Như vậy nhìn vào hình này ta dễ dàng thấy rằng tổng diện tích của các hình vuông có độ dài cạnh là $\sqrt{a}$ và $\sqrt{b}$ sẽ lớn hơn diện tích của hình vuông có cạnh là $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, hay

$$2\left(\sqrt{a}\right)^2 + 2\left(\sqrt{b}\right)^2 \geqslant \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 \Leftrightarrow a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$$

Các bạn thấy đơn giản không nào, ngoài ra thì chúng ta có thêm vài cách nữa mà tôi sẽ trình bày sau đây, nhưng sẽ không giải thích gì thêm đâu nhé, bạn đọc có thể dễ dàng hiểu chúng.

Cách 4.

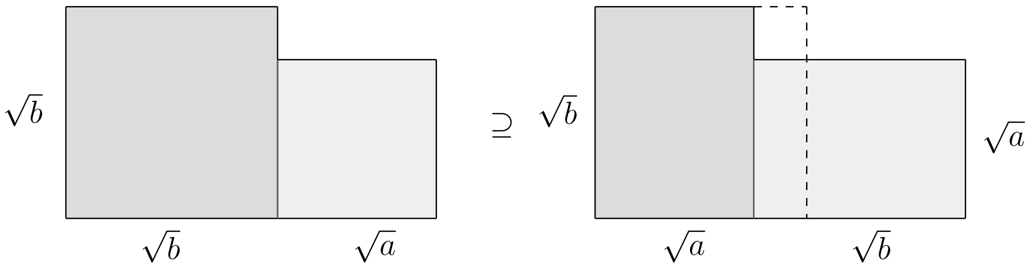


Như vậy ta có

$$\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$$

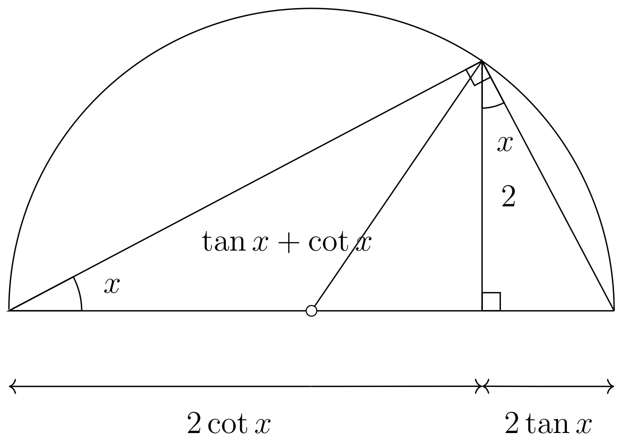
Cách chứng minh này được đưa ra bởi *Edwin Beckenbach & Richard Bellman.*

Cách 5.



Đến đây quá dễ dàng rồi phải không nào?

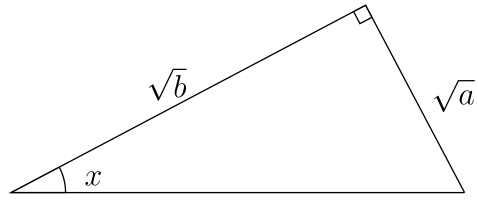
Cách 6. Cách này thì hơi phức tạp hơn so với 5 cách trên, tuy nhiên mục đích của chúng tôi khi đưa cách này vào là bạn có thể biết thêm một hướng khác để chứng minh bất đẳng thức lượng giác. Trước tiên ta sẽ chứng minh rằng $\tan x+\cot x\geqslant 2$, trong đó $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Ta có



Đến đây thì mọi chuyện đơn giản rồi, sử dụng mối quan hệ đường xiên - hình chiếu ta suy ra

$$\tan x+\cot x\geqslant 2$$

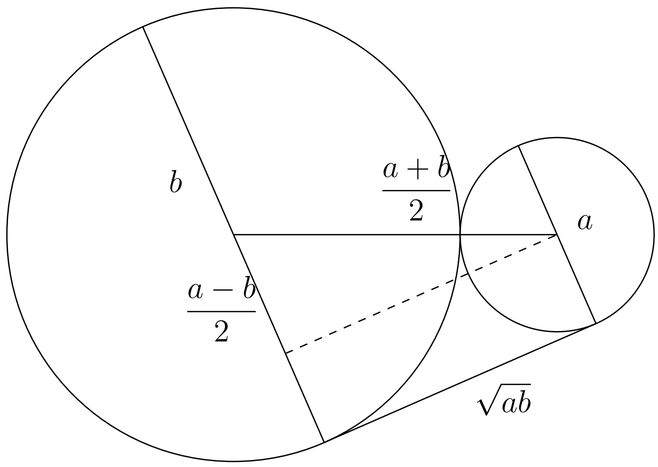
Tiếp theo ta có



Như vậy nhìn vào hình và áp dụng bất đẳng thức ở trên, ta được

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \geqslant 2 \Leftrightarrow a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$$

Cách 7. Ngoài các cách này ra ta cũng có thể sử dụng các đường tròn để chứng minh



Ở cách chứng minh này ta sử dụng 2 đường tròn có đường kính lần lượt là a và b, khi đó từ hình vẽ ta dễ dàng suy ra điều phải chứng minh.

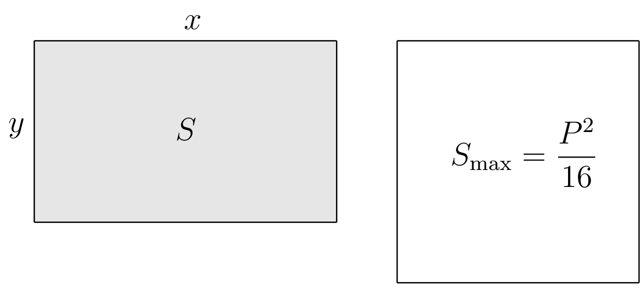
Vì có nhiều cách để chứng minh bất đẳng thức này nhưng cách chứng minh quy nạp của Cauchy cho trường hợp tổng quát được đánh giá là hiệu quả nhất nên nhiều người nhầm lẫn rằng Cauchy phát hiện ra bất đẳng thức này. Tuy nhiên ông chỉ là người đưa ra cách chứng minh rất hay của mình chứ không phải là người phát hiện ra đầu tiên. Trong chương trình toán phổ thông của chúng ta hay gọi nó với cái tên là "bất đẳng thức Cô - si", ở đây Cô - si là phiên âm tên của ông. Theo cách gọi tên chung của quốc tế, bất đẳng thức *Bunyakovsky* có tên là bất đẳng thức $Cauchy - Schwarz$ (ở phần sau chúng ta sẽ tìm hiểu về 2 bất đẳng thức này), còn bất đẳng thức Cauchy có tên là bất đẳng thức $AM - GM$ (Arithmetic Means − Geometric Means).

Bài toán 2.1.1. Chứng minh rằng: Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng chu vi, hình vuông có diện tích lớn nhất.

Lời giải.

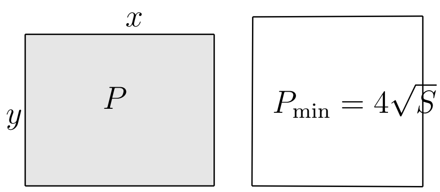
Gọi x là chiều dài hình chữ nhật, y là chiều rộng hình chữ nhật $(x, y > 0)$.

Ta có $x + y = \frac{P}{2}; x.y = S$.



Theo bất đẳng thức $AM - GM$ ta được: $S = xy \leqslant \left[\dfrac{(x+y)}{2}\right]^2 = \dfrac{P^2}{16}$.
Do đó $S_{\max} = \dfrac{P^2}{16}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y$.
Từ đó, ta có điều phải chứng minh. □

Bài toán 2.1.2. Chứng minh rằng: Trong các hình chữ nhật có cùng diện tích, hình vuông có chu vi nhỏ nhất.
Lời giải.
Gọi x là chiều dài hình chữ nhật, y là chiều rộng hình chữ nhật $(x, y > 0)$.
Ta có $x + y = \dfrac{P}{2}; x.y = S$.



Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta được:

$$x + y \geqslant 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow 2(x+y) \geqslant 4\sqrt{xy} = 4\sqrt{S}$$

Do đó $P_{\min} = 4\sqrt{S}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y$.
Từ đó, ta có điều phải chứng minh. □

2.2 Các bất đẳng thức cho những đại lượng trung bình khác

Ngoài bất đẳng thức $AM - GM$ quen thuộc ra thì ta cũng có thể gặp các bất đẳng thức cho các đại lượng khác như

- HM: Harmonic mean - Trung bình điều hòa. Kí hiệu là

$$H_n = \frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_n}}$$

- RMS: Root mean square - Căn của trung bình các bình phương. Kí hiệu là

$$S_n = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}$$

Ngoài ra lúc này 2 đại lượng AM, GM ta cũng kí hiệu lần lượt là

$$A_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$
$$G_n = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$$

Lúc này ta sẽ có một mối quan hệ như sau

$$H_n \leqslant G_n \leqslant A_n \leqslant S_n$$

Hay nói cách khác

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} \leqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}$$

Bây giờ chúng ta sẽ đi chứng minh cho các trường hợp tổng quát này. Trước tiên ta xét tới mối quan hệ $AM-GM$. Hầu như trong các sách bất đẳng thức hiện nay đều chứng minh bất đẳng thức này bằng quy nạp, ở đây ta sẽ tiếp cận nó bằng tính lồi của hàm số logarit. Dành cho bạn nào chưa biết logarit là gì thì logarit của một số là lũy thừa mà một giá trị cố định, gọi là cơ số, phải được nâng lên để tạo ra số đó. Ví dụ, logarit cơ số 10 của 1000 là 3 vì 1000 là 10 lũy thừa 3. Hay tổng quát hơn thì nếu $x=b^y$ thì y được gọi là logarit cơ số b của x và được ký hiệu là $\log_b x$. Có 2 tính chất của logarit mà ta sẽ sử dụng đó là

$$\log(xy)=\log x+\log y \tag{1}$$

$$\log\left(x^k\right)=k\cdot\log x \tag{2}$$

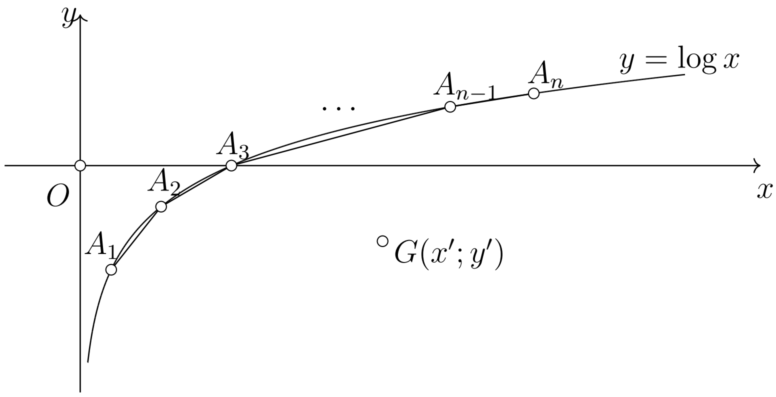
2 tính chất này chứng minh khá dễ dàng như sau. Với tính chất thứ nhất, ta đặt $m=\log_b x$ và $n=\log_b y$, như vậy từ định nghĩa suy ra $x=b^m, y=b^n$. Suy ra

$$xy=(b^m)\cdot(b^n)=b^{m+n}$$

Bây giờ ta sử dụng tính chất cơ bản được suy ra từ định nghĩa là $\log_b\left(b^k\right)=k$, ta được

$$\log_b(xy)=\log_b\left(b^{m+n}\right)=m+n=\log_b x+\log_b y$$

Với tính chất thứ 2, chúng tôi xin nhường lại cho bạn đọc! Quay lại bài toán ban đầu, ta cần hiểu thêm về một khái niệm nữa đó là *tính lồi*. Chúng ta sẽ không bàn tới các khái niệm "khả vi" hay "đạo hàm" ở đây, bạn đọc chỉ cần hiểu là một hàm lồi thì các đường thẳng nối các điểm nằm trên đồ thị của hàm đó đều nằm phía dưới đồ thị. Ví dụ



Ta nhận thấy rằng nếu một trong các số đang xét bằng 0 thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng, nên ta sẽ xét trường hợp tất cả các số dương. Xét hàm số $y=\log x$, trên đồ thị của nó ta lấy các điểm $A_1(x_1,y_1), A_2(x_2,y_2),\cdots,A_n(x_n,y_n)$ tạo thành đa giác n cạnh $A_1A_2\cdots A_n$. Nhìn vào đồ thị ta thấy rằng $y=\log x$ là một hàm lồi, nên các cạnh của nó đều nằm phía dưới đồ thị. Như vậy, trọng tâm G của đa giác n cạnh $A_1A_2\cdots A_n$ cũng sẽ nằm phía dưới đồ thị này. Từ đó ta suy ra

$$y'\leqslant\log x'\Leftrightarrow\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i\leqslant\log\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\Leftrightarrow\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log x_i\leqslant\log\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)$$

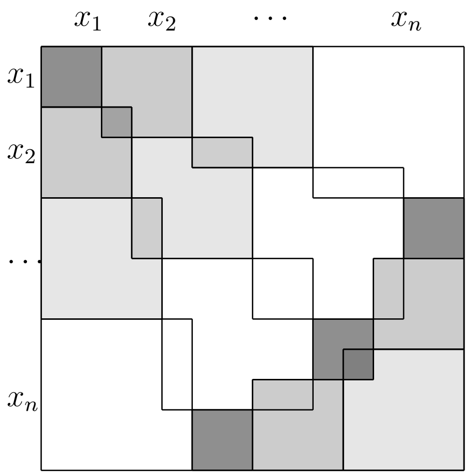
$$\Leftrightarrow\frac{1}{n}\log\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)\leqslant\log\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}x_i\geqslant n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}x_i}$$

Ở phần chứng minh trên ta cần chú ý rằng tọa trọng tâm của điểm G bằng trung bình cộng các hoành độ và tung độ của các điểm $A_1,A_2,\cdots A_n$.

Từ mối quan hệ $AM-GM$ ta thay $x_1,x_2,\cdots x_n$ bằng $\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\cdots,\frac{1}{x_n}$, ta được

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\geqslant\sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_n}}$$

Hay là $H_n \leqslant G_n$. Bây giờ còn mối quan hệ $AM - RMS$ nữa, ta sẽ chứng minh nó như sau.



Ở hình vẽ trên, ta đã sử dụng khéo léo các hình vuông và sắp xếp chúng nằm bên trong một hình vuông to có cạnh là $x_1 + x_2 + \cdots x_n$, như vậy ta có được

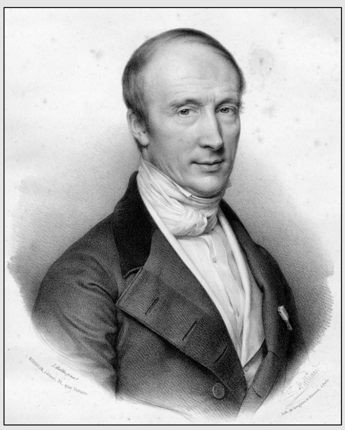
$$n \cdot \underbrace{\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)}_{\text{tổng diện tích của các hình vuông bé}} \geqslant \underbrace{\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_n\right)^2}_{\text{diện tích của hình vuông bao bên ngoài}}$$

Vậy ta được

$$H_n \leqslant G_n \leqslant A_n \leqslant S_n$$

Qua phần chứng minh ở trên, bạn đọc đã thấy bất đẳng thức thú vị hơn chưa nào? Cách sử dụng diện tích các hình vuông như như trên ta sẽ còn gặp nhiều ở các phần sau nữa.

Vài nét về Augustin – Louis Cauchy.
Augustin Cauchy sinh tại Paris ngày 21 tháng 8 năm 1789, sau ngày Cách Mạng Pháp hơn một tháng. Ông vào học Trường Bách khoa Paris (École Polytechnique) lúc 16 tuổi. Năm 1813, ông từ bỏ nghề kỹ sư để chuyên lo về toán học. Ông dạy toán ở Trường Bách khoa và thành hội viên Hàn lâm viện Khoa học Pháp. Công trình lớn nhất của ông là lý thuyết hàm số với ẩn số tạp. Ông cũng đóng góp rất nhiều trong lãnh vực toán tích phân và toán vi phân. Ông đã đặt ra những tiêu chuẩn Cauchy để nghiên cứu về sự hội tụ của các dãy trong toán học.



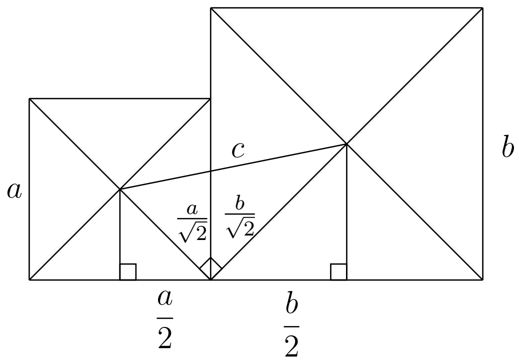
Augustin – Louis Cauchy

Augustin Cauchy là một nhà Toán học lớn không những của nước Pháp mà của cả thế giới. Các học sinh trung học đã từng nghe tên ông qua *bất đẳng thức Cauchy*, còn các sinh viên đại học thì biết ông nhiều qua *bất đẳng thức Cauchy–Schwarz, dãy Cauchy, các phương trình*

Cauchy, tích phân Cauchy cho hàm số phức,... Người ta thường nghe nói Cauchy như là một nhà Toán học nổi tiếng, một nhà Khoa học mẫu mực đáng kính, một thành viên Hàn Lâm Viện Khoa học bệ vệ sang trọng. Chưa hoàn toàn đúng như vậy. Ít ai biết được Cauchy có một cuộc sống nghề nghiệp đầy bất trắc, và nhất là Cauchy đã từng được mệnh danh là một ông giáo sư "lì lợm, cứng đầu".

Ngoài cách chứng minh tổng quát thì ta cũng có các cách chứng minh khác cho các trường hợp ít biến hơn. Cụ thể như sau.

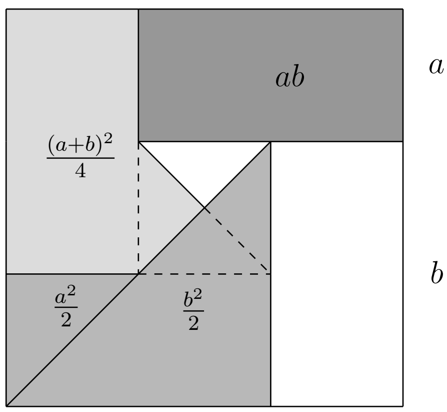
Cách 1.



Từ đây dễ dàng thấy rằng $c^2 = \left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{\sqrt{2}}\right)^2 = \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{b^2}{2}$, mặt khác ta lại có

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \leqslant c \Rightarrow \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

Ta cũng có thể biểu diễn như sau

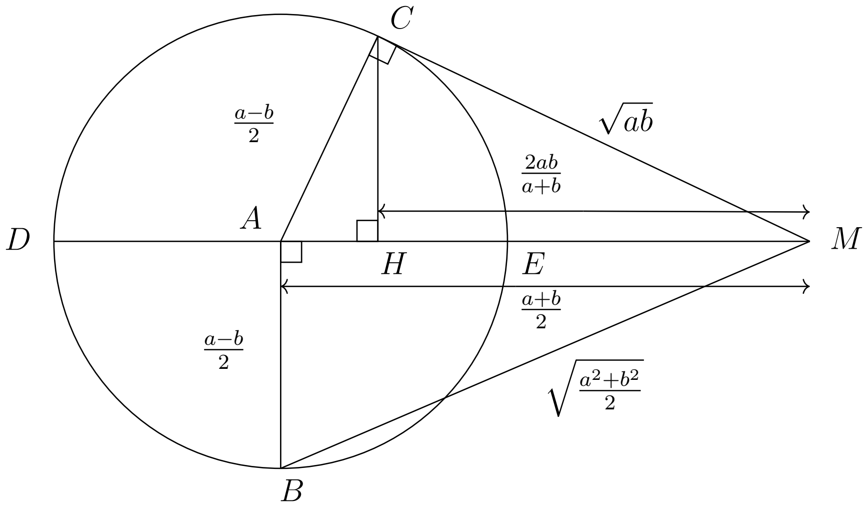


Từ hình vẽ, ta suy ra

$$\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \geqslant \frac{(a+b)^2}{4} \geqslant ab$$

Như vậy ta đã chứng minh được mối quan hệ $AM - RMS$ cho 2 biến. Ngoài ra ta cũng có thể chứng minh bằng các cách sau.

Cách 2.



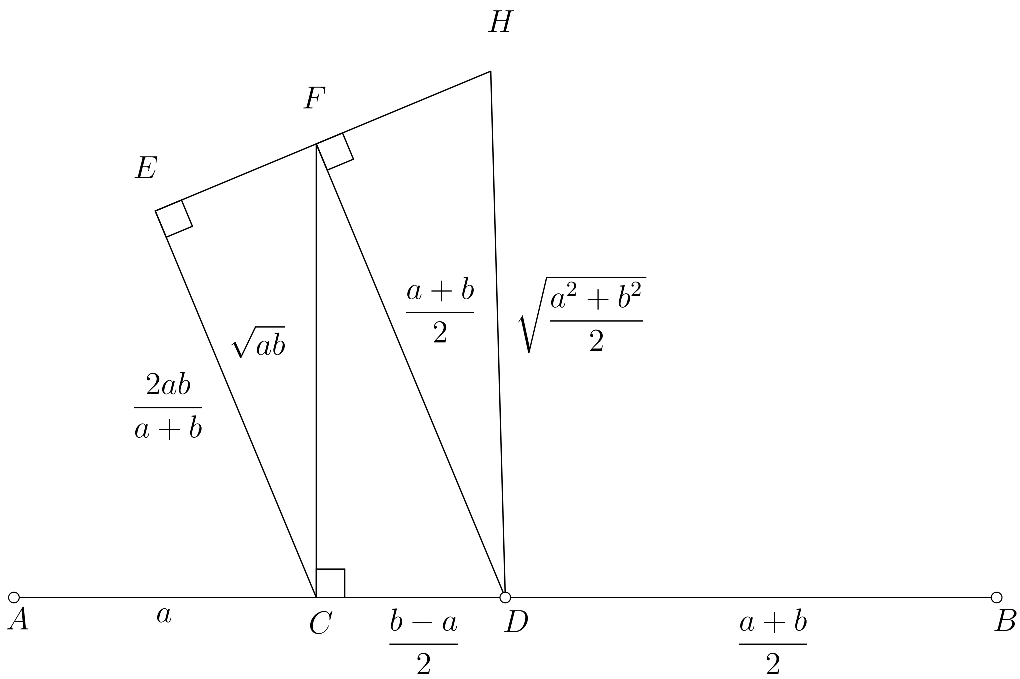
Quan sát hình trên, ta có $DM = a, EM = b, a \geqslant b$, khi đó dựa vào bất đẳng thức giữa các cạnh trong tam giác vuông, ta có

$$HM \leqslant CM \leqslant AM \leqslant BM$$

Hay

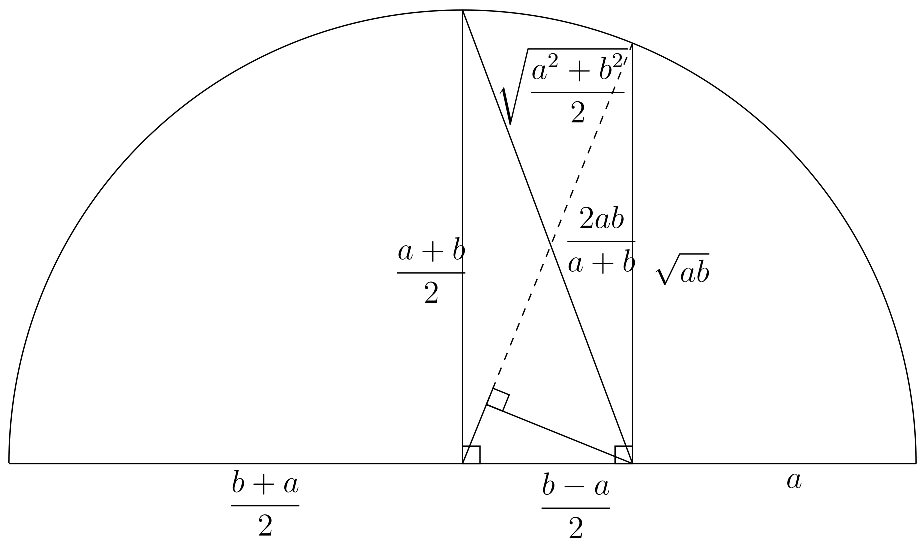
$$\frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

Cách 3.



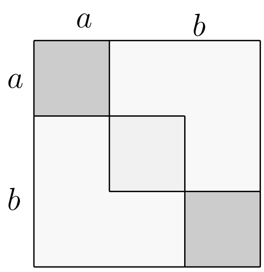
Quan sát hình vẽ trên, ở đây ta lấy đoạn thẳng $AC = a, BC = b$, D là trung điểm của AB. Dựng đoạn CF sao cho $DF = AD$. Sau đó ta lấy điểm H sao cho $HF \perp DF$ và $HF = CD = \frac{b-a}{2}$. Cuối cùng lấy điểm E sao cho $CE \perp HF$, như vậy ta hoàn toàn tính được độ dài các cạnh như hình vẽ trên. Từ đó bằng cách sử dụng các bất đẳng thức tam giác ta sẽ suy ra điều phải chứng minh.

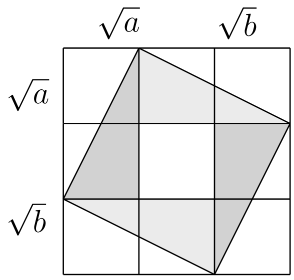
Cách 4.

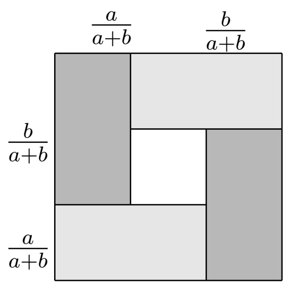


Cách làm này thì khá giống với cách thứ 2, ở đây ta lấy 2 đoạn thẳng có độ dài là a và b đặt thẳng hàng nhau, sau đó vẽ đường tròn có bán kính $\frac{a+b}{2}$ rồi dựng các đoạn thẳng còn lại như hình vẽ, bạn đọc có thể tự đọc hiểu!

Cách 5.







Ở hình đầu tiên, ta có

$$2a^2 + 2b^2 \geqslant (a+b)^2$$

Suy ra

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2}$$

Ở hình thứ 2, chú ý là trong các hình có cùng chu vi là hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi, hình bình hành thì hình vuông có diện tích lớn nhất. Như vậy ta được

$$\left(\sqrt{a+b}\right)^2 \geqslant 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$$

Ở hình thứ 3, ý tưởng hoàn toàn tương tự với các chứng minh ta đã làm trước đây, ta được

$$1 \geqslant 4 \cdot \frac{a}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b} \Leftrightarrow \sqrt{ab} \geqslant \frac{2ab}{a+b}$$

Như vậy ta đã tìm hiểu được mối quan hệ giữa các đại lượng trung bình, ở phần này chúng tôi sẽ liệt kê lại các đại lượng đã đề cập ở trên và ngoài ra còn một số đại lượng trung bình khác mà các bạn có thể tìm hiểu thêm

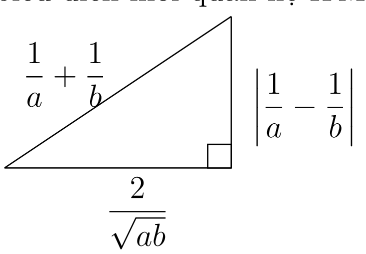
- Arithmetic mean: $A(a,b) = \dfrac{a+b}{2}$;
- Geometric mean: $G(a,b) = \sqrt{ab}$;
- Harmonic mean: $H(a,b) = \dfrac{2ab}{a+b}$;
- Heronian mean: $N(a,b) = \dfrac{a+\sqrt{ab}+b}{3}$;
- Contra $-$ harmonic mean: $C(a,b) = \dfrac{a^2+b^2}{a+b}$;
- Root $-$ mean $-$ square: $S(a,b) = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$;
- Centroidal mean: $R(a,b) = \dfrac{2\left(a^2+ab+b^2\right)}{3\left(a+b\right)}$.

Khi đó ta có mối quan hệ sau

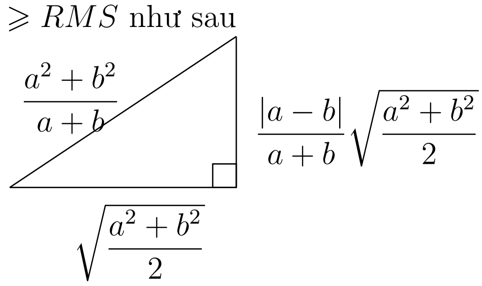
$$H \leqslant G \leqslant N \leqslant A \leqslant R \leqslant S \leqslant C$$

Phần chứng minh dãy bất đẳng thức này khá đơn giản nên xin nhường lại cho bạn đọc.

Ta có thể biểu diễn mối quan hệ $HM \geqslant GM$ và $CMS \geqslant RMS$ như sau



Hình 1. $HM \geqslant GM$

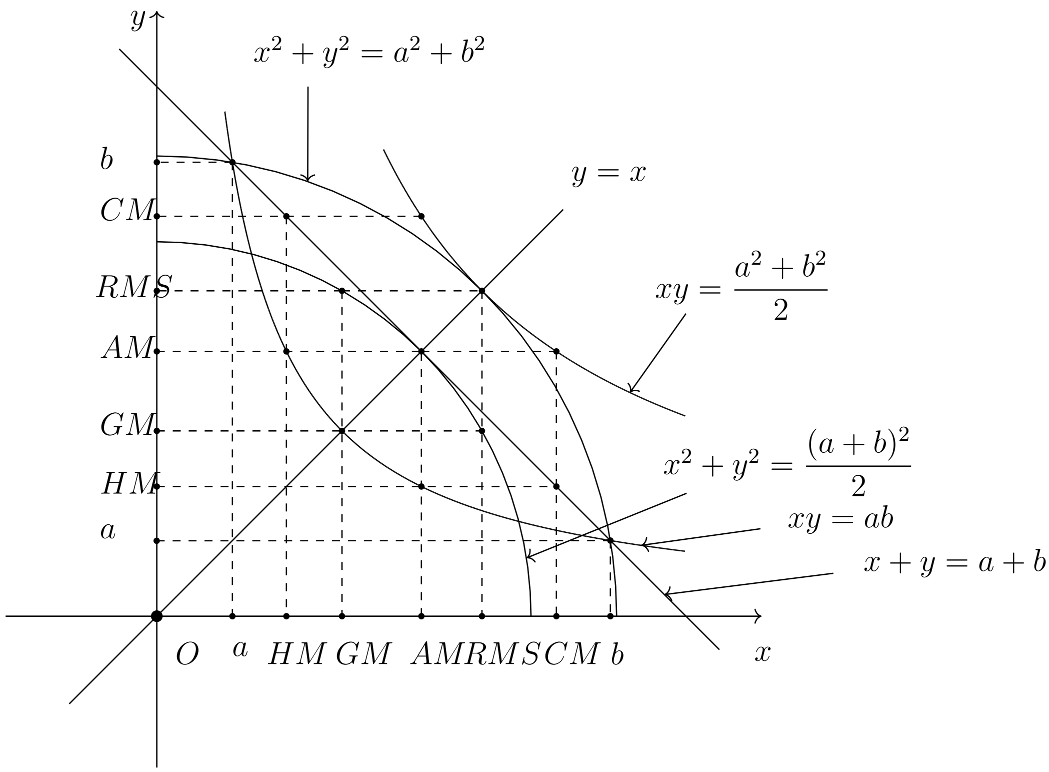


Hình 2. $CMS \geqslant RMS$

Sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có thể chỉ ra rằng

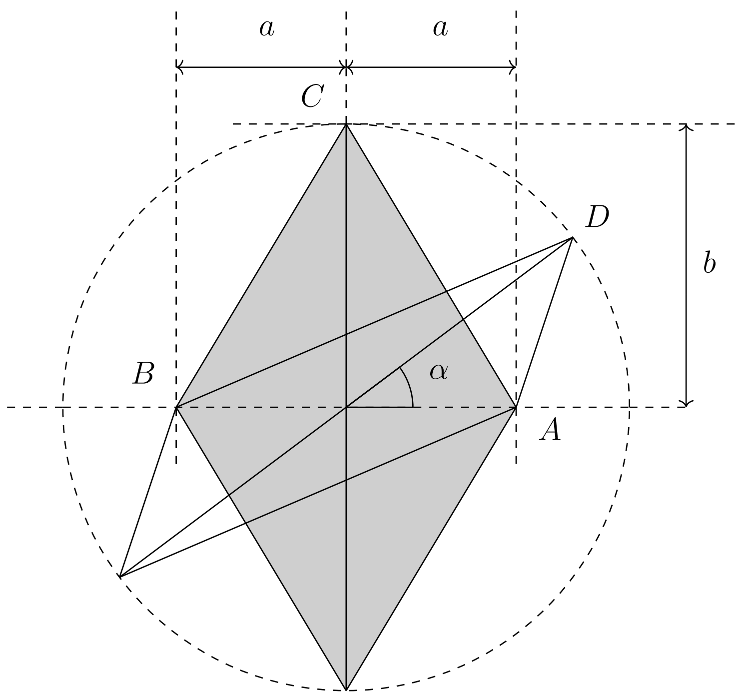
$$N\left(a,b\right) = \frac{a+\sqrt{ab}+b}{3} = \frac{2}{3}\frac{a+b}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{ab} \begin{cases} \leqslant \dfrac{2}{3}\dfrac{a+b}{2} + \dfrac{1}{3}\dfrac{a+b}{2} = A\left(a,b\right) \\ \geqslant \dfrac{2}{3}\sqrt{ab} + \dfrac{1}{3}\sqrt{ab} = G\left(a,b\right) \end{cases}$$

Ngoài ra, ta cũng có thể biểu diễn các đại lượng trong dãy bất đẳng thức trên bằng đồ thị như sau.



Bài toán 2.2.1. Chứng minh rằng trong các hình bình hành có cùng đường chéo thì hình thoi có chu vi lớn nhất.

Lời giải.

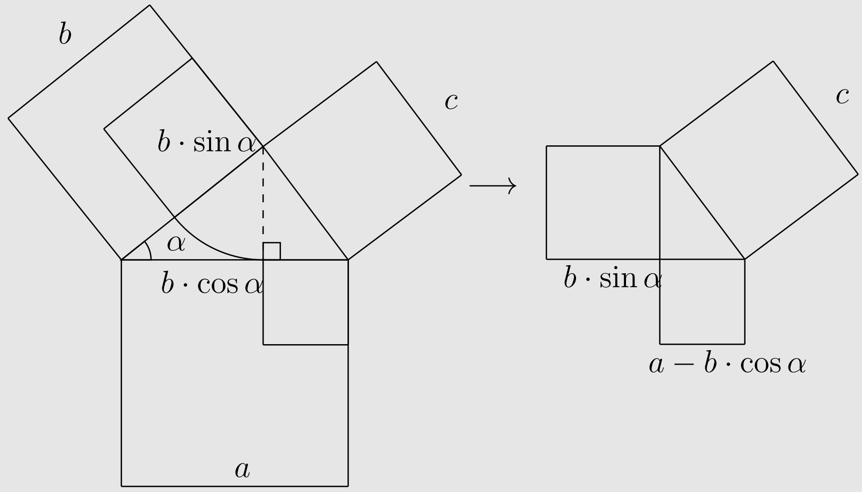


Dựng hình như hình vẽ, khi đó áp dụng định lý cosine và bất đẳng thức $AM - RMS$ ta có

$$BD + AD = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} + \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha} \overset{AM-RMS}{\leqslant} 2\sqrt{a^2 + b^2}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\alpha = 90°$, hay ta có điều phải chứng minh. □

Ta có thể chứng minh định lý cosine như sau



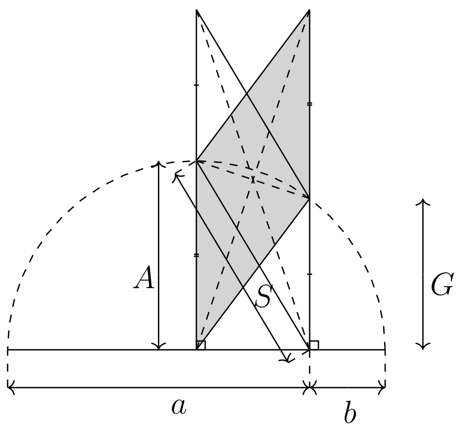
Đến đây áp dụng định lý *Pythagoras* ta có

$$c^2 = (b\sin\alpha)^2 + (a - b\cos\alpha)^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$$

Từ bài toán này, ta có thể giải quyết được bài toán sau.

Bài toán 2.2.2. Chứng minh rằng $2A \geqslant S + G$.

Lời giải.



Quan sát hình vẽ ta thấy ý tưởng dựng hình khá giống với cách 4 trong phần chứng minh dãy bất đẳng thức $HM - GM - AM - RMS$. Phần chứng minh còn lại sử dụng bài toán ở trên nên có lẽ không cần bàn luận nhiều thì bạn đọc cũng có thể hiểu được. □

Ngoài cách giải này ra, ta cũng có thể thấy rằng

$$\underbrace{\frac{a+b}{2}}_{\text{bán kính đường tròn}} - b = S^2 - A^2 = A^2 - G^2$$

Như vậy theo bất đẳng thức $AM - RMS$ ta có

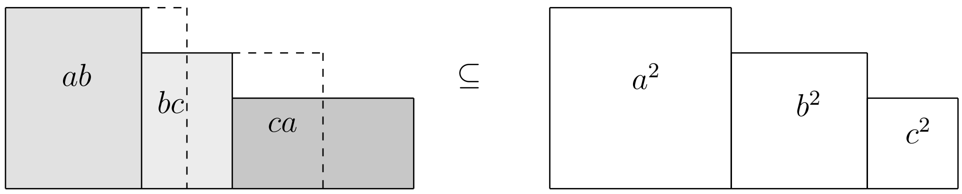
$$A = \sqrt{\frac{S^2 + G^2}{2}} \geqslant \frac{S + G}{2}$$

Từ đây suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 2.2.3. Chứng minh rằng, với 3 số thực dương a, b, c, ta luôn có

$$a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3abc$$

Chứng minh. Đây là bất đẳng thức $AM - GM$ quá quen thuộc rồi, chứng minh tổng quát chúng ta đã tìm hiểu ở trên, ở đây chúng ta sẽ tiếp cận bằng cách trực quan hơn.
Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $a \geqslant b \geqslant c$. Ta xét một bổ đề quen thuộc sau.
Bổ đề. Ta có $ab + bc + ca \leqslant a^2 + b^2 + c^2$.



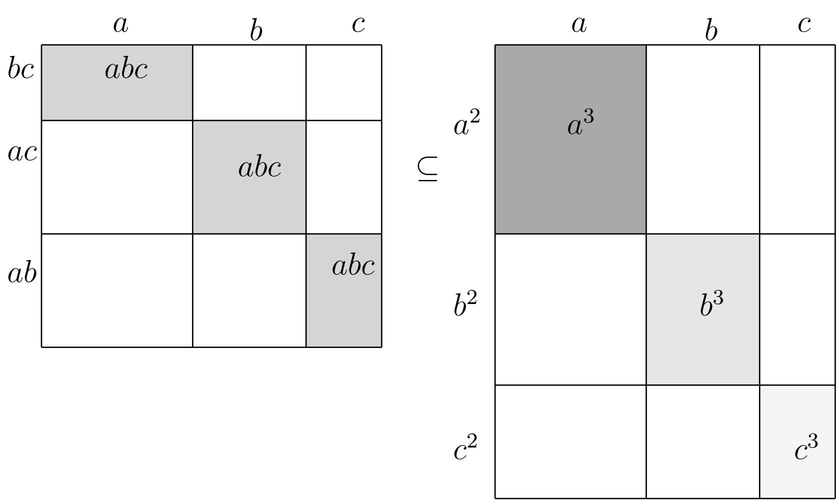
Ngoài cách chứng minh này ra ta cũng có thể biến đổi tương đương, ta có

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}\left((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right)$$

Bây giờ quay lại bài toán, nhân cả 2 vế của bất đẳng thức trên với $a + b + c$ ta sẽ có được

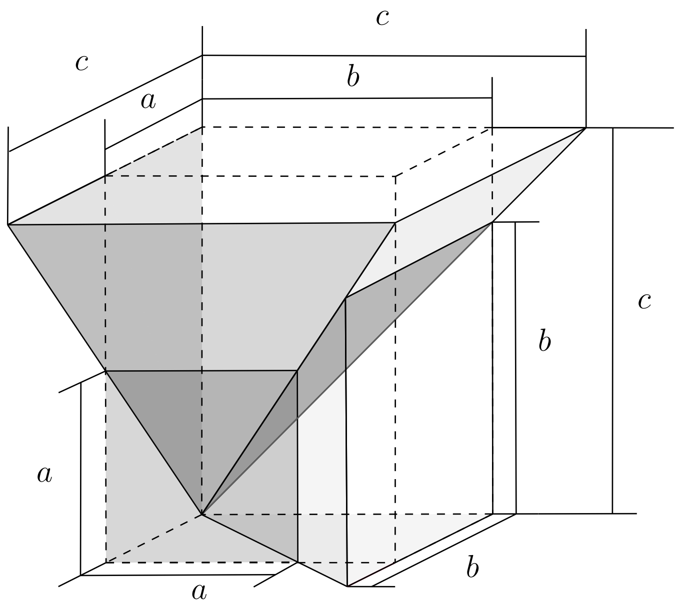
$$(a+b+c)(ab+bc+ca) \leqslant (a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

Bây giờ ta sẽ vẽ các hình vuông để biểu diễn các đại lượng này.

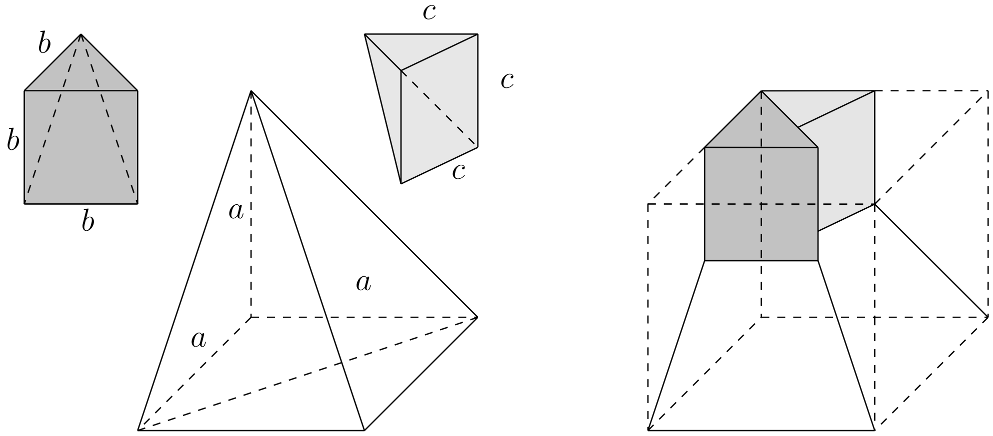


Chú ý rằng tổng diện tích của các hình chữ nhật không tô màu sẽ bằng nhau, do vậy ta suy ra điều phải chứng minh.

Ngoài ra, ở đây xuất hiện các đại lượng a^3, b^3, c^3 nên ta có thể liên tưởng nó liên quan tới một khối lập phương hoặc một khối hình không gian nào đó.



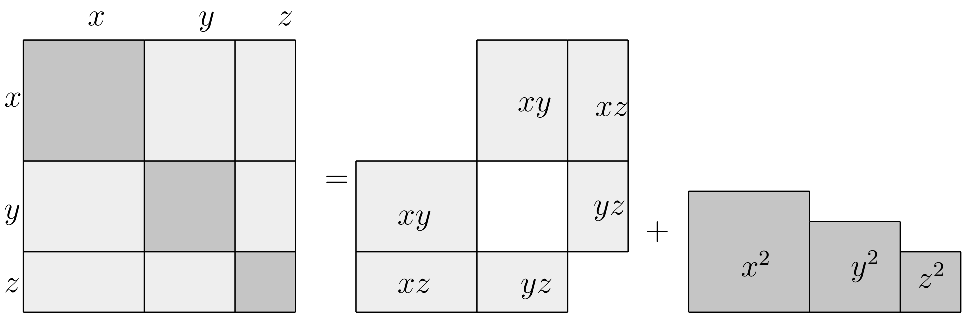
Ở đây chúng ta đã sắp xếp khéo léo các tứ diện vuông sau đó dễ dàng nhận thấy có một hình hộp chữ nhật nằm trong khối hình ta vừa tạo, từ đây suy ra được điều phải chứng minh. Ngoài ra các bạn cũng có thể nhìn hình vẽ dưới đây để dễ tưởng tượng hơn.



Ngoài ra từ bổ đề trên, ta cũng có thể chứng minh được bất đẳng thức quen thuộc sau

$$(a+b+c)^2 \geqslant 3(ab+bc+ca)$$

Quan sát hình vẽ bên dưới.



Như vậy từ bổ đề, ta có được $x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+yz+xz$, như vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Từ bất đẳng thức $a^3+b^3+c^3 \geqslant 3abc$, ta đặt $a^3 = xy, b^3 = yz, c^3 = xz$ thì ta được

$$xy + yz + xz \geqslant 3\sqrt[3]{(xyz)^2}$$

Khi đó ta sẽ được dãy bất đẳng thức sau

$$\frac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt{\frac{xy+xz+yz}{3}} \geqslant \sqrt[3]{xyz}$$

Dãy bất đẳng thức trên còn có một tên gọi là *bất đẳng thức Maclaurin.* Ngoài ra nếu ta xét một hình hộp chữ nhật có kích thước là $x \times y \times z$, gọi $V = xyz$ là thể tích hình hộp, $F = 2(xy+yz+xz)$ là diện tích toàn phần và $E = 4(x+y+z)$ là tổng độ dài các cạnh, thì khi đó ta có mối quan hệ

$$\frac{E}{12} \geqslant \sqrt{\frac{F}{6}} \geqslant \sqrt[3]{V}$$

Vẫn tiếp tục với hình vẽ trên và bổ đề ta dùng ở đầu bài, khi ấy ta sẽ thu được bất đẳng thức

$$3\left(x^2+y^2+z^2\right) \geqslant (x+y+z)^2$$

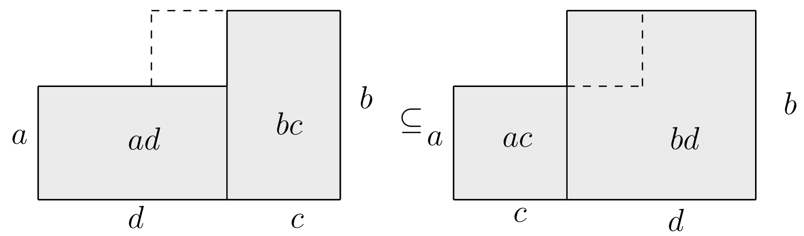
Như vậy, nếu đặt $d = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ là chiều dài đường chéo không gian của hình hộp chữ nhật thì ta có thêm một mối quan hệ nữa là

$$\frac{d}{\sqrt{3}} \geqslant \frac{E}{12}$$

Bài toán 2.2.4. Cho 4 số thực dương a, b, c, d thỏa mãn $a \leqslant b, c \leqslant d$. Chứng minh rằng

$$ad + bc \leqslant ac + bd$$

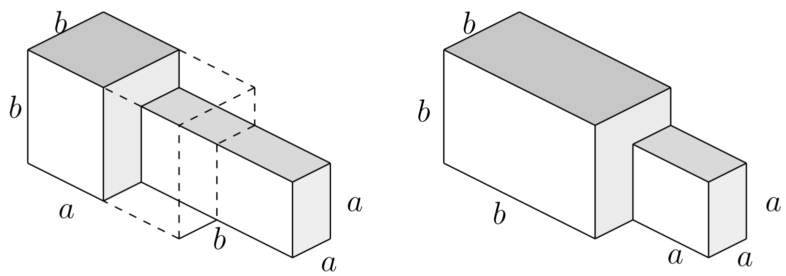
Chứng minh. Quan sát hình vẽ dưới đây



Từ hình vẽ trên ta dễ dàng chứng minh được rồi phải không nào? Đặc biệt, nếu $a = c = \sqrt{x}$ và $b = d = \sqrt{y}$ thì ta thu được bất đẳng thức $AM - GM$. Ngoài ra nếu ta đặt $c = a^2$ và $d = b^2$ thì ta được

$$a^2b + b^2a \leqslant a^3 + b^3$$

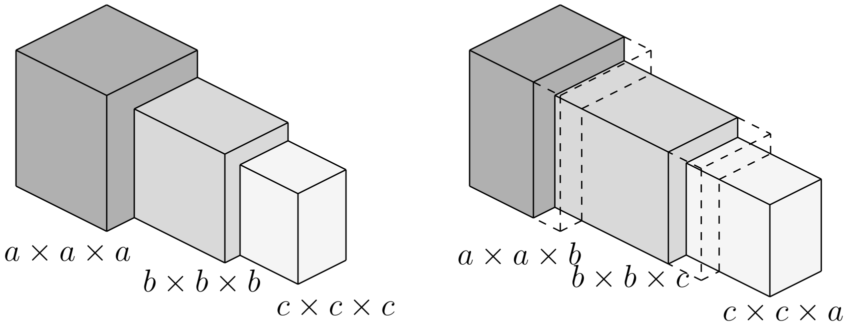
Chúng ta cũng có một cách khác để chứng minh bất đẳng thức này dựa vào thể tích của hình hộp chữ nhật.



Dựa vào hình vẽ trên ta dễ dàng có điều phải chứng minh. Ý tưởng này cũng có thể sử dụng để chứng minh được 2 bất đẳng thức sau

$$a^3+b^3+c^3 \geqslant a^2b+b^2c+c^2a \tag{3}$$
$$a^3+b^3+c^3 \geqslant ab^2+bc^2+ca^2 \tag{4}$$

Ta giả sử rằng $a \geqslant b \geqslant c$, quan sát hình vẽ dưới đây



Như vậy bất đẳng thức được chứng minh. Chứng minh hoàn toàn tương tự cho bất đẳng thức thứ 2. Từ (3) và (4) ta suy ra

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3 &\geqslant \frac{1}{2}\left(a^2b+b^2c+c^2a+a^2c+b^2a+c^2b\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[c\left(a^2+b^2\right)+b\left(a^2+c^2\right)+a\left(b^2+c^2\right)\right] \end{aligned} \tag{1.5}$$

Mặt khác, ta lại có $x^2+y^2 \geqslant 2xy$ (ta đã chứng minh ở phần trước), khi ấy ta được

$$a^3+b^3+c^3 \geqslant 3abc$$

Qua bài toán này ta lại có thêm được một cách nữa để tiếp cận với bài toán 2.2.3.
Ta xét khai triển

$$\begin{aligned} (a+b+c)^3 &= a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(a+c) \\ &= a^3+b^3+c^3+3\left(a^2b+b^2c+c^2a+a^2c+b^2a+c^2b\right)+6abc \end{aligned}$$

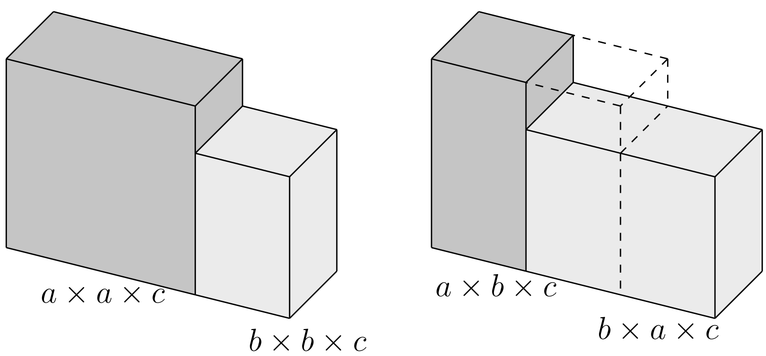
Bây giờ sử dụng kết quả bài toán 2.2.3 và (3) ta suy ra được

$$(a+b+c)^3 \leqslant 9\left(a^3+b^3+c^3\right)$$

Bạn đọc cũng có thể chứng minh bất đẳng thức này bằng phương pháp đại số thuần túy.
Với ý tưởng tương tự, ta cũng hoàn toàn chứng minh được bất đẳng thức sau

$$a^2c+b^2c \geqslant 2abc,$$

Tất nhiên là ta hoàn toàn có thể chứng minh bất đẳng thức này bằng $AM-GM$. Quan sát hình vẽ dưới đây



Từ hình vẽ trên ta dễ dàng suy ra điều phải chứng minh. Hoàn toàn tương tự, ta cũng có thể chứng minh được

$$b^2c + a^2c \geqslant 2abc$$
$$b^2a + c^2a \geqslant 2abc$$

Quay lại bất đẳng thức 1.5, chúng ta có thể thấy thay vì việc chúng ta dùng bất đẳng thức $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$ thì ta đã có thêm cách khác để chứng minh bài toán ban đầu.

Bài toán 2.2.5 (Bất đẳng thức Guba). Cho hình hộp chữ nhật có độ dài 3 cạnh là a, b, c. Gọi diện tích của các mặt là $S_1 = ab, S_2 = bc, S_3 = ca$, thể tích của hình hộp là $V = abc$ và độ dài đường chéo trong không gian là $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Chứng minh rằng

$$K_1^2 + K_2^2 + K_3^2 \geqslant \sqrt{3}Vd$$

Lời giải.
Sử dụng một kết quả ở trên, ta có

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)\\ &\geqslant 3(ab + bc + ac).\end{aligned}$$

Do vậy

$$\begin{aligned}\left(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2\right)^2 &\geqslant 3\left(S_1^2S_2^2 + S_2^2S_3^2 + S_1^2S_3^2\right)\\ &= 3a^2b^2c^2\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\\ &= 3V^2d^2,\end{aligned}$$

Như vậy ta có điều phải chứng minh. □

Bài toán 2.2.6. Chứng minh rằng, trong các tam giác có cùng chu vi thì tam giác đều có diện tích lớn nhất.

Lời giải.
Ta thấy giả thiết cho chu vi không đổi, nên ta sẽ nghĩ ngay tới công thức Heron.
Đặt $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, ở đây, a, b, c là 3 cạnh của tam giác, khi đó diện tích của tam giác sẽ được tính theo công thức

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Theo bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

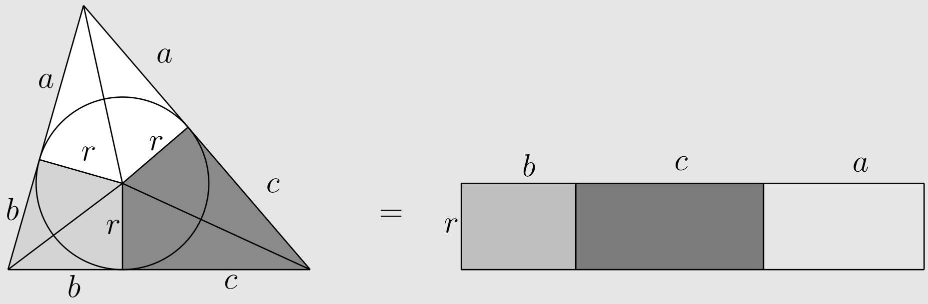
$$(s-a)(s-b)(s-c) \leqslant \left(\frac{(s-a) + (s-b) + (s-c)}{3}\right)^3 = \frac{s^3}{27}$$

Như vậy

$$S^2 = s(s-a)(s-b)(s-c) \leqslant \frac{s^4}{27}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. □

Ta có thể chứng minh công thức Heron như sau
Bổ đề 1. Diện tích của một tam giác bằng tích của bán kính đường tròn nội tiếp và nửa chu vi.

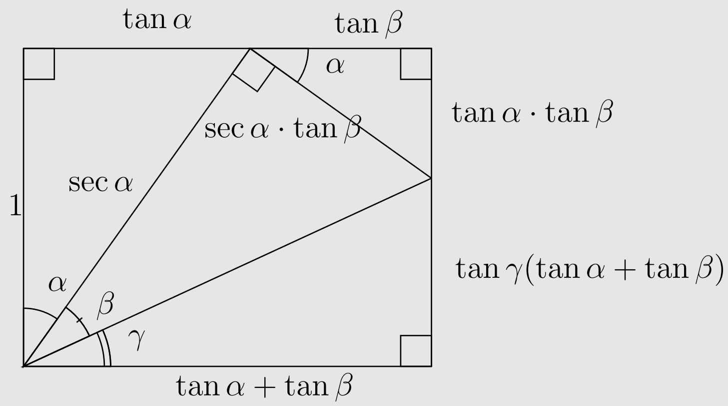


Từ hình vẽ trên, ta suy ra $S = pr$.

Bổ đề 2. Với α, β, γ là 3 góc lớn hơn 0 thỏa mãn $\alpha + \beta + \gamma = \dfrac{\pi}{2}$. Khi đó

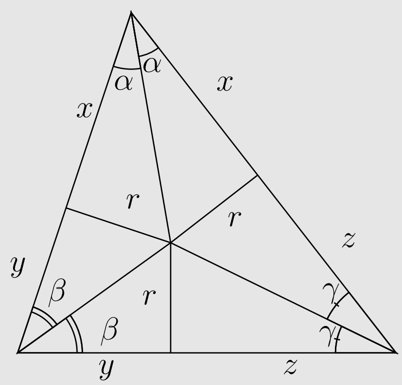
$$\tan\alpha\tan\beta + \tan\beta\tan\gamma + \tan\gamma\tan\alpha = 1$$

Xem hình vẽ dưới đây.



Chú ý $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$. Từ hình vẽ ta dễ dàng suy ra điều phải chứng minh.

Quay lại bài toán.



Đặt $p = x + y + z = x + a = y + b = z + c$, trong đó a là cạnh đối diện với góc 2α, b là cạnh đối diện với góc 2β, c là cạnh đối diện với góc 2γ. Áp dụng 2 bổ đề ở trên ta suy ra

$$\begin{aligned} 1 &= \tan\alpha\tan\beta + \tan\beta\tan\gamma + \tan\gamma\tan\alpha, \\ &= \frac{r}{x}\cdot\frac{r}{y} + \frac{r}{y}\cdot\frac{r}{z} + \frac{r}{z}\cdot\frac{r}{x} \\ &= \frac{r^2(x+y+z)}{xyz} = \frac{r^2 p}{xyz} = \frac{S^2}{pxyz} \end{aligned}$$

Như vậy

$$S^2 = pxyz = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

Trên đây là 2 bài toán khá cơ bản minh họa cho bất đẳng thức $AM - GM$ và dấu "=" xảy ra khi 2 biến bằng nhau, tuy nhiên không phải lúc nào chúng ta cũng may mắn như thế, trong một số trường hợp dấu "=" không xảy ra khi 2 biến bằng nhau chúng ta phải có một phương pháp khác xử lý chúng để áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$. Ở Việt Nam các thầy cô thường gọi nó với cái tên là *phương pháp hệ số bất định* hoặc *phương pháp cân bằng hệ số trong bất đẳng thức*. Ta sẽ minh họa nó bằng bài toán sau.

Bài toán 2.2.7. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 10a^2 + 10b^2 + c^2$.

Lời giải.

Do vai trò của a, b bình đẳng nên ta dự đoán rằng đẳng thức xảy ra khi $a = b = x, c = y$. Theo bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$a^2 + b^2 \geqslant 2ab \Rightarrow a^2xy + b^2xy \geqslant 2ab.xy$$
$$a^2y^2 + c^2x^2 \geqslant 2ca.xy$$
$$b^2y^2 + c^2x^2 \geqslant 2bc.xy$$

Cộng các bất đẳng thức trên theo vế, ta được

$$(a^2 + b^2)(xy + y^2) + 2c^2x^2 \geqslant 2xy(ab + bc + ca) = 2xy$$

Ta sẽ chọn x, y thỏa mãn hệ :

$$\begin{cases} xy + y^2 = 20x^2 \\ x^2 + 2xy = 1 \end{cases}$$

Hệ này cho nghiệm $x = \frac{1}{3}, y = \frac{4}{3}$, từ đó suy ra

$$\frac{20}{9}(a^2 + b^2) + \frac{2}{9}c^2 \geqslant \frac{8}{9} \Leftrightarrow 10a^2 + 10b^2 + c^2 \geqslant 4$$

Như vậy bài toán được giải quyết, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \frac{1}{3}$ và $z = \frac{4}{3}$. □

Chú ý rằng, khi $a = b = x$ và $c = y$ thì $P = 10x^2 + 10x^2 + y^2 = 20x^2 + y^2$, do vậy ta có phương trình đầu tiên là $xy + y^2 = 20x^2$, tiếp theo ta cũng có

$$ab + bc + ca = x^2 + 2xy = 1,$$

đây chính là phương trình thứ 2. Từ đó ta được một hệ phương trình để tìm x và y.
Ngoài cách này ra, bạn cũng có thể cân bằng hệ số theo cách sau, ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh

$$P = \left(\frac{z^2}{2} + kx^2\right) + \left(\frac{z^2}{2} + ky^2\right) + (10 - k)\left(x^2 + y^2\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$P \geqslant 2xz\sqrt{\frac{k}{2}} + 2yz\sqrt{\frac{k}{2}} + 2\,(10 - k)\,xy$$

Như vậy, để làm xuất hiện giả thiết thì

$$\sqrt{\frac{k}{2}} = 10 - k \Rightarrow k = 8$$

Từ đây ta dễ dàng giải quyết được bài toán.
Bài toán tương tự. Cho 3 số thực $x, y, z > 0$ thỏa mãn $xy + yz + xz = 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3x^2 + 3y^2 + z^2$.

Bài toán 2.2.8. Cho 3 số thực $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 4a^2 + 6b^2 + 3c^2$.
Lời giải.
Ta giả sử dấu "=" xảy ra tại $a = x, b = y, c = z(x, y, z > 0) \Rightarrow x + y + z = 3$.
Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$\begin{cases} 4\left(a^2+x^2\right) \geqslant 8ax \\ 6\left(b^2+y^2\right) \geqslant 12by \\ 3\left(c^2+z^2\right) \geqslant 6cz \end{cases} \Rightarrow \left(4a^2+6b^2+3c^2\right)+\left(4x^2+6y^2+3z^2\right) \geqslant 8ax+12by+6cz$$

Ta cần tìm x, y, z thỏa mãn hệ phương trình sau

$$\begin{cases} 8x = 12y = 6z \\ x+y+z=3 \end{cases} (x, y, z > 0) \Rightarrow x = 1, y = \frac{2}{3}, z = \frac{4}{3}$$

Như vậy

$$A \geqslant 8x(a+b+c) - \left(4x^2+6y^2+3z^2\right) = 24 - 12 = 12$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = 1, b = \dfrac{2}{3}, c = \dfrac{4}{3}$. □

Bài tập tương tự. Cho 3 số thực $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^3$.

Bài toán 2.2.9. Cho các số thực $a > b > 0$, chứng minh rằng

$$2a + \frac{32}{(a-b)(2b+3)^2} \geqslant 5$$

Lời giải.
Quan sát bất đẳng thức ta thấy có các ý tưởng sau

- Ý tưởng thứ nhất là sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$, ở đây để ta cần khử được đại lượng $(a-b)(2b+3)^2$ thì ta cần phân tích được

$$a = k(a-b) + m(2b+3) + m(2b+3) - 6m$$

dễ dàng tìm ra được $k = 2; m = \dfrac{1}{2}$.

- Ý tưởng thứ hai là đánh giá $(a-b)(2b+3)^2$ theo đánh giá từ trung bình nhân sang trung bình cộng để khử được b, chú ý đến dấu đẳng xảy ra ta được

$$(4a-4b)(2b+3)(2b+3) \leqslant \left(\frac{4a-4b+2b+3+2b+3}{3}\right)^3 = \left(\frac{4a+6}{3}\right)^3$$

Đến đây ta chỉ cần chứng minh được $2a + \dfrac{32}{\frac{8}{27}(2a+3)^3} \geqslant 5$ bằng đánh giá từ trung bình cộng sang trung bình nhân là xong.

Phần còn lại xin nhường lại cho bạn đọc. □

Bài toán 2.2.10. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $15a + \sqrt[3]{5}b + \sqrt[5]{3}c = 3$.
Tìm giá trị lớn nhất của

$$A = \frac{1}{a} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^5}$$

Lời giải.
Ta đặt $15a = x$, $\sqrt[3]{5}b = y$, $\sqrt[5]{3}c = z$ thì $x + y + z = 3$. Khi đó biểu thức A trở thành

$$A = \frac{15}{x} + \frac{5}{y^3} + \frac{3}{z^5}$$

Gỉa sử đẳng thức xảy ra khi $x = X, y = Y, z = Z$. Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$\frac{15}{x} + \frac{15x}{X^2} \geqslant \frac{30}{X}$$
$$\frac{5}{y^3} + \frac{5y}{Y^4} + \frac{5y}{Y^4} + \frac{5y}{Y^4} \geqslant \frac{20}{Y^3}$$
$$\frac{3}{z^5} + \frac{3z}{Z^6} + \frac{3z}{Z^6} + \frac{3z}{Z^6} + \frac{3z}{Z^6} + \frac{3z}{Z^6} \geqslant \frac{18}{Z^5}$$

Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức trên

$$A + \frac{15x}{X^2} + \frac{15y}{Y^3} + \frac{15z}{Z^6} \geqslant \frac{30}{X} + \frac{20}{Y^3} + \frac{18}{Z^5}$$

Ta chọn X, Y, Z thỏa hệ

$$\begin{cases} X + Y + Z = 3 \\ \dfrac{15}{X^2} = \dfrac{15}{Y^4} = \dfrac{15}{Z^6} \end{cases}$$

Ta có thể thấy ngay $X = Y = Z = 1$ là nghiệm của hệ trên. Suy ra

$$A + 15(x + y + z) \geqslant 30 + 20 + 18 \Leftrightarrow A \geqslant 23$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = \frac{1}{15}, b = \frac{1}{\sqrt[3]{5}}, c = \frac{1}{\sqrt[5]{3}}$. □

Bài toán 2.2.11. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = 11$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{5xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{2zx}{y}$$

Lời giải.
Mục đích của ta là muốn đưa về

$$\frac{5xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{2zx}{y} \geqslant k(x + y + z)$$

với k là hằng số. Ta sẽ sử dụng phương pháp hệ số bất định. Chọn ba số dương m, n, p thỏa mãn $m < 5, n < 1, p < 2$. Khi đó thì áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$(5 - m)\frac{xy}{z} + n\frac{yz}{x} \geqslant 2y\sqrt{(5 - m)n}$$
$$(1 - n)\frac{yz}{x} + p\frac{zx}{y} \geqslant 2z\sqrt{(1 - n)p}$$
$$(2 - p)\frac{zx}{y} + m\frac{xy}{z} \geqslant 2x\sqrt{(2 - p)m}$$

Cộng ba bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{5xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{2zx}{y}\geqslant 2y\sqrt{(5-m)n}+2z\sqrt{(1-n)p}+2x\sqrt{(2-p)m}$$

Muốn sử dụng được giả thiết $x+y+z=11$ thì ta phải có

$$\sqrt{(5-m)n}=\sqrt{(1-n)p}=\sqrt{(2-p)m}\Leftrightarrow n(5-m)=p(1-n)=(2-p)m$$

Ta có thể chọn $m=1$, khi đó sẽ tìm được $p=\sqrt{17}-3,\ n=\dfrac{5-\sqrt{17}}{4}$, phần còn lại xin nhường lại cho bạn đọc. □

Bài toán 2.2.12. Cho các số dương x,y,z thỏa $x^2+y^2+z^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x^2y^3z^4$.

Lời giải.

Để ý tới số mũ của x là 2, của y là 3, của z là 4 do vậy ta phải áp dụng bất đẳng thức cho 9 số. Giả sử đẳng thức xảy ra khi $x=a,y=b,z=c$ ta có $a^2+b^2+c^2=1$. Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$, ta được

$$\frac{2x}{a}+\frac{3y}{b}+\frac{4z}{c}\geqslant 9.\sqrt[9]{\frac{x^2y^3z^4}{a^2b^3c^4}}$$

Tiếp theo, sử dụng bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$ (bạn đọc có thể tìm hiểu ở phần sau), ta được

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(\frac{4}{a^2}+\frac{9}{b^2}+\frac{16}{c^2}\right)\geqslant\left(\frac{2x}{a}+\frac{3y}{b}+\frac{4z}{c}\right)^2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{ax}{2}=\dfrac{by}{3}=\dfrac{cz}{4}\Leftrightarrow\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{b^2}{3}=\dfrac{c^2}{4}$, như vậy ta cần chọn a,b,c thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases}a^2+b^2+c^2=1\\ \dfrac{a^2}{2}=\dfrac{b^2}{3}=\dfrac{c^2}{4}\end{cases}\Rightarrow a=\frac{\sqrt{2}}{3},b=\frac{\sqrt{3}}{3},c=\frac{2}{3}$$

Đến đây bài toán đã được giải quyết. □

Bài toán 2.2.13 (Tác giả: Thầy Trần Nam Dũng). Cho $0\leqslant x\leqslant 1$. Chứng minh rằng

$$x\left(9\sqrt{1+x^2}+13\sqrt{1-x^2}\right)\leqslant 16$$

Lời giải.

Ở đây chúng tôi xin được trích nguyên văn bài viết của thầy vào cuốn sách này.

Năm 1996, hồi đó tôi mới về nước chưa được một năm. Kỳ thi Olympic 30/4 tổ chức tại trường THPT chuyên Lê Hồng Phong Tp HCM. Thầy Thái Minh Đường nói tôi gửi một số đề cho BTC kỳ thi và trong số các bài toán thi cho lớp 10 có bài toán do tôi đề xuất được chọn. Bài toán trên được chọn có lẽ nhờ cách phát biểu gọn gàng, số đẹp và đặc biệt là lời giải rất ngắn gọn, cụ thể như sau:

Sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$, ta có

$$\begin{aligned}x\left(9\sqrt{1+x^2}+13\sqrt{1-x^2}\right)&=\frac{3}{2}\cdot 3x\cdot 2\sqrt{1+x^2}+\frac{13}{2}\cdot x\cdot 2\sqrt{1-x^2}\\&\leqslant\frac{3}{4}\left[9x^2+4\left(1+x^2\right)\right]+\frac{13}{4}\left[x^2+4\left(1-x^2\right)\right]\\&=16.\end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $3x = 2\sqrt{1+x^2}$ và $x = 2\sqrt{1-x^2}$.
Tuy lời giải đơn giản như vậy nhưng đây là một bài toán không dễ nhất là đối với học sinh lớp 10. Kết quả diễn ra đúng như vậy, chỉ duy nhất có bạn Vũ Đức Phú giải được bài này bằng cách dùng $Cauchy - Schwarz$ (ta sẽ tìm hiểu ở phần sau) có trọng số. Mấy đệ tử ruột của tôi trong đó có Lê Quang Nẫm đã bó tay, dù Nẫm nói "Em thử dùng đạo hàm cũng không được, hình như dấu bằng không xảy ra." Thực ra thì chắc là Nẫm tính nhầm chứ nếu dùng đạo hàm thì bài toán này cũng khá tầm thường, chỉ giải phương trình đạo hàm bằng 0 và xét dấu một chút là ra. Ở đây tôi muốn kể một chút về các hằng số 9, 13, 16 trong bài toán này. Theo một nghĩa nào đó, đó là các hằng số đẹp nhất có thể. Câu chuyện thế này. Để đặt ra bài toán, tôi muốn tìm GTLN của biểu thức dạng

$$ax\sqrt{1+x^2} + bx\sqrt{1-x^2}$$

bằng cách sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$ có trọng số mà cụ thể, tôi viết

$$\begin{aligned}
ax\sqrt{1+x^2} + bx\sqrt{1-x^2} &= \frac{a}{s}\cdot sx\sqrt{1+x^2} + \frac{b}{t}.tx\sqrt{1-x^2}\\
&\leqslant \frac{a}{2s}\cdot\left[s^2x^2 + \left(1+x^2\right)\right] + \frac{b}{2t}\cdot\left[t^2x^2 + \left(1-x^2\right)\right]\\
&= \frac{1}{2}\cdot\left(as + \frac{a}{s} + bt - \frac{b}{t}\right)x^2 + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a}{s} + \frac{b}{t}\right).
\end{aligned}$$

Tôi muốn chọn s, t sao cho vế trái không phụ thuộc vào x, đồng thời tồn tại x, để dấu bằng xảy ra đồng thời ở hai bất đẳng thức $AM - GM$. Từ đây tôi được hệ

$$\begin{cases} as + \dfrac{a}{s} + bt - \dfrac{b}{t} = 0\\ 2 + t^2 - s^2 = 0\end{cases}$$

Chú ý là từ đầu đến giờ tôi vẫn chưa chọn a, b do đó tôi chọn s, t trước (nghiệm chọn trước tham số!). Vì $(s-t)(s+t) = 2$ nên đơn giản nhất là chọn $s - t = 1, s + t = 2$ và tôi được $s = \dfrac{3}{2}, t = \dfrac{1}{2}$. Thay vào phương trình đầu tôi được $a\cdot\dfrac{13}{6} = b\cdot\dfrac{3}{2}$. Từ đấy tôi chọn $a = 9$ và $b = 13$ và đó chính là những hằng số xuất hiện trong đề toán nói trên. Như vậy, để chọn được những hằng số đẹp (dẫn đến những lời giải đẹp), đôi khi các tác giả phải làm một bước đi ngược như vậy, chứ không phải là các số 9, 13 có trường rồi tìm ra s, t.

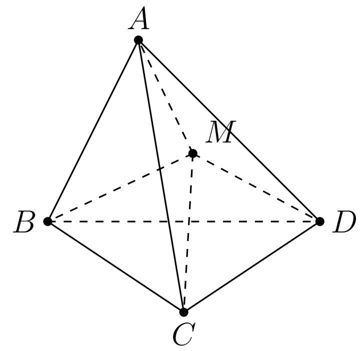
Bài toán Olympic 30/4 sau này còn được sử dụng một lần nữa trong một cuộc thi của báo THTT. Xét về một mặt nào đó, nó là một bài toán khá tầm thường vì đó là một bất đẳng thức một biến, có thể chứng minh khá dễ dàng bằng đạo hàm. Tuy nhiên, đối với tôi, đây vẫn luôn là một bài toán đáng nhớ. Và tôi vẫn thường dùng nó để minh họa cho phương pháp hệ số bất định khi áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$. □

Trên đây là các bài toán minh họa cho phương pháp cân bằng hệ số trong bất đẳng thức, tuy rằng có hơi chút "khô khan" tuy nhiên kỹ thuật này rất cần thiết trong việc giải quyết các bài toán tối ưu thực tế.

Bài toán 2.2.14. Cho tứ diện đều có cạnh bằng 3. M là một điểm thuộc miền trong của khối tứ diện tương ứng. Tính giá trị lớn nhất của tích các khoảng cách từ điểm M đến bốn mặt của tứ diện đã cho.

Lời giải.

Gọi h_1, h_2, h_3, h_4 lần lượt là khoảng từ điểm M đến 4 mặt của tứ diện và S là diện tích của tam giác. Theo bất đẳng thức $AM - GM$ ta có



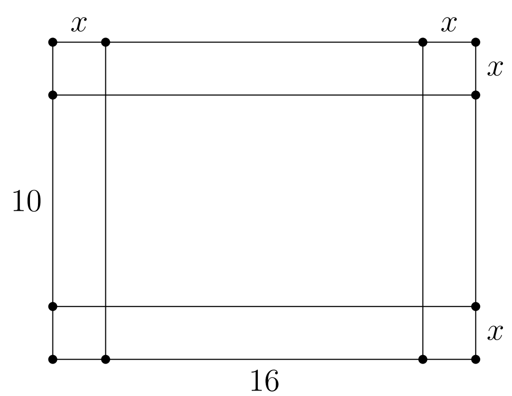
$$\begin{aligned} h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 \cdot h_4 &\leqslant \left(\frac{h_1 + h_2 + h_3 + h_4}{4}\right)^4 \\ &= \left(\frac{3V_1 + 3V_2 + 3V_3 + 3V_4}{4S}\right)^4 \\ &= \left(\frac{3V_{ABCD}}{4 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}}\right)^4 = \left(\frac{3\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}}{a^2\sqrt{3}}\right)^4 \end{aligned}$$

Suy ra $h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 \cdot h_4 \leqslant \left(\dfrac{a\sqrt{6}}{12}\right)^4 = \left(\dfrac{3 \cdot \sqrt{6}}{12}\right)^4 = \dfrac{9}{64}$.

Bài toán được giải quyết. □

Bài toán 2.2.15. Cho một tấm tôn hình chữ nhật có kích thước 10 cm × 16 cm. Người ta cắt bỏ 4 góc của tấm tôn 4 miếng hình vuông bằng nhau rồi gò lại thành một hình hộp chữ nhật không có nắp. Tìm thể tích lớn nhất của hình hộp đó.

Lời giải.



Giả sử độ dài cạnh hình vuông của các miếng tôn bị cắt bỏ bằng x $(0 < 2x < 10 \Leftrightarrow 0 < x < 5)$. Khi đó hình hộp chữ nhật có chiều cao bằng x, chiều rộng bằng $10 - 2x$ và chiều dài bằng $16 - 2x$. Suy ra hình hộp chữ nhật có thể tích $V = x(10 - 2x)(16 - 2x)$. Nhiệm vụ của chúng ta bây giờ là đánh giá biểu thức trên, theo bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$V = 18 \cdot x \cdot \frac{1}{3}(10 - 2x) \cdot \frac{1}{6}(16 - 2x) \leqslant 18 \cdot \left(\frac{x + \dfrac{1}{3}(10 - 2x) + \dfrac{1}{6}(16 - 2x)}{3}\right)^3 = 144$$

Do vậy, tại $x = 2$ thì hình hộp chữ nhật có thể tích lớn nhất bằng 144. □

Để tìm các hệ số $\dfrac{1}{3}$ và $\dfrac{1}{6}$ ta làm như sau. Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta được

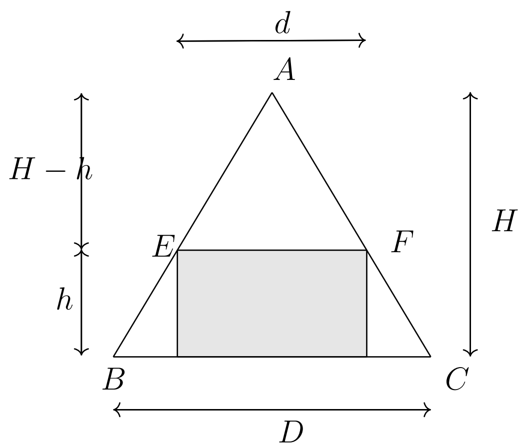
$$V = \frac{1}{abc} ax\,(10b - 2bx)\,(16c - 2cx) \leqslant \frac{1}{abc}\left(\frac{ax + 10b - 2bx + 16c - 2cx}{3}\right)^3$$

Như vậy ta cần tìm a, b, c thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} a - 2b - 2c = 0 \\ ax = 10b - 2bx \\ ax = 16c - 2cx \end{cases}$$

Đến đây ta có thể cho $a = 1$ để tìm ra b, c.

Bài toán 2.2.16. Tính diện tích xung quanh lớn nhất có thể của một hình trụ nội tiếp một hình nón cho trước.
Lời giải.



Từ hình vẽ ta nhận hai hai tam giác ABC và AEF đồng dạng nên

$$\frac{H-h}{d} = \frac{H}{D} \Leftrightarrow h = H - \frac{Hd}{D}$$

Diện tích xung quanh của hình nón là:

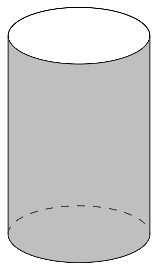
$$S = \pi dh = \pi d\left(H - \frac{Hd}{D}\right) = \frac{D\pi}{H}.\frac{Hd}{D}.\left(H - \frac{Hd}{D}\right)$$

Theo bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

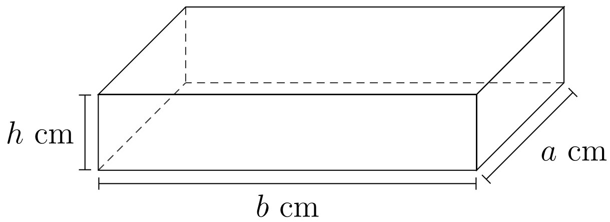
$$S \leqslant \frac{D\pi}{H}.\frac{\left(\frac{Hd}{D} + H - \frac{Hd}{D}\right)^2}{4} = \frac{D\pi}{H}.\frac{H^2}{4} = \frac{HD\pi}{4}$$

Như vậy diện tích xung quanh lớn nhất của hình trụ bằng $\frac{HD\pi}{4}$ đạt được khi $d = \frac{1}{2}D$. Hay hình trụ đạt được giá trị lớn nhất khi đường kính của nó bằng bán kính của hình nón đã cho. □

Bài toán 2.2.17. Một nhà sản xuất sữa có hai phương án làm hộp sữa. Hộp sữa có dạng khối hộp chữ nhật hoặc hộp sữa có dạng khối trụ. Nhà sản xuất muốn chi phí bao bì càng thấp càng tốt(tức diện tích toàn phần của hộp nhỏ nhất), nhưng vẫn phải chứa được một thể tích xác định là V cho trước. Khi đó diện tích toàn phần của hộp sữa bé nhất trong hai phương án là bao nhiêu?
Lời giải.
Trường hợp 1. Hộp sữa hình trụ có bán kính đáy R, chiều cao là h.



Thể tích không đổi $V = \pi R^2 h \Rightarrow h = \dfrac{V}{\pi R^2}, S_{tp} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh = 2\pi R^2 + \dfrac{2V}{R}$.
Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ cho bộ ba số dương $2\pi R^2, \dfrac{V}{R}, \dfrac{V}{R}$.
Ta có $S_{tp} = 2\pi R^2 + \dfrac{V}{R} + \dfrac{V}{R} \geqslant 3\sqrt[3]{2\pi R^2 \cdot \dfrac{V}{R} \cdot \dfrac{V}{R}} = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$.
Trường hợp 2. Hộp sữa hình hộp chữ nhật.



Thể tích không đổi $V = abh \Rightarrow h = \dfrac{V}{ab}$, như vậy

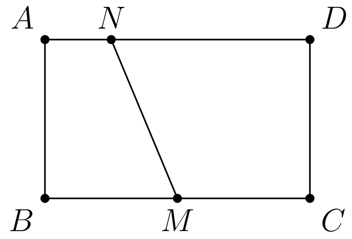
$$S_{tp} = 2ab + 2(a+b)h = 2ab + 2a \cdot \frac{V}{ab} + 2b \cdot \frac{V}{ab} = 2\left(ab + \frac{V}{b} + \frac{V}{a}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ cho bộ ba số dương $ab; \dfrac{V}{a}; \dfrac{V}{b}$.
Ta có $S_{tp} \geqslant 2.3\sqrt[3]{ab \cdot \dfrac{V}{a} \cdot \dfrac{V}{b}} = 6\sqrt[3]{V^2}$.
Xét hai kết quả ta thấy trường hợp 1 nhỏ hơn.
Vậy diện tích toàn phần của hộp sữa bé nhất là $S_{tp} = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$ (đvdt) □

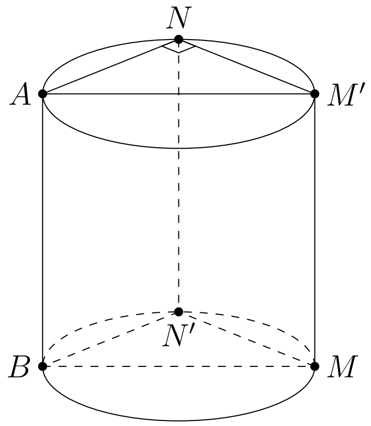
Đây chính là một trong những lý do vì sao nhiều hộp sữa thường được thiết kế với hình dạng hình trụ tròn.

Ngoài ra những hình trụ không nắp mà có cùng thể tích thì hình dạng tiết kiệm vật liệu nhất là chiều cao hộp bằng một nửa đường kính miệng hộp, bạn đọc hoàn toàn có thể chứng minh được điều này.

Bài toán 2.2.18.
Có một mảnh bìa hình chữ nhật $ABCD$ có đường chéo $AC = 1$. Người ta đánh dấu M là trung điểm của BC, N là điểm thuộc cạnh AD với $AD = 4AN$. Sau đó người ta cuốn mảnh bìa lại sao cho cạnh AB trùng với cạnh CD tạo thành một hình trụ. Tìm độ dài cạnh BC sao cho thể tích của tứ diện $ABMN$ đạt giá trị lớn nhất với các đỉnh A, B, M, N nằm trên hình trụ vừa tạo thành.



Lời giải.
Giả sử hình trụ như hình vẽ. Kẻ các đường sinh MM', NN'. Khi đó N là điểm chính giữa cung AM' $\Rightarrow$ tam giác ANM' vuông cân tại N.



Đặt $BC = x \Rightarrow AB = \sqrt{1-x^2}$.
Gọi R là bán kính đường tròn đáy, ta có

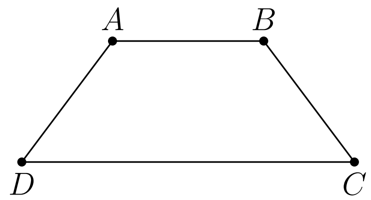
$$AD = 2\pi R = x \Rightarrow R = \frac{x}{2\pi} \Rightarrow AN = \frac{x}{\sqrt{2}\pi}$$

Ta có $V_{ABMN} = \frac{1}{3}V_{AM'N.BMN'} = \frac{1}{3}AB \cdot \frac{1}{2}AN^2$
$= \frac{1}{12\pi^2}x^2\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{12\pi^2}\sqrt{x^4(1-x^2)}.$
Theo bất đẳng thức $AM-GM$ thì

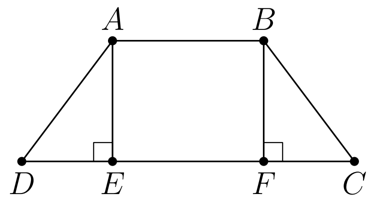
$$x^4(1-x^2) = \frac{1}{2}x^2 \cdot x^2(2-2x^2) \leqslant \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x^2+x^2+2-2x^2}{3}\right)^3 = \frac{4}{27}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x^2 = 2-2x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{3}$. □

Bài toán 2.2.19.
Một người nông dân có 3 tấm lưới thép B40, mỗi tấm dài 16 m và muốn rào một mảnh vườn dọc bờ sông có dạng hình thang cân $ABCD$ như hình vẽ (trong đó bờ sông là đường thẳng DC không phải rào và mỗi tấm là một cạnh của hình thang). Hỏi ông ấy có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu m^2?



Lời giải.
Kẻ AE và BF vuông góc với CD. Vì $ABCD$ là hình thang cân nên giả sử $DE = CF = x$, khi đó ta có $CD = 16 + 2x$ và $AE = \sqrt{216 - x^2}$. Diện tích hình thang $ABCD$ là



$$S = \frac{(AB+CD)\cdot AE}{2} = \frac{(32+2x)\sqrt{216-x^2}}{2} = (16+x)\sqrt{216-x^2}.$$

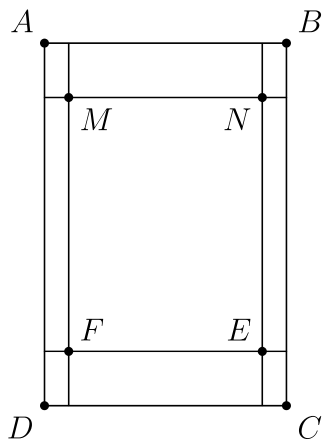
Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{3}(16+x)^3(48-3x) \\ &\leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{(16+x)+(16+x)+(16+x)+(48-3x)}{4}\right)^4 \\ &= 110592. \end{aligned}$$

Suy ra $S \leqslant 192\sqrt{3}$ (m^2).
Dấu bằng xảy ra khi $16 + x = 48 - 3x \Leftrightarrow x = 6$ (m). □

Bài toán 2.2.20. Một trang chữ của một quyển sách tham khảo Toán học cần diện tích 384 cm^2. Biết rằng trang giấy được canh lề trái là 2 cm, lề phải là 2 cm, lề trên 3 cm và lề dưới là 3 cm. Tìm diện tích nhỏ nhất của trang sách.

Lời giải.



Gọi x, y $(x, y > 0)$ lần lượt là hai kích thước của trang chữ.
$(x = MF = NE,\ y = MN = EF)$.

Diện tích trang chữ: $xy = 384 \Rightarrow y = \dfrac{384}{x}$.

Ta có hai kích thước của trang sách là $x + 6$ và $y + 4$.
$(x + 6 = AD = BC,\ y + 4 = AB = CD)$.

Diện tích trang sách:

$$S = (x+6)(y+4) = (x+6)\left(\frac{384}{x} + 4\right) = 408 + 4x + \frac{2304}{x}.$$

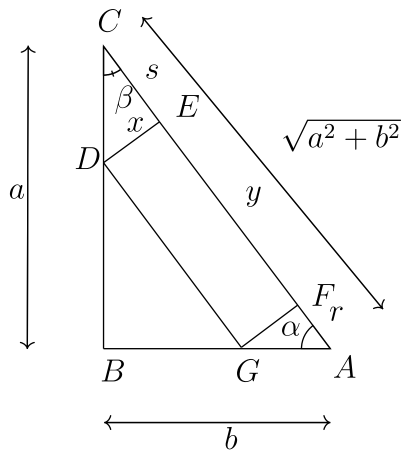
Ta có $S \geqslant 408 + 2\sqrt{4x \cdot \dfrac{2304}{x}} \Leftrightarrow S \geqslant 600$.

S có giá trị nhỏ nhất là 600 xảy ra khi $4x = \dfrac{2304}{x} \Leftrightarrow x = 24$. Suy ra $y = 16$.

Vậy trang sách đạt diện tích nhỏ nhất thì chiều dài và chiều rộng lần lượt là $24 + 6 = 30$ cm và $16 + 4 = 20$ cm. □

Bài toán 2.2.21. Một lô đất có dạng là một tam giác vuông, có các cạnh góc vuông với kích thước lần lượt là a và b. Chính phủ đang dự định xây dựng một tòa nhà hình chữ nhật trên lô đất đối diện với cạnh huyền của tam giác. Tìm diện tích lớn nhất có thể dựng được của tòa nhà ấy?

Lời giải.



Từ hình vẽ, diện tích khu đất là: $S = xy$.

Ta có $\cos\alpha = \dfrac{r}{x} = \dfrac{b}{a} \Rightarrow r = \dfrac{b}{a}x$ và $\cos\beta = \dfrac{s}{x} = \dfrac{a}{b} \Rightarrow s = \dfrac{a}{b}x$. Khi đó,

$$\begin{aligned}
r + y + s = \sqrt{a^2+b^2} &\Leftrightarrow \frac{b}{a}x + y + \frac{a}{b}x = \sqrt{a^2+b^2} \\
&\Leftrightarrow y + \frac{a^2+b^2}{ab}x = \sqrt{a^2+b^2} \\
&\Leftrightarrow y = \sqrt{a^2+b^2} - \frac{a^2+b^2}{ab}x \\
&\Leftrightarrow y = \frac{ab\sqrt{a^2+b^2} - (a^2+b^2)\,x}{ab} \\
&\Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\left(ab - x\sqrt{a^2+b^2}\right)
\end{aligned}$$

Vì vậy, $S = x.\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\left(ab - x\sqrt{a^2+b^2}\right) = \dfrac{x\sqrt{a^2+b^2}.\left(ab - x\sqrt{a^2+b^2}\right)}{ab}$

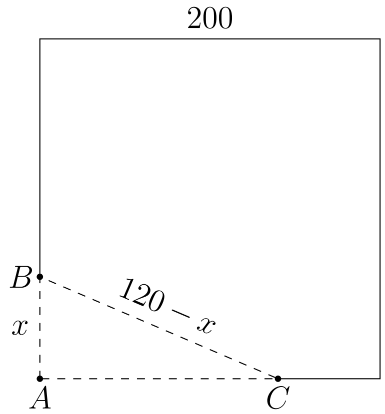
Theo bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$S \leqslant \frac{1}{ab}.\frac{\left(ab - x\sqrt{a^2+b^2} + x\sqrt{a^2+b^2}\right)^2}{4} = \frac{(ab)^2}{4ab} = \frac{ab}{4}$$

Như vậy diện tích tòa nhà lớn nhất có thể bằng $\dfrac{ab}{4}$.

Đạt được khi chiều rộng $x = \dfrac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2}}$ và chiều dài $y = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$. □

Bài toán 2.2.22. Cho một tấm gỗ hình vuông cạnh 200 cm. Người ta cắt một tấm gỗ có hình một tam giác vuông ABC từ một tấm gỗ hình vuông đã cho như hình vẽ bên. Biết $AB = x$ cm là một cạnh góc vuông AB với cạnh huyền BC bằng $(120 - x)$ cm. Tìm x để tam giác ABC có diện tích lớn nhất.



Lời giải.

Ta có $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{(120-x)^2 - x^2} = \sqrt{14400 - 240x}$ cm.

Từ đây suy ra $0 < x < 60$.

Diện tích của tam giác ABC là $S = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC = \dfrac{1}{2}x\sqrt{14400-240x}$ cm^2.

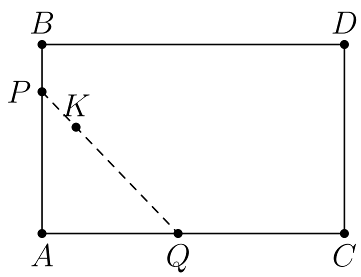
Theo bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$\begin{aligned}
x\sqrt{14400-240x} &= \sqrt{x^2(14400-240x)} \\
&= \frac{1}{120}\sqrt{120x \cdot 120x\,(14400-240x)} \\
&\leqslant \frac{1}{120}\sqrt{\left(\frac{120x+120x+14400-240x}{3}\right)^3} \\
&= 1600\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Như vậy diện tích tam giác ABC lớn nhất là bằng $800\sqrt{3}$ cm^2, đạt được khi $x = 40$ cm. □

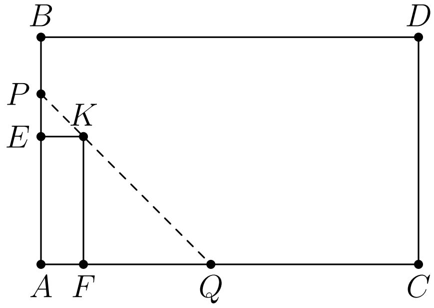
Bài toán 2.2.23.

Một cái hồ rộng có hình chữ nhật. Tại một góc nhỏ của hồ người ta đóng một cái cọc ở vị trí K cách bờ AB là 1 m và cách bờ AC là 8 m, rồi dùng một cây sào ngăn một góc nhỏ của hồ để thả bèo (như hình vẽ).Tính chiều dài ngắn nhất của cây sào để cây sào chạm vào 2 bờ AB, AC và cây cọc K (bỏ qua đường kính của sào).



Lời giải.
Đặt $PE = x$, $FQ = y$, $(x, y > 0)$. Có

$$\frac{PE}{PA} = \frac{EK}{AQ} \Rightarrow \frac{x}{x+8} = \frac{1}{1+y} \Rightarrow x + xy = x + 8 \Rightarrow y = \frac{8}{x}.$$



Có

$$PQ^2 = PA^2 + AQ^2 = (x+8)^2 + (1+y)^2 = (x+8)^2 + \left(1 + \frac{8}{x}\right)^2$$
$$= x^2 + 16x + 65 + \frac{16}{x} + \frac{64}{x^2}.$$

Đến đây, nếu ta sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$ như sau

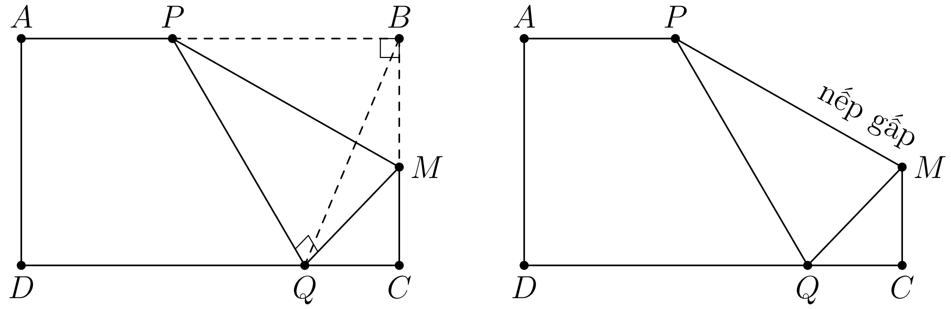
$$x^2 + \frac{64}{x^2} \geqslant 16, 16x + \frac{16}{x} \geqslant 32$$

thì sẽ dẫn tới sai lầm, vì dấu "=" xảy ra tại 2 giá trị khác nhau. Do vậy, ta phải tách như sau:

$$x^2 + \frac{8}{x} + \frac{8}{x} + 8x + 8x + \frac{64}{x^2} + 65 \geqslant 3\sqrt[3]{x^2 \cdot \frac{8}{x} \cdot \frac{8}{x}} + 3\sqrt[3]{8x \cdot 8x \cdot \frac{64}{x^2}} + 65 = 125$$

Vậy chiều dài ngắn nhất của cây sào là $PQ = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 2$.
□

Bài toán 2.2.24. Cho một tờ giấy hình chữ nhật $ABCD$ với chiều dài $AB = 9$(cm) và chiều rộng $BC = 6$(cm). Gấp tờ giấy một lần sao cho khi gấp ta được đỉnh B nằm trên cạnh CD (xem hình sau).



Tìm độ dài nhỏ nhất của nếp gấp PM.
Lời giải.
Đặt $PB = x, BM = MQ = y$ với $0 < x < 9$ và $0 < y < 6$. Suy ra

$$MC = 6 - y, QC = \sqrt{12y - 36}, QB = \sqrt{12y}.$$

Ta chứng minh được $PM \perp BQ$ nên suy ra

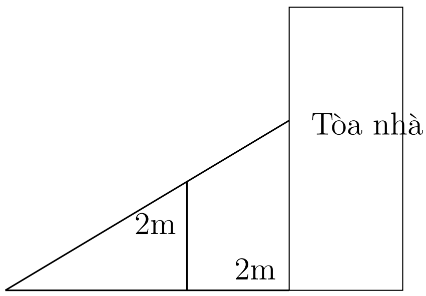
$$PM = \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \cdot \frac{xy}{\sqrt{12y}} = \frac{xy}{\sqrt{3y}} \Rightarrow x^2 = \frac{3y^2}{y-3}.$$

Khi đó $PM = \sqrt{\dfrac{3y^2}{y-3} + y^2} = \sqrt{\dfrac{y^3}{y-3}}$.
Nhiệm vụ của chúng ta bây giờ là tìm giá trị nhỏ nhất của PM, để thuận tiện hơn, ta đặt $y-3 = t$, như vậy $PM = \sqrt{\dfrac{(t+3)^3}{t}}$. Như vậy, theo bất đẳng thức $AM - GM$ ta được

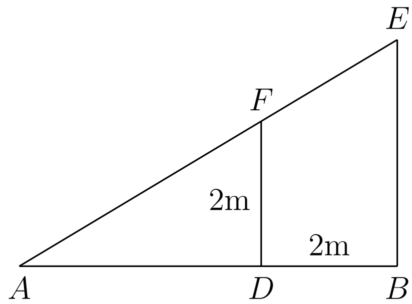
$$\frac{(t+3)^3}{t} = \frac{\left(t + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right)^3}{t} \geqslant \frac{\left(3\sqrt[3]{t \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}}\right)^3}{t} = \frac{243}{4}$$

Như vậy, PM đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\sqrt{\dfrac{243}{4}} = \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ khi $y = \dfrac{9}{2}$. □

Bài toán 2.2.25. Một bức tường cao 2 m nằm song song với tòa nhà và cách tòa nhà 2 m. Người ta muốn chế tạo một cái thang bắc từ mặt đất bên ngoài bức tường, gác qua bức tường và chạm vào tòa nhà (hình vẽ). Hỏi chiều dài tối thiểu của thang là bao nhiêu mét?



Lời giải.

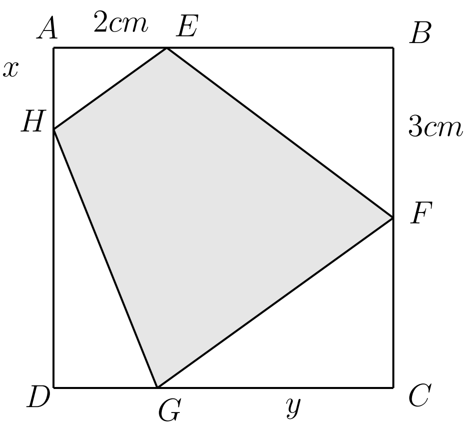


Đặt $AD = x$ $(x > 0)$ thì $AF = \sqrt{x^2 + 4}$.
Ta có $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AF}{AE}$, suy ra $AE = \dfrac{AB \cdot AF}{AD} = \dfrac{(x+2)\sqrt{x^2+4}}{x}$.
Theo bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$\frac{x+2}{x}\sqrt{x^2+4} = \sqrt{\frac{(x+2)^2 (x^2+4)}{x^2}} \geqslant \sqrt{\frac{\left(2\sqrt{2x}\right)^2 \left(2\sqrt{4x^2}\right)}{x^2}} = 4\sqrt{2}$$

Do đó chiều dài tối thiểu của thang là $4\sqrt{2}$ m, dấu "=" xảy ra khi $AD = 2$ m. □

Bài toán 2.2.26. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh $6cm$. Người ta muốn cắt một hình thang như hình vẽ. Tìm tổng $x + y$ để diện tích hình thang $EFGH$ đạt giá trị nhỏ nhất.



Lời giải.
Ta có S_{EFGH} nhỏ nhất khi và chỉ khi $S = S_{AEH} + S_{CGF} + S_{DGH}$ lớn nhất.
Dễ thấy

$$2S = 2x + 3y + (6 - x)(6 - y) = xy - 4x - 3y + 36$$

Theo giả thiết, ta được $\Delta AEH \sim \Delta CGF$ (do các cạnh tương ứng song song với nhau).
Nên $\dfrac{AE}{CG} = \dfrac{AH}{CF}$ suy ra $xy = 6$.
Suy ra

$$2S = 42 - \left(42 - \left(4x + \frac{18}{x}\right)\right) \Leftrightarrow S = 21 - \left(2x + \frac{9}{x}\right)$$

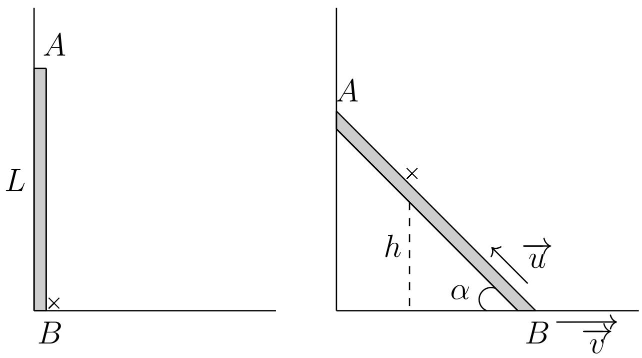
Theo bất đẳng thức $AM - GM$, ta được:

$$2x + \frac{9}{x} \geqslant 2\sqrt{2x.\frac{9}{x}} = 2\sqrt{18} = 6\sqrt{2}$$

Từ đó $S_{\max} = 21 - 6\sqrt{2}$ đạt được khi $\begin{cases} 2x = \dfrac{9}{x} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}cm \Rightarrow y = 2\sqrt{2}cm.$

Vậy $x + y = \dfrac{7\sqrt{2}}{2}cm.$ □

Bài toán 2.2.27. Một con kiến đậu ở đầu B của một thanh cứng mảnh AB có chiều dài L đang dựng cạnh một bức tường thẳng đứng (hình vẽ). Vào thời điểm mà đầu B bắt đầu chuyển động sang phải theo sàn ngang với vận tốc không đổi v thì con kiến bắt đầu bò dọc theo thanh với vận tốc không đổi u đối với thanh. Trong quá trình bò trên thanh, con kiến đạt được độ cao cực đại $h_{\max}$ là bao nhiêu đối với sàn? Cho đầu A của thanh luôn tỳ lên tường thẳng đứng.



Lời giải.
Gọi t là thời gian con kiến đi được, với $0 < t < \dfrac{L}{u}$.
Khi B di chuyển một đoạn $S_1 = v.t$ thì con kiến đi được $S_2 = u.t$.

Khi đó, độ cao mà nó đạt được là:

$$h = S_2.\sin\alpha = ut.\frac{\sqrt{L^2 - {S_1}^2}}{L} = \frac{u}{L}.\sqrt{L^2t^2 - v^2t^4}$$

Đặt

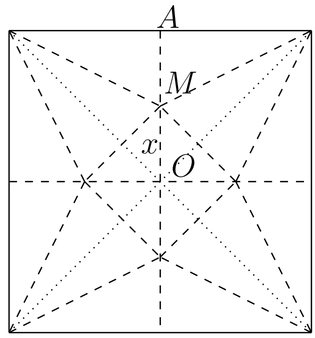
$$f(t) = \sqrt{L^2t^2 - v^2t^4} = \sqrt{\frac{1}{v^2}.v^2t^2.\left(L^2 - v^2t^2\right)}$$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của $f(t)$. Theo bất đẳng thức $AM - GM$ ta được

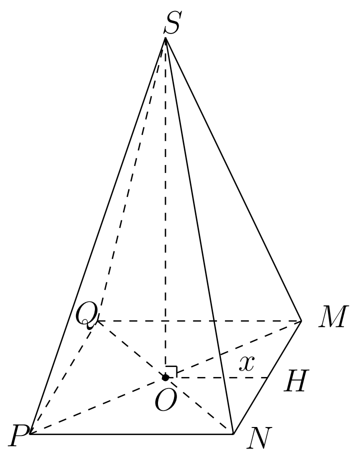
$$f(t) \leqslant \sqrt{\frac{1}{v^2}.\frac{\left(v^2t^2 + L^2 - v^2t^2\right)^2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{v^2}.\frac{L^4}{4}} = \frac{L^2}{2v}$$

Vậy con kiến đạt được độ cao cực đại $h_{\max} = \dfrac{L^2}{2v}$ khi $t = \dfrac{L}{v\sqrt{2}}$ □

Bài toán 2.2.28. Cắt một miếng giấy hình vuông như hình bên và xếp thành hình một hình chóp tứ giác đều. Biết các cạnh hình vuông bằng $20\,cm, OM = x\ (cm)$. Tìm x để hình chóp đều ấy có thể tích lớn nhất.



Lời giải.



Giả sử được hình chóp tứ giác đều như hình vẽ.
Ta có

$$OM = x \Rightarrow OH = HM = \frac{x}{\sqrt{2}} \Rightarrow SH = 10\sqrt{2} - \frac{x}{\sqrt{2}}$$

Nên

$$SO = \sqrt{SH^2 - OH^2} = \sqrt{\left(10\sqrt{2} - \frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{20\left(10 - x\right)}$$

Suy ra cạnh đáy bằng $x\sqrt{2}$.
Với $0 \leqslant x \leqslant 10$, thể tích bằng

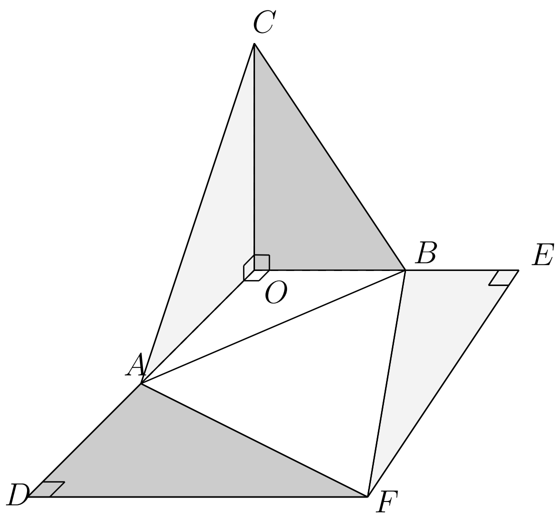
$$V = \frac{1}{3}.S_{MNPQ}.SO = \frac{1}{3}.2x^2.\sqrt{20\left(10-x\right)} = \frac{\sqrt{20}}{3}.x^2.\sqrt{40-4x} = \frac{\sqrt{20}}{3}.\sqrt{\left(40-4x\right).x.x.x.x}$$

Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ cho 4 số không âm, ta có:

$$\frac{\sqrt{20}}{3}.\sqrt{\left(40-4x\right).x.x.x.x} \leqslant \frac{\sqrt{20}}{3}.\sqrt{\left(\frac{40-4x+x+x+x+x}{5}\right)^5} = \frac{256\sqrt{10}}{3}$$

Dấu bằng xảy ra khi $40 - 4x = x \Leftrightarrow x = 8$.
Vậy $V_{\max} = \dfrac{256\sqrt{10}}{3}$ khi $x = 8$. □

Bài toán 2.2.29. Cho hình chóp tam giác $O.ABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau $OC = c$ không đổi, $OA = a, OB = b$ thay đổi sao cho $a + b = c$. Tính thể tích lớn nhất của khối cầu nội tiếp hình chóp $O.ABC$?
Lời giải.



Trong mặt phẳng (OAB), dựng hình vuông $ODFE$ có cạnh bằng c (như hình vẽ).
Vì $a + b = c$ nên $AD = OB = b, BE = OA = a$.
Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}&\Delta DAF = \Delta OBC, \Delta EBF = \Delta OAC(c.g.c)\\&\Rightarrow AF = BC, BF = AC\\&\Rightarrow \Delta ABC = \Delta BAF(c.g.c)\end{aligned}$$

Như vậy tất cả các mặt của hình chóp $O.ABC$ đã được trải phẳng thành hình vuông $ODFE$.
Do đó diện tích toàn phần của hình chóp bằng diện tích hình vuông $ODFE$ và bằng c^2.
Ta lại có thể tích khối chóp $O.ABC$ bằng $V = \dfrac{1}{6}abc$.
Suy ra bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp $O.ABC$ là

$$r = \frac{3V}{S_{tp}} = \frac{\frac{1}{2}abc}{c^2} = \frac{ab}{2c}$$

Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$r = \frac{ab}{2c} \leqslant \frac{1}{2c}.\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{2c}\frac{c^2}{4} = \frac{c}{8}$$

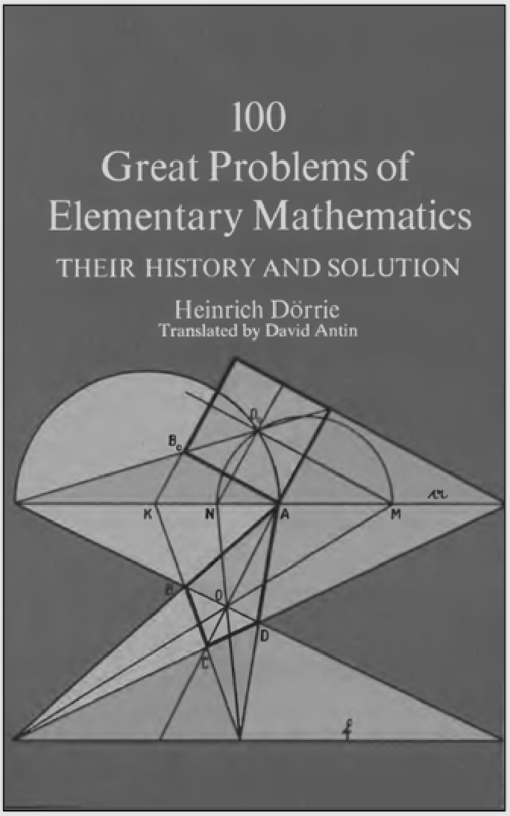
Suy ra $\max r = \dfrac{c}{8}$ khi $OA = OB = \dfrac{c}{2}$.
Vậy thể tích lớn nhất của khối cầu nội tiếp hình chóp $O.ABC$ là $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{\pi c^3}{384}$.
□

Bài toán 2.2.30 (Regiomontanus' maximum problem). Vào năm 1471, nhà toán học Johannes Muller (1436 - 1476) người Đức đã đưa ra một bài toán như sau: Giả sử một bức tượng nặn cao h thước Anh, dựng trên một bệ cao b thước Anh. Một người chăm chú nhìn vào bức tượng này và đi về phía đó. Tia nhìn ngang của người đó cách mặt đất e thước Anh. hỏi người đó phải đứng ở chỗ cách bệ tượng bao xa mới có thể nhìn thấy bức tượng là lớn nhất?

Lời giải.

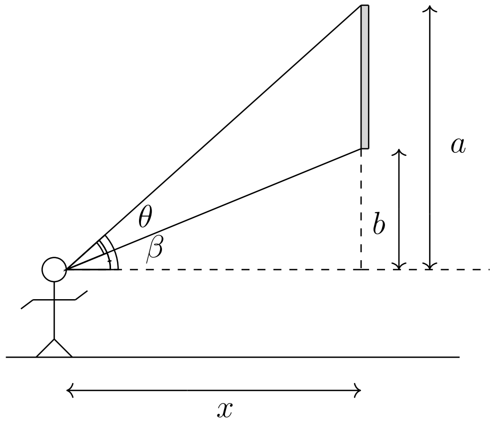
Trong cuốn sách 100 Great Problems of Elementary Mathematics [Dorrie, 1965], nhà toán học Heinrich Dorrie có nói rằng đây là bài toán cần đặc biệt chú ý, nó là bài toán cực trị đầu tiên trong lịch sử toán học kể từ thời cổ đại. Lời giải dưới đây được nhà toán học Eli Maor đưa ra vào năm 1998, và được viết vào trong cuốn sách Trigonometric Delights.

Heinrich Dörrie (sinh ngày 2 tháng 12 năm 1873 tại Hanover , và mất năm 1955) là một giáo viên toán học người Đức. Sau khi tốt nghiệp trung học năm 1895, Dörrie học toán, vật lý, địa lý, tiếng Anh và tiếng Pháp tại Đại học Göttingen và Đại học Leipzig. Năm 1902, ông là giáo viên thử việc tại một trường học tại Royal Gymnasium ở Fulda và sau đó làm giáo viên tại Realprogymnasium ở Biedenkopf. Từ năm 1908 đến năm 1942, ông là giáo viên tại trường trung học ở Wiesbaden. Đến năm 1898, ông nhận bằng tiến sĩ dưới thời David Hilbert tại Đại học Göttingen.



Có lẽ ông được biết đến nhiều nhất với cuốn sách *Triumph der Mathematik*, cuốn này sau đó được dịch sang tiếng anh với tựa đề *100 Great Problems of Elementary Mathematics.*

Quay lại bài toán.



Quan sát hình vẽ, ta gọi b là khoảng cách từ chân bức tượng tới mặt đất, a là khoảng cách từ đỉnh bức tượng tới mặt đất, θ là góc nhìn của người quan sát, β là góc nghiêng của tia sáng truyền từ chân tượng tới mắt so với mặt đất, $\alpha = \theta + \beta$ là góc nghiêng của tia sáng truyền từ đỉnh bức tượng tới mắt so với mặt đất. Khi đó ta có

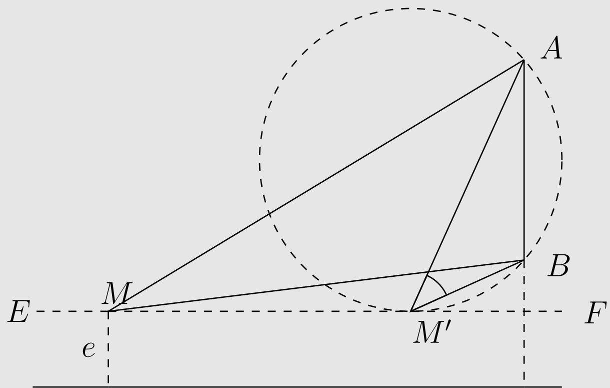
$$\begin{aligned}\cot\theta = \cot(\alpha-\beta) &= \frac{\cot\alpha\cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha} \\ &= \frac{\left(\dfrac{x}{a}\right)\left(\dfrac{x}{b}\right)+1}{\dfrac{x}{b}-\dfrac{x}{a}} = \frac{x}{a-b} + \frac{ab}{(a-b)x}.\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$\cot\theta = \frac{x}{a-b} + \frac{ab}{(a-b)x} \geqslant 2\sqrt{\frac{x}{a-b}\cdot\frac{ab}{(a-b)x}} = \frac{2\sqrt{ab}}{a-b},$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = \sqrt{ab}$. □

Vấn đề trên cũng đã được nhà toán học A.Lorsch giải quyết bằng phương pháp hình học. Bản chất của vấn đề này là: Trên tia nhìn ngang EF, tìm điểm M để có góc nhìn lớn nhất.



Đường tròn nét đứt đi qua 2 điểm A, B tiếp xúc với tia nhìn ngang EF, như vậy tiếp điểm M chính là điểm chúng ta cần tìm.

2.3 Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz - Bunhiacopxki

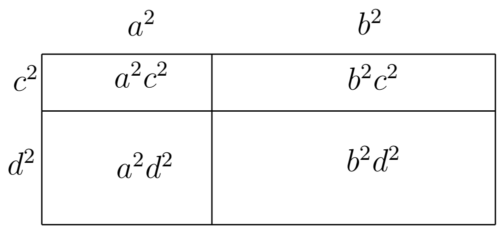
Sau bất đẳng thức Cauchy (hoặc là $AM - GM$) thì bất đẳng thức Cauchy $-$ Schwarz cũng là một trong những cái tên đã quá quen thuộc với thế hệ học sinh chúng ta rồi, dạng đơn giản nhất mà ta hay gặp được phát biểu như sau: Cho 4 số thực a, b, x, y, khi đó ta luôn có

$$(ax + by)^2 \leqslant \left(a^2 + b^2\right)\left(x^2 + y^2\right)$$

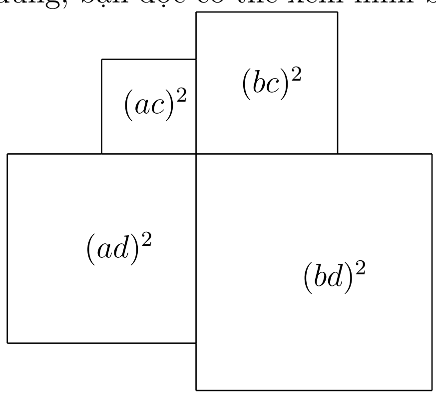
Bất đẳng thức này có khá là nhiều cách chứng minh bằng biến đổi đại số, tuy nhiên như tư tưởng đã được trình bày ở các phần trước, chúng ta sẽ chứng minh nó bằng các cách trực quan hơn.
Cách 1. Một trong những cách đơn giản nhất đó là sử dụng tới đẳng thức $Brahmagupta - Fibonacci$

$$\begin{aligned}\left(a^2 + b^2\right)\left(c^2 + d^2\right) &= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \quad (1)\\ &= (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2. \quad (2)\end{aligned}$$

Đến đây, do $(ad - bc)^2$ và $(ac - bd)^2$ đều không âm, nên ta dễ dàng suy ra điều phải chứng minh. Tuy nhiên chúng ta cần phải chứng minh đẳng thức này đúng, bạn đọc có thể xem hình bên dưới

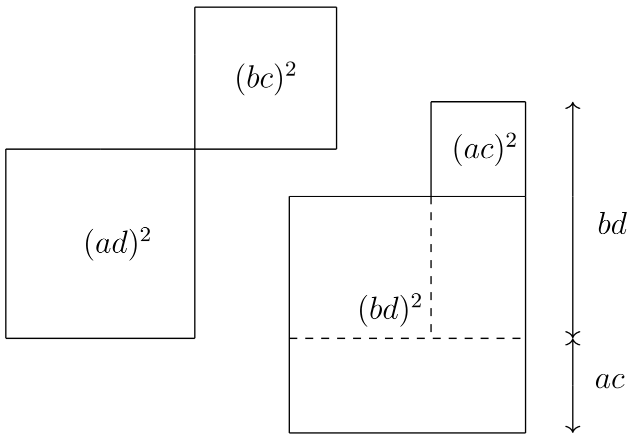


Hình 1



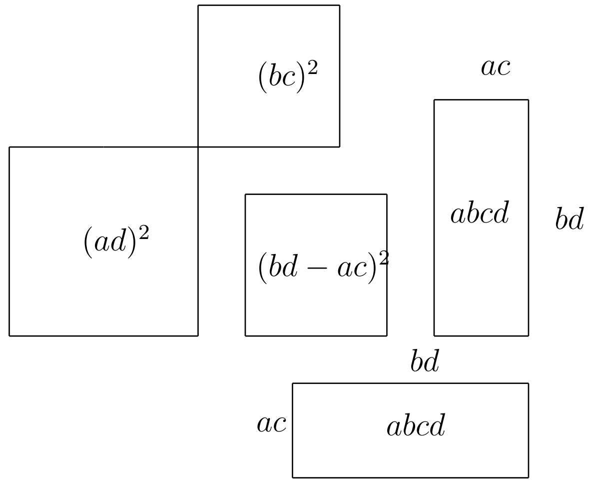
Hình 2

Từ hình 1, ta chuyển nó về thành 4 hình vuông như ở hình vẽ 2.



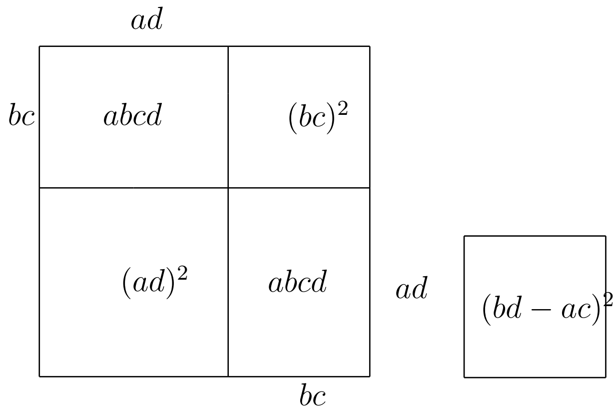
Hình 3

Ở hình thứ 3, ta ghép hình vuông có diện tích là $(bd)^2$ và $(ac)^2$, sau đó chia hình này ra thành các hình vuông và hình chữ nhật nhỏ hơn như ở hình vẽ 4 bên dưới.



Hình 4

Như vậy ta nhận thấy rằng, hình chữ nhật có diện tích là $abcd$ có thể có kích cỡ chiều dài $\times$ chiều rộng là $ac \times bd$ hoặc cũng có thể là $ad \times bc$, như vậy ta sẽ đưa hình 4 về hình 5 như sau



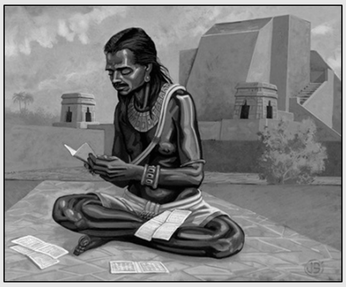
Hình 5

Đến đây ta có thể thấy rằng hình bên trái là hình vuông có cạnh là $(bc+ad)$, như vậy diện tích của nó sẽ là $(ad+bc)^2$, hay đẳng thức đã được chứng minh, dẫn tới bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$ được chứng minh.

Đẳng thức $Brahmagupta - Fibonacci$ còn có một dạng khác tổng quát hơn như sau

$$\begin{aligned}\left(a^2+nb^2\right)\left(c^2+nd^2\right) &= (ac-nbd)^2+n(ad+bc)^2\\ &= (ac+nbd)^2+n(ad-bc)^2.\end{aligned}$$

Đẳng thức này lần đầu xuất hiện trong cuốn sách Diophantus' Arithmetica (ở trang 19 chương 3) của nhà toán học người Hy Lạp Diophantus (sinh vào khoảng giữa năm 200 và năm 214 sau Công nguyên; mất vào khoảng 84 tuổi là vào khoảng năm 284 và 298 sau Công nguyên). Đến thế kỉ thứ 3, nó lại được nhà toán học và thiên văn học người Ấn Độ là Brahmagupta (598 – 668) phát hiện và sử dụng nó trong khi ông nghiên cứu về phương trình Pell (đây là một vấn đề của số học), đẳng thức này xuất hiện trong cuốn sách *Brāhmasphutasiddhānta* của ông. Cuốn sách này sau đó đã được dịch từ tiếng Phạn ra tiếng Latin vào năm 1126 và tới năm 1225 nó lại xuất hiện tiếp trong cuốn sách Fibonacci's Book of Squares của nhà toán học Fibonacci (ngoài ra ông còn được biết đến với một số cái tên khác như Leonardo Bonacci, Leonardo of Pisa, hoặc là Leonardo Bigollo Pisano) vào năm 1225.

Từ trái qua: Diophantus - Brahmagupta - Fibonacci

Ngoài ra đẳng thức này có một số mở rộng khác như

- Đẳng thức Euler's four − square

$$\begin{aligned}\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2\right) &= \left(a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3-a_4b_4\right)^2\\ &+\left(a_1b_2+a_2b_1+a_3b_4-a_4b_3\right)^2\\ &+\left(a_1b_3-a_2b_4+a_3b_1+a_4b_2\right)^2\\ &+\left(a_1b_4+a_2b_3-a_3b_2+a_4b_1\right)^2\end{aligned}$$

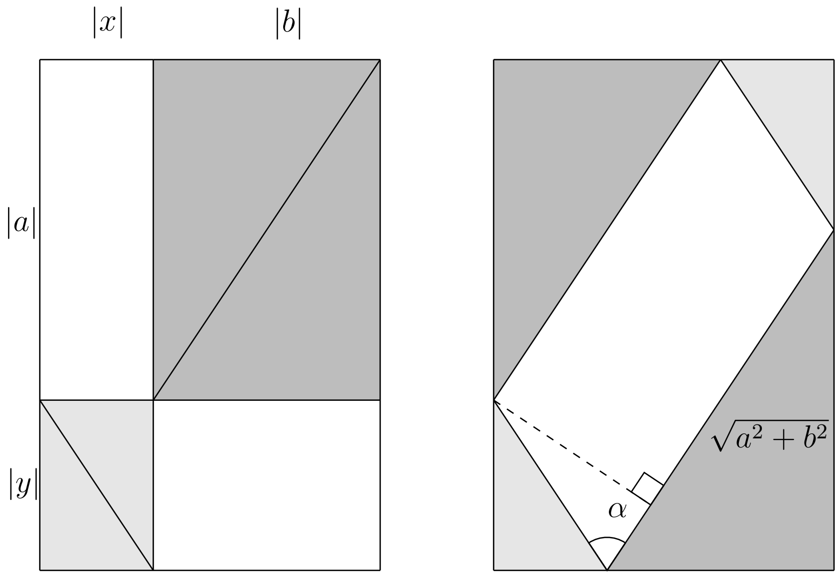
- Về sau đẳng thức này được tổng quát lên bởi nhà toán học người ý (sau này ông mang quốc tịch Pháp) Joseph Louis Lagrange (25 tháng 1 năm 1736 - 10 tháng 4 năm 1813)

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)-\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\left(a_ib_j-a_jb_i\right)^2$$

Như vậy có thể thấy là khi $a=b=1$ thì ta thu được bất đẳng thức $AM-RMS$, ngoài cách này ra chúng ta cũng có thể tiếp cận theo một số cách khác đơn giản và ngắn gọn hơn.

Trong chương trình toán phổ thông bất đẳng thức Cauchy − Schwarz, còn được gọi là bất đẳng thức Schwarz hay cái tên quen thuộc nhất là bất đẳng thức Bunyakovsky (một số sách sẽ kí hiệu hoặc gọi là *bất đẳng thức BUN*), hoặc bằng cái tên khá dài là bất đẳng thức Bunyakovsky − Cauchy − Schwarz (nên thường viết tắt là bất đẳng thức BCS), đặt theo tên của Augustin Louis Cauchy, Viktor Yakovlevich Bunyakovsky và Hermann Amandus Schwarz. Bất đẳng thức này có rất nhiều dạng, trong đó dạng đơn giản nhất đã quen thuộc với chúng ta, ngoài ra các dạng khác của nó các bạn sẽ được tìm hiểu ở chương trình toán đại học và cao hơn. Những dạng khác của nó thường được áp dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau của toán học, chẳng hạn trong đại số tuyến tính dùng cho các vector, trong giải tích dùng cho các chuỗi vô hạn và tích phân của các tích, ngoài ra còn dùng trong lý thuyết xác suất. Ngoài ra bạn đọc cũng cần tránh nhầm lẫn với bất đẳng thức trung bình cộng và trung bình nhân ($AM-GM$) mà tài liệu giáo khoa tại Việt Nam gọi là bất đẳng thức Cauchy.

Cách 2.



Nhìn vào hình vẽ, ta dễ dàng tính được độ dài của đường nét đứt sẽ là $\sin\alpha \cdot \sqrt{x^2+y^2}$. Như vậy diện tích hình bình hành màu trắng sẽ là

$$|a| \cdot |x| + |b| \cdot |y| = \sin\alpha \cdot \sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{a^2+b^2}$$

Mặt khác ta lại có $\sin\alpha \leqslant 1$, từ đây suy ra điều phải chứng minh.

Viktor Yakovlevich Bunyakovsky.
Nhà toán học Nga Viktor Yakovlevich Bunyakovsky sinh ngày $16-12-1804$ là con trai của Đại tá Yakov Vasilievich Bunyakovsky, đồng thời là viện sĩ Viện Hàn lâm Khoa học Nga từ khi mới 24 tuổi và sau này trở thành chủ tịch của Viện từ năm 1864 cho tới năm 1889 là năm ông mất. Ông mất ngày $12-12-1889$.

Từ 16 tuổi đến 21 tuổi ông đã theo học ở Pari, lúc đó có nhiều giáo sư nổi tiếng dạy như Laplace, Fourier, Cauchy, Legendre. Ông bảo vệ luận án tiến sĩ toán tại Pari vào năm 1825 lúc ông 21 tuổi.

Trở về nước, ở St. Petersburg ông đã hoạt đọng tích cực trong lĩnh vực giáo dục, giảng dạy toán cho đến năm 1846. Trong 15 năm sau, từ 1846 đến 1859 ông dạy tại trường Đại học St. Petersburg, phụ trách các môn cơ học giải tích, lí thuyết xác suất và giải tích toán học. Bắt đầu từ năm 1858, ông trở thành chuyên gia quan trọng của chính phủ về các vấn đề thống kê và bảo hiểm.

Có thể nói rằng lĩnh vực hoạt động của ông rất rộng lớn và đầy kết quả tốt đẹp. Ông đã có đến 168 công trình nghiên cứu. Công trình ưu việt của Bunyakovsky là lí thuyết số, lí thuyết xác suất và ứng dụng. Ông còn nghiên cứu nhiều về giải tích, hình học và đại số, quan tâm đến cả tính toán trong thực tiễn; góp phần vào việc cải tiến các tính toán của nước Nga.

Tác phẩm to lớn của ông là "Cơ sở của lí thuyết xác suất" (1846) trong đó có nhiều phần độc đáo, nhất là phần lịch sử phát sinh và phát triển môn xác suất, phần ứng dụng quan trọng của xác suất trong vấn đề bảo hiểm và dân số v.v...

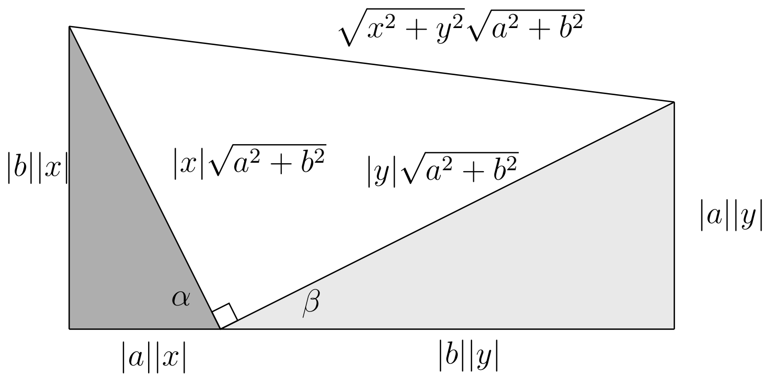
Một loạt công trình của ông về thống kê, xác suất đã góp phần đáng kể vào sự phát triển của lí thuyết thống kê ở nước Nga. Các công trình về lí thuyết số với 1 số khái niệm mới đã mang lại sự hấp dẫn đối với môn này vào thế kỉ thứ 19. Trong hình học ông cũng đã nghiên cứu về lí thuyết các đường song song.

Cùng với Ostrogradsky và Chebyshev, ông đã có vai trò lớn trong việc nâng cao trình độ khoa học của việc giảng dạy toán ở đại học và mở rộng phạm vi chương trình toán ở đại học. Ông đã viết tập "Những bài giảng về toán lí thuyết và toán ứng dụng" có giá trị lớn đối với việc giảng dạy toán cũng như đối với từ vựng khoa học. Ngoài ra đối với nhà trường phổ thông Bunyakovsky đã viết cuốn sách giáo khoa "Số học" (1844) và cuốn "Chương trình và tóm tắt môn số học". Đóng góp của ông trong lý thuyết số bao gồm một công việc (1846) trong đó ông đã trình bày một bản gốc của khoa học này và ứng dụng của mình cho bảo hiểm và số nhân khẩu.

Công trình của Bunyakovsky cũng giải quyết một số vần đề hình học. Năm 1853, ông phê bình các nỗ lực kiểm tra trước đó nhằm đến việc chứng minh “định đề thứ năm của Euclid về đường thẳng song song“ và cố gắng chứng minh một mình những đầy ý nghĩa của hình học phi Euclid Lobachevsky. Ông tích cực trong việc phổ biến kiến thức toán học ở Nga. ông cũng đóng góp đáng kể vào việc làm giàu các thuật ngữ toán học Nga.

Ông là hội viên danh dự của tất cả các trường Đại học Nga, của nhiều hội khoa học, đồng thời là phó chủ tịch Viện Hàn lâm Khoa học và Viện đã đặt ra giải thưởng mang tên ông cho những tác phẩm toán học có giá trị lớn. Để kỷ niệm năm mươi năm nghiên cứu và giảng dạy của mình. Viện Hàn Lâm St Petersburg năm 1875 ban hành một huy chương và thành lập một giải thưởng mang tên ông cho thành tích xuất sắc trong toán học.

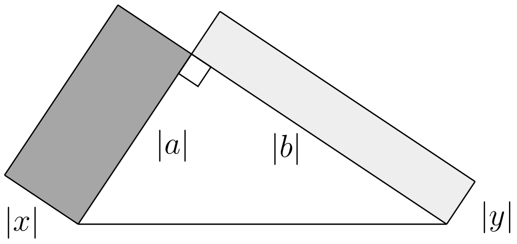
Cách 3.



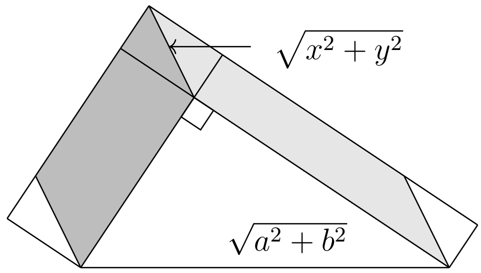
Ta có thể thấy rằng, 2 tam giác màu xám đồng dạng với nhau, do vậy $\alpha + \beta = 90^\circ$.
Như vậy ta dễ dàng suy ra được

$$|a| \cdot |x| + |b| \cdot |y| \leqslant \sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{a^2+b^2}$$

Cách 4.

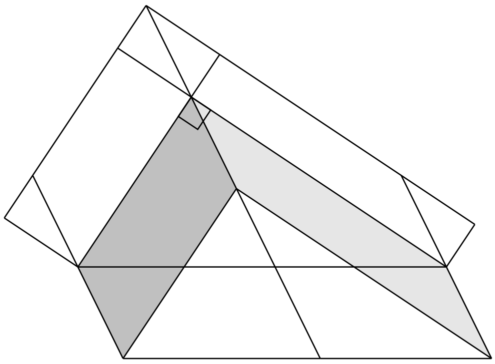


Hình 1

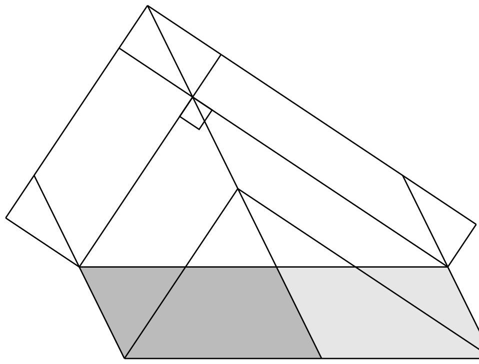


Hình 2

Ban đầu ta sẽ dựng một tam giác vuông và 2 hình chữ nhật có kích thước là $|x|\cdot|a|$ và $|b|\cdot|y|$ như hình 1, sau đó ta đưa các hình chữ nhật đã dựng thành các hình bình hành có cùng diện tích như ở hình 2. Bước tiếp theo ta sẽ dựng các hình bình hành khác bằng 2 hình bình hành đã dựng ở hình trên, quan sát hình bên dưới.

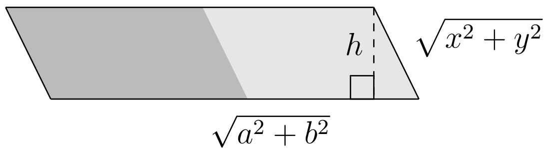


Hình 3



Hình 4

Từ hình vẽ thứ 3 ta đưa về hình thứ 4 nhờ việc nhận ra các hình bình hành có diện tích bằng nhau. Cuối cùng ta đưa được các hình chữ nhật ban đầu về thành 1 hình bình hành có 2 cạnh có độ dài là $\sqrt{x^2+y^2}$ và $\sqrt{a^2+b^2}$.



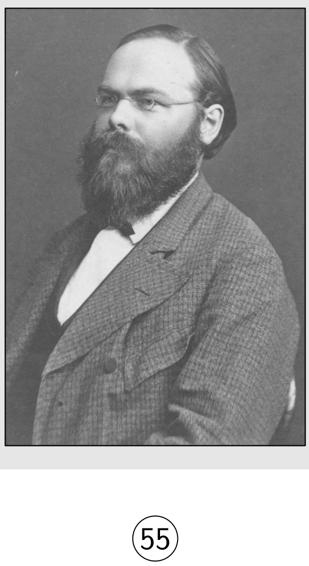
Lúc này diện tích hình bình hành sẽ là

$$S = h\cdot\sqrt{a^2+b^2} \leqslant \sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}$$

Vậy ta được

$$|ax+by| \leqslant |a|\cdot|x| + |b|\cdot|y| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}$$

Hermann Amandus Schwarz.



Karl Hermann Amandus Schwarz (25 tháng 1 năm 1843 - 30 tháng 11 năm 1921) là một nhà toán học người Đức, nổi tiếng với công trình về giải tích phức. Ông sinh ra ở Hermsdorf, Silesia (nay là Jerzmanowa, Ba Lan). Đến khi trưởng thành, Schwarz đã kết hôn với Marie Kummer, là con gái của nhà toán học Ernst Eduard Kummer. Ban đầu ông nghiên cứu hóa học ở Berlin, nhưng cha vợ của ông, Kummer và nhà toán học Weierstrass đã thuyết phục ông chuyển sang nghiên cứu về toán học. Giữa năm 1867 và năm 1869 ông làm việc tại đại học Halle, và sau đó là Đại học Bách khoa Liên bang Thụy Sĩ. Từ năm 1875 ông làm việc tại Đại học Göttingen và nghiên cứu về giải tích phức, hình học vi phân và phép tính biến phân. Các tác phẩm nổi bật của Schwarz bao gồm *Bestimmung einer Speziellen Minimalfläche* được in vào năm 1871 và *Gesammelte mathematische Abhandlungen(1890).* Đến năm 1892 ông trở thành một thành viên của Viện Hàn lâm Khoa học Berlin và là giáo sư tại Đại học Berlin. Sau đó ông sống ở Berlin đến cuối đời.

Ngoài ra ta cũng có thể quan tâm tới dạng tổng quát của bất đẳng thức $Cauchy - Schwarz$ được phát biểu như sau:

Bất đẳng thức Cauchy − Schwarz. Cho 2 bộ số thực $a_1, a_2, \cdots a_n$ và $b_1, b_2, \cdots b_n$, khi đó ta luôn có

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n| \leqslant \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}$$

Chứng minh. Để chứng minh bất đẳng thức này, ta sẽ cần phải hiểu một số khái niệm liên quan tới vector, phần này sẽ dành cho bạn nào muốn tìm hiểu thêm. Ta kí hiệu 2 vector $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots a_n)$ và $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$. Khi đó ta định nghĩa $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ (cái này gọi là tích vô hướng) là

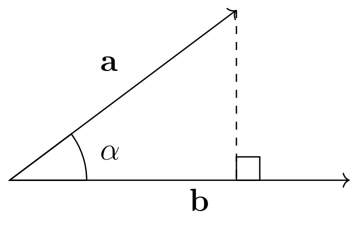
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$

và chiều dài của vector $\mathbf{a}$ được xác định bởi

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

Nếu bạn nào đã học tới hình giải tích Oxy (không gian 2 chiều) thì sẽ thấy rằng các kí hiệu trên là kí hiệu tổng quát cho trường hợp không gian n chiều. Như vậy hoàn toàn tương tự như với không gian 2 chiều, khi này tích vô hướng của 2 vector $\mathbf{a}$ và $\mathbf{b}$ sẽ được tính theo công thức

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \cos\alpha, \text{ trong đó } \alpha \text{ là góc giữa 2 vector } \mathbf{a} \text{ và } \mathbf{b}$$



Mặt khác $\cos\alpha \leqslant 1$ nên ta suy ra điều phải chứng minh. Ngoài ra, với cách đặt như trên, ta cũng có thể sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$ mà không phải sử dụng tới công thức tích vô hướng.

Cách 2. Ta có

$$\frac{|a_i|}{\|\mathbf{a}\|} \cdot \frac{|b_i|}{\|\mathbf{b}\|} \leqslant \frac{1}{2}\left(\left(\frac{a_i}{\|\mathbf{a}\|}\right)^2 + \left(\frac{b_i}{\|\mathbf{b}\|}\right)^2\right)$$

Như vậy

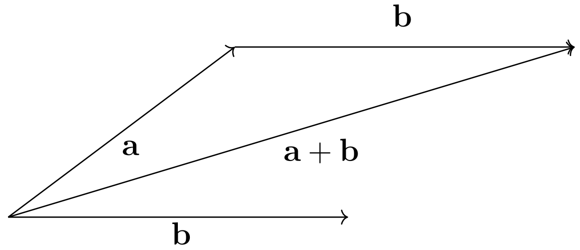
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{|a_i|}{\|\mathbf{a}\|} \cdot \frac{|b_i|}{\|\mathbf{b}\|} \leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{\|\mathbf{a}\|^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^2}{\|\mathbf{b}\|^2}\right) = 1$$

Từ đây suy ra
$$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \leqslant |a_1|\,|b_1| + |a_2|\,|b_2| + \cdots + |a_n|\,|b_n| \leqslant \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|.$$
Bất đẳng thức được chứng minh.

Nhận xét. Như đã nói ở phần mở đầu, nội dung cuốn sách này sẽ không nặng về lý thuyết cũng như các phép biến đổi mà sẽ mang tới cho bạn đọc các hướng tiếp cận và ý tưởng của các phép chứng minh. Do vậy sẽ có một số chỗ chưa đảm bảo tính chặt chẽ về mặt toán học, các bạn có thể tìm hiểu thêm ở các cuốn sách khác cũng như từ nguồn tài nguyên trên Internet để hiểu rõ hơn những phần này!

Bài toán 2.3.1. Chứng minh rằng với 2 bộ số dương $a_1, a_2, \cdots, a_n$ và $b_1, b_2, \cdots, b_n$ thì ta luôn có
$$\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i^2 + b_i^2}$$

Chứng minh. Bạn đọc có thể nhận ra đây chính là bất đẳng thức Minkowski ta đã tìm hiểu ở phần trước. Ở chứng minh này ta sẽ tiếp tục dùng ý tưởng về vector để giải quyết nó.



Sử dụng bất đẳng thức tam giác $\|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\| \geqslant \|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|$, ta có
$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \geqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2}$$
Tiếp theo, hãy để ý rằng
$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2 = \left|\sum_{i=1}^{n} a_i (a_i + b_i) + \sum_{i=1}^{n} b_i (a_i + b_i)\right| \leqslant \left|\sum_{i=1}^{n} a_i (a_i + b_i)\right| + \left|\sum_{i=1}^{n} b_i (a_i + b_i)\right|,$$
Mặt khác theo bất đẳng thức $Cauchy - Schwarz$ ta có
$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i (a_i + b_i)\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2}$$
$$\left|\sum_{i=1}^{n} b_i (a_i + b_i)\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2}$$
Do vậy
$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2 \leqslant \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\right)\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2}$$
Từ đây ta suy ra điều phải chứng minh.

Nhận xét. Nếu ta định nghĩa 2 vector $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots a_n)$ và $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ thì khi đó
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n)$$
Qua đây có thể thấy rằng cách chứng minh này không vui vẻ hơn cách chứng minh ta đã đề cập ở phần trước một chút nào cả!

Bài toán 2.3.2 (Extrema of a linear function on an ellipsoid).
Cho các số thực a, b, c, p, q, r thỏa mãn

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}+\frac{z^2}{r}=1$$

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $f(x, y, z)=ax+by+cz$.
Lời giải.
Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có

$$\begin{aligned}
(f(x,y,z))^2 &= (ax+by+cz)^2 \\
&= \left(a\sqrt{p}\cdot\frac{x}{\sqrt{p}}+b\sqrt{q}\cdot\frac{y}{\sqrt{q}}+c\sqrt{r}\cdot\frac{z}{\sqrt{r}}\right)^2 \\
&\leqslant \left(a^2p+b^2q+c^2r\right)\left(\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}+\frac{z^2}{r}\right) \\
&= a^2p+b^2q+c^2r
\end{aligned}$$

Như vậy

$$-M \leqslant f(a,b,c) \leqslant M \left(M=\sqrt{a^2p+b^2q+c^2r}\right)$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{x}{ap}=\dfrac{y}{bq}=\dfrac{z}{cr}$. □

2.4 Bất đẳng thức Chebyshev.

Bất đẳng thức Chebyshev. Với mọi $n \geqslant 2$ và $0<x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$,

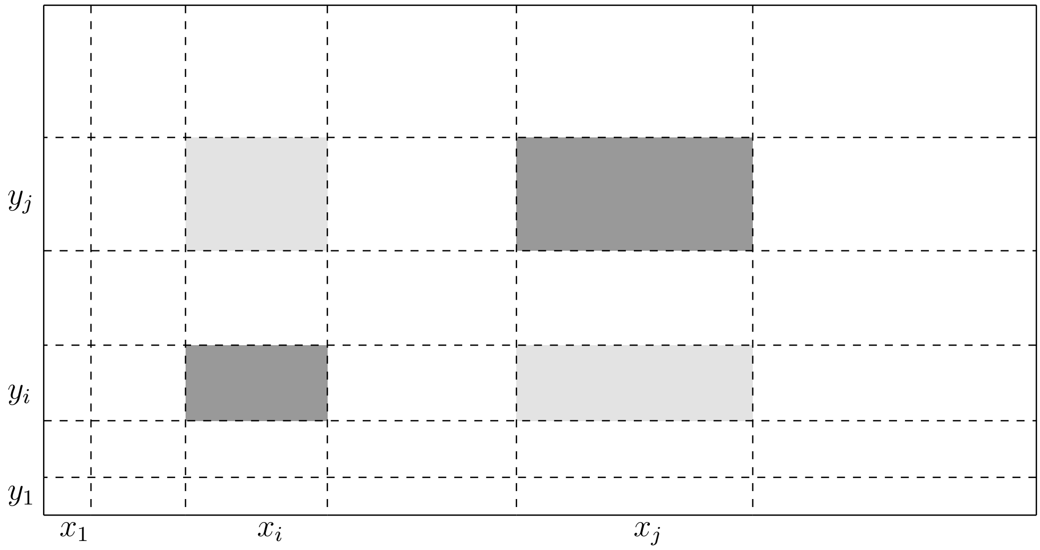
- nếu $0<y_1 \leqslant y_2 \leqslant \cdots \leqslant y_n$ thì

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i \leqslant n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{5}$$

- nếu $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \cdots \geqslant y_n>0$ thì

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i \geqslant n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{6}$$

Chứng minh. Bây giờ ta sẽ sử dụng một kết quả ở bài toán 2.2.4 mà ta đã chứng minh ở phần trước. Ta đặt $a=x_i, b=x_j, c=y_i, d=y_j$, suy ra $x_iy_j+x_jy_i \leqslant x_iy_i+x_jy_j$. Khi đó quan sát hình vẽ dưới đây, một cặp hình chữ nhật có màu đậm hơn sẽ có tổng diện tích nhỏ hơn tổng diện tích của một cặp hình chữ nhật có màu nhạt hơn.



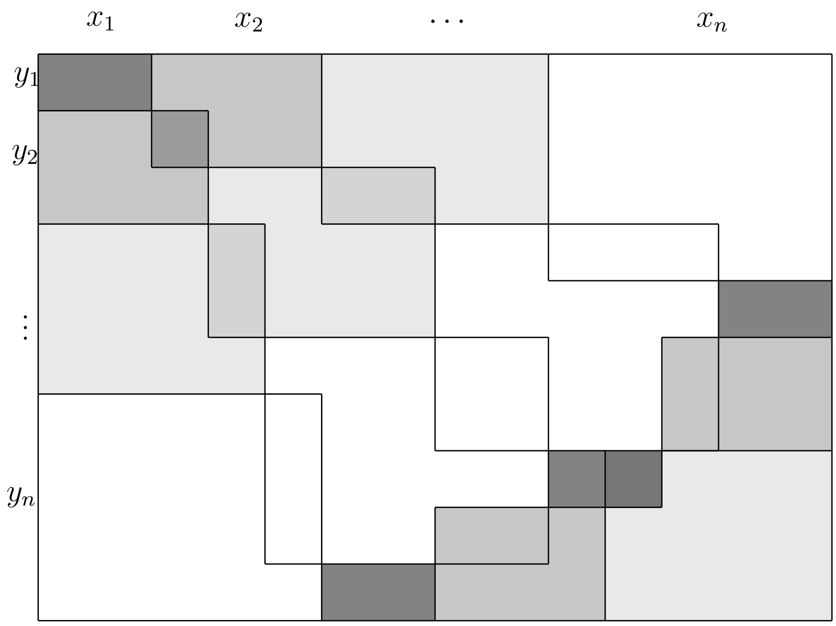
Như vậy ta suy ra

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)(y_1 + y_2 + \cdots + y_n) \leqslant n(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)$$

Bây giờ nếu ta đặt $a = x_i, b = x_j, c = y_j, d = y_i$ thì bất đẳng thức sẽ đổi chiều.
Đặt biệt, nếu ta đặt $y_i = \dfrac{1}{x_i}$ thì ta sẽ thu được bất đẳng thức

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \geqslant n^2$$

Ở phần trước, ta đã đề cập tới một cách để chứng minh bất đẳng thức này bằng trực quan hình học, bây giờ ta sẽ sử ý tưởng đó để chứng minh ngược lại trường hợp tổng quát.



Từ hình vẽ này ta dễ dàng suy ra điều phải chứng minh.
Bây giờ ta đặt $y_i = x_i^2$ và sau đó đặt $y_i = x_i$ thì ta thu được bất đẳng thức

$$\begin{aligned} n^2\left(x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3\right) &\geqslant (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \cdot n\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right) \\ &\geqslant (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^3 \end{aligned}$$

Hay

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \leqslant \sqrt[3]{\frac{x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3}{n}}$$

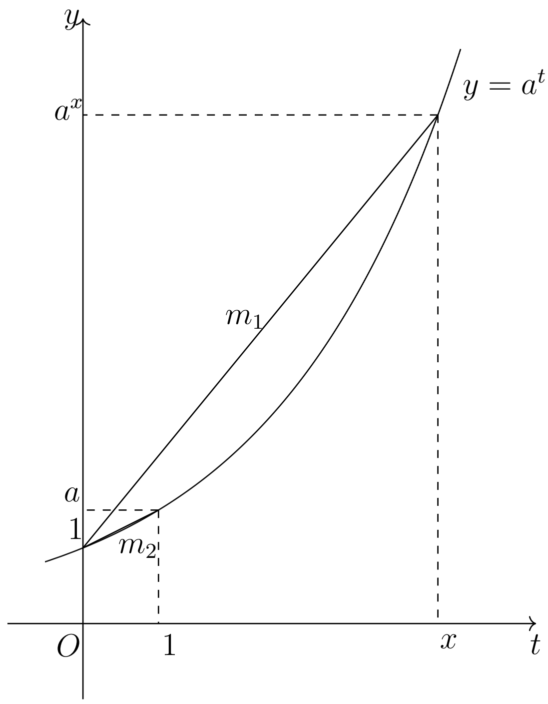
Với cách làm hoàn toàn tương tự, ta cũng có thể suy ra được

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \leqslant \sqrt[p]{\frac{x_1^p+x_2^p+\cdots+x_n^p}{n}} \tag{7}$$

Tổng quát. Với $x_1, x_2, \cdots, x_n$ và 2 số thực dương $p \geqslant q$, khi đó

$$\sqrt[p]{\frac{x_1^p+x_2^p+\cdots+x_n^p}{n}} \leqslant \sqrt[q]{\frac{x_1^q+x_2^q+\cdots+x_n^q}{n}}$$

Chứng minh. Để chứng minh bất đẳng thức này, ta cần chứng minh bất đẳng thức sau.
Bất đẳng thức Bernoulli.. Với $a > 0$, $a \neq 1$ và $x > 0$, khi đó $a^x - 1 > x(a-1)$.



Ta thấy rằng

$$m_1 > m_2 \Rightarrow \frac{a^x-1}{x} > a-1$$

Như vậy, bất đẳng thức được chứng minh.

Quay lại bài toán. Đặt $A = \left(\frac{1}{n}\sum x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$ và $B = \left(\frac{1}{n}\sum x_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$. Khi đó

$$\frac{B}{A} = \left(\frac{1}{n}\left[\sum\left(\frac{x_i}{A}\right)^q\right]\right)^{\frac{1}{q}} = \left[\frac{1}{n}\left(\sum\left[\left(\frac{x_i}{A}\right)^p\right]^{\frac{q}{p}}\right)\right]^{\frac{1}{q}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli với $y = \frac{x_i}{A} > 0$ và $r = \frac{q}{p} \geqslant 1$ ta được

$$\frac{B}{A} \geqslant \left(\frac{1}{n}\left[\sum\left(1+\frac{q}{p}\left[\left(\frac{x_i}{A}\right)^p - 1\right]\right)\right]\right)^{\frac{1}{q}}$$

Ta thấy rằng $\sum \left(\frac{x_i}{A}\right)^p = n$, mặt khác $\frac{q}{p} \geqslant 1$, do vậy

$$\frac{B}{A} \geqslant \left(\frac{1}{n}\left(\left(1+\frac{q}{p}(n-1)\right)\right)\right)^{\frac{1}{q}} \geqslant \left(\frac{1}{n}((1+(n-1)))\right)^{\frac{1}{q}} = 1$$

Như vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 2.4.1. Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng

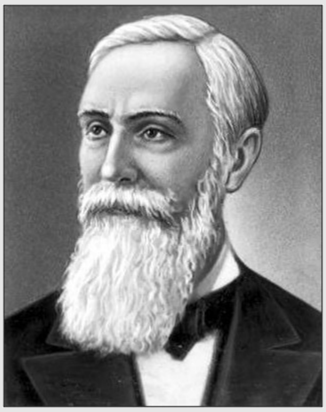
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}$$

Lời giải.

Đây là một trong những bất đẳng thức rất nổi tiếng, xuất hiện nhiều trong các cuộc thi olympic toán. Hiện nay có rất nhiều lời giải cho bất đẳng thức này, tuy nhiên ở đây chúng ta sẽ chỉ giải quyết nó bằng bất đẳng thức Chebyshev. Ta có

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} &= \left(\frac{a}{b+c}+1\right) + \left(\frac{b}{c+a}+1\right) + \left(\frac{c}{a+b}+1\right) - 3 \\
&= (a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) - 3 \\
&= \frac{1}{2}[(a+b)+(b+c)+(c+a)]\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) - 3 \\
&\geqslant \left(\frac{1}{2}\cdot 9\right) - 3 = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. □



Pafnuty Lvovich Chebyshev (sinh ngày 16 tháng 5 năm 1821 – mất ngày 8 tháng 12 năm 1894)

Mùa hè năm 1893, tại Chicago có mở một cuộc triển lãm công nghiệp quốc tế. Ở đây trưng bày rất nhiều thứ thú vị và hấp dẫn. Bất kể ngày hè nóng nực, người xem vẫn tụ tập đông nghịt. Nơi thu hút nhiều người xem nhất là tòa nhà ở đó giới thiệu nhiều máy móc kỳ lạ được đưa về từ nước Nga xa xôi. Đây là chiếc máy "đi bằng chân" có thể bước đi những bước khá thoải mái và chính xác như bốn chân con vật. Còn đây là chiếc ghế bành biết đi, có thể ngồi vào đó và chỉ huy cho nó đi theo một hướng bất kỳ. Chiếc thuyền có máy bơi cũng hơi cũng thu hút sự chú ý của người xem. Một nhà bác học sau khi xem chiếc thuyền đó đã phải thừa nhận: "Tôi rất khoái chiếc thuyền có chân này. Nó có thể đi dưới nước như ngựa vậy!"

Trong triển lãm này còn nhìn thấy bộ điều chỉnh ly tâm rất hoàn mỹ và nhiều máy móc khác.

Đặc biệt, toàn thể người xem đều rất kinh ngạc chú ý đến chiếc máy tính (máy kế toán) thực hiện rất nhanh và hoàn toàn chính xác bốn phép tính số học. Người sáng tạo ra những chiếc máy đặc sắc đó là Chebyshev, người xứng đáng được mệnh danh là "cha đẻ của lý thuyết hiện đại về các máy móc". Chebyshev bị tật một chân. Có lẽ vì thế lúc bé Chebyshev không thích những trò chơi ồn ào của bè bạn và thích được ngồi yên tĩnh một mình. Hồi nhỏ người bạn trung thành của Chebyshev là con dao nhíp và cậu sử dụng nó rất điêu luyện. Chebyshevcó thể ngồi hàng giờ kỳ cục làm lấy những chiếc máy bằng gỗ đủ loại. Chẳng hạn, cậu đã chế tạo chiếc cối xay nước và cối xay gió rất tinh xảo với tất cả các bộ truyền chuyển động.

Lòng ham mê chế tạo và thiết kế Chebyshev còn giữ đến trọ đời. Ngay khi đã thành nhà toán học nổi tiếng, Chebyshev vẫn giành nhiều thời gian cho việc chế tạo những chiếc máy có cấu tạo đặc biệt. Những kiến thức tuyệt mỹ của nhà toán học đã giúp ông kiến trúc những chiếc máy rất phức tạp; và ngược lại, những mô hình do ông chế tạo ra đặt cho ông nhiều bài toàn mà ông và học trò phải tìm cách giải. Hồi nhỏ Chebyshev học ở nhà; 16 tuổi là sinh viên ban Toán khoa Triết của trường Đại học tổng hợp Moscow. Vào năm 1841, Chebyshev đã được trao tặng huy chương bạc về tác phẩm "Tính nghiệm các phương trình". Chebyshev ham mê toán học và cơ học đến mức rất nhiều bài toán đã được giải trên đường đi. Thậm chí, chính ông đã thú nhận, ông suy nghĩ cả khi ngồi trong nhà hát, khi nghe nhạc hoặc khi xem biểu diễn văn công.

Chebyshev tốt nghiệp Đại học vào năm 20 tuổi. Năm 25 tuổi, ông bảo vệ một luận án kỳ diệu "Kinh nghiệm phân tích cơ sở lý thuyết xác suất", một năm sau ông về dạy ở trường Đại học Petersburg. Vào năm 1849, Chebyshev bảo vệ luận án tiến sĩ "Lý thuyết so sánh" bao gồm một trong những chương trình quan trọng nhất của lý thuyết số hiện đại. Vào năm 1853, do những đóng góp to lớn trong lĩnh vực khoa học. Chebyshev được chọn làm tùy viên của Viện hàn lâm khoa học St. Petersburg và đến năm 1859 đã trở thành viện sĩ chính thức.

Vinh dự lớn cho Chebyshev, một nhà bác học vĩ đại về toán là đã được bầu làm viện sĩ danh dự của nhiều viện hàn lâm, trường Đại học và hội toán ở Nga cũng như ở nước ngoài. Viện sĩ Chebyshev là người sáng lập ra trường phái Toán học St. Petersburg. Đặc điểm nổi bật của trường phái này là dũng cảm, mạnh bạo trong khoa học và liên hệ rất chặt chẽ giữa lý thuyết toán và thực tế. Trường phái đó đã trở nên vinh quang muôn thủa. Những học trò xuất sắc của Chebyshev như Dmitry Grave , Aleksandr Korkin , Aleksandr Lyapunov , và Andrei Markov và nhiều người khác, đã trở thành những nhà bác học lẫy lừng thế giới.

Là ủy viên của Ủy ban Khoa học về Toán học, Chebyshev đã tham gia tích cực vào việc tổ chức giảng dạy toán ở Nga. Công việc đó thể hiện đặc biệt qua sự cố gắng làm cho cách trình bày các sách giáo khoa được chặt chẽ và chính xác hơn, cũng như việc đòi hỏi trình bày đầy đủ nhất trong các giáo trình Toán học sơ cấp. Chebyshev đã có nhiều phát minh trong lĩnh vực lý thuyết số, đặc biệt là trong việc nghiên cứu phân bố các số nguyên tố trong dãy số tự nhiên.

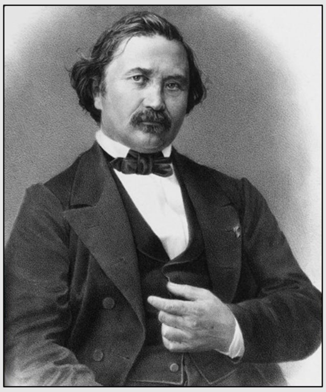
Nhà toán học cổ Hy Lạp Euclide (thế kỷ III trước CN) đã chứng minh một định lý về tính vô hạn của dãy các số nguyên tố, tức là chứng minh rằng không tồn tại trong dãy đó một số nguyên tố lớn nhất. Mệnh đề đó được gọi là "Định lý Euclide".

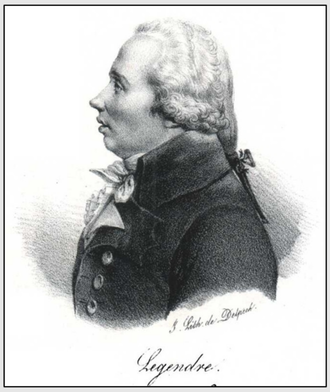
Vấn đề các số nguyên tố phân bố theo quy luật nào trong toàn bộ dãy số tự nhiên, mức độ đều đặn và thường xuyên thế nào, vẫn chưa được trả lời, đã hơn 2000 năm nay, mặc dù nhiều nhà toán học vĩ đại của thế giới kể cả Euler và Gauss đều đã nghiên cứu.

Trước Chebyshev, vấn đề phân bố các số nguyên tố được giải quyết có tính chất thực nghiệm bằng cách quan sát thực tế mà không có cơ sở lập luận nào cả. Chẳng hạn, nhà toán học Pháp Legendre (1752 - 1833) đã khẳng định rằng trong khoảng một triệu số nguyên đầu tiên, số các số nguyên tố nhỏ hơn n xấp xỉ bằng:

$$\frac{n}{\ln n - 1,08366}$$

Hơn nữa, Legendre đã giả định - không có căn cứ - rằng hệ thức đó đúng cả với những giá trị n lớn hơn 1 triệu. Nhà toán học Pháp Joseph Bertrand cũng đưa ra một giả thuyết là giữa n và $2n$ $(n > 1)$ có ít nhất một số nguyên tố. Người đặt cơ sở vững chắc cho một lý thuyết chặt chẽ về phân bố các số nguyên tố là Chebyshev.





Từ trái qua: Joseph Louis François Bertrand (1822 − 1900), Adrien − Marie Legendre (1752 − 1833)

Những khám phá của ông về mặt này là một thành công rực rỡ của tư tưởng Toán học Nga. Bằng những lập luận logic chặt chẽ, Chebyshev đã chứng minh rằng công thức chỉ ra ở trên của Legendre được thiết lập bằng kinh nghiệm trong phạm vi 1 triệu số nguyên đầu tiên là không có cơ sở và không đúng ngoài phạm vi 1 triệu số nguyên đầu tiên. Tiếp theo, Chebyshev đã chứng minh giả thiết Bertrand được nêu ở trên và còn đưa ra một giả thiết khác chặt chẽ hơn về luật phân bố của các số nguyên tố trong dãy số tự nhiên.

Khó mà đánh giá được những phát minh khoa học của Chebyshev trong lĩnh vực lý thuyết số. Nó đã đem lại vinh quang cho nền khoa học toán của Nga và đã có ảnh hưởng lớn lao đối với những sáng tạo khoa học của nhiều nhà bác học xuất sắc trong và ngoài nước. Nhưng Chebyshev không chỉ nghiên cứu một lý thuyết số. Ông còn nghiên cứu rất nhiều, chẳng hạn trong lĩnh vực giải tích toán học, ông đã thiết lập một ngành hoàn toàn mới nổi tiếng là "Lý thuyết xấp xỉ tốt nhất các hàm số bằng các đa thức". Chebyshev còn có hàng loạt công trình nổi tiếng về lý thuyết xác suất và nhiều môn toán khác.

2.5 Bất đẳng thức Schur và phép thế Ravi

Bất đẳng thức Schur. Cho các số thực $x, y, z \geqslant 0$ và số thực dương r. Khi đó

$$x^r(x-y)(x-z) + y^r(y-z)(y-x) + z^r(z-x)(z-y) \geqslant 0,$$

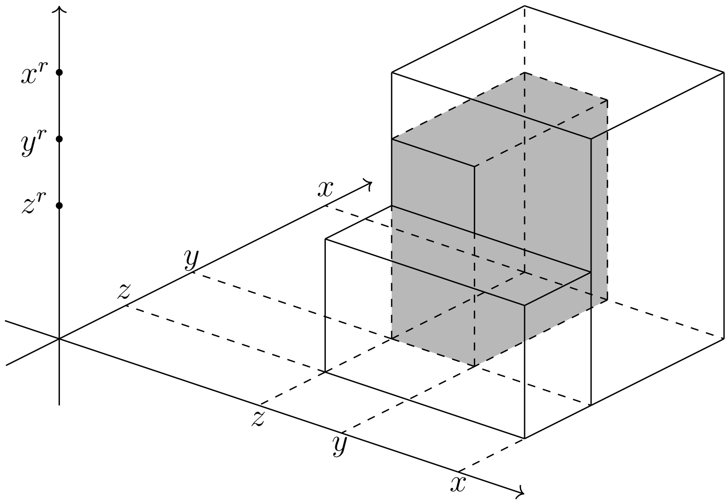
dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$ hoặc 2 trong 3 số bằng 0. Vì bất đẳng thức đối xứng nên không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng $x \geqslant y \geqslant z$. Khi đó ta có thể viết lại bất đẳng thức lại

$$x^r(x-y)(x-z) + z^r(x-z)(y-z) \geqslant y^r(x-y)(y-z),$$

Cũng như các phần trước, các tích gồm 3 số ta thường sẽ quy chúng về thể tích của một khối hộp, với bất đẳng thức này ta cũng sẽ sử dụng ý tưởng đó để chứng minh. Vì $x^r \geqslant y^r$ nên $x-z \geqslant y-z$, do đó

$$x^r(x-y)(x-z) \geqslant y^r(x-y)(y-z)$$

và $z^r(x-z)(y-z) \geqslant 0$. Bây giờ hãy nhìn hình vẽ bên dưới để dễ hình dung hơn.



Ta dễ thấy rằng, khối hình hộp chữ nhật màu xám nằm bên trong 2 khối hình còn lại, do đó ta có ngay điều phải chứng minh.
Bất đẳng thức này còn có một số dạng tương đương như sau

$$\begin{aligned}
&x^3+y^3+z^3+3xzy \geqslant xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)\\
&(x+y+z)^3+9xyz \geqslant 4(x+y+z)(xy+yz+zx)\\
&xyz \geqslant (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)\\
&x^2+y^2+z^2+\frac{9xyz}{x+y+z} \geqslant 2(xy+yz+zx)\\
&\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}+\frac{4xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} \geqslant 2
\end{aligned}$$

Trong thế giới bất đẳng thức, có một phương rất mạnh để giải quyết các bài toán bất đẳng thức đối xứng, trong đó có sử dụng rất nhiều tới bất đẳng thức Schur đấy chính là phương pháp *pqr*, hoặc một số nước có thể gọi là *uvw*. Mấu chốt của các phương pháp này chính là đổi biến a, b, c về 3 biến $p = a+b+c, q = ab+bc+ca, r = abc$ để dễ dàng đánh giá và xử lý hơn. Bạn đọc có thể tìm hiểu thêm.

Issai Schur.

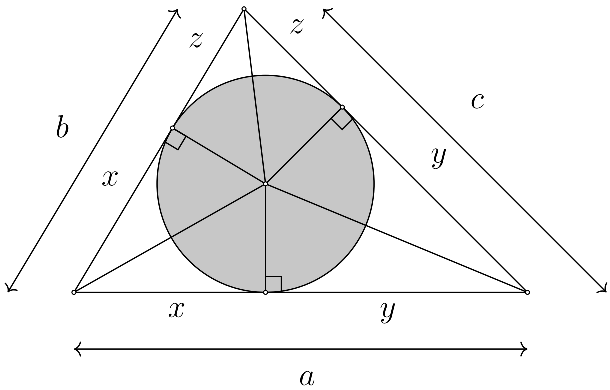
Issai Schur (10 tháng 1 năm 1875 - 10 tháng 1 năm 1941)

Issai Schur là một nhà toán học người Nga sinh ra trong một gia đình Do Thái , là con trai của doanh nhân Moses Schur và vợ Golde Schur. Ông đã theo học tại Đại học Berlin và lấy bằng tiến sĩ năm 1901, sau đó trở thành giảng viên năm 1903. Một thời gian sau ông làm việc tại Đại học Bonn, và lên lấy học hàm giáo sư vào năm 1919. Ông nghiên cứu nhiều lĩnh vực từ biểu diễn nhóm, lý thuyết số, tổ hợp và thậm chí là vật lý lý thuyết. Tuy nhiên công trình được biết đến nhiều nhất của ông có lẽ là phép phân rã Schur - Schur decomposition và bổ đề Schur trong biểu diễn nhóm.

Bài toán 2.5.1 (Bất đẳng thức Padoa). Cho a, b, c là 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$abc \geqslant (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

Lời giải.



Từ hình vẽ trên và bất đẳng thức $AM - GM$ ta suy ra

$$\begin{aligned} abc &= (y+z)(z+x)(x+y) \\ &\geqslant 2\sqrt{yz} \cdot 2\sqrt{zx} \cdot 2\sqrt{xy} \\ &= (2z)(2x)(2y) \\ &= (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b). \end{aligned}$$

Như vậy bất đẳng thức trên được chứng minh. □

Ý tưởng đặt $a = x + y, b = x + z, c = z + y$ mà ta đã áp dụng ở trên được gọi là *phép thế Ravi − The Ravi substitution*. Phương pháp này rất hữu ích với những bài toán có giả thiết a, b, c là 3 cạnh của một tam giác. Sau đây là một số bài toán có sử dụng phương pháp này.

Bài toán 2.5.2 (Định lý Euler). Cho R và r là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ABC. Khi đó, ta có $R \geqslant 2r$.

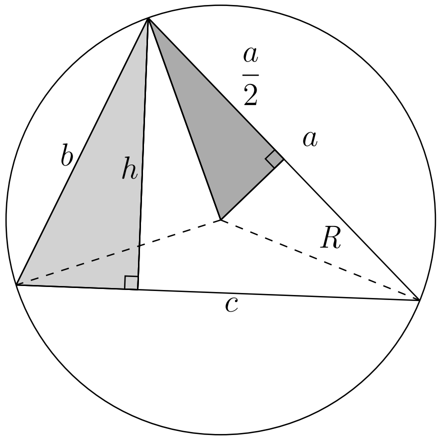
Lời giải.

Đặt $BC = a, AB = c, AC = b$ và $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, S là diện tích của tam giác ABC.

Ta có các đẳng thức sau

$$\begin{aligned} S &= \frac{abc}{4R} \\ S &= pr \\ S &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \end{aligned}$$

Hai công thức sau ta đã chứng minh ở phần trước, bây giờ ta sẽ chứng minh công thức đầu tiên. Quan sát hình vẽ dưới đây



Ta thấy rằng, 2 tam giác màu xám đồng dạng với nhau do có 2 góc bằng nhau, do vậy

$$\frac{h}{b} = \frac{\frac{a}{2}}{R} \Rightarrow h = \frac{1}{2} \cdot \frac{ab}{R} \Rightarrow S_{\Delta} = \frac{1}{2}hc = \frac{1}{4}\frac{abc}{R}$$

Quay trở lại bài toán, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$R \geqslant 2r \Leftrightarrow \frac{abc}{4R} \geqslant 2\frac{S}{p} \Leftrightarrow abc \geqslant 8\frac{S^2}{p}$$

Sử dụng công thức Heron thì bất đẳng thức này tương đương với bất đẳng thức Padoa ta đã chứng minh ở trên. Do vậy ta có điều phải chứng minh, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC là tam giác đều. □

Bài toán 2.5.3 (International Mathematical Olympiad 1983). Cho a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geqslant 0$$

Lời giải.
Sử dụng phép thế Ravi ta có

$$\sum (y+z)^2 (x+z)(y-x) \geqslant 0$$

Khai triển và rút gọn ta được

$$x^3z + y^3x + z^3y \geqslant x^2yz + xy^2z + xyz^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geqslant x + y + z$$

Theo bất đẳng thức $Cauchy - Schwarz$ ta có

$$(x+y+z)^2 = \left(\frac{x}{\sqrt{y}} \cdot \sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt{z}} \cdot \sqrt{z} + \frac{z}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x}\right)^2 \leqslant (y+z+x)\left(\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x}\right)$$

Như vậy ta suy ra điều phải chứng minh. □

Bài toán 2.5.4. Cho a, b, c là 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geqslant \sqrt{a+b-c} + \sqrt{a-b+c} + \sqrt{-a+b+c}$$

Lời giải.

Sử dụng phép thế Ravi, bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x} \geqslant \sqrt{2x}+\sqrt{2y}+\sqrt{2z}$$

Theo bất đẳng thức $AM-RMS$ ta có

$$\sqrt{x+y} \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$$

Do vậy

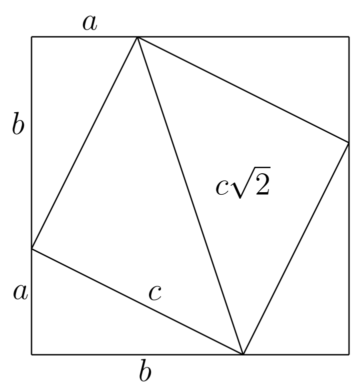
$$\begin{aligned}\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x} &\geqslant \sqrt{2}(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})\\ &= \sqrt{2x}+\sqrt{2y}+\sqrt{2z}.\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. □

3 Một vài bài toán thú vị

Bài toán 3.0.1. Cho tam giác vuông có 2 cạnh góc vuông là a, b, cạnh huyền là c. Chứng minh rằng $a+b \leqslant c\sqrt{2}$.

Lời giải.



Từ hình vẽ ta dễ dàng suy ra điều phải chứng minh. □

Bài toán 3.0.2. Cho 2 số dương a, b thỏa mãn $a+b=1$. Chứng minh rằng

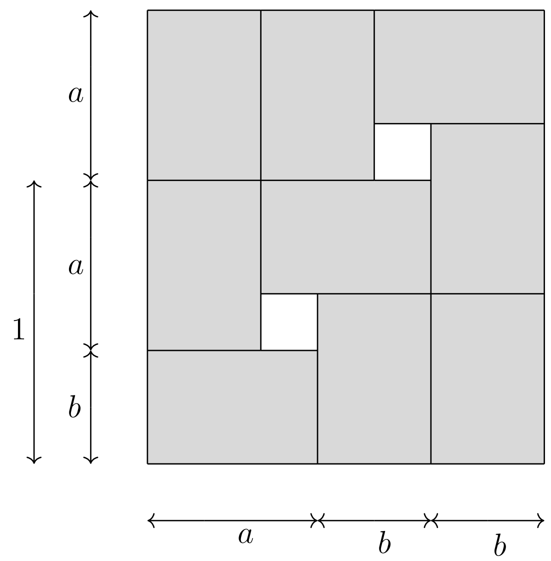
$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) \geqslant 9$$

Lời giải.

Đây là một bài toán không khó, nó đã xuất hiện trong một đề thi olympic của Tây Ban Nha (Problem 3, LII Olimpiada Matemática Española, Melilla, 18, January, 2016.) Ở đây chúng ta sẽ tiếp cận với cách sử dụng hình vẽ trực quan. Viết lại bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$(a+1)(b+1) \geqslant 9ab$$

Khi đó hãy quan sát hình vẽ sau



Đến đây có lẽ không cần quá nói quá nhiều nữa, bạn đọc hoàn toàn có thể hiểu được chứng minh này. □

Ngoài ra có một cách biến đổi đại số khá đơn giản và gọn cho bài toán này. Ta nhận thấy dấu "=" xảy ra tại $a = b$, do vậy sử dụng giả thiết $a + b = 1$, ta biến đổi

$$(a+1)(b+1) = (2a+b)(2b+a) = 9ab + 2(a-b)^2 \geqslant 9ab$$

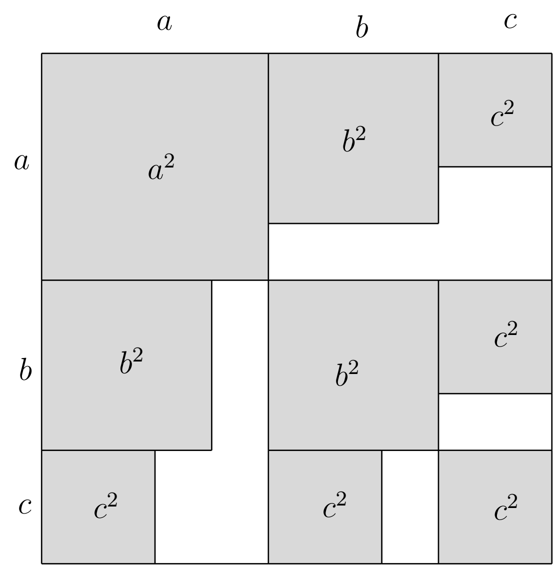
Ta cũng có thể tổng quát cho bài toán này bằng việc sử dụng đẳng thức sau

$$(ma+nb)(mb+na) = (m+n)^2 ab + mn(a-b)^2$$

Bài toán 3.0.3. Cho 3 số thực $a \geqslant b \geqslant c \geqslant 0$ thỏa mãn $a + b + c \leqslant 1$. Chứng minh rằng

$$a^2 + 3b^2 + 5c^2 \leqslant 1$$

Lời giải.
Do xuất hiện các đại lượng bình phương nên ý tưởng của chúng ta sẽ sử dụng các hình vuông và sắp xếp chúng một cách hợp lý để tận dụng giả thiết và đưa ra lời giải cho bài toán.



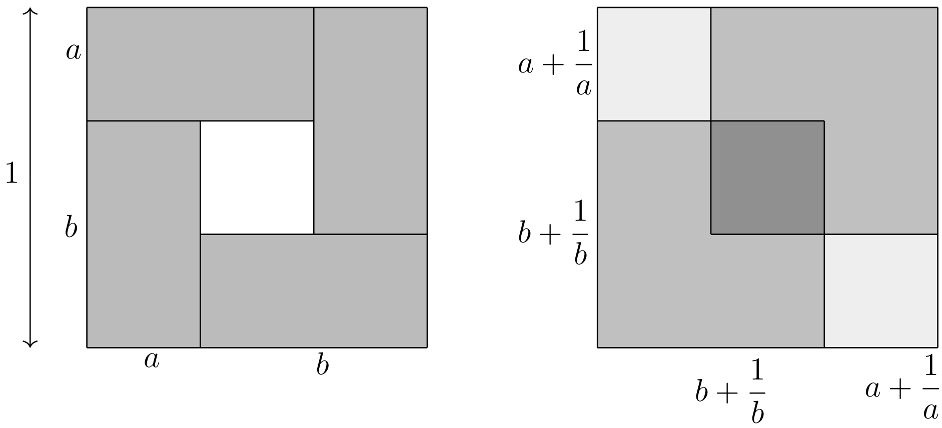
Từ hình vẽ ta có
$$a^2 + 3b^2 + 5c^2 \leqslant (a+b+c)^2 \leqslant 1$$
Như vậy dễ dàng suy ra điều phải chứng minh. $\square$

Đây là một bài toán trong kì thi olympic của Leningrad năm 1989. Ta có thể tổng quát bài toán lên như sau.

Tổng quát. Cho n số thực dương $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant 0$ và $\sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant 1$. Khi đó ta có
$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)a_i^2 \leqslant 1$$
Với $n = 2004$ thì ta thu được bài toán đã từng xuất hiện trong kì thi *Australian Mathematical Olympiad Committee – AMOC* năm 2004.

Bài toán 3.0.4. Cho 2 số thực $a, b > 0$ thỏa mãn $a + b = 1$. Chứng minh rằng
$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geqslant \frac{25}{2}$$

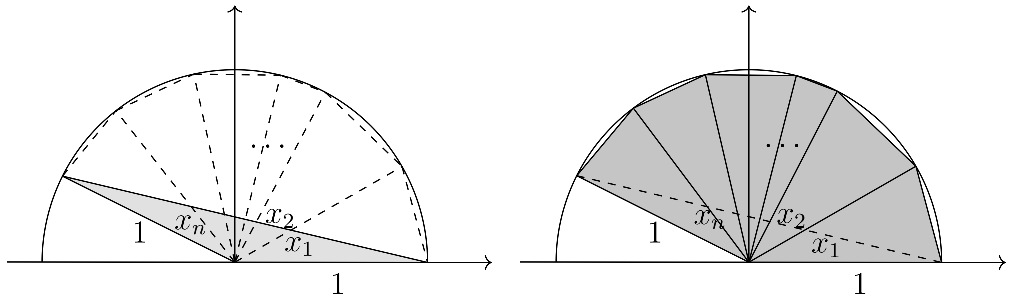
Lời giải.



Điều đầu tiên bạn đọc phải chú ý là 2 hình này không liên quan gì tới nhau cả. Ở hình đầu tiên ta dùng để chứng minh rằng
$$4ab \leqslant (a+b)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geqslant 4$$
ý tưởng này đã quá quen thuộc rồi. Ở hình thứ 2 cũng vẫn là ý tưởng quen thuộc, ta có
$$2\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + 2\left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geqslant \left(a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b}\right)^2 \geqslant (1+4)^2 = 25$$
Như vậy ta suy ra điều phải chứng minh. $\square$

Bài toán 3.0.5. Cho các số thực $x_k \geqslant 0, k = \overline{1, n}$ thỏa mãn $\sum_{k=1}^{n} x_k \leqslant \pi$. Chứng minh rằng
$$\sin\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sin x_k$$

Lời giải.
Đây là một bài toán nhìn khá cồng kềnh, tuy nhiên ta sẽ lợi dụng một công thức tính diện tích tam giác rất quen thuộc để giải quyết nó: $S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$. Quan sát hình vẽ dưới đây để thấy sự sáng tạo trong lời giải

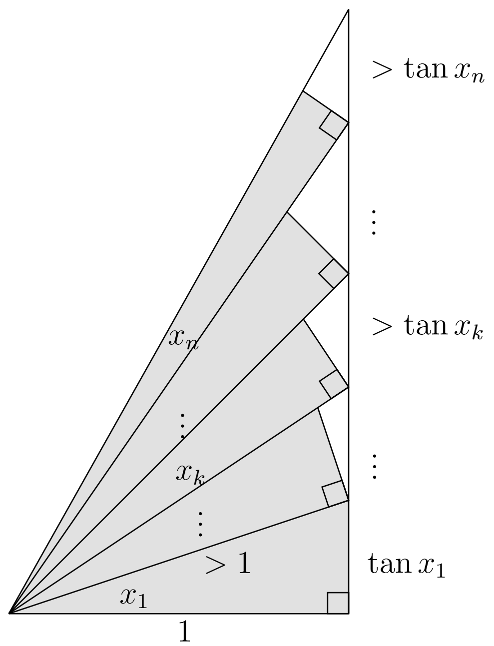


Từ hình vẽ ta thấy rằng diện tích của tam giác bên trái sẽ luôn nhỏ hơn tổng diện tích của các tam giác bên phải, do vậy áp dụng công thức tính diện tích đã đề cập ở trên, ta có ngay điều phải chứng minh. □

Bài toán 3.0.6. Cho các số thực $x_k \geqslant 0, k = \overline{1,n}$ thỏa mãn $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k < \frac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng

$$\tan\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \tan x_k$$

Lời giải.

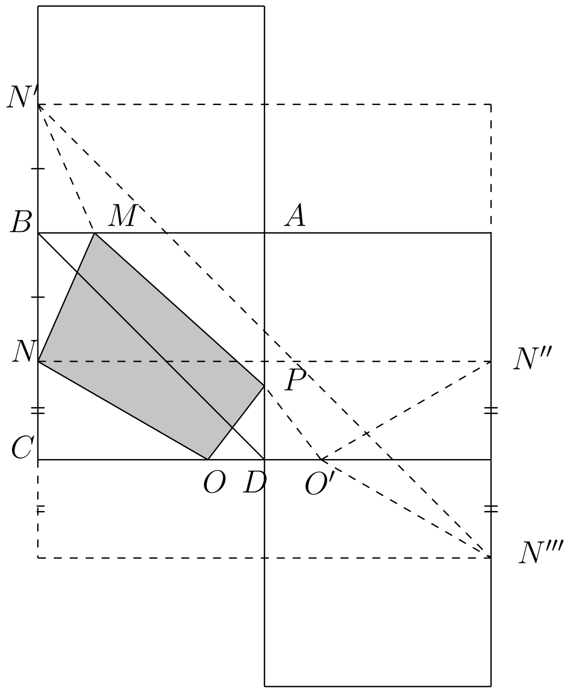


Quan sát hình vẽ trên, ta xét tam giác vuông ở dưới cùng có cạnh là $1, \tan x_1$, như vậy cạnh huyền của nó sẽ lớn hơn 1. Tiếp theo hãy chú ý tới các tam giác màu trắng, đây đều là các tam giác tù, mà các tam giác này đều có một cạnh bằng $\lambda \cdot \tan x_i (\lambda > 1)$, như vậy cạnh đối diện với góc tù sẽ lớn nhất và lớn hơn $\tan x_i$. Mặt khác, xét tam giác vuông lớn nhất, nó sẽ có cạnh đối diện với góc $\theta = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ là $\tan(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$, từ đây ta có điều phải chứng minh. □

Bài toán 3.0.7. Cho $ABCD$ là hình vuông cạnh a, trên các cạnh AB, BC, CD, DA lấy các điểm M, N, O, P tùy ý. Chứng minh rằng

$$MN + NO + OP + PM \geqslant 2BD$$

Lời giải.
Đây là một bài toán rất thú vị để minh họa cho phương pháp chọn điểm đối xứng. Lấy N' đối xứng với N qua AB, N'' đối xứng với N qua AD, N''' đối xứng với N'' qua CD, O' đối xứng với O qua qua AD. Từ đó suy ra $MN = MN'$, $OP = O'P$, $O'N''' = O'N'' = ON$. Xem hình vẽ dưới đây.



Như vậy ta có thể thấy rằng

$$MN + NO + OP + PM = MN' + MP + PO' + O'N''' \geqslant N'N'''$$

Mặt khác $N'N'''$ là đường chéo của hình vuông có cạnh là $2a$ nên $N'N''' = 2a\sqrt{2} = 2BD$.
Vậy ta có điều phải chứng minh, dấu "=" xảy ra khi $MNOP$ là hình chữ nhật. $\square$