ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

TÁC GIẢ
TOÁN TỪ TÂM

MỤC LỤC

Chương 01

Bài 1. ĐƠN ĐIỆU & CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A Lý thuyết

1. Tính đồng biến, nghịch biến của hàm số

Định nghĩa:

Kí hiệu K là khoảng; đoạn; nửa khoảng. Giả sử hàm số $y=f(x)$ xác định trên K.

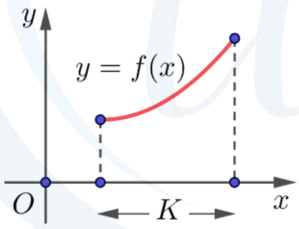
Hàm số $y=f(x)$

- Gọi là *đồng biến* trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K$ mà $x_1<x_2$ thì $f(x_1)<f(x_2)$.
- Gọi là *nghịch biến* trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K$ mà $x_1<x_2$ thì $f(x_1)>f(x_2)$.

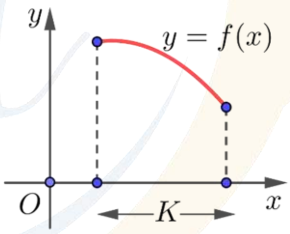
Chú ý

» Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên K thì đồ thị *đi lên* từ trái sang phải (*Hình 1a*).

» Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên K thì đồ thị *đi xuống* từ trái sang phải (*Hình 1b*).



Hình 1a



Hình 1b

2. Tính đơn điệu của hàm số

Định lý:

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên K.

- Nếu $f'(x)>0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên K.
- Nếu $f'(x)>0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên K.

Chú ý

» Định lí vẫn đúng trong trường hợp $f'(x)=0$ tại một số hữu hạn điểm trong K.

» Nếu $f'(x)=0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số $f(x)$ không đổi trên khoảng K.

3. Khái niệm cực trị của hàm số

Định nghĩa:

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a;b)$ (a có thể là $-\infty$, b có thể là $+\infty$) và điểm $x_0\in(a;b)$.

- $\exists h>0$ sao cho $f(x)<f(x_0)$ với mọi $x\in(x_0-h;x_0+h)\subset(a;b)$ và $x\neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt ***cực đại*** tại x_0.
- $\exists h>0$ sao cho $f(x)>f(x_0)$ với mọi $x\in(x_0-h;x_0+h)\subset(a;b)$ và $x\neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt ***cực tiểu*** tại x_0.

Chú ý

» Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại x_0 thì x_0 được gọi là *điểm cực đại* của *hàm số* $f(x)$.
Khi đó, $f(x_0)$ được gọi là *giá trị cực đại* của hàm số $f(x)$ và kí hiệu là $f_{CĐ}$ hay $y_{CĐ}$.
Điểm $M_0(x_0;f(x_0))$ được gọi là *điểm cực đại của đồ thị hàm số.*

» Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 thì x_0 được gọi là *điểm cực tiểu* của *hàm số* $f(x)$.
Khi đó, $f(x_0)$ được gọi là *giá trị cực tiểu* của hàm số $f(x)$ và kí hiệu là f_{CT} hay y_{CT}.
Điểm $M_0(x_0;f(x_0))$ được gọi là *điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.*

» Các điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị.
Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là giá trị cực trị (cực trị) của hàm số.

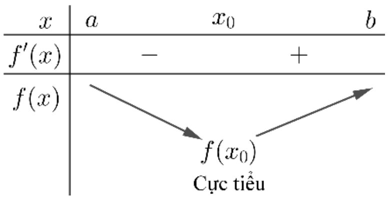
4. Cách tìm cực trị của hàm số

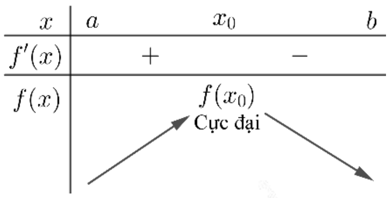
Định lý:

Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a;x_0)$ và $(x_0;b)$. Khi đó:

- Nếu $f'(x)<0$ với mọi $x\in(a;x_0)$ và $f'(x)>0$ với mọi $x\in(x_0;b)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.
- Nếu $f'(x)>0$ với mọi $x\in(a;x_0)$ và $f'(x)<0$ với mọi $x\in(x_0;b)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.

» Định lí trên được viết gọn lại trong hai bảng biến thiên sau:





Chú ý

» Từ định lí trên ta có các bước tìm cực trị của hàm số $y=f(x)$ như sau:

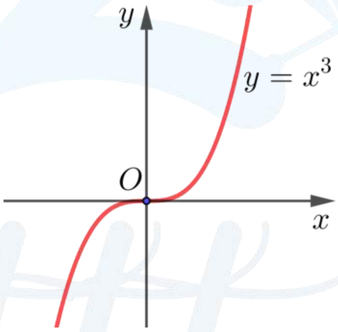
(1) Tìm tập xác định của hàm số.

(2) Tính $f'(x)$. Tìm các điểm mà tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc $f'(x)$ không tồn tại.

(3) Lập bảng biến thiên suy ra các cực trị của hàm số.

» Nếu $f'(x_0)=0$ nhưng $f'(x)$ không đổi dấu khi x qua x_0 thì x_0 không phải là điểm cực trị của hàm số.

Chẳng hạn, hàm số $f(x)=x^3$ có $\begin{cases} f'(x)=3x^2 \\ f'(0)=0 \end{cases}$, nhưng $x=0$ không phải là điểm cực trị của hàm số.



B Các dạng bài tập

Dạng 1. Xét tính đơn điệu của hàm số cho bởi một công thức

Phương pháp

» ***Bước 1:*** Tìm tập xác định D của hàm số.

» ***Bước 2:*** Tính đạo hàm $f'(x)$ của các hàm số. Tìm các điểm $\{x_1;x_2;...;x_n\} \in D$ mà tại đó đạo hàm $f'(x)$ bằng 0 hoặc không tồn tại.

» ***Bước 3:*** Sắp xếp các điểm $x_1;x_2;...;x_n$ theo thứ tự tăng dần.
Xét dấu $f'(x)$ và lập bảng biến thiên.

» ***Bước 4:*** Nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Ví dụ 1.1.

Xét tính đơn điệu của hàm số $y = 4x^3 + 3x^2 - 36x + 6$.

Lời giải

Ví dụ 1.2.

Xét tính đơn điệu của hàm số $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$.

Lời giải

Ví dụ 1.3.

Xét tính đơn điệu của hàm số $y=\sqrt{-x^2+4}$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 1.4.

Xét tính đơn điệu của hàm số $y=\log_3\left(x^2-2x\right)$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 2. Xét tính đơn điệu của hàm số cho bởi đồ thị - bảng biến thiên

Phương pháp

» Với đồ thị hàm số, quan sát: hướng lên – xuống của *đường cong* (chiều từ trái sang phải).
» Với bảng biến thiên, quan sát: hướng lên – xuống của *mũi tên* (chiều từ trái sang phải).
» Với bảng xét dấu, quan sát: dấu âm - dương của $f'(x)$.

Ví dụ 2.1.

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

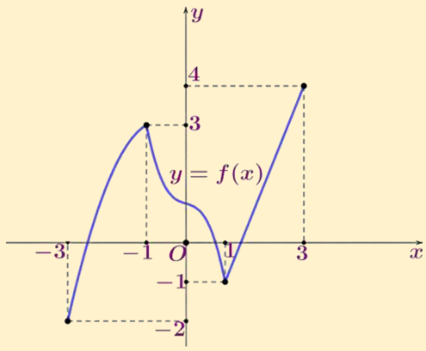
x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

Xét tính đơn điệu của hàm số $y=f(x)$.

Lời giải

Ví dụ 2.2.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3;3]$ và có đồ thị như hình bên. Xét tính đơn điệu của hàm số $y=f(x)$.



Lời giải

Dạng 3. Xác định cực trị của hàm số cho bởi công thức

Phương pháp

- » ***Bước 1:*** Tìm tập xác định D của hàm số.
- » ***Bước 2:*** Tính đạo hàm $f'(x)$ của các hàm số. Tìm các điểm $\{x_1;x_2;...;x_n\} \in D$ mà tại đó đạo hàm $f'(x)=0$ hoặc $f'(x)$ không tồn tại.
- » ***Bước 3:*** Sắp xếp các điểm $x_1;x_2;...;x_n$ theo thứ tự tăng dần.
  Xét dấu $f'(x)$ và lập bảng biến thiên.
- » ***Bước 4:*** Kết luận hàm số đạt cực trị tại $x=?$, $y=?$ (nếu có).

Ví dụ 3.1.

Tìm cực trị của hàm số $y=2x^3-3x^2+1$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 3.2.

Tìm cực trị của hàm số $y=-x^4+2x^3-2x-1$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 3.3.

Tìm cực trị của hàm số $y=\dfrac{x+2}{3x-1}$

Lời giải

....
....
....
....
....

Ví dụ 3.4.

Tìm cực trị của hàm số $y=\dfrac{x^2-4x+4}{1-x}$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 3.5.

Tìm cực trị của hàm số $f\left(x\right)=2^{x^2-5x}$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

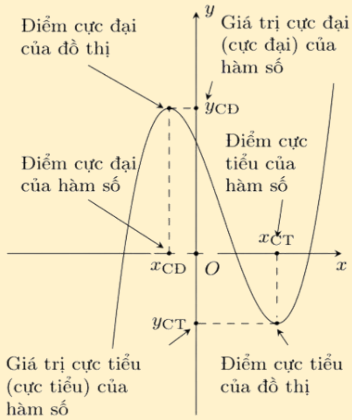
Dạng 4. Xác định cực trị của hàm số cho bởi bảng biến thiên – đồ thị

Phương pháp

Nhận xét:

» Hàm số $f(x)$

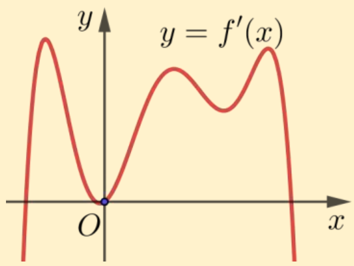
có cực trị	y' đổi dấu
không cực trị	y' không đổi dấu
chỉ có 1 cực trị	y' đổi dấu 1 lần
có 2 cực trị	y' đổi dấu 2 lần
có 3 cực trị	y' đổi dấu 3 lần



» Đối với một hàm số bất kì, hàm số chỉ có thể đạt cực trị tại những điểm x_0 mà tại đó đạo hàm triệt tiêu $f'(x_0)=0$ hoặc đạo hàm không xác định tại đó.

Ví dụ 4.1.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ bao nhiêu có điểm cực tiểu và điểm cực đại?



Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 4.2.

Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$ ↗		2	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	4	↗	$+\infty$

Hàm số $y=f(x)$ bao nhiêu có điểm cực tiểu và điểm cực đại?

Lời giải

Ví dụ 4.3.

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, hãy thiết lập công thức hàm số $y = f(x)$ đã cho?

Lời giải

Dạng 5. Toán thực tế áp dụng tính đơn điệu của hàm số

Phương pháp

» Nếu hàm số $s=f(t)$ biểu thị quãng đường di chuyển của vật theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị *tốc độ tức thời* của chuyển động tại t_0.

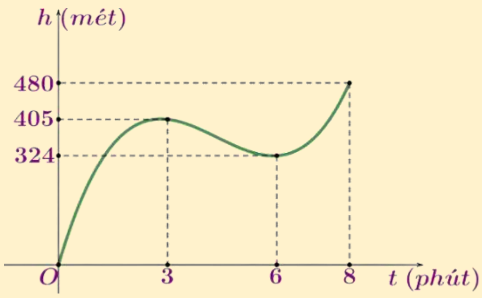
» Đạo hàm cấp hai $f''(t)$ là *gia tốc tức thời* tại thời điểm t của vật chuyển động có phương trình $s=f(t)$.

Ví dụ 5.1.

Trong 8 phút đầu kể từ khi xuất phát, độ cao h (tính bằng mét) của khinh khí cầu vào thời điểm t phút được cho bởi $h(t)=6t^3-81t^2+324t$.

Đồ thị của hàm số $h(t)$ được biểu diễn như hình bên.

Trong các khoảng thời gian nào khinh khí cầu tăng dần độ cao, giảm dần độ cao?



Lời giải

....
....
....
....
....
....

Ví dụ 5.2.

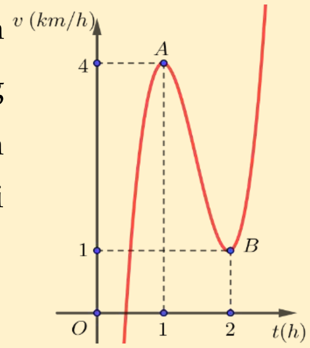
Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox. Tọa độ của chất điểm tại thời điểm t (giây) được xác định bởi hàm số $x(t)=t^3-6t^2+9t$ với $t\ge 0$. Khi đó $x'(t)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t, kí hiệu $v(t)$. Trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm tăng, trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm giảm?

Lời giải

....
....
....
....
....
....

Ví dụ 5.3.

Một vật chuyển động với vận tốc $v(\text{km/h})$ phụ thuộc vào thời gian $t(\text{h})$ có đồ thị của hàm số dạng hàm bậc ba như hình bên. Biết rằng tại thời điểm $t_1 = 1\text{h}$ vật có vận tốc $v_1 = 4\text{km/h}$ và tại thời điểm $t_2 = 2\text{h}$ vật có vận tốc $v_2 = 1\text{km/h}$. Tính vận tốc của vật tại thời



Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Dạng 6. Bài toán liên quan tính đơn điệu có chứa tham số

Phương pháp

(1) Tìm tham số m để hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đơn điệu trên tập xác định

» *Bước 1:* Tập xác định: $D = \mathbb{R}$ Tính đạo hàm $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

» *Bước 2:* Điều kiện để hàm đơn điệu:

Để y ***đồng biến*** trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \ge 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta_{y'} \le 0 \end{cases}$

Để y ***nghịch biến*** trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \le 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta_{y'} \le 0 \end{cases}$

(2) Tìm tham số m để hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ đơn điệu trên từng khoảng xác định

» *Bước 1:* Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\dfrac{d}{c} \right\}$ Tính $y' = \dfrac{ad - cb}{(cx+d)^2}$

» *Bước 2:* Điều kiện để hàm đơn điệu:

Để y ***đồng biến*** trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow y' > 0 \Leftrightarrow ad - bc > 0$

Để y ***nghịch biến*** trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow y' < 0 \Leftrightarrow ad - bc < 0$

Ví dụ 6.1.

Cho hàm số $y = -\dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (3m+2)x - 2$. Xác định điều kiện của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải

....

....

....

....

....

Ví dụ 6.2.

Cho hàm số $y = \dfrac{2x-m}{x-1}$. Xác định điều kiện của tham số m để hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

Dạng 7. Bài toán hàm hợp

Phương pháp

Tìm khoảng đơn điệu của hàm số $y=f\left(u(x)\right)$ từ bảng biến thiên/đồ thị của $f'(x)$

» *Bước 1:* Tính $y'=u'.f'(u)\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u'=0\\f'(u)=0\ (*)\end{array}\right.$

» *Bước 2:* Để giải $(*)$ ta tìm $f'(x)=0$ (đồ thị cắt trục hoành).

Giả sử $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\\ \vdots\\ x=b\end{array}\right.\longrightarrow f'(u)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=a\\ \vdots\\ u=b\end{array}\right.\rightarrow$ nghiệm của $(*)$.

» *Bước 3:* Lập bảng xét dấu của $y'=u'.f'(u)\Rightarrow$ khoảng đơn điệu cần tìm.

» **Lưu ý:** Bài toán tìm cực trị của hàm số $y=f\left(u(x)\right)$ ta làm tương tự

Ví dụ 7.1.

Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên dưới. Xác định các khoảng đồng biến của hàm số $y=f(1-2x)$.

x	$-\infty$		-3		-2		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Lời giải

....

....

....

....

....

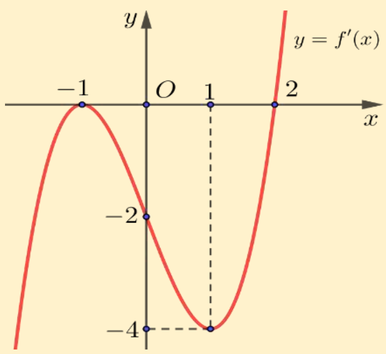
....

....

....

Ví dụ 7.2.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị đạo hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ. Xác định các khoảng nghịch biến của hàm số $g(x)=f(x^2-2)$.



Lời giải

Ví dụ 7.3.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x^2-1)(x-4)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(3-x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Lời giải

Ví dụ 7.4.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hỏi hàm số $y=f(x^2-2x)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

Lời giải

C. Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Cho hàm số $y=x^3-2x^2+x+1$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số nghịch biến trên $(1;+\infty)$. **B.** Hàm số nghịch biến trên $\left(\frac{1}{3};1\right)$.

C. Hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$. **D.** Hàm số đồng biến trên $\left(\frac{1}{3};1\right)$.

» Câu 2. Hỏi hàm số $y=2x^4+1$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

» Câu 3. Hàm số $y=\frac{5-2x}{x+3}$ nghịch biến trên

A. $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$. **B.** R. **C.** $(-\infty;-3)$. **D.** $(3;+\infty)$.

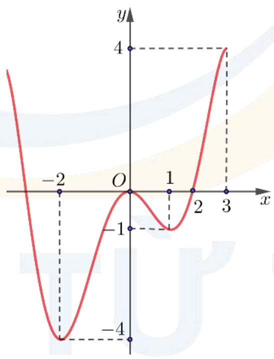
» Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	1	↘	-1	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-3;0)$. **B.** $(-3;3)$. **C.** $(0;3)$. **D.** $(-\infty;-3)$.

» Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng

A. $(-4;0)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(1;3)$.

» Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-2	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho đạt cực đại tại

A. $x=-2$. **B.** $x=2$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-1$.

» Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
y'		$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ và $(3;+\infty)$.

» Câu 8. Tìm điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$.

A. $x=1$. **B.** $(3;1)$. **C.** $x=3$. **D.** $\left(1;\frac{7}{3}\right)$.

» Câu 9. Hàm số nào dưới đây **không** có cực trị?

A. $y=\frac{x^2+1}{x}$ **B.** $y=\frac{2x-2}{x+1}$ **C.** $y=x^2-2x+1$ **D.** $y=-x^3+x+1$

» Câu 10. Hàm số $y=\frac{2x+3}{x+1}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1 **B.** 0 **C.** 2 **D.** 3

» Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. 0 **B.** 2 **C.** -4 **D.** 3

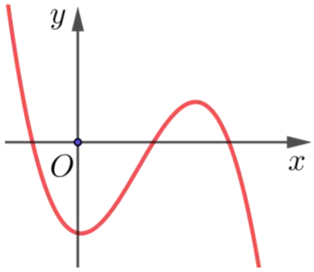
» Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho đạt cực đại tại

A. $x=-1$ **B.** $x=-2$ **C.** $x=2$ **D.** $x=1$

» **Câu 13.** Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\left(a,b,c,d\in\mathbb{R}\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số này là

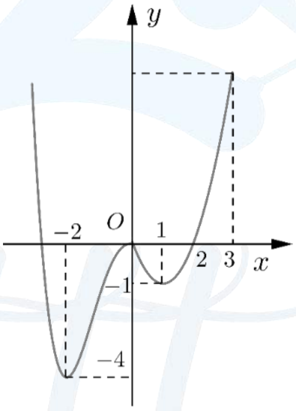


A. 0 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 3

» **Câu 14.** Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. $y=\dfrac{x-1}{x-2}$ **B.** $y=-x^3-3x$ **C.** $y=x^3+x$ **D.** $y=\dfrac{x+1}{x+3}$

» **Câu 15.** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng

A. $(-2;1)$ **B.** $(-2;-1)$ **C.** $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ **D.** $(1;3)$

» **Câu 16.** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-1)$ **B.** $(2;+\infty)$ **C.** $(1;2)$ **D.** $(-1;2)$

» **Câu 17.** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x+1$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;+\infty)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $(-\infty;1)$.

» **Câu 18.** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-2)^2(1-x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;2)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;1)$.

» **Câu 19.** Hỏi hàm số $y=2x^4+1$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

» Câu 20. Hàm số $y=\dfrac{2}{x^2+1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;+\infty)$ **B.** $(0;+\infty)$ **C.** $(-\infty;0)$ **D.** $(-1;1)$

» Câu 21. Cho hàm số $y=\sqrt{2x^2+1}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$ **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$

» Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=(1-x)^2(x+1)^3(3-x)$. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(3;+\infty)$.

» Câu 23. Cho hàm số $y=x^4-2x^2$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$

» Câu 24. Trong 8 phút đầu kể từ khi xuất phát, độ cao h (tính bằng mét) của khinh khí cầu vào thời điểm t phút được cho bởi công thức $h(t)=6t^3-81t^2+324t$. Trong khoảng thời gian nào khinh khí cầu giảm dần độ cao?

A. $\left(1;\dfrac{5}{2}\right)$ **B.** $(0;3)$ **C.** $(3;6)$ **D.** $\left(\dfrac{7}{2};8\right)$

» Câu 25. Cho hàm số $f(x)=2x^3-9x^2-24x+1$. Có bao nhiêu khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

(1) Điểm cực đại của hàm số là $x=-1$.

(2) Điểm cực tiểu của hàm số là $x=4$.

(3) Giá trị cực đại của hàm số là $y=14$.

(4) Giá trị cực tiểu của hàm số là $y=-111$.

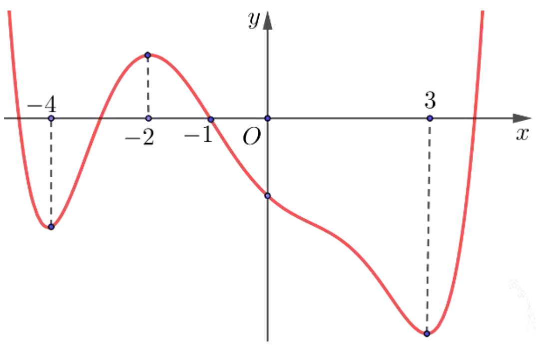
A. 3 **B.** 1 **C.** 4 **D.** 2

» Câu 26. Tìm các điểm cực trị của hàm số $y=\dfrac{x^2+x+4}{x+1}$.

A. $x_{CĐ}=-3$, $x_{CT}=1$. **B.** $x_{CT}=-3$, $x_{CĐ}=1$. .

C. $x_{CĐ}=-5$, $x_{CT}=3$. **D.** $x_{CT}=-5$, $x_{CĐ}=3$.

» Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong như trong hình dưới đây.

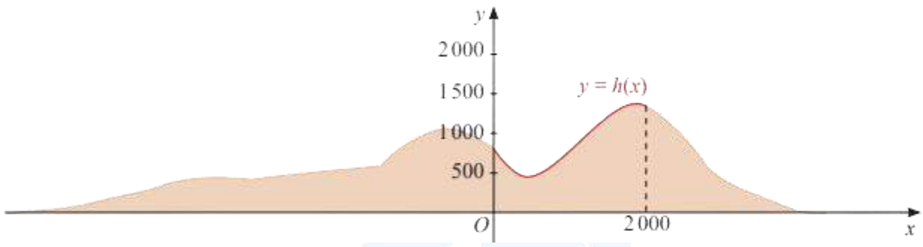


Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Điểm cực đại của hàm số là $x=-4$. **B.** Điểm cực đại của hàm số là $x=-2$.

C. Điểm cực tiểu của hàm số là $x=-2$. **D.** Điểm cực đại của hàm số là $x=3$.

» Câu 28. Một phần lát cắt của dãy núi có độ cao tính bằng mét được mô tả bởi hàm số $y=h(x)=-\dfrac{1}{1320000}x^3+\dfrac{9}{3520}x^2-\dfrac{81}{44}x+840$ với $0\le x\le 2000$. Tìm tọa độ các đỉnh của lát cắt dãy núi trên đoạn $[0;2000]$.



A. $\left(1800;\dfrac{7365}{16}\right)$ và $\left(450;\dfrac{15315}{11}\right)$. **B.** $\left(480;\dfrac{1515}{16}\right)$ và $\left(450;\dfrac{7365}{16}\right)$.

C. $\left(480;\dfrac{1515}{16}\right)$ và $\left(1750;\dfrac{7561}{16}\right)$. **D.** $\left(1800;\dfrac{15315}{11}\right)$ và $\left(450;\dfrac{7365}{16}\right)$.

» Câu 29. Tìm các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y=2x+1-\sqrt{2x^2-8}$.

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(2;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(2;+\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên $(-2;2)$.

» Câu 30. Cho hàm số $y=-\dfrac{1}{3}x^3+mx^2+(3m+2)x+1$. Tìm tất cả giá trị của m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $\left[\begin{array}{l}m\ge -1\\ m\le -2\end{array}\right.$. **B.** $-2\le m\le -1$. **C.** $-2<m<-1$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m>-1\\ m<-2\end{array}\right.$.

» Câu 31. Tìm điều kiện của tham số thực m để hàm số $y=x^3-3x^2+3(m+1)x+2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

A. $m\ge 2$. **B.** $m<2$. **C.** $m<0$. **D.** $m\ge 0$.

» Câu 32. Cho hàm số $y=\dfrac{mx+4m}{x+m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S.

A. 4 **B.** Vô số **C.** 3 **D.** 5

» Câu 33. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+2}{x+5m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-10)$?

A. 2 **B.** Vô số **C.** 1 **D.** 3

» Câu 34. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+4}{2x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(-3;4)$.

A. Vô số. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

» Câu 35. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+(1-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ là

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(-\infty;-2]$. **D.** $(-\infty;1]$.

» Câu 36. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=-x^3-6x^2+(4m-9)x+4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ là

A. $\left(-\infty;-\frac{3}{4}\right]$ **B.** $[0;+\infty)$ **C.** $(-\infty;0]$ **D.** $\left[-\frac{3}{4};+\infty\right)$

» Câu 37. Có tất cả bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=\frac{(m+1)x-2}{x-m}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

» Câu 38. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\frac{x+m^2}{x+4}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. 5. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

» Câu 39. Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox. Tọa độ của chất điểm tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $x(t)=t^3-6t^2+9t$ với $t\ge 0$. Khi đó $v(t)=x'(t)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t. Trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm giảm?

A. $t\in(0;2)$. **B.** $t\in(0;3)$. **C.** $t=2$. **D.** $t\in(2;+\infty)$.

» Câu 40. Cho hàm số $y=x-2\sqrt{x^2+4}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số có giá trị cực đại bằng $-2\sqrt{3}$. **B.** Hàm số đạt cực đại tại $x=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** Hàm số có giá trị cực tiểu bằng $-\frac{10\sqrt{3}}{3}$.

» Câu 41. Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được x mét vải lụa $(1\le x\le 18)$. Tổng chi phí sản xuất x mét vải lụa, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí $C(x)=x^3-3x^2-20x+500$. Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét. Vậy hộ này cần sản xuất và bán ra mỗi ngày bao nhiêu mét để thu được lợi nhuận tối đa?

A. 6 mét. **B.** 10 mét. **C.** 18 mét. **D.** 12 mét.

» Câu 42. Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(3-2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;2)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(-\infty;-3)$. **D.** $(3;4)$.

» Câu 43. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f\left(x^2-2\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-1;0)$.

» Câu 44. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau.

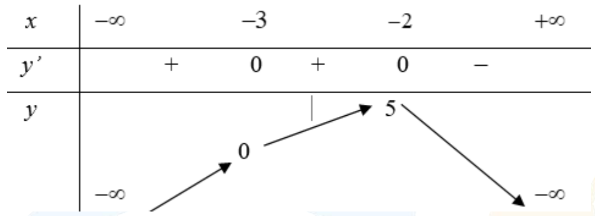
x	$-\infty$		-3		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(2-3x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(2;3)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;3)$.

B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai

» Câu 45. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R và có bảng biến thiên như sau:



Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-5)$ và $(-3;-2)$		
(b)	Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;-5)$		
(c)	Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-2;+\infty)$		
(d)	Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$		

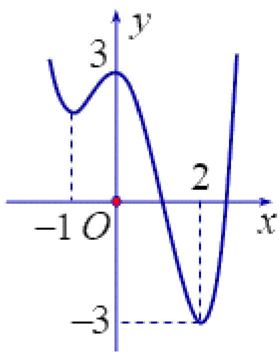
» Câu 46. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R và có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\parallel$	$-$	0	$+$	

Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3;0)$.		
(b)	Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;3)$.		
(c)	Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.		
(d)	Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-3)$.		

» Câu 47. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



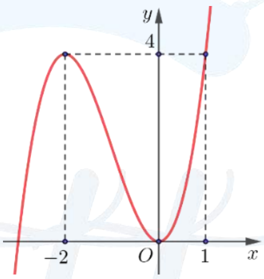
Khi đó

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3		
(b)	Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;0)$		
(c)	Đồng biến trên khoảng $(-1;0)$		
(d)	Nghịch biến trên khoảng $(0;3)$		

» Câu 48. Cho hàm số $f(x)=-x^3+3x^2$.

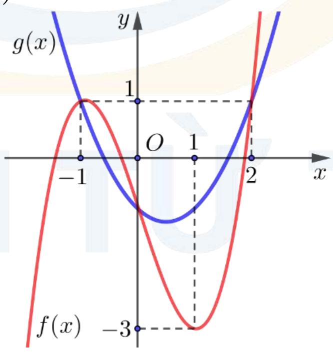
	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;0)$		
(b)	Hàm số nghịch biến trên $(2;+\infty)$		
(c)	Hàm số đồng biến trên $(0;2)$		
(d)	Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$		

» Câu 49. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong như trong hình dưới đây.



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-2)$.		
(b)	Hàm số đồng biến trên $(0;1)$.		
(c)	Hàm số nghịch biến trên $(-2;1)$.		
(d)	Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.		

» Câu 50. Cho hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ có đồ thị là các đường cong như trong hình dưới đây.



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số $y=g(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x_0>1$.		
(b)	Hàm số $y=g(x)$ có hai điểm cực trị.		
(c)	Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có điểm cực tiểu là $x=1$.		
(d)	Giá trị cực đại của hàm số $y=f(x)$ là $y_0=1$.		

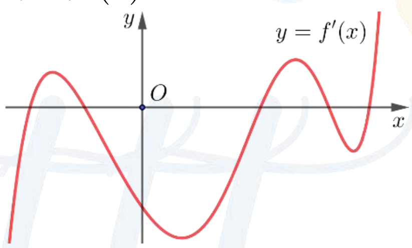
» Câu 51. Cho hàm số $f\left(x\right)=x+\dfrac{1}{x}$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số nghịch biến trên $\left(-1;1\right)$.		
(b)	Hàm số nghịch biến trên $\left(-1;0\right)$ và $\left(0;1\right)$.		
(c)	Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.		
(d)	Hàm số đồng biến trên $\left(-\infty;-1\right)\cup\left(1;+\infty\right)$.		

» Câu 52. Cho hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}-2x^2+3x+\dfrac{2}{3}$ có đồ thị $\left(C\right)$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số đã cho có hai điểm cực trị.		
(b)	Giá trị cực tiểu của hàm số là $x=3$.		
(c)	Điểm cực đại của đồ thị hàm số đã cho là $x=1$.		
(d)	Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho là $\dfrac{\sqrt{13}}{13}$.		

» Câu 53. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ liên tục và có đồ thị trên $\mathbb{R}$ như hình vẽ.



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số $y=f\left(x\right)$ đã cho có 4 điểm cực trị.		
(b)	Hàm số $y=f\left(x\right)$ có 3 điểm cực tiểu.		
(c)	Hàm số $y=f\left(x\right)$ có 3 điểm cực đại.		
(d)	Hàm số $y=f\left(x\right)$ có 1 điểm cực đại dương.		

» Câu 54. Cho hàm số $y=x^3+\left(m+1\right)x^2+3x+2$ (tham số m). Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Đạo hàm của hàm số là $y'=3x^2+2\left(m+1\right)x+3$		
(b)	Khi $m=-1$ thì hàm số đồng biến trên $\left(-\infty;+\infty\right)$		
(c)	Có 3 giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=x^3+\left(m+1\right)x^2+3x+2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$		
(d)	Có 6 giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^3+\left(m+1\right)x^2+3x+2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$		

» Câu 55. Cho hàm số $y=\left(m^2-1\right)x^3+\left(m-1\right)x^2-x+4$ (tham số m). Khi đó

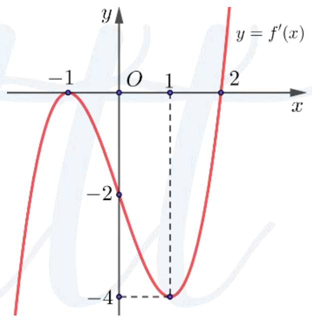
	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Khi $m=1$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;+\infty\right)$		
(b)	Khi $m=0$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;+\infty\right)$		

(c)	Khi $m=3$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$		
(d)	Tổng các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=(m^2-1)x^3+(m-1)x^2-x+4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ bằng 2		

» Câu 56. Cho hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+m}$ (tham số m). Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Khi $m=1$ thì hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định của nó		
(b)	Khi $m=4$ thì hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định của nó		
(c)	Tập hợp tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-6)$ là $(3;6]$		
(d)	Tập hợp tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-6)$ là $(3;6]$		

» Câu 57. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x)=f(x^2-2)$.



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0;2)$.		
(b)	Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.		
(c)	Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1;0)$.		
(d)	Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-2)$.		

» Câu 58. Cho hàm số $y=f(x)=x^3-3x^2+4$. Đặt $g(x)=3f(f(x))+4$.

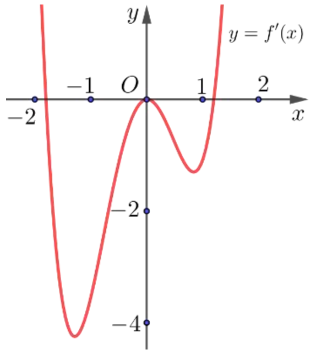
	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số $g(x)$ có 8 điểm cực trị.		
(b)	Hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực đại.		
(c)	Hàm số $g(x)$ có 4 điểm cực tiểu.		
(d)	Điểm $x_0=0$ là điểm cực tiểu của hàm số $y=g(x)$.		

C. *Câu hỏi – Trả lời ngắn*

» Câu 59. Hãy xác định số khoảng đồng biến của hàm số $y=x^3-3x^2-9x-1$?

Điền đáp số:

» **Câu 60.** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ liên tục và có đồ thị trên $\mathbb{R}$ như hình vẽ



Giả sử hàm số $y=f\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(a;b\right)$. Trong khoảng $\left(a;b\right)$ có bao nhiêu giá trị nguyên nhỏ hơn 2024.

Điền đáp số:

» **Câu 61.** Cho hàm số $f'\left(x\right)=x\left(x^2-1\right)\left(x+1\right)^3$. Hàm số $y=f\left(x\right)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

Điền đáp số:

» **Câu 62.** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$+$	0	$+$	

Hàm số $y=f\left(x\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Điền đáp số:

» **Câu 63.** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(2m-1\right)+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Điền đáp số:

» **Câu 64.** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{m}{3}x^3-2mx^2+\left(3m+5\right)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Điền đáp số:

» **Câu 65.** Cho hàm số $y=\dfrac{mx-2m+3}{x+m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(2;+\infty\right)$. Tìm số phần tử của S.

Điền đáp số:

» **Câu 66.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+18}{x+4m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(2;+\infty\right)$?

Điền đáp số:

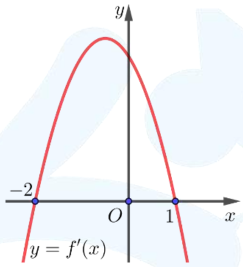
» Câu 67. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x^2}{2}-mx+\ln(x-1)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

Điền đáp số: ☐

» Câu 68. Cho hàm số $f(x)=x^2-2x$. Đặt $g(x)=f(f(x))+1$. Giả sử hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(a;b)$ với $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$. Tính $a+b\sqrt{2}$.

Điền đáp số: ☐

» Câu 69. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Giả sử hàm số $g(x)=2f(x^2-3x)+5$ nghịch biến trên khoảng $(a;b)$ với $a\in\mathbb{Q}$, $b\in\mathbb{Q}$. Tính $2a+3b$.

Điền đáp số: ☐

» Câu 70. Giả sử sự lây lan của một loại virus ở một địa phương có thể được mô hình hoá bằng hàm số $N(t)=-t^3+12t^2$, $0\le t\le 12$, trong đó N là số người bị nhiễm bệnh (đơn vị là trăm người) và t là thời gian (tuần). Gọi $(a;b)$ là khoảng thời gian lâu nhất mà số người bị nhiễm bệnh tăng lên. Tính giá trị $P=2a^2-b^2$.

Điền đáp số: ☐

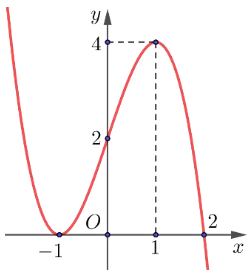
» Câu 71. Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x)=e^{2x}-5e^x+2x+1$. Tính diện tích của tam giác OAB. Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm.

Điền đáp số: ☐

» Câu 72. Gọi A, B, C là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x)=2\ln(x^2+1)-x^2-1$. Tính $P=AB^2+BC^2+CA^2$. Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm.

Điền đáp số: ☐

» Câu 73. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên



Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(\ln(e^2+x^2)-1\right)$.

Điền đáp số:

» **Câu 74.** Trong một thí nghiệm y học, người ta cấy 1000 vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. bằng thực nghiệm, người ta xác định được số lượng vi khuẩn thay đổi theo thời gian bởi công thức: $N(t)=1000+\dfrac{100t}{100+t^2}$ (con), trong đó t là thời gian tính bằng giây. Hỏi thời gian bằng bao nhiêu để số lượng vi khuẩn đạt cực đại?

Điền đáp số:

» **Câu 75.** Giả sử tổng chi phí sản xuất x $\left(0\le x\le 50\right)$ đơn vị sản phẩm A mỗi ngày tại một nhà máy được cho bởi công thức $C\left(x\right)=\dfrac{x^2}{4}+3x+400$ (nghìn đồng) và toàn bộ chúng được bán hết với giá $\left(900-6x\right)$ nghìn đồng một sản phẩm. Tìm mức sản lượng (đó là số lượng sản phẩm được sản xuất) để chi phí trung bình tính trên mỗi đơn vị sản phẩm là đạt cực tiểu.

Điền đáp số:

-------------------Hết-------------------

Chương 01

Bài 2. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

A. Lý thuyết

1. Định nghĩa

Định nghĩa:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D

- Số M được gọi là *giá trị lớn nhất* (**GTLN**) của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu

$\begin{cases} f(x) \le M; \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = M \end{cases}$, ta kí hiệu $M = \max\limits_{x \in D} f(x)$ hoặc $M = \max\limits_{D} f(x)$.

- Số m được gọi là *giá trị nhỏ nhất* (**GTNN**) của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu

$\begin{cases} f(x) \ge M; \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = M \end{cases}$, ta kí hiệu $m = \min\limits_{x \in D} f(x)$ hoặc $m = \min\limits_{D} f(x)$.

Chú ý

» Quy ước rằng khi nói GTLN và GTNN của hàm số $y = f(x)$ (mà không xét "trên tập D") thì ta hiểu đó là GTLN hay GTNN của $y = f(x)$ trên tập xác định của hàm số.

» Để tìm GTLN hay GTNN của hàm số trên tập D, ta thường lập bảng biến thiên của hàm số trên tập D để kết luận.

2. Tìm giá trị lớn nhất – nhỏ nhất trên đoạn

Cách tìm giá trị lớn nhất – nhỏ nhất trên đoạn.

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$:

- ***Bước 1:*** Tìm các điểm $x_1; x_2; ...; x_n$ thuộc $(a;b)$ sao cho $f'(x) = 0$.
- ***Bước 2:*** Tính $f(a); f(x_1); f(x_2); ...; f(x_n); f(b)$.
- ***Bước 3:*** Gọi M là số lớn nhất và m là số nhỏ nhất trong các giá trị ở Bước 2. Khi đó $M = \max\limits_{[a;b]} f(x)$ và $m = \min\limits_{[a;b]} f(x)$.

B Các dạng bài tập

Dạng 1. Giá trị lớn nhất – nhỏ nhất của hàm số trên đoạn

Phương pháp

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$:

» ***Bước 1:*** Tìm các điểm $x_1;x_2;...;x_n$ thuộc $(a;b)$ sao cho $f'(x)=0$.

» ***Bước 2:*** Tính $f(a);f(x_1);f(x_2);...;f(x_n);f(b)$

» ***Bước 3:*** Gọi M là số lớn nhất và m là số nhỏ nhất trong các giá trị ở Bước 2.
Khi đó $M=\max\limits_{[a;b]} f(x)$ và $m=\min\limits_{[a;b]} f(x)$.

Ví dụ 1.1.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-3x+1$ trên đoạn $[-2;2]$.

Lời giải

....
....
....
....
....

Ví dụ 1.2.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 2. Giá trị lớn nhất – nhỏ nhất của hàm số trên khoảng

Phương pháp

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên khoảng $(a;b)$

» **Bước 1:** Tìm điều kiện xác định của hàm số $y=f(x)$.

- $f(x)$ không liên tục trên $(a;b) \Rightarrow$ Không có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.
- $f(x)$ liên tục trên $(a;b) \Rightarrow$ Bước tiếp theo

» **Bước 2:** Tính đạo hàm $y'=f'(x)$.

» **Bước 3:** Tìm các điểm $f\,(x)$ thuộc $[a;b]$ sao cho

- $f'(x)=0$, hoặc
- $f'(x)$ không xác định.

» **Bước 4:** Lập bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ trên khoảng $(a;b)$ cho trước.

» **Bước 5:** Xác định điểm "cao nhất" và điểm "thấp nhất" của đồ thị hàm số trên $(a;b)$.

» **Bước 6:** Kết luận giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$.

⁂ **Nhận xét:**

✓ Nếu đề bài không cho sẵn $(a;b)$ thì thường sẽ lấy luôn tập xác định làm khoảng phải xét.

✓ Đây là phương pháp tổng quát, tùy vào bài toán sẽ giản lược bớt 1 vài bước.

Ví dụ 2.2.

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=-x^2+2x+4$ trên khoảng $(0;3)$.

Lời giải

....

....

....

....

....

Ví dụ 2.2.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $f(x)=x^3-3x-4$ trên $[-3;2)$.

Lời giải

....

....

....

....

....

Ví dụ 2.3.

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x+\frac{4}{x}$ trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 2.3.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $f\left(x\right)=\frac{1}{x^2-1}$ trên $\left(-1;-\infty\right)$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Dạng 3. Sử dụng cách đánh giá để tìm giá trị lớn nhất – nhỏ nhất

Phương pháp

Sử dụng bất đẳng thức thường gặp:

Bất đẳng thức Cô-si:

- Với hai số thực không âm: $a+b\ge 2\sqrt{ab}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b$.
- Với ba số thực không âm: $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.
- Với n thực không âm: $a_1+a_2+\ldots+a_n\ge n\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$.

  Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a_1=a_2=\ldots=a_n$.

Bất đẳng thức Bunhiacopxki

- Dạng cơ bản: $\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)\ge\left(ac+bd\right)^2$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.
- Dạng tổng quát:

  Với hai bộ số $\left(a_1,a_2,\ldots,a_n\right)$ và $\left(b_1,b_2,\ldots,b_n\right)$ ta có:

$$\left(a_1^2+a_1^2+\ldots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2\right)\ge\left(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\right)^2$$

  Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}$.

Sử dụng "Tập giá trị" của hàm số lượng giác:

- Dựa vào tập giá trị của hàm số lượng giác: $\begin{cases}-1\le\sin x\le 1\\ -1\le\cos x\le 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\le\sin^2 x\le 1\\ 0\le\cos^2 x\le 1\end{cases}$

Ví dụ 3.1.

Giả sử M và m lần lượt là GTLN và GTNN của hàm số $y=2+3\sin x$. Tính $M+m$.

Lời giải

....

....

....

....

Ví dụ 3.2.

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right)=\frac{386x}{x^2+2x+5}$ với $x>0$.

Lời giải

....

....

....

....

....

Dạng 4. Ứng dụng giá trị lớn nhất – nhỏ nhất

Phương pháp

❖ **Bài toán bất phương trình**

» *Bước 1:* Chuyển bất phương trình đã cho về dạng $f(x)-g(x)\geq 0$ và tìm điều kiện tồn tại của bất phương trình

» *Bước 2:* Đặt hàm số $y=h(x)=f(x)-g(x)$,
Xét tính đơn điệu của $y=h(x)$ trên điều kiện xác định.

» *Bước 3:* Từ đó kết luận về giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

❖ **Bài toán bất phương trình chứa tham số**

Ta đưa bất phương trình đề bài cho về một trong các dạng sau

» $m\geq f(x)$ nghiệm đúng với mọi $x\in D$ thì $m\geq \max\limits_{D} f(x)$

» $m\leq f(x)$ nghiệm đúng với mọi $x\in D$ thì $m\leq \min\limits_{D} f(x)$

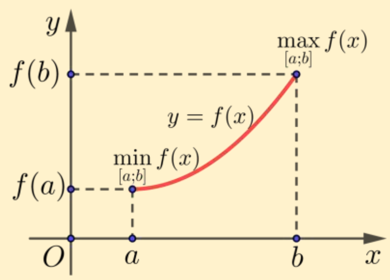
» $m\geq f(x)$ có nghiệm $x\in D$ thì $m\geq \min\limits_{D} f(x)$

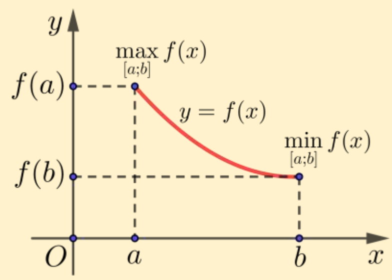
» $m\geq f(x)$ có nghiệm $x\in D$ thì $m\geq \min\limits_{D} f(x)$

⁂ **Nhận xét:** Nếu $y=f(x)$:

✓ *đồng biến* trên $[a;b]$ thì $\begin{cases}\min\limits_{[a;b]} f(x)=f(a)\\ \max\limits_{[a;b]} f(x)=f(b)\end{cases}$.

✓ *nghịch biến* trên $[a;b]$ thì $\begin{cases}\min\limits_{[a;b]} f(x)=f(b)\\ \max\limits_{[a;b]} f(x)=f(a)\end{cases}$





Ví dụ 4.1.

Tìm m bất để phương trình $x^3-3x-m>0$ có nghiệm $x\in[0;2]$?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 4.2.

Giải bất phương trình: $\sqrt{5x-1}+\sqrt{x+3}\ge 4$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 4.3.

Giải bất phương trình: $\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}-\sqrt{4-x}\ge 2\sqrt{3}$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 4.4.

Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Biết bất phương trình $f(x) > \log x - m$ nghiệm đúng $\forall x \in (1;6) \Leftrightarrow m \geq \log a - f(a)$.

Tính $a - b$.

Lời giải

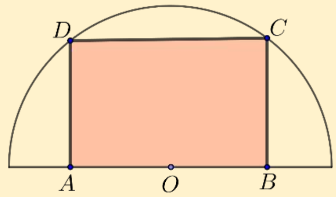
Dạng 5. Bài toán thực tế áp dụng giá trị lớn nhất - nhỏ nhất

Phương pháp

» *Bước 1:* Gọi ẩn và xác định điều kiện cho ẩn.
» *Bước 2:* Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn số và các đại lượng đã biết.
» *Bước 3:* Xét hàm số biểu thị đại lượng mà đề bài yêu cầu. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đó trên điều kiện của ẩn.
» *Bước 4:* Kết luận.

Ví dụ 5.1.

Tính diện tích lớn nhất $S_{\max}$ của một hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính $R = 6\text{cm}$ nếu một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc theo đường kính của hình tròn mà hình chữ nhật đó nội tiếp.



Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 5.2.

Một doanh nghiệp cần sản xuất một mặt hàng trong đúng 10 ngày và phải sử dụng hai máy A và B. Máy A làm việc trong x ngày và cho số tiền lãi là x^3+2x (triệu đồng), máy B làm việc trong y ngày và cho số tiền lãi là $326y-27y^3$ (triệu đồng). Hỏi doanh nghiệp đó cần sử dụng máy A trong bao nhiêu ngày sao cho số tiền lãi là nhiều nhất? (Biết rằng hai máy A và B không đồng thời làm việc, máy B làm việc không quá 6 ngày).

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

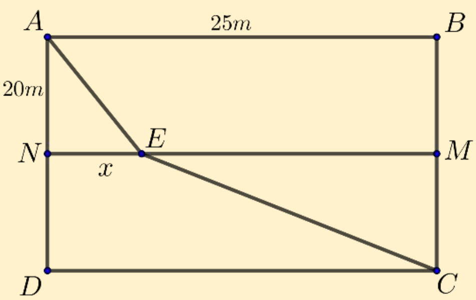
....

....

....

Ví dụ 5.3.

Một mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB=25\,\text{m}$, chiều rộng $AD=20\,\text{m}$ được chia thành hai phần bằng nhau bởi vạch chắn MN (M,N lần lượt là trung điểm BC và AD). Một đội xây dựng làm một con đường đi từ A đến C qua vạch chắn MN, biết khi làm đường trên miền $ABMN$ mỗi giờ làm được 15m và khi làm trong miền $CDNM$ mỗi giờ làm được $30\,\text{m}$. Tính thời gian ngắn nhất mà đội xây dựng làm được con đường đi từ A đến C.



Lời giải

....

....

....

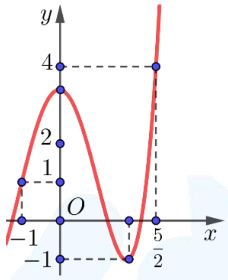
....

....

C Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định, liên tục trên $\left[-1,\frac{5}{2}\right]$ và có đồ thị như hình vẽ.



Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f\left(x\right)$ trên $\left[-1,\frac{5}{2}\right]$ là

A. $M=4, m=1$. **B.** $M=4, m=-1$. **C.** $M=\frac{7}{2}, m=-1$. **D.** $M=\frac{7}{2}, m=1$.

» Câu 2. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên dưới đây.

x	$-\infty$		3		5		7		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	0	−	
y	$-\infty$	↗	3	↘	1	↗	5	↘	$-\infty$

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[3;7\right]$. Ta có giá trị của $M+2m$ là

A. $M+2m=1$. **B.** $M+2m=7$. **C.** $M+2m=3$. **D.** $M+2m=4$.

» Câu 3. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[-3;2\right]$ và có bảng biến thiên như hình dưới đây. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên $\left[-1;2\right]$. Giá trị của $M+m$ bằng bao nhiêu?

x	-3		-1		0		1		2
$f'(x)$		+	0	−	0	+	0	−	
$f(x)$	-2	↗	3	↘	0	↗	2	↘	1

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

» Câu 4. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên đoạn $\left[-\sqrt{3};\sqrt{5}\right]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{5}$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	0	↗	2	↘	-2	↗	$2\sqrt{5}$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\min\limits_{\left[-\sqrt{3};\sqrt{5}\right]} y=0$.   **B.** $\max\limits_{\left[-\sqrt{3};\sqrt{5}\right]} y=2$.   **C.** $\max\limits_{\left[-\sqrt{3};\sqrt{5}\right]} y=2\sqrt{5}$.   **D.** $\min\limits_{\left[-\sqrt{3};\sqrt{5}\right]} y=1$.

» Câu 5. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y=\dfrac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn $\left[0;2\right]$.

A. $M=5$.   **B.** $M=-5$.   **C.** $M=\dfrac{1}{3}$.   **D.** $M=-\dfrac{1}{3}$.

» Câu 6. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	1	↗	3	↘	-1	↗	1

Giá trị lớn nhất của hàm số trên $\mathbb{R}$ là bao nhiêu?

A. $\operatorname*{Max}\limits_{\mathbb{R}} y=-\dfrac{1}{2}$.   **B.** $\operatorname*{Max}\limits_{\mathbb{R}} y=-1$.   **C.** $\operatorname*{Max}\limits_{\mathbb{R}} y=1$.   **D.** $\operatorname*{Max}\limits_{\mathbb{R}} y=3$.

» Câu 7. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=-x+3-\dfrac{1}{x+2}$ trên nửa khoảng $\left[-4;-2\right)$.

A. $\min\limits_{\left[-4;2\right)} y=4$.   **B.** $\min\limits_{\left[-4;2\right)} y=7$.   **C.** $\min\limits_{\left[-4;2\right)} y=5$.   **D.** $\min\limits_{\left[-4;2\right)} y=\dfrac{15}{2}$.

» Câu 8. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=-3x^4+4x^3+1$ bằng

A. 11.   **B.** 0.   **C.** 5.   **D.** 2.

» Câu 9. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

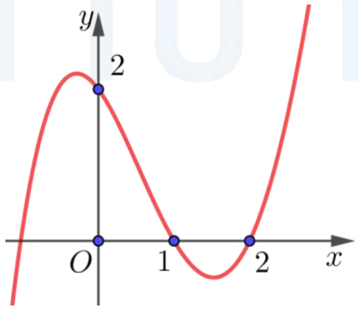
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	

Mệnh đề nào sau đây đúng

A. $\max\limits_{\left(0;+\infty\right)} f\left(x\right)=f\left(1\right)$ **B.** $\max\limits_{\left(-1;1\right]} f\left(x\right)=f\left(0\right)$

C. $\min\limits_{\left(-\infty;-1\right)} f\left(x\right)=f\left(-1\right)$ **D.** $\min\limits_{\left(-1;+\infty\right)} f\left(x\right)=f\left(0\right)$

» Câu 10. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$, hàm số $y=f'\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Bất phương trình $f\left(x\right)<2x+m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x\in\left(0;2\right)$ khi và chỉ khi



A. $m>f\left(0\right)$.   **B.** $m\ge f\left(2\right)-4$.   **C.** $m\ge f\left(0\right)$.   **D.** $m>f\left(2\right)-4$.

» Câu 11. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	-1		0		2		3
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	1

Gọi S là tập hợp các số nguyên dương m để bất phương trình $f(x) \geq m(x^3 - 3x^2 + 5)$ có nghiệm thuộc đoạn $[-1;3]$. Số phần tử của S là

A. 3 **B.** Vô số **C.** 2 **D.** 0

» Câu 12. Tìm m để bất phương trình $x + \dfrac{4}{x-1} \geq m$ có nghiệm trên khoảng $(-\infty;1)$.

A. $m \leq 5$. **B.** $m \leq -3$. **C.** $m \leq 1$. **D.** $m \leq -1$

» Câu 13. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$. Kí hiệu $M = \max\limits_{x\in[0;2]} f(x)$, $m = \min\limits_{x\in[0;2]} f(x)$. Khi đó $M + m$ bằng

A. $\dfrac{-4}{3}$. **B.** $\dfrac{-2}{3}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** 1.

» Câu 14. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$ trên đoạn $[-1;2]$ đạt được tại x_0. Giá trị x_0 bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** -2. **D.** -1.

» Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	

Mệnh đề nào sau đây đúng

A. $\max\limits_{(0;+\infty)} f(x) = f(1)$ **B.** $\max\limits_{(-1;1]} f(x) = f(0)$

C. $\min\limits_{(-\infty;-1)} f(x) = f(-1)$ **D.** $\min\limits_{(-1;+\infty)} f(x) = f(0)$

» Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ và có bảng biến thiên trên $[-5;7)$ như sau:

x	$-\infty$	-5		1		7	$+\infty$
$f'(x)$			$-$	0	$+$		
$f(x)$		6	$\searrow$	2	$\nearrow$	9	

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\min\limits_{[-5;7)} f(x) = 2$ và hàm số không đạt giá trị lớn nhất trên $[-5;7)$.

B. $\max\limits_{[-5;7)} f(x) = 6$ và $\min\limits_{[-5;7)} f(x) = 2$.

C. $\max\limits_{[-5;7)} f(x) = 9$ và $\min\limits_{[-5;7)} f(x) = 2$.

D. $\max\limits_{[-5;7)} f(x) = 9$ và $\min\limits_{[-5;7)} f(x) = 6$.

» Câu 17. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{t^2 + t + 4}{t+1}$ trên đoạn $[0;10]$

A. 3. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\frac{114}{11}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

» Câu 18. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3-3x+4m-1=0$ có ít nhất một nghiệm thực trong $[-3;4]$.

A. $\frac{-51}{4}\le m\le\frac{19}{4}$. **B.** $\frac{-51}{4}<m<\frac{19}{4}$. **C.** $-51<m<19$. **D.** $-51\le m\le 19$.

» Câu 19. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=2\cos x-\frac{4}{3}\cos^3 x$ trên $[0;\pi]$.

A. $\max\limits_{[0;\pi]} y=\frac{2}{3}$. **B.** $\max\limits_{[0;\pi]} y=\frac{10}{3}$. **C.** $\max\limits_{[0;\pi]} y=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\max\limits_{[0;\pi]} y=0$.

» Câu 20. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $\frac{x^2+3x+3}{x+1}\ge m$ nghiệm đúng với mọi $x\in[0;1]$.

A. $m\ge\frac{7}{2}$. **B.** $m\le 3$. **C.** $m\le\frac{7}{2}$. **D.** $m\ge 3$.

» Câu 21. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x)=0,035x^2(15-x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm (đơn vị miligam) cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất.?

A. $x=8$. **B.** $x=10$. **C.** $x=15$. **D.** $x=7$.

» Câu 22. Sự ảnh hưởng khi sử dụng một loại độc tố với vi khuẩn X được một nhà sinh học mô tả bởi hàm số $P(t)=\frac{t+1}{t^2+t+4}$, trong đó $P(t)$ là số lượng vi khuẩn sau thời gian t sử dụng độc tố. Vào thời điểm nào thì số lượng vi khuẩn X bắt đầu giảm?

A. Ngay từ lúc bắt đầu sử dụng độc tố. **B.** Sau $0,5$ giờ.
C. Sau 2 giờ. **D.** Sau 1 giờ.

» Câu 23. Cho hàm số $y=\frac{\sin x+m}{\sin x+2}$. Tìm tổng các giá trị của m để hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng -1.

A. -4. **B.** -2. **C.** 2. **D.** 4.

» Câu 24. Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x+2020$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m sao cho hàm số có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

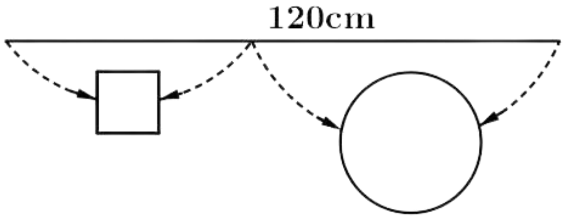
» Câu 25. Cho hàm số $y=\frac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[2;4]} y=3$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $m>4$ **B.** $3<m\le 4$ **C.** $m<-1$ **D.** $1\le m<3$

» Câu 26. Cho hàm số $y=\frac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[0;1]} y=3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $1\le m<3$ **B.** $m>6$ **C.** $m<1$ **D.** $3<m\le 6$

» **Câu 27.** Một sợi dây kim loại dài 120cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất được uốn thành hình vuông, đoạn dây thứ hai được uốn thành vòng tròn **(tham khảo hình bên dưới)**.



Tổng diện tích của hình vuông và hình tròn đạt giá trị nhỏ nhất là **(làm tròn đến hàng đơn vị)**?

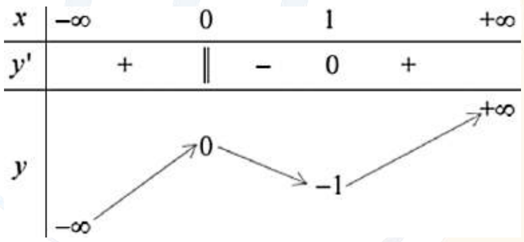
A. 504. **B.** 462. **C.** 426. **D.** 498.

B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai

» **Câu 28.** Gọi giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $[a;b]$ lần lượt là m và M. Xét tính đúng sai của mệnh đề sau.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$m=\min\limits_{[a;b]} f(x)$		
(b)	$m\le M$		
(c)	Với mọi $x\in[a;b]$ ta có $f(x)\ge m$		
(d)	Với mọi $x\in[a;b]$ ta có $f(x)<M$		

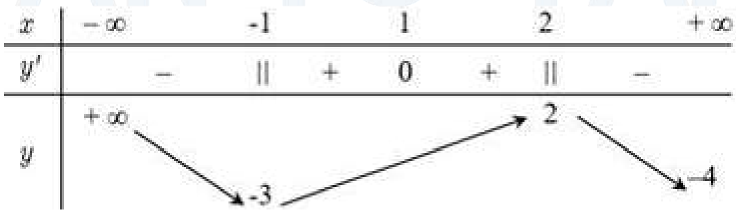
» **Câu 29.** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:



Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.		
(b)	Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.		
(c)	Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=1$.		
(d)	Hàm số có đúng một cực trị.		

» **Câu 30.** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình sau:



Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số có hai điểm cực trị.		
(b)	Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng -3.		
(c)	Hàm số đạt cực đại tại $x=2$.		

(d)	Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$, $(2;+\infty)$.		

» Câu 31. Gọi giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $(a;b)$ lần lượt là m và M. Xét tính đúng sai của mệnh đề sau.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$m<M$		
(b)	$f(a)=m$		
(c)	Với mọi $x\in(a;b)$ ta có $f(x)>m$		
(d)	Với mọi $x\in(a;b)$ ta có $m\le f(x)<M$		

» Câu 32. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi m và M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Xét tính đúng sai của mệnh đề sau.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Phương trình $f(x)=m$ có nghiệm.		
(b)	Phương trình $f(x)=C$ vô nghiệm với $m\le C\le M$.		
(c)	Bất phương trình $f(x)>M$ vô nghiệm.		
(d)	Bất phương trình $f(x)>m$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.		

» Câu 33. Cho hàm số $y=x^3-3x+2$. Xét tính đúng sai của mệnh đề sau.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\min\limits_{[0;1]} y=0$		
(b)	$\min\limits_{[0;2]} y=y(0)$		
(c)	$\min\limits_{[-1;0]} y+\max\limits_{[0;1]} y=4$		
(d)	$\min\limits_{\left[-\frac{3}{2};0\right]} \frac{1}{y}=\frac{8}{25}$		

» Câu 34. Cho hàm số $y=2\sin x-1$. Khi đó

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\max y=1$		
(b)	$\min y=-3$		
(c)	$\max\limits_{[0;\pi]} y=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$		
(d)	$\min\limits_{[0;\pi]} y=y(0)=-1$		

» Câu 35. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;3]$ và có bảng biến thiên như sau

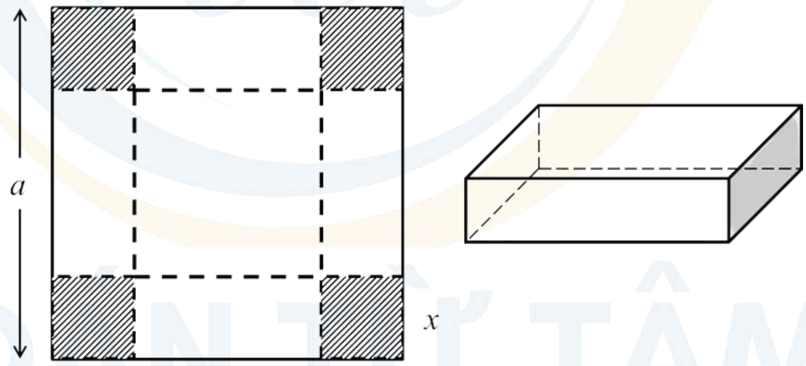
x	0		1		3
y'		$+$	0	$-$	
y	8	$\nearrow$	9	$\searrow$	5

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Có 7 số nguyên m để phương trình $f(x)=m(x^4-2x^2+2)$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;3]$.		
(b)	Giá trị m lớn nhất để phương trình $f(x)=m(x^4-2x^2+2)$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;3]$ là 7.		
(c)	Giá trị m nhỏ nhất để phương trình $f(x)=m(x^4-2x^2+2)$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;3]$ là 3.		
(d)	Tổng các giá trị của m để phương trình $f(x)=m(x^4-2x^2+2)$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;3]$ là 45.		

» Câu 36. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{\sin x}$. Khi đó

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{1}{\sin x}$ trên khoảng $(0;\pi)$ là 1.		
(b)	Không tồn tại giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{1}{\sin x}$ trên $(0;\pi)$.		
(c)	Không tồn tại giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{1}{\sin x}$ trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.		
(d)	Không tồn tại giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{1}{\sin x}$ trên $\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$.		

» Câu 37. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh a. Người ta cắt ở 4 góc 4 hình vuông bằng nhau, rồi gập tấm nhôm lại để được một cái hộp không nắp.



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Ta có $0<x<\dfrac{a}{2}$.		
(b)	Thể tích của khối hộp là: $V(x)=x(a-2x)^2\left(0<x<\dfrac{a}{2}\right)$.		
(c)	Thể tích của khối hộp lớn nhất bằng $\dfrac{2a^3}{9}$.		
(d)	Cạnh của hình vuông bị cắt sao cho thể tích của khối hộp là lớn nhất bằng $\dfrac{a}{6}$.		

C. *Câu hỏi – Trả lời ngắn*

» **Câu 38.** Trên đoạn $\left[-1;2\right]$, hàm số $y=x^3+3x^2+1$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm có hoành độ bao nhiêu?

Điền đáp số:

» **Câu 39.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=3+\sqrt{x^2-2x+5}$ bằng

Điền đáp số:

» **Câu 40.** Hàm số $y=\sin^4 x-\cos^4 x$ có giá trị lớn nhất bằng

Điền đáp số:

» **Câu 41.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $x^3-3x-m=0$ có nghiệm $x\in\left[0;2\right]$?

Điền đáp số:

» **Câu 42.** Có bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x-m^2+m}{x+1}$ trên đoạn $\left[0;1\right]$ bằng -2.

Điền đáp số:

» **Câu 43.** Cho hàm số $f\left(x\right)=\left(m-1\right)x^4-2mx^2+1$ với m là tham số thực. Nếu $\min\limits_{[0;3]} f\left(x\right)=f\left(2\right)$ thì $\max\limits_{[0;3]} f\left(x\right)$ bằng

Điền đáp số:

» **Câu 44.** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{2x-2}$ trên khoảng $\left(0;1\right)$. *(kết quả làm tròn đến hàng phần chục)*

Điền đáp số:

» **Câu 45.** Tìm giá trị lớn nhất hàm số $y=\dfrac{x+4}{\sqrt{x^2+2}}$.

Điền đáp số:

» **Câu 46.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $x^3-3x+4m-1=0$ có ít nhất một nghiệm thực trong $\left[-3;4\right]$?

Điền đáp số:

» **Câu 47.** Tìm giá trị lớn nhất của tham số m để bất phương trình $\dfrac{x^2+3x+3}{x+1}\geq m$ nghiệm đúng với mọi $x\in\left[0;1\right]$.

Điền đáp số:

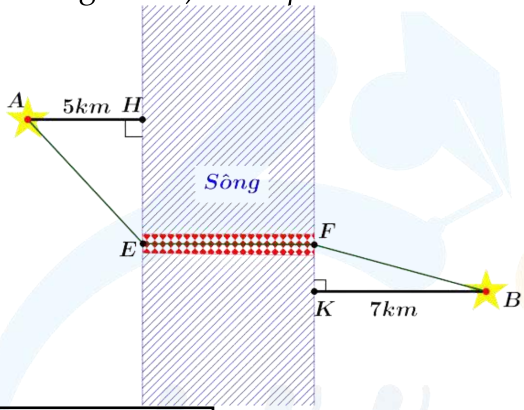
» **Câu 48.** Tìm giá trị của tham số thực m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{2x+m}{x+1}$ trên đoạn $\left[0;4\right]$ bằng 3.

✍ **Điền đáp số:**

» **Câu 49.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=-x^3-3x^2+m$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 0.

✍ **Điền đáp số:**

» ***Câu 50.*** Hai thành phố A và B cách nhau một con sông. Người ta xây dựng một cây cầu EF bắc qua sông biết rằng thành phố A cách con sông một khoảng là $5km$ và thành phố B cách con sông một khoảng là $7km$ (hình vẽ), biết $HE+KF=24km$ và độ dài EF không đổi. Hỏi xây cây cầu cách thành phố B là bao nhiêu để đường đi từ thành phố A đến thành phố B là ngắn nhất (đi theo đường $AEFB$) ? *(kết quả làm tròn đến km)*



✍ **Điền đáp số:**

---------------------Hết---------------------

Chương 01
Bài 3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

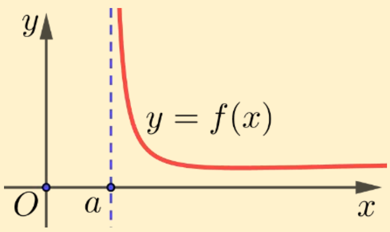
A. Lý thuyết

1. Tiệm cận đứng

Định nghĩa:

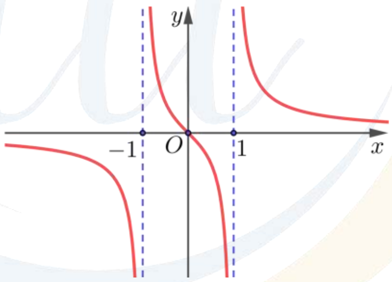
Đường thẳng $x=a$ được gọi là một đường tiệm cận đứng (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau thoả mãn:

- $\lim\limits_{x\to a^-} f\left(x\right)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to a^-} f\left(x\right)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to a^+} f\left(x\right)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to a^+} f\left(x\right)=-\infty$



Chú ý

» Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{x^2-1}$ cùng với hai tiệm cận đứng $x=1$ và $x=-1$

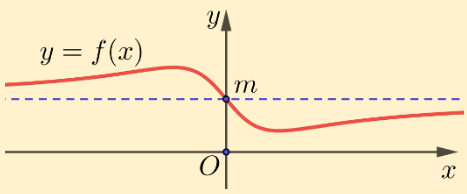


2. Tiệm cận ngang

Định nghĩa:

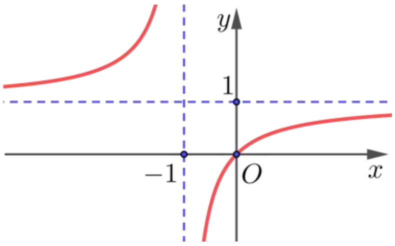
Đường thẳng $y=m$ được gọi là một đường tiệm cận ngang (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ nếu

- $\lim\limits_{x\to -\infty} f\left(x\right)=m$ hoặc
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f\left(x\right)=m$



Chú ý

» Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x}{x+1}$ cùng với tiệm cận ngang $y=1$ và tiệm cận đứng $x=-1$



3. Tiệm cận xiên

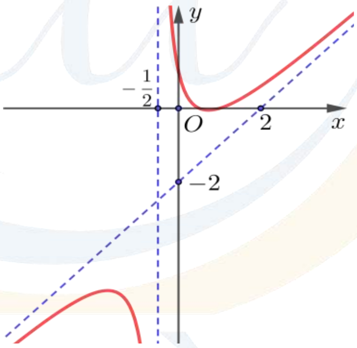
Định nghĩa:

Đường thẳng $y=ax+b, a\neq 0$, được gọi là đường tiệm cận xiên (hay tiệm cận xiên) của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ hoặc
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$

Chú ý

» Đồ thị hàm số $f(x)=x-2+\dfrac{3}{2x+1}$ cùng tiệm cận đứng $x=-\dfrac{1}{2}$ và tiệm cận xiên $y=x-2$



B Các dạng bài tập

Dạng 1. Tìm các đường tiệm cận khi cho bảng biến thiên – đồ thị

Phương pháp

» ***Bước 1:*** Tìm Tập xác định của hàm số. Giả Sử $D=(-\infty;+\infty)\backslash\{x_0\}$.

» ***Bước 2:*** Quan sát Bảng biến thiên hoặc đồ thị, tìm giới hạn

» $\left[\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} y=y_0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} y=y_0\end{array}\right.\Rightarrow y=y_0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

» $\left[\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0^-} y=+\infty\\ \lim\limits_{x\to x_0^-} y=-\infty\\ \lim\limits_{x\to x_0^+} y=+\infty\\ \lim\limits_{x\to x_0^+} y=-\infty\end{array}\right.\Rightarrow x=x_0$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

» $\left[\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\left[y-(ax+b)\right]=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left[y-(ax+b)\right]=0\end{array}\right.$ thì $y=ax+b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

⁂ ***Chú ý:***

» $\lim\limits_{x\to+\infty} y=y_1;\lim\limits_{x\to-\infty} y=y_2\Rightarrow y=y_1;y=y_2$ là hai đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

» Tập xác định không có chứa $+\infty;-\infty$ thì đồ thị hàm số không có đường tiện cận ngang.

» Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ thì đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng.

Ví dụ 1.1.

Cho hàm số $y=f(x)$ có báng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
y'		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
y	1	↘	$-\infty$ $\|$ 2	↘	-3	↗	3

Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Lời giải

....

....

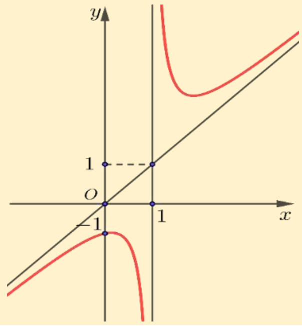
....

....

....

Ví dụ 1.2.

Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình bên. Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.



Lời giải

Ví dụ 1.3.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		-1		3		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
y	5	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty \;\|\|\; -2$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-5

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là bao nhiêu?

Lời giải

Dạng 2. *Tìm các đường tiệm cận khi cho bảng biến thiên – đồ thị*

Phương pháp

Để tìm tiệm cận ngang, tiệm cận đứng, tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$

» ***Bước 1:*** Tìm Tập xác định của hàm số.

» ***Bước 2:*** Tìm ***tiệm cận ngang*** của đồ thị hàm số bằng cách tính các giới hạn (nếu có): $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)$

» ***Bước 3:*** Tìm ***tiệm cận đứng*** của đồ thị hàm số bằng cách tính các giới hạn (nếu có): $\lim\limits_{x\to k^+} f\left(x\right)$ và $\lim\limits_{x\to k^-} f\left(x\right)$

» ***Bước 4:*** Tìm ***tiệm cận xiên*** (*dành cho hàm số có dạng phân thức có bậc tử số lớn hơn bậc mẫu số 1 bậc*) bằng một trong hai cách sau:

» *Cách 1:* Nếu biểu diễn $f\left(x\right)=ax+b+g\left(x\right)$ thì tính $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f\left(x\right)-\left(ax+b\right)\right)\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f\left(x\right)-\left(ax+b\right)\right)\end{cases}$

» *Cách 2:* Xác định đường tiệm cận xiên $y=ax+b$ bằng cách xác định hệ số a,b:

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f\left(x\right)}{x} \text{ hoặc } a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(x\right)}{x} \text{ với } a\neq 0.$$

Khi đó tương ứng ta có $b=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f\left(x\right)-ax\right)$ hoặc $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f\left(x\right)-ax\right)$

⁂ ***Chú ý:***

» Đồ thị hàm số chỉ có thể có một trong hai loại tiệm cận ngang hoặc tiệm cận xiên.

» Nếu hàm số xác định trên toàn bộ tập số thực thì không có tiệm cận đứng.

» Hàm số hằng $y=b$ có đồ thị nhận $y=b$ là tiệm cận ngang, hàm số bậc nhất $y=ax+b$ có đồ thị nhận chính nó $y=ax+b$ là tiệm cận xiên.

Ví dụ 2.1.

Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 2.2.

Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+1}{x}$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2.3.

Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^3-x^2+1}{x^2-1}$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 3. Đường tiệm cận liên quan góc – khoảng cách – diện tích

Phương pháp

» ***Bước 1:*** Xác định các đường tiệm cận của đồ thị hàm số.

» ***Bước 2:*** Dựa vào các giả thiết: khoảng cách, góc, diện tích,...để tính toán hoặc thiết lập phương trình, hệ phương trình để tìm ẩn cần tìm.

Ví dụ 3.1.

Tìm các giá trị m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{4mx+3m}{x-2}$ có đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 2024?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 3.2.

Cho hàm số $y=\dfrac{2x^2-x}{x-1}$ có đồ thị (C).

(1) Tính khoảng cách từ $M(2;1)$ đến đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số (C).

(2) Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (C) cắt hai trục tọa độ lần lượt tại hai điểm A,B. Tính diện tích của tam giác OAB đó.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 3.3.

Cho hàm số $y=\dfrac{4x+4}{3-x}$ có đồ thị là (C). Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng các khoảng cách từ một điểm M tùy ý trên (C) đến hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số (C).

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Dạng 4. Bài toán thực tế và ý nghĩa của giá trị gần về tiệm cận

Phương pháp

» **Bước 1:** Biểu diễn các đại lượng với nhau thông qua hàm số.
» **Bước 2:** Tìm tiệm của hàm số vừa tìm được.
» **Bước 3:** Nêu ý nghĩa của giá trị gần về tiệm cận

Ví dụ 4.1.

Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy, người ta ước tính chi phí cần bỏ ra là

$$C(x)=\frac{300x}{100-x}\text{ (triệu đồng)},\ 0\le x<100.$$

Hãy cho biết:

(1) Chi phí cần bỏ ra sẽ thay đổi như thế nào khi x tăng?

(2) Có thể loại bỏ được 100% chất gây ô nhiễm không khí không? Vì sao?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 4.2.

Số lượng sản phẩm bán được của một công ty trong x (tháng) được tính theo công thức

$$S(x)=200\left(5-\frac{9}{2+x}\right), \text{ trong đó } x\geq 1.$$

(1) Xem $y=S(x)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[1;+\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.

(2) Nêu nhận xét về số lượng sản phẩm bán được của công ty đó trong x (tháng) khi x đủ lớn.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 4.3.

Một bể chứa 5000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 30 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 25 lít/phút.

(1) Chứng tỏ nồng độ muối trong bể sau t phút (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể, đơn vị: gam/lít) là $f(t)=\dfrac{30t}{200+t}$.

(2) Xem $y=f(t)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0;+\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.

(3) Nêu nhận xét về nồng độ muối trong bể sau thời gian t ngày càng lớn.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

C. Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

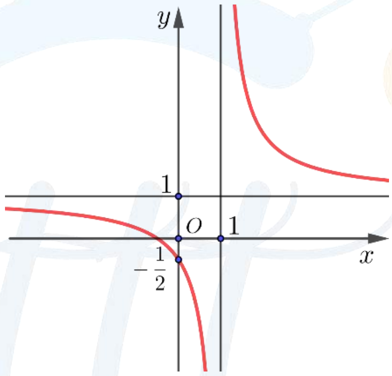
» Câu 1. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$	$-$		$+$	
y	2	↘	-4 $\|\|$ $+\infty$	↘	-2	↗	$+\infty$

Số đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

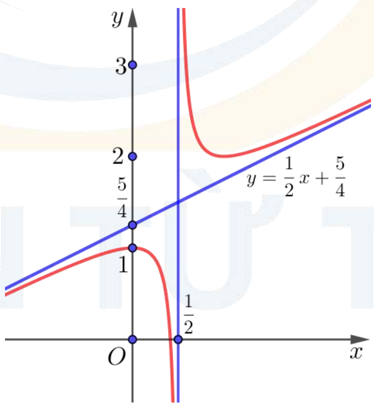
» Câu 2. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$.



Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số có phương trình là

A. $x=1$. **B.** $x=2$. **C.** $y=1$. **D.** $y=2$

» Câu 3. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2x-1}{2x-1}$ có đồ thị như sau:



Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là:

A. $x=\dfrac{1}{2}$. **B.** $y=2x-1$. **C.** $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{4}$. **D.** $x=1$.

» Câu 4. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=-1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x=1$ và $x=-1$.

B. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

C. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.
D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y=1$ và $y=-1$.

» Câu 5. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ là

A. $y=-2$. **B.** $y=1$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=2$.

» Câu 6. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{4x+1}{x-1}$ là

A. $y=\dfrac{1}{4}$. **B.** $y=4$. **C.** $y=1$. **D.** $y=-1$.

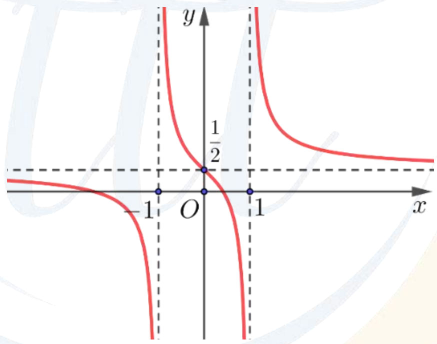
» Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus[-1;1]$ liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	‖	‖	‖	$-$	
y	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖	‖	‖ 0	$\searrow$	-2

Tính tổng số đường tiệm cận đứng và số đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$?

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

» Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là:

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 6.

» Câu 9. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ là:

A. $y=1$. **B.** $y=-2$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=2$.

» Câu 10. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+2024}{x-1}$ là:

A. $x=2$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-1$.

» Câu 11. Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=f(x)=x+2+\dfrac{3}{2x+1}$ là:

A. $y=\dfrac{1}{2}$. **B.** $y=2x+1$. **C.** $y=x-2$. **D.** $y=x+2$.

» Câu 12. Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-16}{x+5}$ là:

A. $y=2x+5$. **B.** $y=x+5$. **C.** $y=x-5$. **D.** $y=2x-5$.

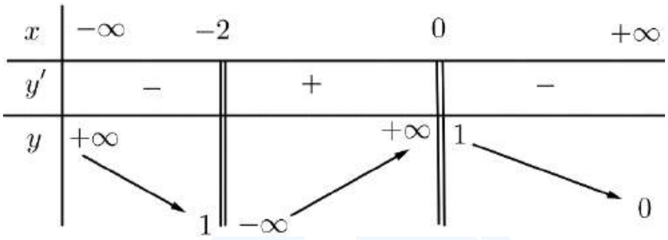
» Câu 13. Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-5}{x+1}$ là:

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

» Câu 14. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. Khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường tiệm cận đứng bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 3.

» Câu 15. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau



Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

» Câu 16. Hàm số nào sau đây có một tiệm cận:

A. $y=\dfrac{x+3}{2x-1}$. **B.** $y=\dfrac{x^2+3x-2}{x+3}$ **C.** $y=\dfrac{4}{x-1}$ **D.** $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

» Câu 17. Đường thẳng $2y+1=0$ là tiệm cận ngang của hàm số nào sau đây?

A. $y=\dfrac{x+1}{2x+1}$ **B.** $y=\dfrac{x^2+x+1}{1-2x}$ **C.** $y=\dfrac{2x+1}{1-x}$ **D.** $y=\dfrac{3-x^2}{2x^2-3x+1}$

» Câu 18. Đường thẳng $x=-1$ là tiệm cận đứng của hàm số nào sau đây?

A. $y=\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-1}$ **B.** $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$ **C.** $y=\dfrac{x+1}{x^2+4x+3}$ **D.** $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$

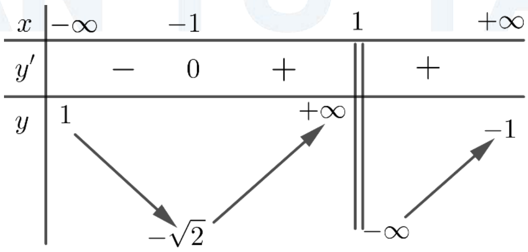
» Câu 19. Cho hàm số $\left(C\right): y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-2}$. Góc tạo bởi đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $\left(C\right)$ với trục hoành bằng

A. 45°. **B.** 60°. **C.** 120°. **D.** 135°.

» Câu 20. Các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$ tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng

A. 3. **B.** 6. **C.** 1. **D.** 2.

» Câu 21. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\left\{1\right\}$ có bảng biến thiên như hình vẽ.



Mệnh đề nào sau đây là đúng?

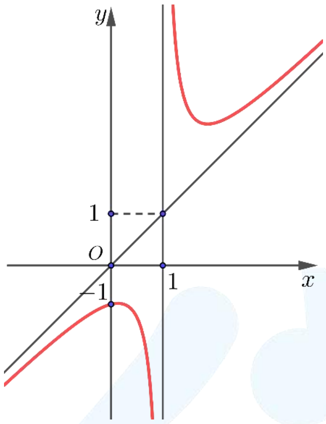
A. Hàm số $y=f\left(x\right)$ có 2 điểm cực trị .

B. Hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left(-1;+\infty\right)$.

C. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;1)$.

D. Hàm số $y=f(x)$ có tổng cộng 3 đường tiệm cận .

» Câu 22. Đồ thị hàm số (C) (màu xanh) và đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (C) (nét đứt). Hình vẽ minh họa dưới đây



Mệnh đề nào sau đây là **sai** ?

A. Hàm số (C) đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

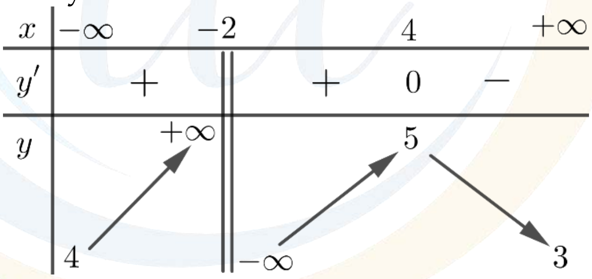
B. Hàm số (C) đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

C. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (C) có hệ số góc là một số âm.

D. Hàm số (C) không có cực trị.

B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai

» Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình dưới đây.



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.		
(b)	Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số có phương trình: $x=-2$.		
(c)	Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang có phương trình: $x=3$ và $x=4$.		
(d)	Đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.		

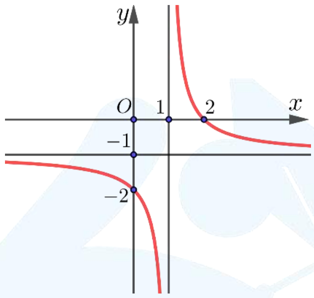
» Câu 24. Cho hàm số $y=\dfrac{\sqrt{4x^2-9}}{x-1}$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số		
(b)	Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$		
(c)	Đường thẳng $y=-2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số		
(d)	Đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận		

» Câu 25. Cho hàm số $y=\dfrac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2-2x}$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Đường thẳng $x=0$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.		
(b)	Đường thẳng $y=0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.		
(c)	Đường thẳng $x=2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.		
(d)	Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang.		

» Câu 26. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$ có đồ thị là hình bên dưới



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$ và đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.		
(b)	Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x=1$.		
(c)	Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=-1$.		
(d)	Tổng $a+b+c=5$.		

» Câu 27. Nồng độ oxygen trong hồ theo thời gian t cho bởi công thức $y(t)=5-\dfrac{15t}{9t^2+1}$, với y được tính theo mg/l và t được tính theo giờ, $t\ge 0$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Đồ thị hàm số $y(t)$ có một đường tiệm cận ngang và một đường tiệm cận xiên.		
(b)	Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=5$.		
(c)	Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x=\dfrac{1}{3}$.		
(d)	Sau một thời gian đủ dài, nồng độ oxygen trong hồ sẽ bão hòa và đạt ngưỡng $5\ mg/l$		

» Câu 28. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x+2}$.

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số có hai tiệm cận.		
(b)	Giao điểm của hai tiệm cận là $I(-2;-6)$.		
(c)	Khoảng cách từ O đến tiệm cận xiên bằng $4\sqrt{2}$.		
(d)	Tiệm cận xiên của hàm số đi qua điểm $M(0;-4)$.		

» Câu 29. Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{mx^2+(3-m)x+m^2-2}{x-1}$, m là tham số. Khi (C) có tiệm cận xiên, gọi đường tiệm cận xiên này là (d). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Khi $m=2$ thì (d) có phương trình là $y=2x+3$.		
(b)	Khi $m=1$ thì (d) đi qua điểm $A(1;4)$.		
(c)	Có 1 đường thẳng (d) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 6.		
(d)	Khi $m=\pm\sqrt{3}$ thì khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (d) bằng $\sqrt{3}$.		

» Câu 30. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+mx-1}{x-1}(C_m)$ (m là tham số). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

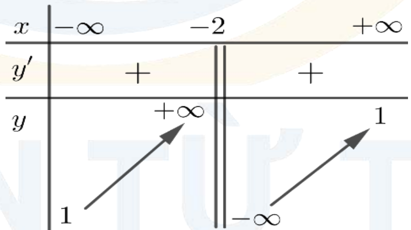
	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Để đồ thị (C_m) của hàm số có tiệm cận xiên thì $m\neq 0$.		
(b)	Để tiệm cận xiên của (C_m) đi qua $M(2;-5)$ thì $m=-8$.		
(c)	Để tiệm cận xiên của (C_m) tạo với hai trục toạ độ một tam giác có diện tích bằng 8 (đvdt) thì tổng tất cả các giá trị m tìm được bằng 2.		
(d)	Với $m=3$ thì giao điểm của hai đường tiệm cận của (C_m) nằm trên Parapol $y=x^2+3$.		

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» Câu 31. Cho hàm số $y=\dfrac{3x-2}{x+1}$. Giả sử đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x=a$ và đường tiệm cận ngang là $y=b$. Tính giá trị $a+b$

Điền đáp số:

» Câu 32. Cho hàm số có bảng biến thiên bên dưới. Khi đó, đồ thị hàm số có số đường tiệm cận là bao nhiêu?



Điền đáp số:

» Câu 33. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{x^2-5x+7}{x-3}$ có đồ thị (C). Đường tiệm cận xiên của đồ thị (C) là đường thẳng $\Delta: y=ax+b$. Tính $a+b$.

Điền đáp số:

» Câu 34. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+3}{x-2}$ có đồ thị (C). Hai đường tiệm cận của đồ thị (C) cùng với hai trục tọa độ tạo thành một hình thang vuông có diện tích S. Tính S.

Điền đáp số: $\boxed{}$

» Câu 35. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1

Tìm tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f(x)-1}$.

Điền đáp số: $\boxed{}$

» Câu 36. Cho hàm số $y=\dfrac{12+\sqrt{4x-x^2}}{\sqrt{x^2-6x+2m}}$ có đồ thị (C_m). Tập S tất cả các giá trị của tham số thực m để (C_m) có đúng hai tiệm cận đứng có dạng $(a;b)$. Tính $a+2b$.

Điền đáp số: $\boxed{}$

» Câu 37. Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x^2-x}$ là ?

Điền đáp số: $\boxed{}$

» Câu 38. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{mx^2+(3m+1)x-m+2}{x+1}$ có tiệm cận xiên là (d) và (d) tiếp xúc với đường tròn tâm $I(1;2)$, bán kính bằng $\sqrt{2}$.

Điền đáp số: $\boxed{}$

» Câu 39. Tổng các giá trị của tham số m để đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2+2(m-1)x+m^2-2}$ có đúng một tiệm cận đứng.

Điền đáp số: $\boxed{}$

» Câu 40. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f(x)-1}$ là?

Điền đáp số: $\boxed{}$

--------------------Hết--------------------

Chương 01

Bài 4. KHẢO SÁT & VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ CƠ BẢN

A. Lý thuyết

1. Sơ đồ khảo sát hàm số

Định nghĩa:

①. Tìm tập xác định của hàm số.

②. Xét sự biến thiên của hàm số:

» Tìm y', xét dấu y', xác định khoảng đơn điệu, cực trị (nếu có) của hàm số.

» Tìm giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực của hàm số và các đường tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có).

» Lập bảng biến thiên của hàm số.

③. Vẽ đồ thị của hàm số:

» Xác định các điểm cực trị (nếu có), giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ (nếu có và dễ tìm), ...

» Vẽ các đường tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có).

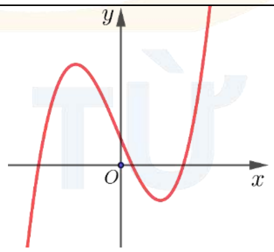
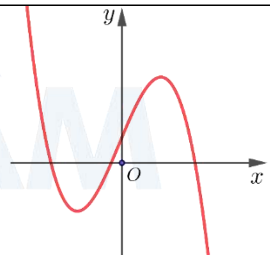
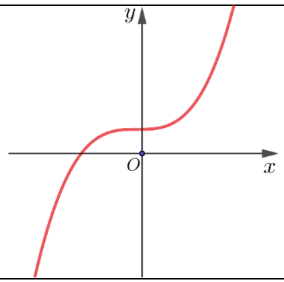
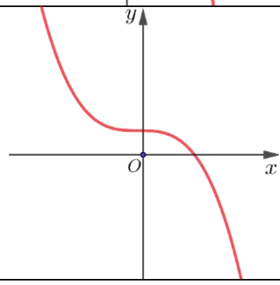
» Vẽ đồ thị hàm số.

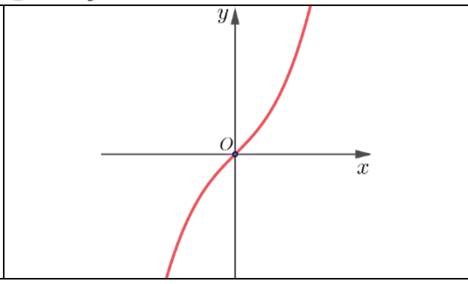
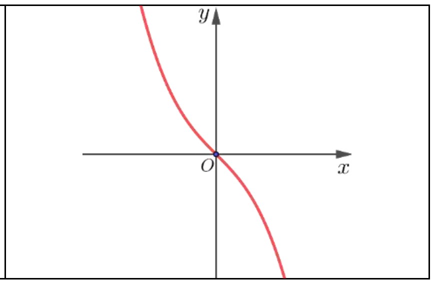
Chú ý

» Chỉ ra tâm đối xứng và trục đối xứng của đồ thị hàm số (nếu có).

2. Khảo sát hàm số

✓ Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$

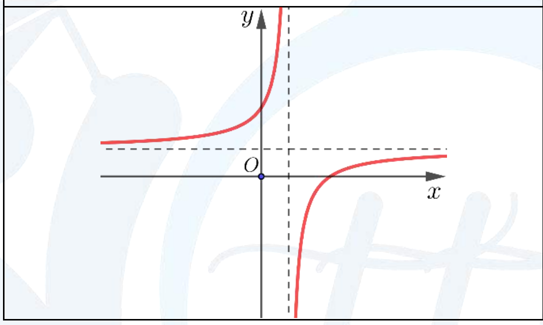
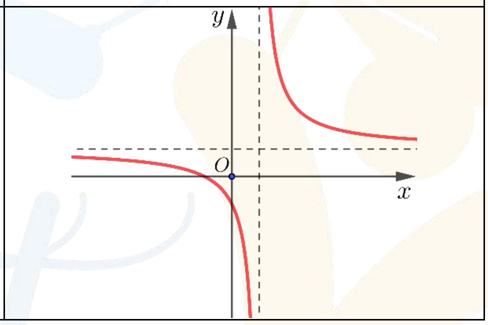
Trường hợp	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\left(b^2 - 3ac > 0\right)$		
Phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép $\left(b^2 - 3ac = 0\right)$		

Phương trình $y'=0$ vô nghiệm $\left(b^2-3ac<0\right)$		

Chú ý

» *Trường hợp: $y'=0$ vô nghiệm và có nghiệm kép, đồ thị hàm số sẽ ở dạng luôn đơn điệu nhưng trường hợp có nghiệm kép thì đồ thị hàm số có 1 đoạn hơi ngang ngang 1 chút (nhìn hình vẽ trên)*

✓ Hàm số phân thức bậc nhất trên bậc nhất $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\quad \left(c\neq 0,\ ad-bc\neq 0\right)$

$D=ad-bc>0$	$D=ad-bc<0$
	

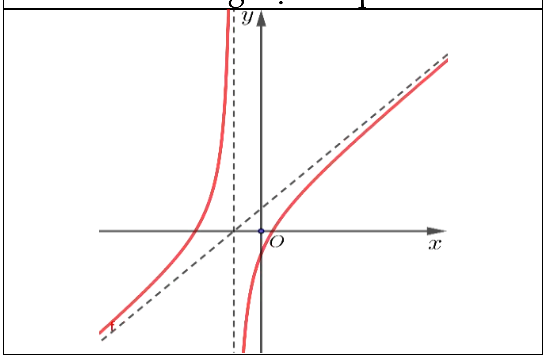
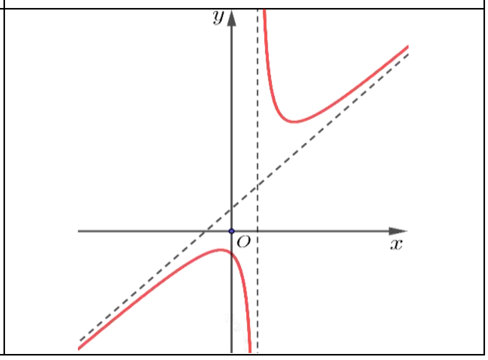
Chú ý

» ĐTHS có tiệm cận đứng $x=-\dfrac{d}{c}$, tiệm cận ngang $y=\dfrac{a}{c}$.

» *Các điểm đặc biệt:* Giao điểm với $Ox: A\left(\dfrac{-b}{a};0\right)$, Giao điểm với $Oy: B\left(0;\dfrac{b}{d}\right)$.

Giao của hai đường tiệm cận $I\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ là tâm đối xứng.

✓ Hàm số phân thức bậc hai trên bậc nhất $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}\left(a\neq 0\right)$

$y'=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép	$y'=0$ có hai nghiệm phân biệ
	

Chú ý

» Ta luôn tách được $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}=\dfrac{a}{d}x+f+\dfrac{m}{dx+e}$.

» Khi đó đồ thị hàm số có tiện cận đứng $x=-\dfrac{e}{d}$, Tiệm cận xiên $y=\dfrac{a}{d}x+f$.

Chú ý

» Đồ thị của hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\left(a\neq 0\right)$ luôn nhận điểm $I\left(x_0;y_0\right)$ làm tâm đối xứng, trong đó x_0 là nghiệm của phương trình $y''=0$ và $y_0=y\left(x_0\right)$.

» Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\left(c\neq 0, ad-bc\neq 0\right)$:

(a) Nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận ngang làm tâm đối xứng;
(b) Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi tiệm cận đứng và tiệm cận ngang làm trục đối xứng.

» Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}\left(a\neq 0, m\neq 0\right)$:

(a) Nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm tâm đối xứng;
(b) Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm trục đối xứng.

B Các dạng bài tập

Dạng 1. Khảo sát hàm số bậc ba

Phương pháp

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ \left(a \neq 0\right)$

» ***Bước 1:*** Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

» ***Bước 2:*** Khảo sát sự biến thiên của hàm số

» Giới hạn:

- Với $a > 0$ thì $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$.
- Với $a < 0$ thì $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$.

» Đạo hàm và cực trị: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Khi đó:

- Hàm số có hai điểm cực trị khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'_{y'} > 0$.
- Gọi $A\left(x_1; y_1\right); B\left(x_2; y_2\right)$ là hai điểm cực trị, theo định lý Viet: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-2b}{3a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{3a} \end{cases}$
- Hàm số không có cực trị khi $y' = 0$ vô nghiệm hoặc nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta'_{y'} \leq 0$

» Bảng biến thiên.

» Đồ thị hàm số:

- Không có tiệm cận.
- Tâm đối xứng là điểm có hoành độ thỏa mãn $y'' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-b}{3a}$.

Ví dụ 1.1.

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = f\left(x\right) = -x^3 + 3x^2 - 4$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

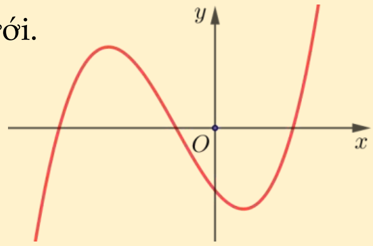
....

....

....

Ví dụ 1.2.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.
Hãy xác định dấu của các hệ số a, b, c và d.



Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 2. *Khảo sát hàm số hữu tỉ bậc nhất trên bậc nhất*

Phương pháp

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$

» ***Bước 1:*** Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\dfrac{d}{c} \right\}$.

» ***Bước 2:*** Khảo sát sự biến thiên của hàm số

» Giới hạn và đường tiệm cận

- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \dfrac{a}{c} \Rightarrow y = \dfrac{a}{c}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
- $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{d}{c}\right)^+} y = +\infty$, $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{d}{c}\right)^-} y = -\infty$ hoặc $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{d}{c}\right)^+} y = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{d}{c}\right)^-} y = +\infty$

$\Rightarrow x = -\dfrac{d}{c}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

» Đạo hàm $y' = \dfrac{ad - bc}{(cx + d)^2}$

- Nếu $ad - bc > 0$, $\forall x \in D$.

+ Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty; -\dfrac{d}{c}\right)$ và $\left(-\dfrac{d}{c}; +\infty\right)$.

- Nếu $ad - bc < 0$, $\forall x \in D$.

+ Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty; -\dfrac{d}{c}\right)$ và $\left(-\dfrac{d}{c}; +\infty\right)$.

» Bảng biến thiên.

» Đồ thị hàm số:

- Đồ thị luôn nhận giao điểm của 2 đường tiệm cận là tâm đối xứng. Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là $I\left(-\dfrac{d}{c}; \dfrac{a}{c}\right)$

Ví dụ 2.1.

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \dfrac{2x + 1}{x + 1}$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 2.1.

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x}{x+1}$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Dạng 3. Khảo sát hàm số hữu tỉ bậc hai trên bậc nhất

Phương pháp

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e},\left(ad\neq 0\ ,\ x\neq -\dfrac{e}{d}\right)$, *tử và mẫu không có nghiệm chung*. Viết hàm số dưới dạng $y=\alpha x+\beta+\dfrac{\gamma}{dx+e}$ (bằng cách chia đa thức)

» **Bước 1:** Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{e}{d}\right\}$.

» **Bước 2:** Khảo sát sự biến thiên của hàm số

» Giới hạn và đường tiệm cận

- $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{e}{d}\right)^{\pm}} y=\pm\infty \Rightarrow x=-\dfrac{e}{d}$ là tiệm cận đứng
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[y-\left(\alpha x+\beta\right)\right]=0 \Rightarrow y=\alpha x+\beta$ là đường tiệm cận xiên

» Đạo hàm $y'=\dfrac{\alpha\left(dx+e\right)^2-\gamma d}{\left(dx+e\right)^2}$.

Dấu của đạo hàm là dấu của $g\left(x\right)=\alpha\left(dx+e\right)^2-\gamma d$.

- Phương trình $y'=0$ vô nghiệm, hoặc có nghiệm kép thì không có cực trị.
- Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt thì có hai cực trị.

» Bảng biến thiên.

» Đồ thị hàm số:

- Tìm giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ (nếu có).
- Đồ thị hàm số nhận giao điểm I của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

⁂ **Nhận xét:**

» Đồ thị hàm số nhận giao điểm hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng

» Đồ thị hàm có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt khác $-\dfrac{e}{d}$.

» Trong trường hợp đồ thị hàm số có cực đại, cực tiểu thì phương trình đường thẳng qua hai cực trị là $y=\dfrac{2ax+b}{d}$.

» Mọi tiếp tuyến tại điểm $M\in\left(C\right)$ cắt hai đường tiệm cận tại A,B thì M là trung điểm AB

» Diện tích tam giác IAB không đổi

» Mọi điểm $M\in\left(C\right)$ có tích khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận là một hằng số

» Nếu từ một điểm E nằm trên một đường tiệm cận của $\left(C\right)$ thì qua E kẻ duy nhất một tiếp tuyến với $\left(C\right)$.

Ví dụ 3.1.

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y=\dfrac{2x^2+5x+4}{x+2}\ (H)$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 3.2.

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2+x-2}{x+1}$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

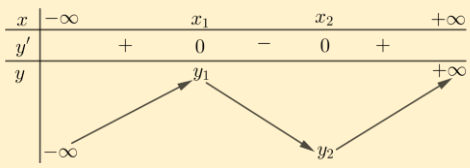
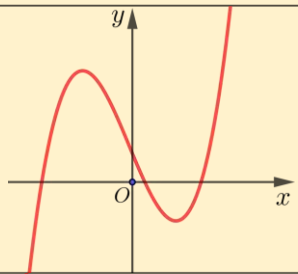
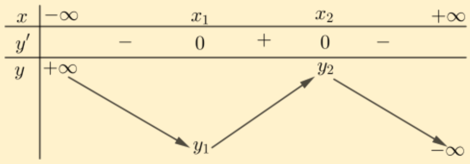
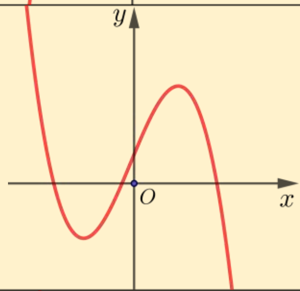
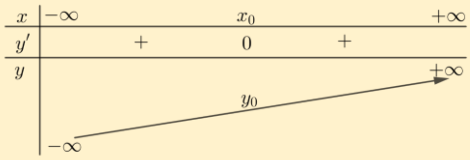
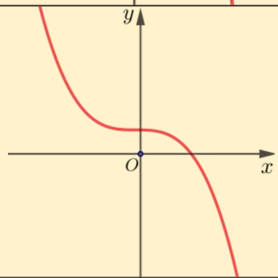
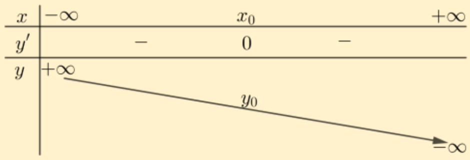
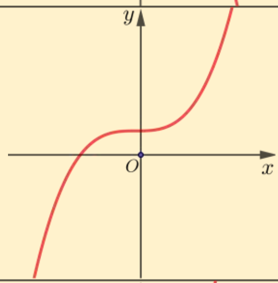
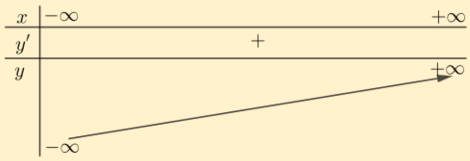
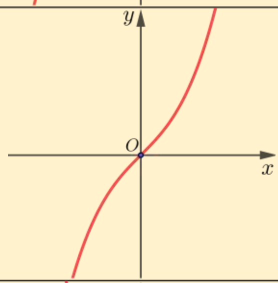
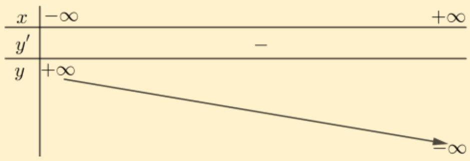
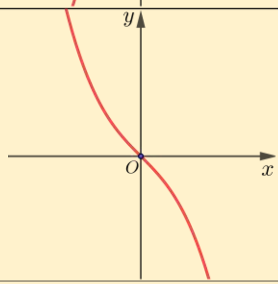
....

....

Dạng 4. *Nhận dạng hàm số khi biết đồ thị - bảng biến thiên*

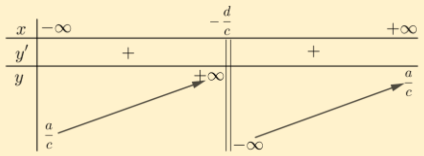
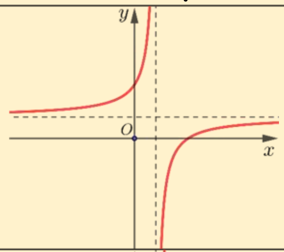
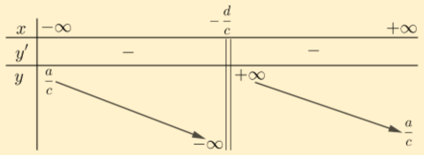
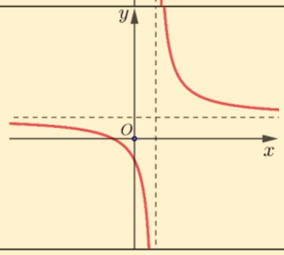
Phương pháp

⁂ Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ a \neq 0$

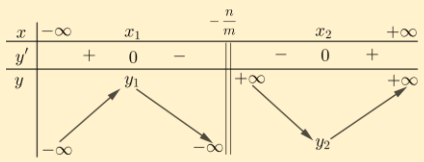
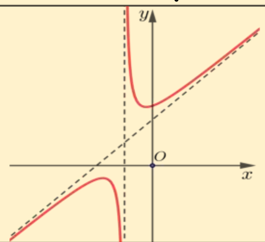
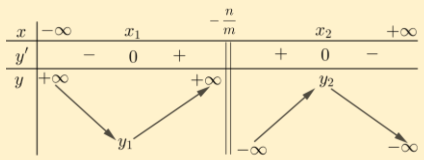
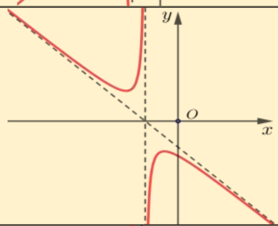
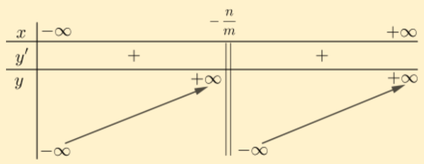
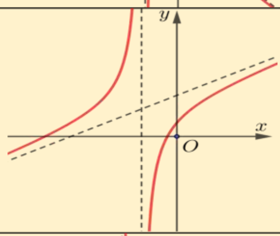
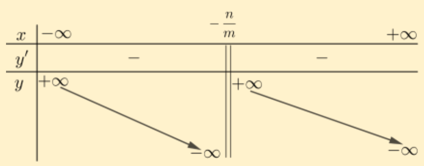
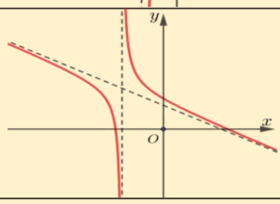
<table>
<tr><th colspan="2">Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$</th><th>Bảng biến thiên</th><th>Đồ thị</th></tr>
<tr><td rowspan="2">» TH1: y' có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2\ (x_1 < x_2)$</td><td>$a > 0$</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$a < 0$</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">» TH2: y' có 1 nghiệm x_0</td><td>$a > 0$</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$a < 0$</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">» TH3: y' vô nghiệm</td><td>$a > 0$</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$a < 0$</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Phương pháp

⁂ Hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\left(c\neq 0, ad-bc\neq 0\right)$ có $y'=\dfrac{ad-bc}{\left(cx+d\right)^2}$ và TCĐ: $x=-\dfrac{d}{c}$ và TCN: $y=\dfrac{a}{c}$

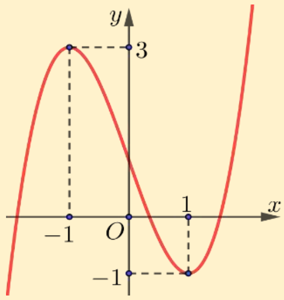
	Bảng biến thiên	Đồ thị
» **TH1 :** $ad-bc>0\Leftrightarrow y'>0\ \ \forall x\neq -\dfrac{d}{c}$		
» **TH2 :** $ad-bc<0\Leftrightarrow y'<0\ \ \forall x\neq -\dfrac{d}{c}$		

⁂ Hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}\left(a\neq 0, m\neq 0\right)$ có $y=Ax+B+\dfrac{C}{mx+n}\Rightarrow y'=A-\dfrac{C}{\left(mx+n\right)^2}$ và TCĐ: $x=-\dfrac{n}{m}$ và TCX: $y=Ax+B$

		Bảng biến thiên	Đồ thị
» **TH1:** y' có 2 nghiệm phân biệt	$A>0$		
	$A<0$		
» **TH2:** y' có 1 nghiệm hoặc vô nghiệm	$A>0$		
	$A<0$		

Ví dụ 4.1.

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Viết công thức của hàm số.



Lời giải

Ví dụ 4.2.

Cho hàm số $y = \dfrac{ax-1}{2x+b}$ có bảng biến thiên như hình bên dưới. Xác định a, b.

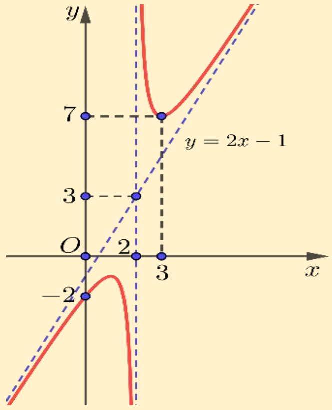
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1

Lời giải

Ví dụ 4.3.

Cho hàm số hữu tỉ $y=\dfrac{2x^2+ax+b}{cx-2}$ có đồ thị như hình bên.

Viết công thức của hàm số.



Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Dạng 5. Nhận dạng đồ thị - bảng biến thiên khi biết hàm số

Phương pháp

Vận dụng các kiến thức liên quan: Đơn điệu, Cực trị, Đường tiệm cận

» *Bước 1:* Tập xác định.

» *Bước 2:* Sự biến thiên

» Chiều biến thiên.

» Cực trị .

» Đường tiệm cận.

» Điểm đi qua.

» *Bước 3:* Kết luận đồ thị

Ví dụ 5.1.

Xác định bảng biến thiên của hàm số $y=-x^3-3x^2+9x-9$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 5.2.

Xác định đồ thị của hàm số hữu tỉ $y=\dfrac{x^2+3}{x+1}$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Dạng 6. Xác định dấu - giá trị các hệ số

Phương pháp

- **Loại 1.** Hàm đa thức bậc ba $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d\ \left(a\ne 0\right)$

  » ***Bước 1:*** Nhìn vào nhánh ngoài cùng của đồ thị Xác định dấu của hệ số a.

  » ***Bước 2:*** Điểm cắt trục tung: xác định dấu hệ số d.

  » ***Bước 3:*** Nhìn vào hai điểm cực trị (nếu có):

  » Phương trình $y'=0\Leftrightarrow 3ax^2+2bx+c=0$.

  - Nếu đồ thị hàm số không có điểm cực trị $\Rightarrow \Delta'=b^2-3ac\le 0$.
  - Nếu đồ thị hàm số có hai điểm cực trị:

  Các điểm cực trị x_1,x_2 của hàm số là hai nghiệm của phương trình $y'=0$.

  Khi đó $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{2b}{3a} \\ x_1x_2=\dfrac{c}{3a} \end{cases}$ (Vi-ét).

  Dựa vào vị trí của x_1,x_2 để suy luận các phép tính x_1+x_2 và x_1x_2 mang dấu gì.

  Nếu không cho tọa độ rõ ràng, ước lượng khoảng cách từ O tới các điểm x_1,x_2.

  » ***Bước 4:*** Xác định tọa độ các điểm đã cho.

  » ***Bước 5:*** Dựa vào điểm uốn U

  » Là tâm đối xứng của đồ thị hàm số.

  » x_U là nghiệm của phương trình $y''=0$.

  » Điểm U là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm cực trị.

⁂ **Nhận xét:** Bảng biến thiên mô phỏng đồ thị hàm số.

Cách đọc bảng biến thiên giống như cách đọc đồ thị.

- **Loại 2.** Hàm phân thức $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ và $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$.

  » ***Bước 1:*** Xác định các đường tiệm cận.

  Dùng công thức tính nhanh định nghĩa) để tìm mối quan hệ giữa các hệ số.

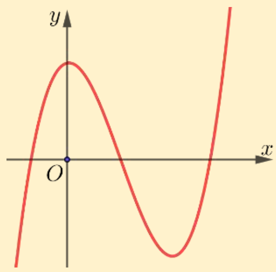
  Lưu ý: Giao điểm của hai đường tiệm cận là tâm đối xứng của đồ thị hàm số.

  » ***Bước 2:*** Xác định các điểm thuộc đồ thị hàm số: giao với các trục tọa độ, cực trị.

  » ***Bước 3:*** Từ hình dáng đồ thị (bảng biến thiên), xác định dấu của đạo hàm dựa vào các khoảng đồng biến/nghịch biến. Từ đó xác định dấu của các hệ số.

Ví dụ 6.1.

Cho hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình bên dưới. Trong các hệ số a,b,c,d có bao nhiêu giá trị dương?



Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

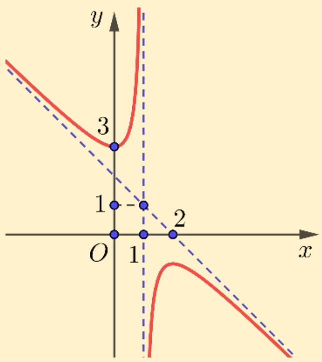
....

....

Ví dụ 6.2.

Cho hàm số hữu tỉ $y = ax + 2 + \dfrac{b}{x+c}$ có đồ thị như hình bên.

Tính $P = a + b + c$.



Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Dạng 7. Đọc đồ thị của đạo hàm

Phương pháp

Xác định tính đơn điệu, cực trị, giá trị lớn nhất nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$, $g(x)=f(u(x))$, $g(x)=g(f(x))$ khi biết đồ thị (bảng biến thiên) của đồ thị đạo hàm $y=f'(x)$ hoặc $y=f'(u(x))$

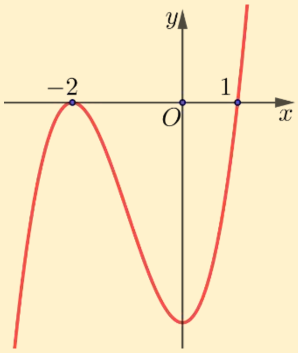
» ***Bước 1:*** Tính $g'(x)$ (chú ý hàm hợp dạng $g(x)=f(u(x)) \Rightarrow g'(x)=u'(x).f'(u(x))$)

» ***Bước 2:*** Giải $g'(x)=0$ ta được $x_1;x_2...;x_i$ là các điểm mà tại đó $g'(x)=0$ hoặc $g'(x)$ không xác định.

» ***Bước 3:*** Lập bảng xét dấu của $g'(x) \to$ lập được bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)$. Dựa vào bảng biến thiên xét các tính chất đơn điệu, cực trị, min, max…

Ví dụ 7.1.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $y=f'(x)$ có đồ thị trong hình dưới đây. Lập bảng xét dấu của $y=f'(x)$?



Lời giải

....

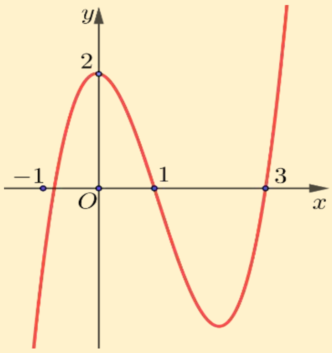
....

....

....

Ví dụ 7.2.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $y=f'(x)$ có đồ thị trong hình dưới đây. Tìm điểm cực đại của hàm số đã cho.



Lời giải

....

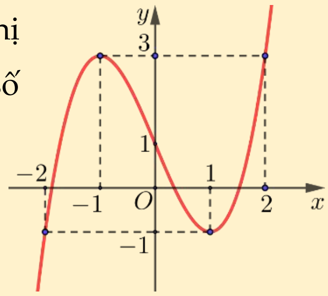
....

....

....

Ví dụ 7.3.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Xác định giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(2x-1) - 2x + 1$ trên $[0;1]$



Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 8. Sự tương giao

Phương pháp

Các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ có đồ thị lần lượt là các đường (C_1), (C_2), khi đó:

» Số nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ chính là số giao điểm của các đồ thị (C_1), (C_2).

» Số giao điểm của các đường (C_1), (C_2) chính là số nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$.

Ví dụ 8.1.

Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị của hàm số $y = 3x^3 - 9x + 3(m-1)$ giao với trục hoành tại hai điểm phân biệt?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 8.2.

Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (2m^2+1)x + m - 3$ và parabol $y = 2x^2 + x - m - 2$ có hai giao điểm phân biệt và tổng hoành độ hai giao điểm đó là 3?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Dạng 9. Bài toán thực tế liên môn đưa về khảo sát hàm số

Phương pháp

» ***Bước 1:*** Xác định yếu tố chọn làm ẩn, chỉ ra điều kiện (nếu có)
» ***Bước 2:*** Xây dựng phương trình hàm số từ các dữ kiện của bài toán.
» ***Bước 3:*** Giải bài toán liên quan đến hàm số và kết luận.

Ví dụ 9.1.

Nhiệt độ T của một người trong cơn bệnh được cho bởi công thức $T(t) = -0,1t^2 + 1,2t + 98,6$ $(0 \le t \le 11)$, trong đó T là nhiệt độ $\left({}^oF - Fahrenheit\right)$ theo thời gian t trong ngày. Biết rằng ${}^oC = \dfrac{{}^oF - 32}{1,8}$, độ chênh lệch (theo độ ${}^oC$) giữa nhiệt độ lớn nhất và nhiệt độ thấp nhất trong một ngày là bao nhiêu?

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 9.2.

Một sợi dây kim loại dài 60 cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất uốn thành hình vuông cạnh a, đoạn dây thứ hai uốn thành đường tròn bán kính r. Để tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là nhỏ nhất thì tỉ số $\dfrac{a}{r}$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

....

....

Ví dụ 9.3.

Một cơ sở sản xuất khăn mặt đang bán mỗi chiếc khăn với giá 30.000 đồng một chiếc và mỗi tháng cơ sở bán được trung bình 3000 chiếc khăn. Cơ sở sản xuất đang có kế hoạch tăng giá bán để có lợi nhận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lý thấy rằng nếu từ mức giá 30.000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 100 chiếc. Biết vốn sản xuất một chiếc khăn không thay đổi là 18.000 đồng. Hỏi cơ sở sản xuất phải bán với giá mới là bao nhiêu để đạt lợi nhuận lớn nhất.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

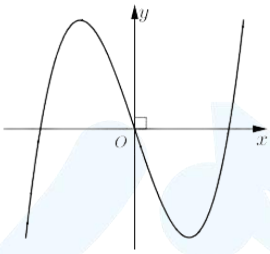
C Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Hàm số $y=-x^3+3x^2-2$ đồng biến trên khoảng

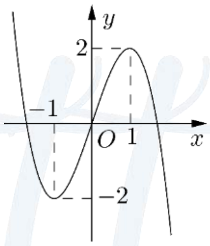
A. $(0;2)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(1;4)$. **D.** $(4;+\infty)$.

» Câu 2. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



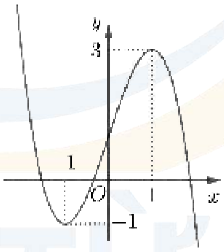
A. $y=x^3-3x$. **B.** $y=-x^3+3x$. **C.** $y=x^3-3x^2+1$. **D.** $y=-x^3+3x^2$.

» Câu 3. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=1$ là



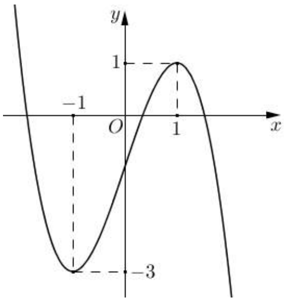
A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

» Câu 4. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=1$ là



A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

» Câu 5. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x)=m$ có ba nghiệm thực phân biệt?



A. 2. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

» Câu 6. Tìm giá trị cực đại của hàm số $y=x^3-3x+2$.

A. $y=-1$ **B.** $y=4$ **C.** $y=1$ **D.** $y=0$

» Câu 7. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x+1}{x-1}$ là

A. $y=-\dfrac{1}{5}$ **B.** $y=5$ **C.** $y=1$ **D.** $y=0$

» Câu 8. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=\dfrac{(n-3)x+n-2017}{x+m+3}$ (m,n là các số thực) nhận trục hoành làm tiệm cận ngang và trục tung là tiệm cận đứng. Tính tổng $m+n$.

A. 0 **B.** –3 **C.** 3 **D.** 6

» Câu 9. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+2x-3}{2x-2}$ là

A. $x=1$ **B.** $x=\dfrac{1}{2}$

C. $x=2$ **D.** Không có tiệm cận đứng

» Câu 10. Đồ thị hàm số $y=-x^3+2x^2-1$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

A. 3. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 0.

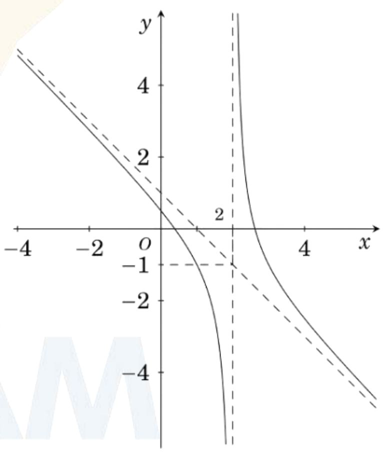
» Câu 11. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2$ và đồ thị hàm số $y=3x^2+3x$ là

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

» Câu 12. Biết rằng đường thẳng $y=4x+5$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+2x+1$ tại điểm duy nhất; kí hiệu $(x_0;y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0.

A. $y_0=10$. **B.** $y_0=13$. **C.** $y_0=11$. **D.** $y_0=12$.

» Câu 13. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ có đồ thị như hình bên dưới



Xét các mệnh đề sau:

a). Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

b). Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

c). Điểm $I(1;2)$ là tâm đối xứng của đồ thị.

d). Hệ số a và m trái dấu.

Có bao nhiêu mệnh đề đúng?

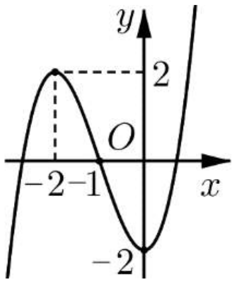
A. 1. **B.** 2.

C. 3. **D.** 4.

» Câu 14. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+x^2$ và đồ thị hàm số $y=x^2+5x$

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

» Câu 15. Đường cong ở hình bên dưới là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=-x^3-3x^2-2$. **B.** $y=x^3+3x^2-2$. **C.** $y=-x^3+3x^2-2$. **D.** $y=x^3-3x^2-2$.

» Câu 16. Gọi M,N là giao điểm của đường thẳng $y=x+1$ và đường cong $y=\dfrac{2x+4}{x-1}$. Khi đó hoành độ x_I của trung điểm I của đoạn MN bằng bao nhiêu?

A. $x_I=2$. **B.** $x_I=1$. **C.** $x_I=-5$. **D.** $x_I=-\dfrac{5}{2}$.

» Câu 17. Biết đường thẳng $y=x-1$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{-x+5}{x-2}$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ là $x_1,\ x_2$. Giá trị x_1+x_2 bằng

A. -1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

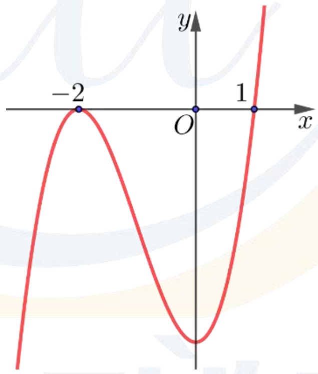
» Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;+\infty)$. **B.** $(-2;2)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

» Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau.



Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

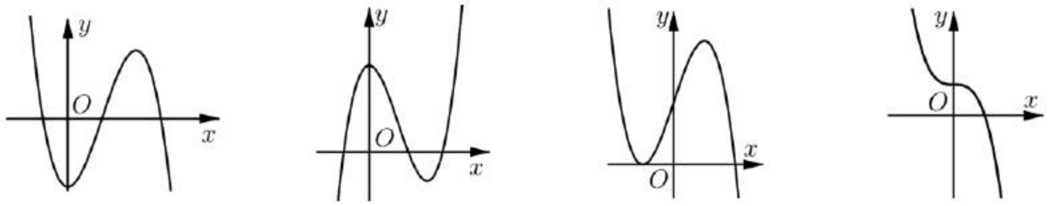
A. $(-2;0)$. **B.** $(-4;-2)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(1;+\infty)$.

» Câu 20. Trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hàm số nào có bảng biến thiên sau?

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	-2	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	-2

A. $y=\dfrac{x-1}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{-2x}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{-2+x}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{1-2x}{x+1}$.

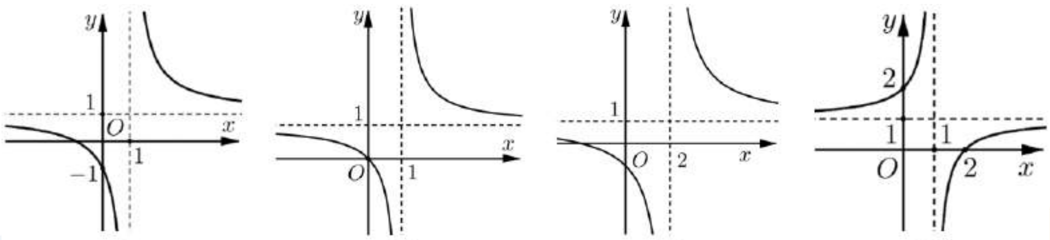
» Câu 21. Hình nào dưới đây là dạng đồ thị của hàm số $y=-x^3+3x^2-2$?



(I) (II) (III) (IV)

A. (I). **B.** (III). **C.** (IV). **D.** (II).

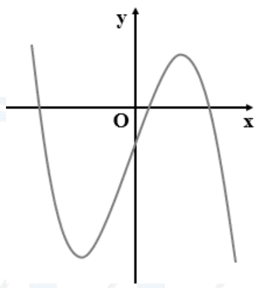
» Câu 22. Hình nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-1}$?



(I) (II) (III) (IV)

A. (I). **B.** (III). **C.** (IV). **D.** (II).

» Câu 23. Cho hàm số $y=ax^3+3x+d\ (a;d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a>0,d>0$. **B.** $a<0,d>0$. **C.** $a>0,d<0$. **D.** $a<0,d<0$.

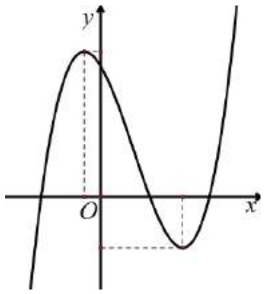
» Câu 24. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\,(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu số dương trong các số a,b,c,d?

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

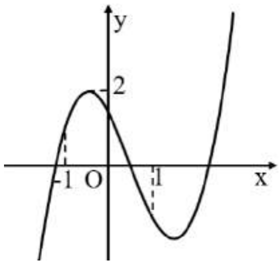
» Câu 25. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\,(a\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Chọn khẳng định đúng về dấu của a, b, c, d?



A. $a>0,b>0,\ d>0,c>0$ **B.** $a>0,\ c>0>b,\ d<0$

C. $a>0,\ b>0,\ c>0,\ d>0.$ **D.** $a>0,\ b<0,\ c<0, d>0$

» **Câu 26.** Hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Khẳng định nào là đúng?

A. $a<0$, $b<0$, $c<0$, $d<0$. **B.** $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d<0$.

C. $a>0$, $b>0$, $c<0$, $d>0$. **D.** $a>0$, $b<0$, $c<0$, $d>0$.

» **Câu 27.** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$		$+\infty$	||	$+\infty$ $\searrow$	$\frac{27}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm điều kiện của m để phương trình $f\left(x\right)=m$ có 3 nghiệm phân biệt.

A. $m<0$. **B.** $m>0$. **C.** $0<m<\frac{27}{4}$. **D.** $m>\frac{27}{4}$.

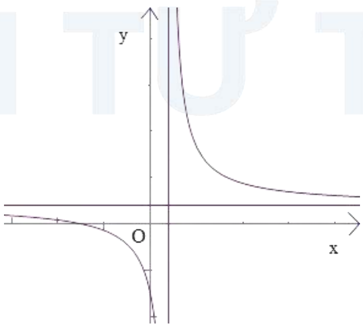
» **Câu 28.** Đồ thị của hàm số $y=\frac{x-1}{x+1}$ cắt hai trục Ox và Oy tại A và B. Khi đó diện tích tam giác OAB (O là gốc tọa độ bằng)

A. 1. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** 2. **D.** $\frac{1}{2}$.

» **Câu 29.** Đồ thị hàm số $y=\frac{x^2-x+1}{x-1}$ có tiệm cận xiên là

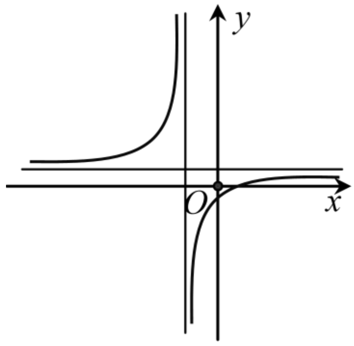
A. $y=x$. **B.** $y=-x$. **C.** $y=x+1$. **D.** $y=-x+1$.

» **Câu 30.** Cho hàm số $y=\frac{\left(a-1\right)x+b}{\left(c-1\right)x+d}$, $d<0$ có đồ thị như hình trên. Khẳng định nào dưới đây là đúng?



A. $a>1, b>0, c<1.$ **B.** $a>1, b<0, c>1.$ **C.** $a<1, b>0, c<1.$ **D.** $a>1, b>0, c>1.$

» **Câu 31.** Cho hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?



A. $\begin{cases} ad<0 \\ bc>0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} ad<0 \\ bc<0 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} ad>0 \\ bc<0 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} ad>0 \\ bc>0 \end{cases}$.

» Câu 32. Tính tổng các hoành độ giao điểm giữa hai đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-3}{4-x}$ và $y=6-x$.

A. 12. **B.** 27. **C.** -12. **D.** -27.

» Câu 33. Một học sinh được giao thiết kế một cái hộp thỏa mãn: Tổng của chiều dài và chiều rộng bằng 12cm; tổng của chiều rộng và chiều cao là 24cm. Giáo viên yêu cầu học sinh ấy phải thiết kế sao cho thể tích cái hộp lớn nhất, giá trị thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

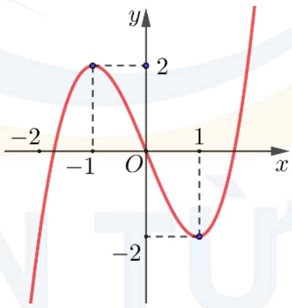
A. 600. **B.** $843\sqrt{3}$. **C.** $384\sqrt{3}$. **D.** $348\sqrt{3}$.

» Câu 34. Một con cá hồi bơi ngược dòng (từ nơi sinh sống) để vượt khoảng cách 400 km tới nơi sinh sản. Vận tốc dòng nước là 6 km/h. Giả sử vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v km/h thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ cho bởi công thức $E(v)=cv^{3t}$. Trong đó c là hằng số cho trước; E tính bằng Jun. Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng của cá tiêu hao ít nhất bằng

A. $9km/h$. **B.** $8km/h$. **C.** $10km/h$. **D.** $12km/h$.

B. *Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai*

» Câu 35. Cho đồ thị hàm số bậc ba như hình bên dưới. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng ? Khẳng định nào sai ?



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(-1;2)$		
(b)	Đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.		
(c)	Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$		
(d)	Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị đối xứng với nhau qua gốc toạ độ O		

» Câu 36. Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+x+1}{x+1}$ có đồ thị (C)

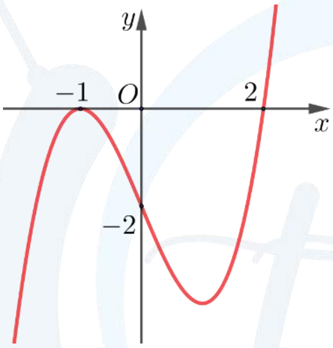
	Mệnh đề	Đúng	Sai

(a)	Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;-1);(-1;0)$.		
(b)	Hàm số có hai điểm cực trị.		
(c)	Đồ thị (C) không cắt trục Ox.		
(d)	Đồ thị (C) có tiệm cận xiên đi qua điểm $A(1;2)$		

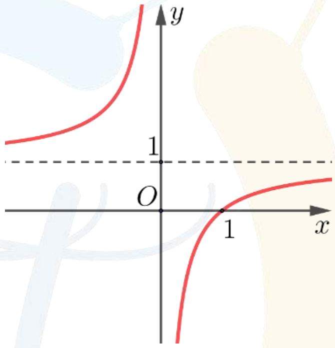
» Câu 37. Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2-3x+4}{x-3}$ có đồ thị là (C).

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Đồ thị (C) có tiệm cận xiên là $y=-x-6$.		
(b)	Đồ thị (C) nhận giao điểm $I(3;-9)$ làm tâm đối xứng.		
(c)	Đồ thị (C) có hai điểm cực trị nằm 2 phía đối với Oy.		
(d)	Đồ thị không cắt trục Ox.		

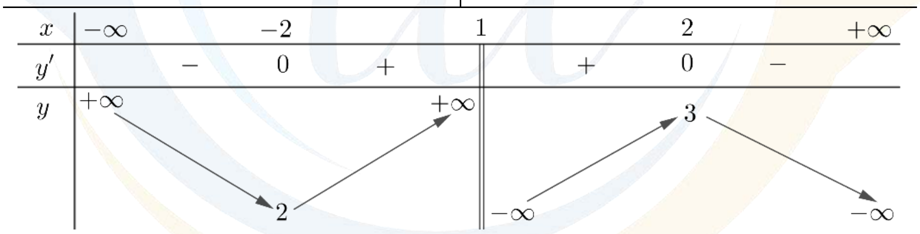
» Câu 38. Cho ba dạng đồ thị hàm số. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng ? Khẳng định nào sai ?



Hình 1



Hình 2

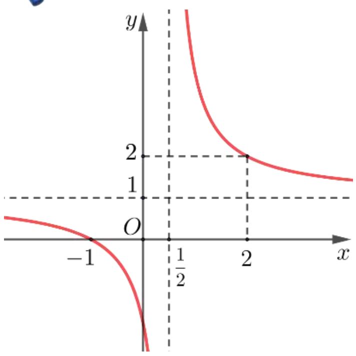


Hình 3

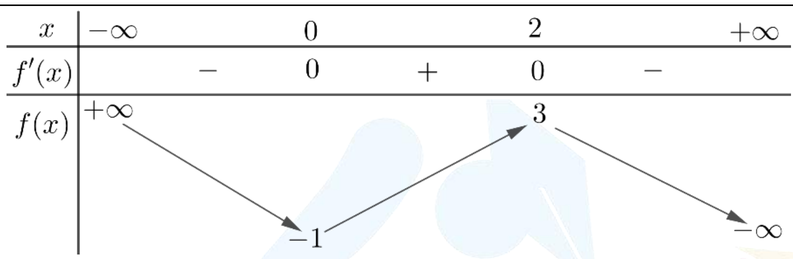
Xét tính đúng/sai các mệnh đề sau:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hình 1 là đồ thị hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có hệ số $a>0$ và $d=-2$		
(b)	Hình 2 là đồ thị hàm số có dạng $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ thoả $a=c$, với $a\neq 0, c\neq 0$		
(c)	Hình 3 là đồ thị hàm số có dạng $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ với $a\neq 0, m\neq 0$ và có điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(2;3)$		
(d)	Hình 3 có $y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho		

» Câu 39. Cho hai đồ thị hàm số hình 1 là: $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ và hình 2 là: $y=ax^3+bx^2+cx+d$



Hình 1



Hình 2

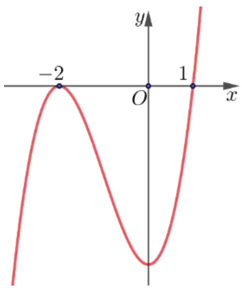
Xét tính đúng/sai các mệnh đề sau:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ thoả mãn: $a+2d=0$		
(b)	Đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ thoả mãn $3b-4c-2d=0$		
(c)	Hình 2 có đồ thị hàm số có dạng là: $y=-x^3+3x^2-1$		
(d)	Hình 2 là đồ thị hàm số có tổng các hệ số $a+b+c+d<0$		

» Câu 40. Cho hàm số $y=x-\dfrac{1}{x+1}$

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Đồ thị của hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$		
(b)	Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại M. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là $y=2x-1$		
(c)	Tồn tại hai tiếp tuyến của đồ thị vuông góc với nhau		
(d)	Để đường thẳng $y=k$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho $OA\perp OB$ khi đó k là nghiệm của phương trình $k^2-k-1=0$		

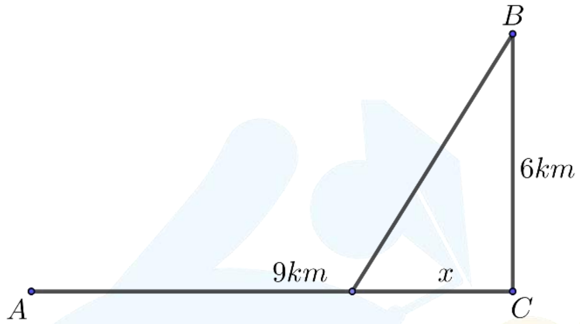
» Câu 41. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Xét hàm số $g(x)=f(x^2-3)$ và các mệnh đề sau:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;1)$.		
(b)	Hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.		
(c)	Hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x=0$.		
(d)	Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x=2$.		

» **Câu 42.** Một công ty muốn xây một đường ống dẫn từ một điểm A trên bờ biển đến một điểm B trên một hòn đảo (như hình vẽ).

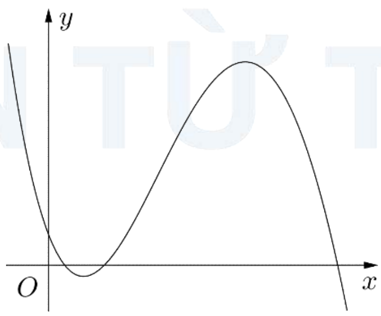


Giá để xây đường ống trên bờ là 50000 USD mỗi km và 130000 USD để xây mỗi km dưới nước. Gọi C là điểm trên bờ biển sao cho BC vuông góc với bờ biển, $BC=6$ km, $AC=9$ km. Gọi M là vị trí trên đoạn AC sao cho khi làm ống dẫn theo đường gấp khúc AMB thì chi phí ít nhất.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Nếu công ty lắp đường ống theo đường ACB thì chi phí hết số tiền 1230000 USD.		
(b)	Nếu công ty lắp đường ống thẳng theo đường trên biển từ A đến B thì chi phí hết số tiền nhỏ hơn 1400000 USD.		
(c)	Nếu công ty lắp đường ống theo đường gấp khúc AMB thì khi M là trung điểm của AC chi phí hết số tiền 1200000 USD.		
(d)	Chi phí thấp nhất để hoàn thành việc xây dựng đường ống dẫn là 1170000 USD.		

C. *Câu hỏi – Trả lời ngắn*

» **Câu 43.** Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



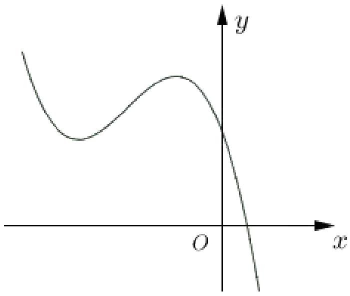
Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d?

Điền đáp số:

» **Câu 44.** Ta xác định được các số a,b,c để đồ thị hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ đi qua điểm $(1;0)$ và có điểm cực trị $(-2;0)$. Tính giá trị biểu thức $T=a^2+b^2+c^2$.

✍ **Điền đáp số:** $\boxed{}$

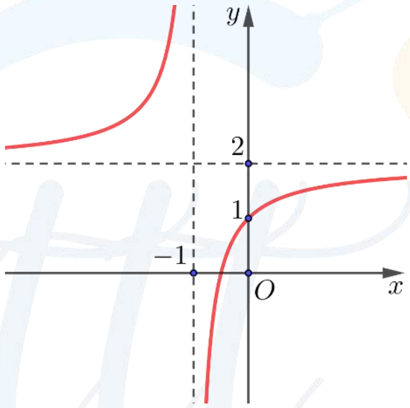
» **Câu 45.** Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như sau:



Có bao nhiêu số dương trong các số a,b,c,d?

✍ **Điền đáp số:** $\boxed{}$

» **Câu 46.** Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{x+d}\ (ad-b\neq 0)$ có đồ thị như hình dưới đây



Gọi điểm $M(a;b), a<0$ thuộc đồ thị hàm số $y=f(x)$ sao cho tổng khoảng cách từ M đến 2 đường tiệm cận là nhỏ nhất khi đó $a+b$ bằng

✍ **Điền đáp số:** $\boxed{}$

» **Câu 47.** Cho hàm số $y=\dfrac{mx^2-mx+1}{x-1}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{mx^2-mx+1}{x-1}$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành.

✍ **Điền đáp số:** $\boxed{}$

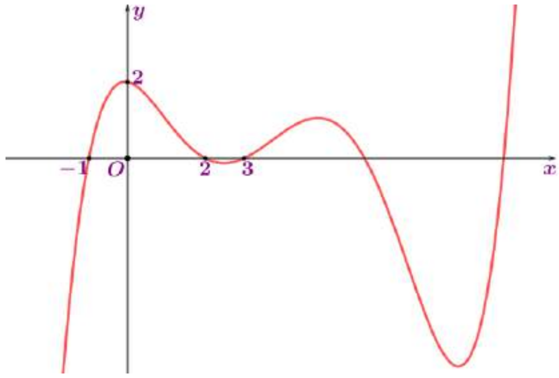
» **Câu 48.** Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-2c+1$	$\searrow$	$-a$	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm $S=a+b+c+d$.

✍ **Điền đáp số:** $\boxed{}$

» Câu 49. Hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Tổng các nghiệm S của phương trình $f\left(x^3-3x\right)+3x^3-3x-13=\left(x^2-2\right)^3-3\left(x-1\right)^2$ là

Điền đáp số:

» Câu 50. Giả sử chi phí cho xuất bản x cuốn tạp chí (gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in,...) được cho bởi công thức :

$$C\left(x\right)=0,0001x^2-0,2x+10000,$$

trong đó $C\left(x\right)$ được tính theo đơn vị là vạn đồng (1 vạn đồng = 10.000 đồng). Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng. Tỉ số $M\left(x\right)=\dfrac{T\left(x\right)}{x}$ được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn và tổng chi phí $T\left(x\right)$ (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí. Tính $M\left(x\right)$ theo x và tìm số lượng tạp chí cần xuất bản sao cho chi phí trung bình là thấp nhất, biết rằng nhu cầu hiện tại xuất bản không quá 30.000 cuốn. Khi đó chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí là bao nhiêu?

Điền đáp số:

» Câu 51. Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được x mét vải lụa ($1\le x\le 18$) . Tổng chi phí sản xuất x mét vải lụa, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí:

$$C(x)=x^3-3x^2-20x+500.$$

Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét. Gọi $B(x)$ là số tiền bán được và $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x mét vải lụa. Hộ làm nghề dệt này cần sản xuất và bán ra mỗi ngày bao nhiêu mét vải lụa để thu được lợi nhuận tối đa. Hãy tính lợi nhuận tối đa đó.

Điền đáp số:

--------------------Hết--------------------

Chương 01

Bài 1. ĐƠN ĐIỆU & CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A. Lý thuyết

1. Tính đồng biến, nghịch biến của hàm số

Định nghĩa:

Kí hiệu K là khoảng; đoạn; nửa khoảng. Giả sử hàm số $y=f(x)$ xác định trên K.

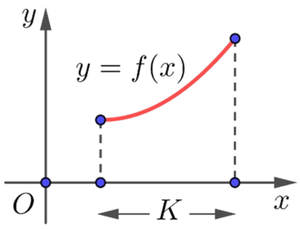
Hàm số $y=f(x)$

- Gọi là *đồng biến* trên K nếu $\forall x_1,x_2\in K$ mà $x_1<x_2$ thì $f(x_1)<f(x_2)$.
- Gọi là *nghịch biến* trên K nếu $\forall x_1,x_2\in K$ mà $x_1<x_2$ thì $f(x_1)>f(x_2)$.

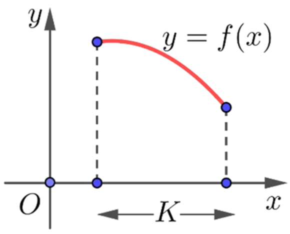
Chú ý

» Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên K thì đồ thị *đi lên* từ trái sang phải (*Hình 1a*).

» Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên K thì đồ thị *đi xuống* từ trái sang phải (*Hình 1b*).



Hình 1a



Hình 1b

2. Tính đơn điệu của hàm số

Định lý:

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên K.

- Nếu $f'(x)>0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên K.
- Nếu $f'(x)>0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên K.

Chú ý

» Định lí vẫn đúng trong trường hợp $f'(x)=0$ tại một số hữu hạn điểm trong K.

» Nếu $f'(x)=0$ với mọi $x\in K$ thì hàm số $f(x)$ không đổi trên khoảng K.

3. Khái niệm cực trị của hàm số

Định nghĩa:

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a;b)$ (a có thể là $-\infty$, b có thể là $+\infty$) và điểm $x_0\in(a;b)$.

- $\exists h>0$ sao cho $f(x)<f(x_0)$ với mọi $x\in(x_0-h;x_0+h)\subset(a;b)$ và $x\neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt ***cực đại*** tại x_0.
- $\exists h>0$ sao cho $f(x)>f(x_0)$ với mọi $x\in(x_0-h;x_0+h)\subset(a;b)$ và $x\neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt ***cực tiểu*** tại x_0.

Chú ý

» Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại x_0 thì x_0 được gọi là *điểm cực đại* của *hàm số* $f(x)$.
Khi đó, $f(x_0)$ được gọi là *giá trị cực đại* của hàm số $f(x)$ và kí hiệu là $f_{CĐ}$ hay $y_{CĐ}$.
Điểm $M_0(x_0;f(x_0))$ được gọi là *điểm cực đại* của *đồ thị hàm số*.

» Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 thì x_0 được gọi là *điểm cực tiểu* của *hàm số* $f(x)$.
Khi đó, $f(x_0)$ được gọi là *giá trị cực tiểu* của hàm số $f(x)$ và kí hiệu là f_{CT} hay y_{CT}.
Điểm $M_0(x_0;f(x_0))$ được gọi là *điểm cực tiểu* của *đồ thị hàm số*.

» Các điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị.
Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là giá trị cực trị (cực trị) của hàm số.

4. Cách tìm cực trị của hàm số

Định lý:

Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a;x_0)$ và $(x_0;b)$. Khi đó:

- Nếu $f'(x)<0$ với mọi $x\in(a;x_0)$ và $f'(x)>0$ với mọi $x\in(x_0;b)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.
- Nếu $f'(x)>0$ với mọi $x\in(a;x_0)$ và $f'(x)<0$ với mọi $x\in(x_0;b)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.

» Định lí trên được viết gọn lại trong hai bảng biến thiên sau:

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(x_0)$ Cực tiểu	$\nearrow$	

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(x_0)$ Cực đại	$\searrow$	

Chú ý

» Từ định lí trên ta có các bước tìm cực trị của hàm số $y = f\left(x\right)$ như sau:

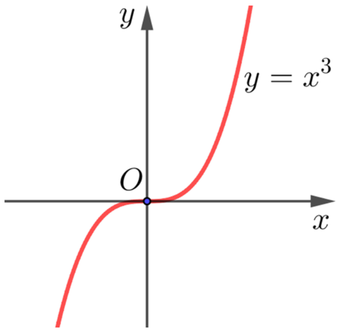
(1) Tìm tập xác định của hàm số.

(2) Tính $f'\left(x\right)$. Tìm các điểm mà tại đó $f'\left(x\right)$ bằng 0 hoặc $f'\left(x\right)$ không tồn tại.

(3) Lập bảng biến thiên suy ra các cực trị của hàm số.

» Nếu $f'\left(x_0\right) = 0$ nhưng $f'\left(x\right)$ không đổi dấu khi x qua x_0 thì x_0 không phải là điểm cực trị của hàm số.

Chẳng hạn, hàm số $f\left(x\right) = x^3$ có $\begin{cases} f'\left(x\right) = 3x^2 \\ f'\left(0\right) = 0 \end{cases}$, nhưng $x = 0$ không phải là điểm cực trị của hàm số.



B Các dạng bài tập

Dạng 1. Xét tính đơn điệu của hàm số cho bởi một công thức

Phương pháp

» ***Bước 1:*** Tìm tập xác định D của hàm số.

» ***Bước 2:*** Tính đạo hàm $f'(x)$ của các hàm số. Tìm các điểm $\{x_1; x_2; ...; x_n\} \in D$ mà tại đó đạo hàm $f'(x)$ bằng 0 hoặc không tồn tại.

» ***Bước 3:*** Sắp xếp các điểm $x_1; x_2; ...; x_n$ theo thứ tự tăng dần.
Xét dấu $f'(x)$ và lập bảng biến thiên.

» ***Bước 4:*** Nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Ví dụ 1.1.

Xét tính đơn điệu của hàm số $y = 4x^3 + 3x^2 - 36x + 6$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$y' = 12x^2 + 6x - 36$. Cho $y' = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$.

x	$-\infty$		-2		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	58	$\searrow$	$-\frac{111}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và $\left(\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-2; \dfrac{3}{2}\right)$.

Ví dụ 1.2.

Xét tính đơn điệu của hàm số $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2} > 0 \; \forall x \neq -1$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x+1}=1$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{x+1}=1$

$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=+\infty$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	1

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

Ví dụ 1.3.

Xét tính đơn điệu của hàm số $y=\sqrt{-x^2+4}$.

Lời giải

Điều kiện: $-x^2+4\ge 0 \Leftrightarrow -2\le x\le 2$.

Tập xác định $D=[-2;2]$.

$y'=\dfrac{-x}{\sqrt{-x^2+4}}$. Cho $y'=0\Rightarrow x=0$.

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$f'(x)$	//////	||	$+$	0	$-$	||	//////
$f(x)$	//////	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	//////

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

Ví dụ 1.4.

Xét tính đơn điệu của hàm số $y=\log_3\left(x^2-2x\right)$.

Lời giải

Điều kiện: $x^2-2x>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<0 \end{array}\right.$.

Ta có: $y'=\dfrac{2x-2}{\left(x^2-2x\right)\ln 3}$. Khi đó, $y'=0\Leftrightarrow x=1\ (loai)$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	//////	//////	//////	$+$	
y		$\searrow$	//////	//////	//////	$\nearrow$	

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Dạng 2. Xét tính đơn điệu của hàm số cho bởi đồ thị - bảng biến thiên

Phương pháp

» Với đồ thị hàm số, quan sát: hướng lên – xuống của *đường cong* (chiều từ trái sang phải).
» Với bảng biến thiên, quan sát: hướng lên – xuống của *mũi tên* (chiều từ trái sang phải).
» Với bảng xét dấu, quan sát: dấu âm - dương của $f'(x)$.

Ví dụ 2.1.

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Xét tính đơn điệu của hàm số $y=f(x)$.

Lời giải

Từ BBT của hàm số, ta có:
» Trong $(0;1)$ mũi tên "đi xuống" nên

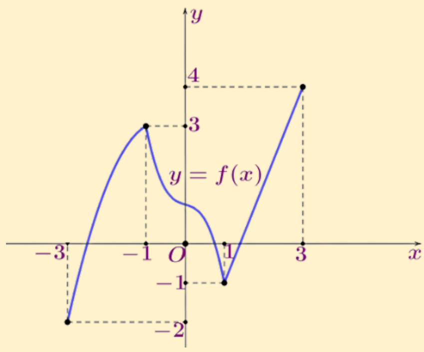
Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

» Trong $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$ mũi tên "đi lên" nên

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$.

Ví dụ 2.2.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3;3]$ và có đồ thị như hình bên. Xét tính đơn điệu của hàm số $y=f(x)$.



Lời giải

Từ đồ thị của hàm số, ta có:
» Trong $(-3;-1)$ và $(1;3)$ đồ thị "đi lên" nên

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3;-1)$ và $(1;3)$.

» Trong $(-1;1)$ đồ thị "đi xuống" nên

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

Dạng 3. Xác định cực trị của hàm số cho bởi công thức

Phương pháp

» ***Bước 1:*** Tìm tập xác định D của hàm số.

» ***Bước 2:*** Tính đạo hàm $f'(x)$ của các hàm số. Tìm các điểm $\{x_1;x_2;...;x_n\} \in D$ mà tại đó đạo hàm $f'(x)=0$ hoặc $f'(x)$ không tồn tại.

» ***Bước 3:*** Sắp xếp các điểm $x_1;x_2;...;x_n$ theo thứ tự tăng dần.
Xét dấu $f'(x)$ và lập bảng biến thiên.

» ***Bước 4:*** Kết luận hàm số đạt cực trị tại $x=?$, $y=?$ (nếu có).

Ví dụ 3.1.

Tìm cực trị của hàm số $y=2x^3-3x^2+1$

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y'=6x^2-6x$; $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=1 \\ x=1 \Rightarrow y=0 \end{array}\right.$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x=0 \Rightarrow y_{CD}=1$ và đạt cực tiểu tại $x=1 \Rightarrow y_{CT}=0$.

Ví dụ 3.2.

Tìm cực trị của hàm số $y=-x^4+2x^3-2x-1$

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y'=-4x^3+6x^2-2$; $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=-2 \\ x=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow y=-\dfrac{5}{16} \end{array}\right.$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$-$	
y	∞	↗	$-\frac{5}{16}$	↘	-2	↘	∞

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow y_{CD}=-\dfrac{5}{16}$.

Ví dụ 3.3.

Tìm cực trị của hàm số $y=\dfrac{x+2}{3x-1}$

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$.

Đạo hàm: $y'=-\dfrac{7}{(3x-1)^2}<0,\ \forall x\neq\dfrac{1}{3}$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{3}$

Vậy hàm số không có cực trị.

Ví dụ 3.4.

Tìm cực trị của hàm số $y=\dfrac{x^2-4x+4}{1-x}$

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Đạo hàm: $y'=\dfrac{-x^2+2x}{(1-x)^2}$. Cho $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

x	∞		0		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x=2\Rightarrow y_{CD}=0$ và đạt cực tiểu tại $x=0\Rightarrow y_{CT}=4$.

Ví dụ 3.5.

Tìm cực trị của hàm số $f(x)=2^{x^2-5x}$

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Đạo hàm: $f'(x)=2^{x^2-5x}\left(x^2-5x\right)'\ln 2=2^{x^2-5x}(2x-5)\ln 2\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow 2x-5=0\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{2}$.

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$2^{-\frac{25}{4}}$	$\nearrow$	

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x=\dfrac{5}{2}\Rightarrow y_{CT}=2^{-\frac{25}{4}}$.

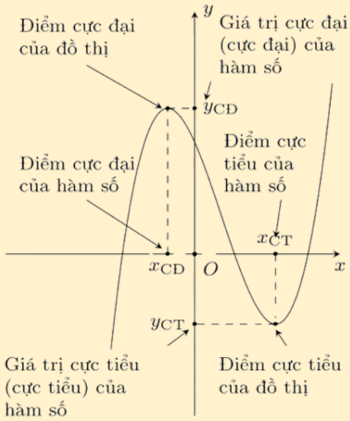
Dạng 4. Xác định cực trị của hàm số cho bởi bảng biến thiên – đồ thị

Phương pháp

Nhận xét:

» Hàm số $f(x)$

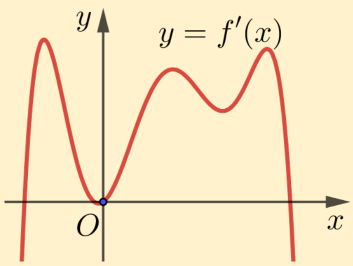
có cực trị	y' đổi dấu
không cực trị	y' không đổi dấu
chỉ có 1 cực trị	y' đổi dấu 1 lần
có 2 cực trị	y' đổi dấu 2 lần
có 3 cực trị	y' đổi dấu 3 lần



» Đối với một hàm số bất kì, hàm số chỉ có thể đạt cực trị tại những điểm x_0 mà tại đó đạo hàm triệt tiêu $f'(x_0)=0$ hoặc đạo hàm không xác định tại đó.

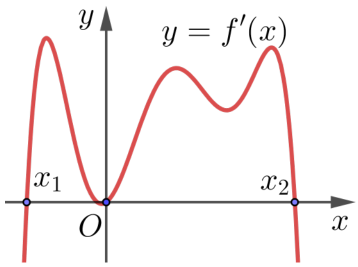
Ví dụ 4.1.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ bao nhiêu có điểm cực tiểu và điểm cực đại?



Lời giải

Dựa vào đồ thị ta có: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \\ x=0 \\ x=x_2 \end{array}\right.$.



+ $f'(x)$ qua x_1 đổi dấu từ “-” sang “+”
nên hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu $x=x_1$.

+ $f'(x)$ qua $x=0$ không đổi dấu
nên hàm số $f(x)$ không có cực trị tại $x=0$.

+ $f'(x)$ qua x_2 đổi dấu từ “+” sang “-” nên hàm số $f(x)$ đạt cực đại $x=x_2$.

Vậy đồ thị hàm số $y=f(x)$ có 1 cực tiểu và 1 cực đại.

Ví dụ 4.2.

Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
y			2		$\|\| +\infty$				$+\infty$
	$-\infty$				$-\infty \|\|$		4		

Hàm số $y = f\left(x\right)$ bao nhiêu có điểm cực tiểu và điểm cực đại?

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

+ $f'\left(x\right)$ qua $x = -1$ đổi dấu từ "+" sang "-" nên hàm số $f\left(x\right)$ đạt cực đại $x = -1$.

+ $f'\left(x\right)$ và $f\left(x\right)$ không xác định tại $x = 0$ nên hàm số $f\left(x\right)$ không có cực trị tại $x = 0$.

+ $f'\left(x\right)$ qua $x = 1$ đổi dấu từ "-" sang "+" nên hàm số $f\left(x\right)$ đạt cực đại $x = 1$.

Vậy đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$ có 1 cực tiểu và 1 cực đại.

Ví dụ 4.3.

Cho hàm số $y = f\left(x\right) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			2				$+\infty$
	$-\infty$				-4		

Dựa vào bảng biến thiên, hãy thiết lập công thức hàm số $y = f\left(x\right)$ đã cho?

Lời giải

Đạo hàm: $f'\left(x\right) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Từ bảng biến thiên, ta nhận thấy đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $\left(0;2\right)$ và $\left(3;-4\right)$, ta có:

$$\left\{\begin{array}{l} f\left(0\right) = 2 \\ f'\left(0\right) = 0 \\ f\left(3\right) = -4 \\ f'\left(3\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} d = 2 \\ c = 0 \\ a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + 2 = -4 \\ 3a \cdot 3^2 + 2b \cdot 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c = 0 \\ d = 2 \\ 27a + 9b = -6 \\ 27a + 6b = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \dfrac{4}{9} \\ b = -2 \\ c = 0 \\ d = 2 \end{array}\right..$$

Vậy công thức của hàm số cần tìm có dạng: $y = f\left(x\right) = \dfrac{4}{9}x^3 - 2x^2 + 2$.

Dạng 5. Toán thực tế áp dụng tính đơn điệu của hàm số

Phương pháp

» Nếu hàm số $s=f(t)$ biểu thị quãng đường di chuyển của vật theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị *tốc độ tức thời* của chuyển động tại t_0.

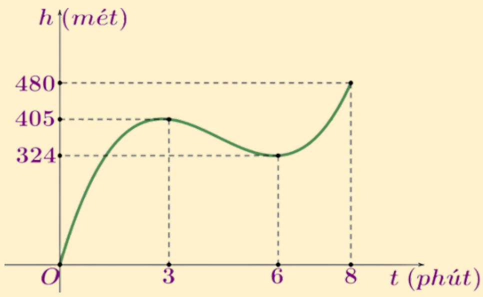
» Đạo hàm cấp hai $f''(t)$ là *gia tốc tức thời* tại thời điểm t của vật chuyển động có phương trình $s=f(t)$.

Ví dụ 5.1.

Trong 8 phút đầu kể từ khi xuất phát, độ cao h (tính bằng mét) của khinh khí cầu vào thời điểm t phút được cho bởi $h(t)=6t^3-81t^2+324t$.

Đồ thị của hàm số $h(t)$ được biểu diễn như hình bên.

Trong các khoảng thời gian nào khinh khí cầu tăng dần độ cao, giảm dần độ cao?



Lời giải

Từ đồ thị hàm số $h(t)$, ta nhận xét:

+ Trong khoảng thời gian từ 3 phút đến 6 phút thì khinh khí cầu giảm dần độ cao.
+ Trong 3 phút đầu tiên và trong khoảng thời gian từ 6 phút đến 8 phút thì khinh khí cầu tăng dần độ cao.

Ví dụ 5.2.

Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox. Tọa độ của chất điểm tại thời điểm t (giây) được xác định bởi hàm số $x(t)=t^3-6t^2+9t$ với $t\ge 0$. Khi đó $x'(t)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t, kí hiệu $v(t)$. Trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm tăng, trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm giảm?

Lời giải

Xét hàm $v(t)=x'(t)=3t^2-12t+9$ trên $[0;+\infty)$.

$v'(t)=6t-12$. Cho $v'(t)=0 \Rightarrow t=2$.

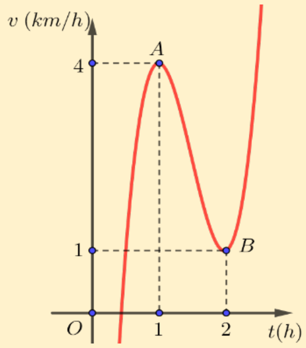
Bảng biến thiên của hàm số $v(t)$

t	0		2		$+\infty$
$v'(t)$		$-$	0	$+$	
$v(t)$	9	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy trong khoảng thời gian 2 giây đầu tiên thì vận tốc chất điểm giảm dần và sau thời điểm 2 giây thì vận tốc chất điểm tăng dần.

Ví dụ 5.3.

Một vật chuyển động với vận tốc $v(\text{km/h})$ phụ thuộc vào thời gian $t(\text{h})$ có đồ thị của hàm số dạng hàm bậc ba như hình bên. Biết rằng tại thời điểm $t_1 = 1\text{h}$ vật có vận tốc $v_1 = 4\text{km/h}$ và tại thời điểm $t_2 = 2\text{h}$ vật có vận tốc $v_2 = 1\text{km/h}$. Tính vận tốc của vật tại thời



Lời giải

Giả sử hàm số vận tốc có dạng: $v(t) = at^3 + bt^2 + ct + d,\ t > 0$.

Ta có: $v'(t) = 3at^2 + 2bt + c$.

Dựa vào đồ thị hàm số, tại các thời điểm t_1, t_2 đồ thị hàm vận tốc đi qua các điểm cực trị $A(1;4)$, $B(2;1)$.

Khi đó: $\begin{cases} v(1) = 4 \\ v'(1) = 0 \\ v(2) = 1 \\ v'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c + d = 4 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ 8a + 4b + 2c + d = 1 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = -27 \\ c = 36 \\ d = -11 \end{cases}$.

Suy ra: $v(t) = 6t^3 - 27t^2 + 36t - 11\ (\text{km/h})$.

Vậy vận tốc của vật tại thời điểm $t = 3h$ là: $v(3) = 6 \cdot 3^3 - 27 \cdot 3^2 + 36 \cdot 3 - 11 = 16\text{km/h}$.

Dạng 6. Bài toán liên quan tính đơn điệu có chứa tham số

Phương pháp

(1) **Tìm tham số m để hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$ đơn điệu trên tập xác định**

» ***Bước 1:*** Tập xác định: $D=\mathbb{R}$ Tính đạo hàm $y'=3ax^2+2bx+c$

» ***Bước 2:*** Điều kiện để hàm đơn điệu:

Để y ***đồng biến*** trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'\geq 0\,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta_{y'}\leq 0\end{cases}$

Để y ***nghịch biến*** trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'\leq 0\,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta_{y'}\leq 0\end{cases}$

(2) **Tìm tham số m để hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ đơn điệu trên từng khoảng xác định**

» ***Bước 1:*** Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ Tính $y'=\dfrac{ad-cb}{(cx+d)^2}$

» ***Bước 2:*** Điều kiện để hàm đơn điệu:

Để y ***đồng biến*** trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow y'>0\Leftrightarrow ad-bc>0$

Để y ***nghịch biến*** trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow y'<0\Leftrightarrow ad-bc<0$

Ví dụ 6.1.

Cho hàm số $y=-\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+(3m+2)x-2$. Xác định điều kiện của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Lời giải

Ta có $y'=-x^2-2mx+3m+2$.

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)\Leftrightarrow y'\leq 0,\ \forall x\in(-\infty;+\infty)$.

$$\Leftrightarrow -x^2-2mx+3m+2\leq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta'\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<0,\forall m\\ m^2+3m+2\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow -2\leq m\leq -1.$$

Vậy $-2\leq m\leq -1$.

Ví dụ 6.2.

Cho hàm số $y=\dfrac{2x-m}{x-1}$. Xác định điều kiện của tham số m để hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

Lời giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Ta có $y'=\dfrac{m-2}{(x-1)^2}$.

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định $\Leftrightarrow y'>0,\ \forall x\in D\Leftrightarrow m-2>0\Leftrightarrow m>2$.

Vậy $m>2$.

Dạng 7. Bài toán hàm hợp

Phương pháp

Tìm khoảng đơn điệu của hàm số $y = f\left(u(x)\right)$ từ bảng biến thiên/đồ thị của $f'(x)$

» ***Bước 1:*** Tính $y' = u'.f'(u) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u' = 0 \\ f'(u) = 0 \ (*) \end{array}\right.$

» ***Bước 2:*** Để giải $(*)$ ta tìm $f'(x) = 0$ (đồ thị cắt trục hoành).

Giả sử $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \\ \vdots \\ x = b \end{array}\right. \longrightarrow f'(u) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = a \\ \vdots \\ u = b \end{array}\right. \rightarrow$ nghiệm của $(*)$.

» ***Bước 3:*** Lập bảng xét dấu của $y' = u'.f'(u) \Rightarrow$ khoảng đơn điệu cần tìm.

» Lưu ý: Bài toán tìm cực trị của hàm số $y = f\left(u(x)\right)$ ta làm tương tự

Ví dụ 7.1.

Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên dưới. Xác định các khoảng đồng biến của hàm số $y = f(1-2x)$.

x	$-\infty$		-3		-2		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Lời giải

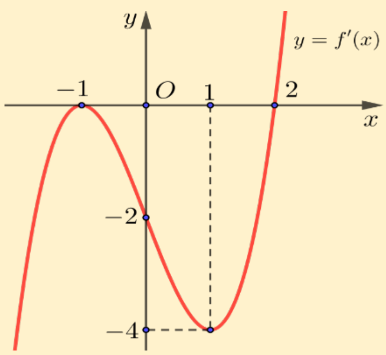
Ta có $y = f(1-2x) \Rightarrow y' = -f'(1-2x)$.

Hàm số đồng biến $\Leftrightarrow y' \geq 0 \Leftrightarrow f'(1-2x) \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-2x \leq -3 \\ -2 \leq 1-2x \leq 1 \\ 1-2x \geq 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 2 \\ 0 \leq x \leq \dfrac{3}{2} \\ x \leq -1 \end{array}\right.$.

Vậy hàm số $y = f(1-2x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1); \left(0;\dfrac{3}{2}\right); (2;+\infty)$

Ví dụ 7.2.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xác định các khoảng nghịch biến của hàm số $g(x) = f(x^2 - 2)$.



Lời giải

Ta có $g'(x)=2x.f'(x^2-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'(x^2-2)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-2=-1 \\ x^2-2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$

Từ đồ thị $f'(x)$ ta có $f'(x^2-2)>0 \Leftrightarrow x^2-2>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<-2 \end{array}\right.$

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Vậy hàm số $g(x)=f(x^2-2)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2);(0;1);(2;+\infty)$

Ví dụ 7.3.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x^2-1)(x-4)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(3-x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Lời giải

Ta có : $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-1=0 \\ x-4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \\ x=4 \end{array}\right.$

$g(x)=f(3-x) \Rightarrow g'(x)=-f'(3-x)$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3-x=1 \\ 3-x=-1 \\ 3-x=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=4 \\ x=-1 \end{array}\right.$

$g'(x)=0$ có 3 nghiệm đơn nên hàm số $g(x)=f(3-x)$ có 3 điểm cực trị.

Ví dụ 7.4.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hỏi hàm số $y=f(x^2-2x)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

Lời giải

Đặt $g(x)=f(x^2-2x)$. Ta có $g'(x)=(2x-2)f'(x^2-2x)$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2x=-2 \\ x^2-2x=1 \\ x^2-2x=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2x+2=0 \\ x^2-2x-1=0 \\ x^2-2x-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=1\pm\sqrt{2} \\ x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Trong đó các nghiệm $-1, 1, 3$ là nghiệm bội lẻ và $1 \pm \sqrt{2}$ là nghiệm bội chẵn.

Vì vậy hàm số $g'(x)$ chỉ đổi dấu khi đi qua các nghiệm $-1, 1, 3$.

Ta có $g'(0) = -2f'(0) < 0$ (do $f'(0) > 0$).

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$		-1		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Vậy hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có đúng 1 điểm cực tiểu là $x = 1$.

Chương 01

Bài 1. ĐƠN ĐIỆU & CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

C Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Cho hàm số $y=x^3-2x^2+x+1$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số nghịch biến trên $(1;+\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên $\left(\frac{1}{3};1\right)$.

C. Hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$.

D. Hàm số đồng biến trên $\left(\frac{1}{3};1\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=3x^2-4x+1 \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{1}{3}\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{31}{27}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3};1\right)$.

» Câu 2. Hỏi hàm số $y=2x^4+1$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty;0)$.　**B.** $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$.　**C.** $(0;+\infty)$.　**D.** $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=8x^3$; $y'=0 \Leftrightarrow 8x^3=0 \Leftrightarrow x=0$ suy ra $y(0)=1$.

Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

» Câu 3. Hàm số $y=\dfrac{5-2x}{x+3}$ nghịch biến trên

A. $R\backslash\{-3\}$. **B.** R. **C.** $(-\infty;-3)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y=\dfrac{5-2x}{x+3}$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}\backslash\{-3\}$.

$y'=\dfrac{-11}{(x+3)^2}<0$, với $x\in D$.

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-3)$ và $(-3;+\infty)$.

» Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

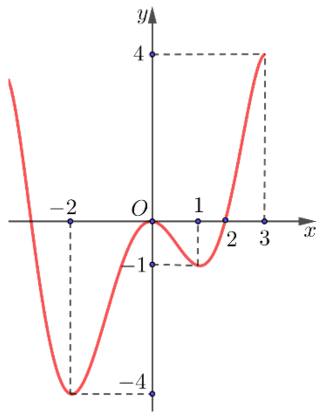
A. $(-3;0)$. **B.** $(-3;3)$. **C.** $(0;3)$. **D.** $(-\infty;-3)$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-3;0)$ và $(3;+\infty)$.

» Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng

A. $(-4;0)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(1;3)$.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị hàm số ta có hàm số đồng biến trên khoảng $(2;3)$.

» Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-2	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho đạt cực đại tại

A. $x=-2$. **B.** $x=2$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-1$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số đạt cực đại tại điểm mà đạo hàm đổi dấu từ dương sang âm.

Từ bảng biến thiên hàm số đạt cực đại tại $x=-1$.

» Câu 7. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
y'		$+$	$\|$	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	$+\infty \;\|\; -\infty$	↗	4	↘	$-\infty$

A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;3\right)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(3;+\infty\right)$.

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ và $\left(3;+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(3;+\infty\right)$.

» Câu 8. Tìm điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$.

A. $x=1$. **B.** $\left(3;1\right)$. **C.** $x=3$. **D.** $\left(1;\frac{7}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

$y'=x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Lập bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			$\frac{7}{3}$				$+\infty$
	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

Dựa vào BBT suy ra, điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(3;1)$.

» Câu 9. Hàm số nào dưới đây **không** có cực trị?

A. $y=\dfrac{x^2+1}{x}$ **B.** $y=\dfrac{2x-2}{x+1}$ **C.** $y=x^2-2x+1$ **D.** $y=-x^3+x+1$

Lời giải

Chọn B

+ Xét hàm số $y=\dfrac{2x-2}{x+1}$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $y'=\dfrac{4}{(x+1)^2}>0,\forall x\in D$.

Nên hàm số luôn đồng biến trên từng khoảng xác định.

Do đó hàm số $y=\dfrac{2x-2}{x+1}$ không có cực trị.

» Câu 10. Hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1 **B.** 0 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải

Chọn B

Vì $y'=\dfrac{-1}{(x+1)^2}>0$, $\forall x\neq -1$ nên hàm số không có cực trị.

» Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			2				$+\infty$
	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	-4	$\nearrow$	

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. 0 **B.** 2 **C.** -4 **D.** 3

Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên, ta thấy giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng -4.

» Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			1				$+\infty$
	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	-2	$\nearrow$	

Hàm số đã cho đạt cực đại tại

A. $x=-1$ B. $x=-2$ C. $x=2$ D. $x=1$

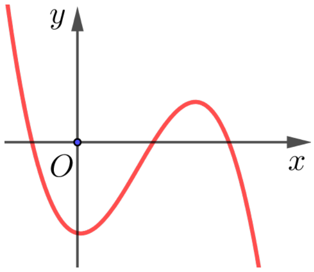
Lời giải

Chọn A

Hàm số đạt cực đại tại điểm mà đạo hàm đổi dấu từ dương sang âm.

Từ bảng biến thiên hàm số đạt cực đại tại $x=-1$.

» Câu 13. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số này là



A. 0 B. 2 C. 1 D. 3

Lời giải

Chọn B

Dựa vào hình dạng đồ thị hàm số có hai điểm cực trị.

» Câu 14. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

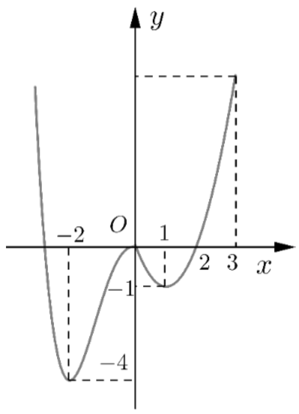
A. $y=\dfrac{x-1}{x-2}$ B. $y=-x^3-3x$ C. $y=x^3+x$ D. $y=\dfrac{x+1}{x+3}$

Lời giải

Chọn C

Vì $y=x^3+x\Rightarrow y'=3x^2+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

» Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng

A. $(-2;1)$ B. $(-2;-1)$ C. $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ D. $(1;3)$

Lời giải

Chọn C

Nhìn đồ thị từ trái sang phải, đồ thị đi xuống thì hàm số nghịch biến

Nên hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$

» Câu 16. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\infty;-1\right)$ **B.** $\left(2;+\infty\right)$ **C.** $\left(1;2\right)$ **D.** $\left(-1;2\right)$

Lời giải

Chọn C

Để hàm số nghịch biến trên một khoảng thì dấu của đạo hàm mang dấu âm và hàm số phải liên tục trên khoảng đó.

Dựa vào bảng biến thiên ta có: Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(1;2\right)$

» Câu 17. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=x+1$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-1;+\infty\right)$. **B.** $\left(1;+\infty\right)$. **C.** $\left(-\infty;-1\right)$. **D.** $\left(-\infty;1\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x+1=0\Leftrightarrow x=-1$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'\left(x\right)$		$-$	0	$+$	

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;-1\right)$.

» Câu 18. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(x-2\right)^2\left(1-x\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(1;2\right)$. **B.** $\left(1;+\infty\right)$. **C.** $\left(2;+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;1\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'\left(x\right)>0\Leftrightarrow\left(x-2\right)^2\left(1-x\right)>0\Leftrightarrow\begin{cases}1-x>0\\\left(x-2\right)^2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<1\\x\neq 2\end{cases}\Leftrightarrow x<1$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;1\right)$.

» Câu 19. Hỏi hàm số $y=2x^4+1$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $\left(-\infty;0\right)$. **B.** $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$. **C.** $\left(0;+\infty\right)$. **D.** $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn C

$y=2x^4+1$. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y'=8x^3$; $y'=0\Leftrightarrow 8x^3=0\Leftrightarrow x=0$ suy ra $y\left(0\right)=1$

Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty}y=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}y=+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

» Câu 20. Hàm số $y=\dfrac{2}{x^2+1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;+\infty)$ **B.** $(0;+\infty)$ **C.** $(-\infty;0)$ **D.** $(-1;1)$

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=\dfrac{-4x}{\left(x^2+1\right)^2}<0\Leftrightarrow x>0$

» Câu 21. Cho hàm số $y=\sqrt{2x^2+1}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$ **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$

Lời giải

Chọn A

Ta có $D=\mathbb{R}$, $y'=\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$; $y'>0\Leftrightarrow x>0$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

» Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=(1-x)^2(x+1)^3(3-x)$. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f'(x)=0\Leftrightarrow(1-x)^2(x+1)^3(3-x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\\x=3\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;3)$.

» Câu 23. Cho hàm số $y=x^4-2x^2$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

$y'=4x^3-4x;\ y'=0\Leftrightarrow 4x^3-4x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=1\\ x=-1\end{array}\right.$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	0	↘	-1	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$, $(1;+\infty)$;

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$, $(0;1)$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

» Câu 24. Trong 8 phút đầu kể từ khi xuất phát, độ cao h (tính bằng mét) của khinh khí cầu vào thời điểm t phút được cho bởi công thức $h(t)=6t^3-81t^2+324t$. Trong khoảng thời gian nào khinh khí cầu giảm dần độ cao?

A. $\left(1;\dfrac{5}{2}\right)$ **B.** $(0;3)$ **C.** $(3;6)$ **D.** $\left(\dfrac{7}{2};8\right)$

Lời giải

Chọn C

$h(t)=6t^3-81t^2+324t$ với $t\in[0;8]$

$h'(t)=18t^2-162t+324$

$h'(t)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3\\ t=6\end{array}\right.$

t	0		3		6		8
$h'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(t)$		↗		↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên ta kết luận được, trong khoảng thời gian từ 3 phút đến 6 phút kể từ khi xuất phát khinh khó cầu có độ cao giảm dần.

» Câu 25. Cho hàm số $f(x)=2x^3-9x^2-24x+1$. Có bao nhiêu khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

(1) Điểm cực đại của hàm số là $x=-1$.

(2) Điểm cực tiểu của hàm số là $x=4$.

(3) Giá trị cực đại của hàm số là $y=14$.

(4) Giá trị cực tiểu của hàm số là $y=-111$.

A. 3 **B.** 1 **C.** 4 **D.** 2

Lời giải

Chọn C

Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(x)=2x^3-9x^2-24x+1 \Rightarrow f'(x)=6x^2-18x-24$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \Rightarrow y=-111 \\ x=-1 \Rightarrow y=14 \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	14	↘	-111	↗	$+\infty$

Kết luận:

+) Điểm cực đại của hàm số là $x=-1$, giá trị cực đại của hàm số là $y=14$.

+) Điểm cực tiểu của hàm số là $x=4$, giá trị cực tiểu của hàm số là $y=-111$.

» **Câu 26.** Tìm các điểm cực trị của hàm số $y=\dfrac{x^2+x+4}{x+1}$.

A. $x_{CĐ}=-3$, $x_{CT}=1$. **B.** $x_{CT}=-3$, $x_{CĐ}=1$. .

C. $x_{CĐ}=-5$, $x_{CT}=3$. **D.** $x_{CT}=-5$, $x_{CĐ}=3$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$$y=\frac{x^2+x+4}{x+1} \Rightarrow y'=\frac{(2x+1)(x+1)-(x^2+x+4)}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$$

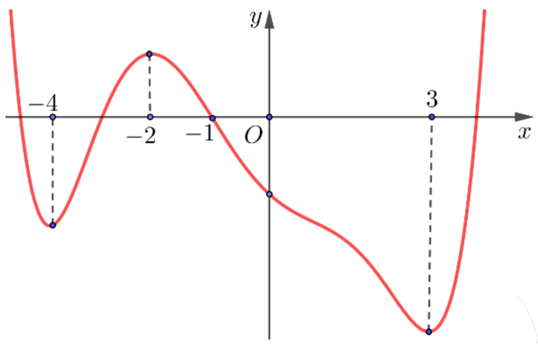
$$y'=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=3 \\ x=-3 \Rightarrow y=-5 \end{array}\right.$$

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-5	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=-3$.

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=1$.

» **Câu 27.** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong như trong hình dưới đây.



Khẳng định nào sau đây là đúng?

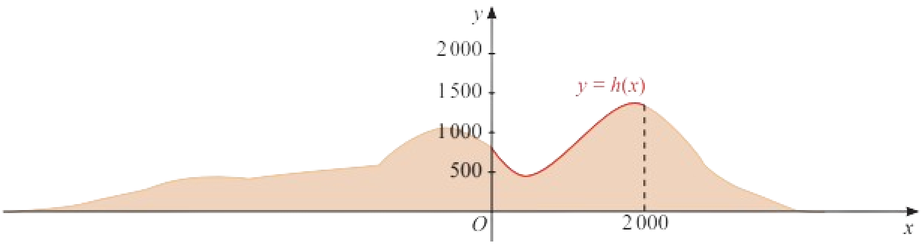
A. Điểm cực đại của hàm số là $x=-4$.
B. Điểm cực đại của hàm số là $x=-2$.
C. Điểm cực tiểu của hàm số là $x=-2$.
D. Điểm cực đại của hàm số là $x=3$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị, ta có hàm số đạt cực đại tại điểm $x=-2$, hàm số đạt cực tiểu tại các điểm $x=-4$ và $x=3$.

» Câu 28. Một phần lát cắt của dãy núi có độ cao tính bằng mét được mô tả bởi hàm số $y=h\left(x\right)=-\dfrac{1}{1320000}x^3+\dfrac{9}{3520}x^2-\dfrac{81}{44}x+840$ với $0\le x\le 2000$. Tìm tọa độ các đỉnh của lát cắt dãy núi trên đoạn $\left[0;2000\right]$.



A. $\left(1800;\dfrac{7365}{16}\right)$ và $\left(450;\dfrac{15315}{11}\right)$.
B. $\left(480;\dfrac{1515}{16}\right)$ và $\left(450;\dfrac{7365}{16}\right)$.
C. $\left(480;\dfrac{1515}{16}\right)$ và $\left(1750;\dfrac{7561}{16}\right)$.
D. $\left(1800;\dfrac{15315}{11}\right)$ và $\left(450;\dfrac{7365}{16}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y=h\left(x\right)=-\dfrac{1}{1320000}x^3+\dfrac{9}{3520}x^2-\dfrac{81}{44}x+840\Rightarrow h'\left(x\right)=-\dfrac{1}{440\,000}x^2+\dfrac{9}{1760}x-\dfrac{81}{44}$

$$h'\left(x\right)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=1800\Rightarrow y=\dfrac{15315}{11}\\ x=450\Rightarrow y=\dfrac{7365}{16}\end{array}\right.$$

Kết luận, trên đoạn $\left[0;2000\right]$, các đỉnh của lát cắt dãy núi là $\left(1800;\dfrac{15315}{11}\right)$ và $\left(450;\dfrac{7365}{16}\right)$

» Câu 29. Tìm các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y=2x+1-\sqrt{2x^2-8}$.

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;-2\right)$ và $\left(2;+\infty\right)$.

C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;-2\right)$ và $\left(2;+\infty\right)$.

D. Hàm số nghịch biến trên $\left(-2;2\right)$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số xác định trên $\left(-\infty;-2\right]\cup\left[2;+\infty\right)$

Ta có $y=2x+1-\sqrt{2x^2-8}\Rightarrow y'=y'=2-\dfrac{4x}{2\sqrt{2x^2-8}}$

$y'=0\Rightarrow\sqrt{2x^2-8}-2x=0\left(*\right)\Rightarrow\sqrt{2x^2-8}=2x\Rightarrow 2x^2+8=0$, vậy phương trình vô nghiệm.

Bảng xét dấu y'

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$+$	$\Vert$		$\Vert$	$+$	

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;-2\right)$ và $\left(2;+\infty\right)$.

» Câu 30. Cho hàm số $y=-\dfrac{1}{3}x^3+mx^2+\left(3m+2\right)x+1$. Tìm tất cả giá trị của m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $\left[\begin{array}{l}m\geq -1\\ m\leq -2\end{array}\right.$. **B.** $-2\leq m\leq -1$. **C.** $-2<m<-1$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m>-1\\ m<-2\end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn B

TXĐ: $D=\mathbb{R}$, $y'=-x^2+2mx+3m+2$.

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y'\leq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1<0\\ \Delta'=m^2+3m+2\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow -2\leq m\leq -1.$

» Câu 31. Tìm điều kiện của tham số thực m để hàm số $y=x^3-3x^2+3\left(m+1\right)x+2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$
.

A. $m\geq 2$. **B.** $m<2$. **C.** $m<0$. **D.** $m\geq 0$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=3x^2-6x+3\left(m+1\right)$

$YCBT\Leftrightarrow y'\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\Delta'=-9m\leq 0\Leftrightarrow m\geq 0$.

» Câu 32. Cho hàm số $y=\dfrac{mx+4m}{x+m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S.

A. 4 **B.** Vô số **C.** 3 **D.** 5

Lời giải

Chọn D

$D=\mathbb{R}\setminus\left\{-m\right\}$; $y'=\dfrac{m^2-4m}{\left(x+m\right)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định khi $y'<0,\forall x\in D\Leftrightarrow m^2-4m<0\Leftrightarrow 0<m<4$

Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên có 3 giá trị thỏa mãn.

» Câu 33. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+2}{x+5m}$ đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;-10\right)$?

A. 2 **B.** Vô số **C.** 1 **D.** 3

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-5m\}$.

$y'=\dfrac{5m-2}{(x+5m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-10)$ khi và chỉ khi $\begin{cases}5m-2>0\\-5m\in[-10;+\infty)\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m>\dfrac{2}{5}\\-5m\ge -10\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{2}{5}<m\le 2$.

Vì m nguyên nên $m\in\{1;2\}$. Vậy có 2 giá trị của tham số m.

» Câu 34. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+4}{2x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(-3;4)$.

A. Vô số. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{m}{2}\right\}$.

Có $y'=-\dfrac{m+8}{(2x-m)^2}$

Hàm số nghịch biến trên $(-3;4)\Leftrightarrow y'<0\ \forall x\in(-3;4)\Leftrightarrow -\dfrac{m+8}{(2x-m)^2}<0\ \forall x\in(-3;4)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-(m+8)<0\\\dfrac{m}{2}\notin(-3;4)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-8\\\left[\begin{array}{l}\dfrac{m}{2}\le -3\\\dfrac{m}{2}\ge 4\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-8<m\le -6\\m\ge 8\end{array}\right.$.

Do m nguyên âm nên $m\in\{-7;-6\}$, gồm 2 giá trị thỏa mãn.

» Câu 35. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+(1-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ là

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(-\infty;-2]$. **D.** $(-\infty;1]$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=3x^2-6x+1-m$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)\Leftrightarrow y'\ge 0,\ \forall x\in(2;+\infty)$

$\Leftrightarrow 3x^2-6x+1-m\ge 0,\ \forall x\in(2;+\infty)$

$\Leftrightarrow 3x^2-6x+1\ge m,\ \forall x\in(2;+\infty)$.

Xét hàm số $g(x)=3x^2-6x+1$ với $\forall x\in(2;+\infty)$.

$g'(x)=6x-6$; $g'(x)>0,\ \forall x\in(2;+\infty)$.

Bảng biến thiên $g(x)$:

x	2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $m \le 1$.

» Câu 36. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=-x^3-6x^2+(4m-9)x+4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ là

A. $\left(-\infty;-\frac{3}{4}\right]$ **B.** $[0;+\infty)$ **C.** $(-\infty;0]$ **D.** $\left[-\frac{3}{4};+\infty\right)$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=-3x^2-12x+4m-9$

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ thì $y'=-3x^2-6x+4m-9\le 0 \quad \forall x\in(-\infty;-1)$

$\Leftrightarrow 4m\le 3x^2+12x+9 \quad \forall x\in(-\infty;-1) \;\Leftrightarrow\; 4m\le \min\limits_{(-\infty;-1]} f(x),\quad f(x)=3x^2+12x+9$

Ta có $f'(x)=6x+12;\ f'(x)=0\Leftrightarrow x=-2$.

Khi đó, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra $\min\limits_{(-\infty;0]} f(x)=-3\Rightarrow 4m\le -3\Leftrightarrow m\le\frac{-3}{4}$.

» Câu 37. Có tất cả bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=\frac{(m+1)x-2}{x-m}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$

$y'=\frac{-m^2-m+2}{(x-m)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của ta cần tìm m để $y'\ge 0$ trên $(-\infty;m)$ và $(m;+\infty)$ và dấu "$=$" chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm trên các khoảng đó

ĐK: $-m^2-m+2>0\Leftrightarrow -2<m<1$. Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m=-1,\,0$.

» Câu 38. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+m^2}{x+4}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. 5. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-4\}$, $y'=\dfrac{4-m^2}{(x+4)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó thì $4-m^2>0 \Leftrightarrow -2<m<2$.
Do đó có 3 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

» Câu 39. Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox. Tọa độ của chất điểm tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $x(t)=t^3-6t^2+9t$ với $t\ge 0$. Khi đó $v(t)=x'(t)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t. Trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm giảm?

A. $t\in(0;2)$. **B.** $t\in(0;3)$. **C.** $t=2$. **D.** $t\in(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

$v(t)=x'(t)=3t^2-12t+9$

$v'(t)=6t-12$

$v'(t)=0 \Leftrightarrow t=2$

Ta có bảng biến thiên

t	$-\infty$	0		2		$+\infty$
$v'(t)$			$-$	0	$+$	
$v(t)$			$\searrow$		$\nearrow$	

Vậy vận tốc của chất điểm giảm trong khoảng $t\in(0;2)$

» Câu 40. Cho hàm số $y=x-2\sqrt{x^2+4}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số có giá trị cực đại bằng $-2\sqrt{3}$. **B.** Hàm số đạt cực đại tại $x=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** Hàm số có giá trị cực tiểu bằng $-\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y=x-2\sqrt{x^2+4} \Rightarrow y'=1-\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+4}}$

$y'=0 \Rightarrow \sqrt{x^2+4}=2x\,(*) \Rightarrow x^2+4=4x^2 \Rightarrow 3x^2=4 \Rightarrow x=\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

Thử lại, ta có $x=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ thỏa mãn phương trình (*)

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{2\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	

Suy ra hàm số đạt cực đại tại điểm $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ và có giá trị cực đại bằng $y\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=-2\sqrt{3}$.

» Câu 41. Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được x mét vải lụa $(1\le x\le 18)$. Tổng chi phí sản xuất x mét vải lụa, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí $C(x)=x^3-3x^2-20x+500$. Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét. Vậy hộ này cần sản xuất và bán ra mỗi ngày bao nhiêu mét để thu được lợi nhuận tối đa?

A. 6 mét. **B.** 10 mét. **C.** 18 mét. **D.** 12 mét.

Lời giải

Chọn B

Ta có x là số mét vải lụa sản xuất và bán hết mỗi ngày, khi đó ta có số tiền thu được mỗi ngày là $220x$ nghìn đồng.

Lợi nhuận = doanh thu $-$ chi phí, khi đó ta có lợi nhuận

$L(x)=220x-(x^3-3x^2-20x+500)=-x^3+3x^2+240x-500$ nghìn đồng.

Hàm số $L(x)$ xác định trên $[1;18]$

Ta có $L'(x)=-3x^2+6x+240$

$L'(x)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=10\\x=-8\end{array}\right.$

x	$-\infty$	1		10		18	$+\infty$
$L'(x)$			$+$	0	$-$		
$L(x)$			$\nearrow$		$\searrow$		

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $x=10$ mét thỏa mãn yêu cầu bài toán.

» Câu 42. Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(3-2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;2)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(-\infty;-3)$. **D.** $(3;4)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=-2.f'(3-2x)\ge 0\Leftrightarrow f'(3-2x)\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3-2x\le -3\\-1\le 3-2x\le 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 3\\1\le x\le 2.\end{array}\right.$

» Câu 43. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(x^2-2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $g(x)=f(x^2-2)$. Ta có: $g'(x)=2x.f'(x^2-2)$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'(x^2-2)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-2=-1 \\ x^2-2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=1 \\ x^2=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \\ x=2 \\ x=-2 \end{array}\right..$$

Ta có bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$2x$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$f'(x^2-2)$		$+$	0	$-$	0	$-$	|	$-$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu $g'(x)$ ta thấy hàm số $y=f(x^2-2)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$

» Câu 44. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau.

x	$-\infty$		-3		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(2-3x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(2;3)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;3)$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $g(x)=f(2-3x) \Rightarrow g'(x)=-3.f'(2-3x)$

Ta có $g'(x)\ge 0 \Leftrightarrow f'(2-3x)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-3x\le -3 \\ 0\le 2-3x\le 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge \dfrac{5}{3} \\ \dfrac{1}{3}\le x\le \dfrac{2}{3} \end{array}\right..$

Suy ra hàm số $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3}\right)$ và $\left(\dfrac{5}{3};+\infty\right)$,

Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(2;3)$.

B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai

» Câu 45. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		-2		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	0	↗	5	↘	$-\infty$

Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-5)$ và $(-3;-2)$		
(b)	Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;-5)$		
(c)	Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-2;+\infty)$		
(d)	Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$		

Lời giải

Nhìn vào biến thiên ta thấy đồ thị hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$; nghịch biến trên khoảng $(-2;+\infty)$.

(a) Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-5)$ và $(-3;-2)$

Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-5)$ và $(-3;-2)$ là mệnh đề **đúng**

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;-5)$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;-5)$ là mệnh đề **sai**

» **Chọn** SAI.

(c) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-2;+\infty)$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-2;+\infty)$ là mệnh đề **đúng**

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ là mệnh đề **đúng**

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 46.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R và có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3;0)$.		
(b)	Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;3)$.		
(c)	Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.		
(d)	Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-3)$.		

Lời giải

Dựa vào bảng xét dấy đạo hàm ta có:

$y'<0\,\forall x\in(-3;0)\cup(0;3)$ nên hàm số nghịch biến trên $(-3;0)$ và $(0;3)$.

$y'>0,\forall x\in(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$ nên hàm số đồng biến trên $(-\infty;-3)$ và $(3;+\infty)$

(a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3;0)$.

Xét: Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3;0)$ là mệnh đề **sai**

» **Chọn** SAI.

(b) *Hàm số nghịch biến trên khoảng* $(0;3)$.

Xét: Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;3)$ là mệnh đề **đúng**

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) *Hàm số đồng biến trên khoảng* $(-\infty;0)$.

Xét: Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ là mệnh đề **sai** vì trên $(-3;0)$ hàm số nghịch biến

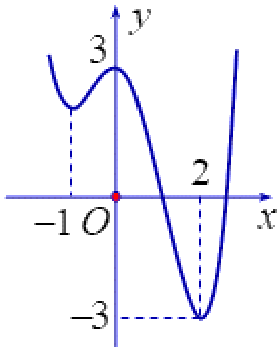
» **Chọn** ĐÚNG.

(d) *Hàm số nghịch biến trên khoảng* $(-\infty;-3)$.

Xét: Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-3)$ là mệnh đề **sai**

» **Chọn** SAI.

» **Câu 47.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Khi đó

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3		
(b)	Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;0)$		
(c)	Đồng biến trên khoảng $(-1;0)$		
(d)	Nghịch biến trên khoảng $(0;3)$		

Lời giải

(a) *Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng* 3

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) *Hàm số nghịch biến trên khoảng* $(-3;0)$.

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-1)$

» **Chọn** SAI.

(c) *Đồng biến trên khoảng* $(-1;0)$.

Hàm số đồng biến trên $(-1;0)$ và $(2;+\infty)$ và

Nên: Hàm số đồng biến trên $(-1;0)$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) *Nghịch biến trên khoảng* $(0;3)$.

Hàm số nghịch biến trên $(0;2)$

» **Chọn** SAI.

» Câu 48. Cho hàm số $f(x) = -x^3 + 3x^2$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;0)$		
(b)	Hàm số nghịch biến trên $(2;+\infty)$		
(c)	Hàm số đồng biến trên $(0;2)$		
(d)	Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$		

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = -x^3 + 3x^2$, có $f'(x) = -3x^2 + 6x \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

(a) Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;0)$.

Từ bảng biến thiên, ta có hàm số nghịch biến trên $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) Hàm số nghịch biến trên $(2;+\infty)$.

Từ bảng biến thiên, ta có hàm số nghịch biến trên $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) Hàm số đồng biến trên $(0;2)$.

Từ bảng biến thiên, ta có hàm số đồng biến trên $(0;2)$.

» **Chọn** ĐÚNG.

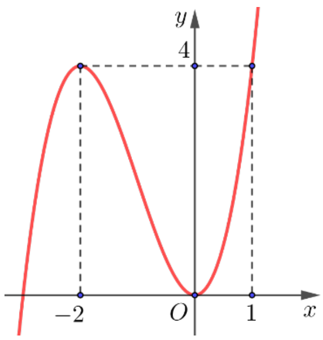
(d) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Từ bảng biến thiên, ta có hàm số đồng biến trên $(0;2)$,

và nghịch biến trên $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$. Nên không thể đồng biến trên $\mathbb{R}$

» **Chọn** SAI.

» Câu 49. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong như trong hình dưới đây.



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-2)$.		
(b)	Hàm số đồng biến trên $(0;1)$.		

(c)	Hàm số nghịch biến trên $(-2;1)$.		
(d)	Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.		

Lời giải

(a) *Hàm số đồng biến trên* $(-\infty;-2)$.

Từ đồ thị, ta có hàm số đồng biến trên $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) *Hàm số đồng biến trên* $(0;1)$.

Từ đồ thị, ta có hàm số đồng biến trên $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$ nên hàm số cũng đồng biến trên $(0;1)$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) *Hàm số nghịch biến trên* $(-2;1)$.

Từ đồ thị, ta có hàm số nghịch biến trên $(-2;0)$.

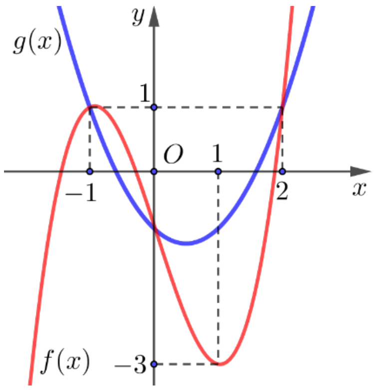
» **Chọn** SAI.

(d) *Hàm số nghịch biến trên* $\mathbb{R}$.

Từ đồ thị, ta có hàm số nghịch biến trên $(-2;0)$.

» **Chọn** SAI.

» **Câu 50.** Cho hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ có đồ thị là các đường cong như trong hình dưới đây.



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số $y=g(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x_0>1$.		
(b)	Hàm số $y=g(x)$ có hai điểm cực trị.		
(c)	Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có điểm cực tiểu là $x=1$.		
(d)	Giá trị cực đại của hàm số $y=f(x)$ là $y_0=1$.		

Lời giải

(a) *Hàm số* $y=g(x)$ *đạt cực tiểu tại điểm* $x_0>1$.

Dựa vào đồ thị, ta có hàm số $y=g(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $0<x_0<1$.

» **Chọn** SAI.

(b) *Hàm số* $y=g(x)$ *có hai điểm cực trị.*

Dựa vào đồ thị, ta có hàm số $y=g(x)$ có đúng một điểm cực trị.

» **Chọn** SAI.

(c) Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có điểm cực tiểu là $x=1$.

Dựa vào đồ thị, ta có điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ là điểm $\left(1;-3\right)$

» **Chọn** SAI.

(d) Giá trị cực đại của hàm số $y=f\left(x\right)$ là $y_0=1$.

Dựa vào đồ thị, ta có giá trị cực đại của hàm số $y=f\left(x\right)$ là $y_0=1$.

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 51.** Cho hàm số $f\left(x\right)=x+\dfrac{1}{x}$.

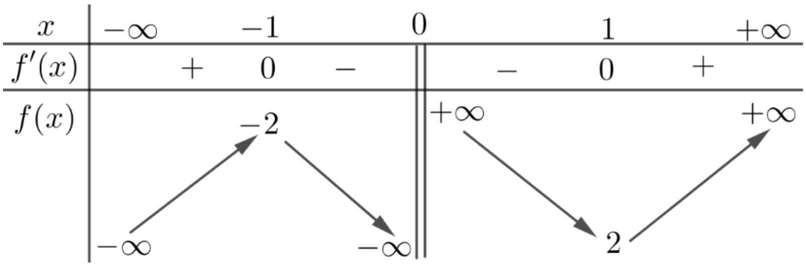
	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số nghịch biến trên $\left(-1;1\right)$.		
(b)	Hàm số nghịch biến trên $\left(-1;0\right)$ và $\left(0;1\right)$.		
(c)	Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.		
(d)	Hàm số đồng biến trên $\left(-\infty;-1\right)\cup\left(1;+\infty\right)$.		

Lời giải

Xét hàm số $f\left(x\right)=x+\dfrac{1}{x}$, xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$.

Ta có $f'\left(x\right)=1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2-1}{x^2}$, $f'\left(x\right)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên



(a) Hàm số nghịch biến trên $\left(-1;1\right)$.

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số nghịch biến trên $\left(-1;0\right)$ và $\left(0;1\right)$.

» **Chọn** SAI.

(b) Hàm số nghịch biến trên $\left(-1;0\right)$ và $\left(0;1\right)$.

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số nghịch biến trên $\left(-1;0\right)$ và $\left(0;1\right)$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đồng biến trên $\left(-\infty;-1\right)$ và $\left(1;+\infty\right)$ và nghịch biến trên $\left(-1;0\right)$ và $\left(0;1\right)$.

» **Chọn** SAI.

(d) Hàm số đồng biến trên $\left(-\infty;-1\right)\cup\left(1;+\infty\right)$.

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đồng biến trên $\left(-\infty;-1\right)$ và $\left(1;+\infty\right)$.

» **Chọn** SAI.

» Câu 52. Cho hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}-2x^2+3x+\dfrac{2}{3}$ có đồ thị (C).

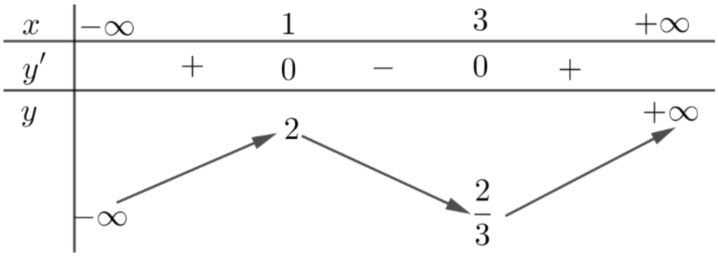
	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số đã cho có hai điểm cực trị.		
(b)	Giá trị cực tiểu của hàm số là $x=3$.		
(c)	Điểm cực đại của đồ thị hàm số đã cho là $x=1$.		
(d)	Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho là $\dfrac{\sqrt{13}}{13}$.		

Lời giải

(a) Hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

Ta có $y'=x^2-4x+3 \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:



Vậy hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.

» Chọn ĐÚNG.

(b) Giá trị cực tiểu của hàm số là $x=3$.

Từ bảng biến thiên, suy ra giá trị cực tiểu là $y_0=\dfrac{2}{3}$.

» Chọn SAI.

(c) Điểm cực đại của đồ thị hàm số đã cho là $x=1$.

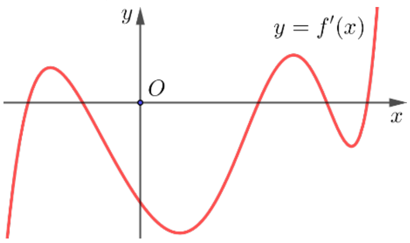
» Chọn SAI.

(d) Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho là $\dfrac{\sqrt{13}}{13}$.

Gọi $A(1;2)$, $B\left(3;\dfrac{2}{3}\right)$ là tọa độ hai điểm cực trị. Khi đó $AB=\dfrac{2\sqrt{13}}{3}$.

» Chọn SAI.

» Câu 53. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ liên tục và có đồ thị trên $\mathbb{R}$ như hình vẽ.



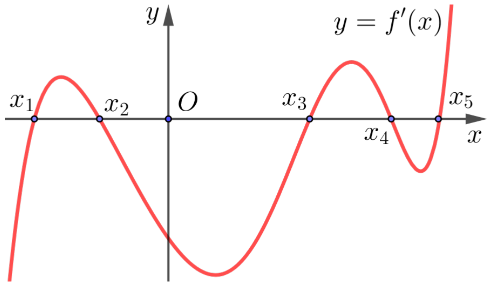
	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số $y=f(x)$ đã cho có 4 điểm cực trị.		
(b)	Hàm số $y=f(x)$ có 3 điểm cực tiểu.		
(c)	Hàm số $y=f(x)$ có 3 điểm cực đại.		

(d)	Hàm số $y=f(x)$ có 1 điểm cực đại dương.		

Lời giải

(a) Hàm số $y=f(x)$ đã cho có 4 điểm cực trị.

Ta có số điểm cực trị chính là số giao điểm của đồ thị $y=f'(x)$ với trục hoành.



Do đó hàm số đã cho có 5 điểm cực trị.

» **Chọn** SAI.

(b) Hàm số $y=f(x)$ có 3 điểm cực tiểu.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta thấy dấu của đạo hàm đổi từ âm sang dương khi qua 3 điểm $x=x_1;x=x_3;x=x_5$ (hình vẽ) nên hàm số $y=f(x)$ có 3 điểm cực tiểu.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) Hàm số $y=f(x)$ có 3 điểm cực đại.

Hàm số $y=f(x)$ có 2 điểm cực đại là $x=x_2;x=x_4$.

» **Chọn** SAI.

(d) Hàm số $y=f(x)$ có 1 điểm cực đại dương.

Hàm số $y=f(x)$ có 1 điểm cực đại dương.

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 54.** Cho hàm số $y=x^3+(m+1)x^2+3x+2$ (tham số m). Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Đạo hàm của hàm số là $y'=3x^2+2(m+1)x+3$		
(b)	Khi $m=-1$ thì hàm số đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$		
(c)	Có 3 giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=x^3+(m+1)x^2+3x+2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$		
(d)	Có 6 giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^3+(m+1)x^2+3x+2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$		

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

(a) Đạo hàm của hàm số là $y'=3x^2+2(m+1)x+3$

Ta có: $y'=3x^2+2(m+1)x+3$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) Khi $m=-1$ thì hàm số đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$

Khi $m=-1$ ta có $y'=3x^2+3>0$ nên hàm số luôn đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) *Có 3 giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = x^3 + (m+1)x^2 + 3x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$*

Hàm số $y = x^3 + (m+1)x^2 + 3x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \Delta' = (m+1)^2 - 9 \leq 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 8 \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 2.$

Vậy $m \in [-4;2]$ do đó có 7 giá trị nguyên của tham số m.

» Chọn SAI.

(d) *Có 6 giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^3 + (m+1)x^2 + 3x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$*

» Chọn SAI.

» Câu 55. Cho hàm số $y = (m^2 - 1)x^3 + (m-1)x^2 - x + 4$ (tham số m). Khi đó

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Khi $m = 1$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$		
(b)	Khi $m = 0$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$		
(c)	Khi $m = 3$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$		
(d)	Tổng các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = (m^2 - 1)x^3 + (m-1)x^2 - x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ bằng 2		

Lời giải

Ta có $y' = 3(m^2 - 1)x^2 + 2(m-1)x - 1$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty) \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 3(m^2 - 1)x^2 + 2(m-1)x - 1 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

✓ ***Trường hợp 1:*** $m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

+ Với $m = 1$, ta được $-1 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (luôn đúng), suy ra $m = 1$ (nhận). $(*)$

+ Với $m = -1$, ta được $-4x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{4}$, suy ra $m = -1$ (loại).

✓ ***Trường hợp 2:*** $m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$.

Ta có $\Delta' = (m-1)^2 + 3(m^2 - 1) = m^2 - 2m + 1 + 3m^2 - 3 = 4m^2 - 2m - 2$.

Để $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ 4m^2 - 2m - 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ -\frac{1}{2} \leq m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m < 1$.

Tổng hợp lại, ta có tất cả giá trị m cần tìm là $-\frac{1}{2} \leq m \leq 1$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$, suy ra $m \in \{0;1\}$, nên có 2 giá trị nguyên của tham số m. $(**)$

Vậy tổng các giá trị nguyên của tham số m ta được bằng 1 $(***)$

(a) *Khi $m = 1$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$*

Từ $(*)$ nên mệnh đề sai

» Chọn SAI.

(b) *Khi $m = 0$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$*

Với $m=0$ ta có $y'=-3x^2-2x-1<0\forall x\in(-\infty;+\infty)$

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) Có 3 giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

Từ $(**)$ nên mệnh đề sai

» **Chọn** SAI.

(d) Tổng các giá trị nguyên của tham số m *để hàm số* $y=(m^2-1)x^3+(m-1)x^2-x+4$ *nghịch biến trên khoảng* $(-\infty;+\infty)$ *bằng 2*

Từ $(***)$ nên mệnh đề sai

» **Chọn** SAI.

» Câu 56. Cho hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+m}$ (tham số m). Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Khi $m=1$ thì hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định của nó		
(b)	Khi $m=4$ thì hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định của nó		
(c)	Tập hợp tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-6)$ là $(3;6]$		
(d)	Tập hợp tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-6)$ là $(3;6]$		

Lời giải

Hàm số xác định khi: $x+m\neq 0\Leftrightarrow x\neq -m$.

Ta có $y=\dfrac{x+3}{x+m}\Rightarrow y'=\dfrac{m-3}{(x+m)^2}$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-6)$ khi và chỉ khi: $\begin{cases} y'<0,\forall x\in(-\infty;-6) \\ -m\notin(-\infty;-6)\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases} m-3<0 \\ -m\in[-6;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m<3 \\ -m\geq -6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m<3 \\ m\leq 6\end{cases}\Leftrightarrow m<3$.

Vậy: $m\in(-\infty;3)$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-6)$ khi và chỉ khi: $\begin{cases} y'>0,\forall x\in(-\infty;-6) \\ -m\notin(-\infty;-6)\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases} m-3>0 \\ -m\in[-6;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m>3 \\ -m\geq -6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m>3 \\ m\leq 6\end{cases}\Leftrightarrow 3<m\leq 6$.

Vậy: $m\in(3;6]$.

(a) Khi $m=1$ *thì hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định của nó*

Với $m=1\Rightarrow y'=\dfrac{-2}{(x+1)^2}<0\ \forall x\in(-\infty;-1);(-1;+\infty)$

» **Chọn** Đúng.

(b) *Khi $m=4$ thì hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định của nó*

Vì hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định của nó $\Leftrightarrow m<3$

» **Chọn** SAI.

(c) *Tập hợp tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-6)$ là $(3;6]$*

Tập hợp tham số m để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định của nó: $m\in(-\infty;3)$

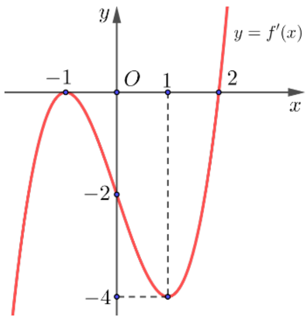
» **Chọn** SAI.

(d) *Tập hợp tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-6)$ là $(3;6]$*

Tập hợp tham số m để hàm số đồng biến trên $(-\infty;-6)$: $m\in(3;6]$

» **Chọn** Đúng.

» **Câu 57.** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x)=f(x^2-2)$.



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0;2)$.		
(b)	Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.		
(c)	Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1;0)$.		
(d)	Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-2)$.		

Lời giải

Ta có $g'(x)=(x^2-2)'.f'(x^2-2)=2x.f'(x^2-2)$.

Hàm số nghịch biến khi $g'(x)\le 0\Leftrightarrow x.f'(x^2-2)\le 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le 0\\ f'(x^2-2)\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 0\\ f'(x^2-2)\le 0\end{cases}\end{array}\right.$

Từ đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ, ta thấy

$$f'(x)\le 0\Leftrightarrow x\le 2 \text{ và } f'(x)\ge 0\Leftrightarrow x\ge 2.$$

+ Với $\begin{cases}x\le 0\\ f'(x^2-2)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 0\\ x^2-2\ge 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 0\\ x^2\ge 4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 0\\ \left[\begin{array}{l}x\ge 2\\ x\le -2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x\le -2$.

+ Với $\begin{cases} x \geq 0 \\ f'\left(x^2 - 2\right) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 2 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$.

(a) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0;2)$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1;0)$.

Hàm số đồng biến trên $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$

Do $(-1;0) \subset (-2;0)$ nên hàm số đồng biến trên $(-1;0)$.

» **Chọn** SAI.

(d) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-2)$.

» **Chọn** ĐÚNG.

» Câu 58. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$. Đặt $g(x) = 3f\left(f(x)\right) + 4$.

	Mệnh đề	**Đúng**	**Sai**
(a)	Hàm số $g(x)$ có 8 điểm cực trị.		
(b)	Hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực đại.		
(c)	Hàm số $g(x)$ có 4 điểm cực tiểu.		
(d)	Điểm $x_0 = 0$ là điểm cực tiểu của hàm số $y = g(x)$.		

Lời giải

(a) Hàm số $g(x)$ có 8 điểm cực trị.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Ta có $g'(x) = 3f'(x).f'\left(f(x)\right)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f'\left(f(x)\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \\ x^3 - 3x^2 + 4 = 0 \\ x^3 - 3x^2 + 4 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -1 \\ x = 2 (nghiem\, kep) \\ x = 1 \\ x = 1 - \sqrt{3} \\ x = 1 + \sqrt{3} \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$1-\sqrt{3}$		0		1		2		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	0	+	0	−	0	+	0	−	0	+	
$g(x)$		↗		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Vậy hàm số đã cho có 6 điểm cực trị.

» **Chọn** SAI.

(b) *Hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực đại.*

Từ bảng biến thiên, suy ra Hàm số có 3 điểm cực đại.

» Chọn ĐÚNG.

(c) *Hàm số $g(x)$ có 4 điểm cực tiểu.*

Hàm số có 3 điểm cực tiểu.

» Chọn SAI.

(d) *Điểm $x_0 = 0$ là điểm cực tiểu của hàm số $y = g(x)$.*

Điểm $x_0 = 0$ là điểm cực đại của hàm số $y = g(x)$.

Chọn SAI.

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» Câu 59. Hãy xác định số khoảng đồng biến của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$?

Lời giải

✓Trả lời: 2

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

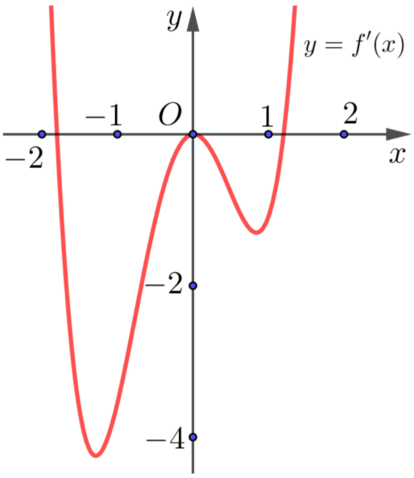
Ta có $y' = 3x^2 - 6x - 9$, $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 3$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-28	$\nearrow$	$+\infty$

Qua bảng biến thiên ta thấy hàm số có 2 khoảng đồng biến là $(-\infty; -1)$ và $(3; +\infty)$.

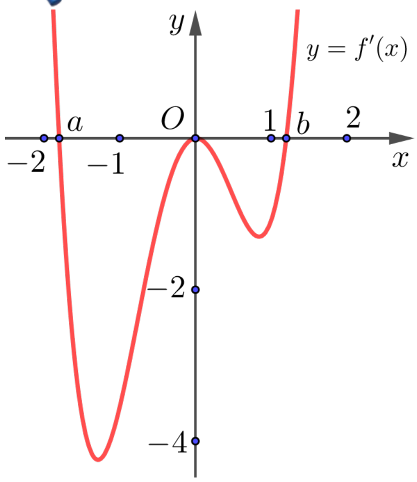
» Câu 60. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục và có đồ thị trên $\mathbb{R}$ như hình vẽ



Giả sử hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a;b)$. Trong khoảng $(a;b)$ có bao nhiêu giá trị nguyên nhỏ hơn 2024.

Lời giải

✓Trả lời: 3



Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$, ta có hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(a;b)$ với $-2<a<-1$ và $1<b<2$.

Do đó, trong khoảng $(a;b)$ có 3 số nguyên nhỏ hơn 2024.

» Câu 61. Cho hàm số $f'(x)=x(x^2-1)(x+1)^3$. Hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

Lời giải

✓Trả lời: 1

Ta có $f'(x)=x(x^2-1)(x+1)^3=0 \Leftrightarrow x=0,\ x=1,\ x=-1$.

Mà $x=-1$ là nghiệm bội bậc chẵn. Nên ta được bảng xét dấu của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta được $x=0$ là điểm cực đại của hàm số $y=f(x)$. Do đó, hàm số $y=f(x)$ có 1 điểm cực đại.

» Câu 62. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$+$	0	$+$	

Hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Lời giải

✓Trả lời: 2

Vì hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R và đạo hàm đổi dấu hai lần nên hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.

» Câu 63. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^3-3mx^2+3(2m-1)+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

✓Trả lời: 1

$y'=3x^2-6mx+3(2m-1)$

Ta có: $\Delta'=(-3m)^2-3.3.(2m-1)$. Để hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $\Delta'\le 0$

$\Leftrightarrow 9m^2-18m+9<0 \Leftrightarrow 9(m^2-2m+1)\le 0 \Leftrightarrow 9(m-1)^2\le 0 \Leftrightarrow m=1$.

» Câu 64. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\frac{m}{3}x^3-2mx^2+(3m+5)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

✓Trả lời: 6

Ta có $y'=mx^2-4mx+3m+5$.

Với $a=0\Leftrightarrow m=0\Rightarrow y'=5>0$. Vậy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Với $a\neq 0\Leftrightarrow m\neq 0$. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$y'\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ (2m)^2-m(3m+5)\leq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ m^2-5m\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ 0\leq m\leq 5\end{cases}\Leftrightarrow 0<m\leq 5.$$

Vì $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{0;1;2;3;4;5\}$.

» Câu 65. Cho hàm số $y=\frac{mx-2m+3}{x+m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$. Tìm số phần tử của S.

Lời giải

✓Trả lời: 3

Điều kiện xác định: $x\neq -m$.

Ta có: $y'=\frac{m^2+2m-3}{(x+m)^2}$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$ thì:

$$\begin{cases}y'<0;\forall x\in(2;+\infty)\\ x\neq -m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2+2m-3<0\\ -m\leq 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3<m<1\\ m\geq -2\end{cases}\Leftrightarrow -2\leq m<1.$$

Vậy giá trị nguyên của m là $S=\{-2;-1;0\}$.

» Câu 66. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\frac{x+18}{x+4m}$ nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$?

Lời giải

✓Trả lời: 5

Điều kiện $x\neq -4m$.

Ta có $y=\frac{x+18}{x+4m}\Rightarrow y'=\frac{4m-18}{(x+4m)^2}$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y'<0\\ -4m\notin(2;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4m-18<0\\ -4m\leq 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<\frac{9}{2}\\ m\geq -\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\leq m<\frac{9}{2}.$$

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{0;1;2;3;4\}$. Vậy có 5 giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+18}{x+4m}$ nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

» **Câu 67.** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x^2}{2}-mx+\ln(x-1)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

Lời giải

✓*Trả lời: 3*

Ta có $y'=x-m+\dfrac{1}{x-1}$.

Để hàm số $y=\dfrac{x^2}{2}-mx+\ln(x-1)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ thì $y'\ge 0$ với $\forall x\in(1;+\infty)$

$\Leftrightarrow x+\dfrac{1}{x-1}\ge m$ với $\forall x\in(1;+\infty)\Rightarrow m\le \min\limits_{(1;+\infty)} f(x)$.

Xét hàm số $f(x)=x+\dfrac{1}{x-1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$ ta có

$f(x)=x-1+\dfrac{1}{x-1}+1\ge 2\sqrt{(x-1)\dfrac{1}{(x-1)}}+1\ge 3\Rightarrow \min\limits_{(1;+\infty)} f(x)=3$. Do $m\in\mathbb{Z}^+$ nên $m\in\{1;2;3\}$.

» **Câu 68.** Cho hàm số $f(x)=x^2-2x$. Đặt $g(x)=f(f(x))+1$. Giả sử hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(a;b)$ với $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$. Tính $a+b\sqrt{2}$.

Lời giải

✓*Trả lời: 1*

Ta có $f'(x)=2x-2$, $g'(x)=f'(x).f'(f(x))$

Theo đề ta có, $g(x)$ đồng biến $\Leftrightarrow g'(x)\ge 0\Leftrightarrow f'(x).f'(f(x))\ge 0$

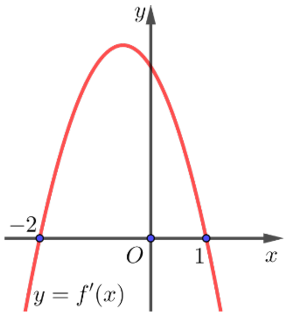
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}f'(x)\ge 0\\ f'(f(x))\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}f'(x)\le 0\\ f'(f(x))\le 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 1\\ f(x)\ge 1\end{cases}\\ \begin{cases}x\le 1\\ f(x)\le 1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 1\\ x^2-2x-1\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}x\le 1\\ x^2-2x-1\le 0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 1\\ \left[\begin{array}{l}x\ge 1+\sqrt{2}\\ x\le 1-\sqrt{2}\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x\le 1\\ 1-\sqrt{2}\le x\le 1+\sqrt{2}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\ge 1+\sqrt{2}\\ 1-\sqrt{2}\le x\le 1\end{array}\right.$$

$\Rightarrow y=g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(1-\sqrt{2};\,1)$ và $(1+\sqrt{2};\,+\infty)$.

Theo đề bài ta có $a=1-\sqrt{2}$ và $b=1$. Khi đó, $a+b\sqrt{2}=1-\sqrt{2}+\sqrt{2}=1$.

» **Câu 69.** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Giả sử hàm số $g\left(x\right)=2f\left(x^2-3x\right)+5$ nghịch biến trên khoảng $\left(a;b\right)$ với $a\in\mathbb{Q}$, $b\in\mathbb{Q}$. Tính $2a+3b$.

Lời giải

✓Trả lời: 9

Ta có $g'\left(x\right)=2\left(2x-3\right)f'\left(x^2-3x\right)$.

Hàm số $g\left(x\right)=2f\left(x^2-3\right)+5$ nghịch biến $\Leftrightarrow g'\left(x\right)\le 0\Leftrightarrow 2\left(2x-3\right)f'\left(x^2-3x\right)\le 0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}2x-3\le 0\\ f'\left(x^2-3x\right)\ge 0\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}2x-3\ge 0\\ f'\left(x^2-3x\right)\le 0\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x\le\dfrac{3}{2}\\ -2\le x^2-3x\le 1\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x\ge\dfrac{3}{2}\\ \left[\begin{array}{l}x^2-3x\ge 1\\ x^2-3x\le -2\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x\le\dfrac{3}{2}\\ \left[\begin{array}{l}\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}\le x\le 1\\ 2\le x\le\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\end{array}\right.\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x\ge\dfrac{3}{2}\\ \left[\begin{array}{l}x\ge\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\\ x\le\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}\\ 1\le x\le 2\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}\le x\le 1\\ \dfrac{3}{2}\le x\le 2\\ x\ge\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\end{array}\right.$$

Vậy hàm số $y=g\left(x\right)$ nghịch biến trên các khoảng $\left(\dfrac{3-\sqrt{13}}{2};1\right)$, $\left(\dfrac{3}{2};2\right)$.

Mà $a\in\mathbb{Q}$ và $b\in\mathbb{Q}$ nên ta được $a=\dfrac{3}{2}$ và $b=2\Rightarrow 2a+3b=9$.

» Câu 70. Giả sử sự lây lan của một loại virus ở một địa phương có thể được mô hình hoá bằng hàm số $N\left(t\right)=-t^3+12t^2$, $0\le t\le 12$, trong đó N là số người bị nhiễm bệnh (đơn vị là trăm người) và t là thời gian (tuần). Gọi $\left(a;b\right)$ là khoảng thời gian lâu nhất mà số người bị nhiễm bệnh tăng lên. Tính giá trị $P=2a^2-b^2$.

Lời giải

✓Trả lời: -64

Ta có $N'(t)=-3t^2+24t=0\Rightarrow t=0;t=8$. Bảng biến thiên như sau:

t	0		8		12
N'	0	$+$	0	$-$	
N	0	$\nearrow$	256	$\searrow$	0

Số người bị nhiễm bệnh tăng trên khoảng thời gian $(0;8)$.

Vậy $P = 2\cdot 0^2 - 8^2 = -64$.

» Câu 71. Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x) = e^{2x} - 5e^x + 2x + 1$. Tính diện tích của tam giác OAB. Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm.

Lời giải

✓Trả lời: 2,17

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $f'(x) = 2e^{2x} - 5e^x + 2 = 0$, suy ra nghiệm như sau:

$e^x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\ln 2 \Rightarrow y = \dfrac{-5}{4} - 2\ln 2$;

$e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2 \Rightarrow y = -5 + 2\ln 2$.

Hai điểm cực trị là $A\left(-\ln 2; \dfrac{-5}{4} - 2\ln 2\right)$ và $B(\ln 2; -5 + 2\ln 2)$.

Ta có $\overrightarrow{OA} = \left(-\ln 2; \dfrac{-5}{4} - 2\ln 2\right)$ và $\overrightarrow{OB} = (\ln 2; -5 + 2\ln 2)$.

Diện tích tam giác OAB là $S = \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\right| = \dfrac{25}{8}\ln 2 \approx 2{,}17$ (đơn vị diện tích).

Cách khác tính diện tích tam giác OAB như sau:

Ta có $OA = \sqrt{5\ln^2 2 + \dfrac{25}{16} + 5\ln 2} \approx 2{,}72589$; $OB = \sqrt{5\ln^2 2 + 25 - 20\ln 2} \approx 3{,}67958$;

$AB = \sqrt{20\ln^2 2 + \dfrac{225}{16} - 30\ln 2} \approx 1{,}69621$.

Công thức Hêrông: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \approx 2{,}17$.

» Câu 72. Gọi A, B, C là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x) = 2\ln(x^2+1) - x^2 - 1$. Tính $P = AB^2 + BC^2 + CA^2$. Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm.

Lời giải

✓Trả lời: 6,03

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $f'(x) = \dfrac{2x(1-x^2)}{x^2+1} = 0$, suy ra nghiệm như sau:

$x = -1 \Rightarrow y = 2\ln 2 - 2 \Rightarrow A(-1; 2\ln 2 - 2)$;

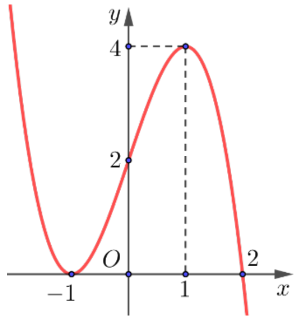
$x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow B(0;-1)$;

$x = 1 \Rightarrow y = 2\ln 2 - 2 \Rightarrow C(1; 2\ln 2 - 2)$.

Ta được $AB^2 = BC^2 = 2 - 4\ln 2 + 4\ln^2 2$; $AC^2 = 4$.

Vậy $P = 8 - 8\ln 2 + 8\ln^2 2 \approx 6,30$.

» Câu 73. Cho hàm số bậc ba $y = f\left(x\right)$ có đồ thị như hình bên



Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f\left(\ln\left(e^2 + x^2\right) - 1\right)$.

Lời giải

✓Trả lời: 1

Dựa vào đồ thị, ta được $f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow x = -1; x = 1$.

Ta có $y_x{}' = u_x{}' \cdot f_u{}' = \dfrac{2x}{1+x^2} \cdot f_u{}' = 0$, suy ra $x = 0$; $u = -1$; $u = 1$.

Dẫn đến $u = -1 \Leftrightarrow \ln\left(e^2 + x^2\right) - 1 = -1 \Leftrightarrow x^2 = 1 - e^2$ (vô lý);

và $u = 1 \Leftrightarrow \ln\left(e^2 + x^2\right) - 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 0$.

Vậy số điểm cực trị của hàm số đã cho bằng 1.

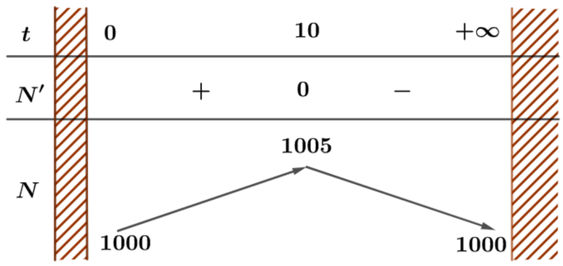
» Câu 74. Trong một thí nghiệm y học, người ta cấy 1000 vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. bằng thực nghiệm, người ta xác định được số lượng vi khuẩn thay đổi theo thời gian bởi công thức: $N(t) = 1000 + \dfrac{100t}{100+t^2}$ (con), trong đó t là thời gian tính bằng giây. Hỏi thời gian bằng bao nhiêu để số lượng vi khuẩn đạt cực đại?

Lời giải

✓Trả lời: 10

Ta có $N'\left(t\right) = \dfrac{100\left(100 - t^2\right)}{\left(100 - t^2\right)^2} = 0 \Leftrightarrow 100 - t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 10$ (vì $t > 0$).

Bảng biến thiên như sau



Vậy số lượng vi khuẩn đạt cực đại bằng 1005 khi $t = 10$.

» Câu 75. Giả sử tổng chi phí sản xuất x $\left(0 \le x \le 50\right)$ đơn vị sản phẩm A mỗi ngày tại một nhà máy được cho bởi công thức $C\left(x\right) = \dfrac{x^2}{4} + 3x + 400$ (nghìn đồng) và toàn bộ chúng được bán hết với giá $\left(900 - 6x\right)$ nghìn đồng một sản phẩm. Tìm mức sản lượng (đó là số lượng sản phẩm được sản xuất) để chi phí trung bình tính trên mỗi đơn vị sản phẩm là đạt cực tiểu.

Lời giải

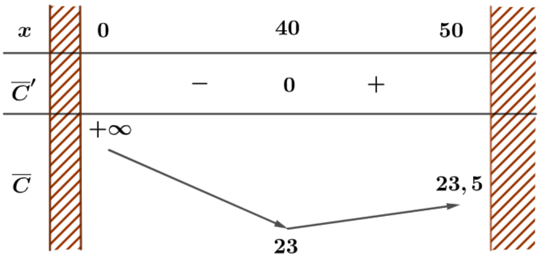
✓Trả lời: 40

Kí hiệu $\overline{C}(x)$ là chi phí trung bình tính trên mỗi đơn vị sản phẩm.

Ta có $\overline{C}(x)=\frac{C(x)}{x}=\frac{x}{4}+3+\frac{400}{x}$.

Đạo hàm: $\overline{C}'(x)=\frac{x^2-1600}{4x^2}=0\Leftrightarrow x=40$ (vì $0\le x\le 50$).

Bảng biến thiên như sau



Vậy mức sản lượng $x=40$.

---------------------Hết--------------------

Chương 01

Bài 2. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

A Lý thuyết

1. Định nghĩa

Định nghĩa:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D

- Số M được gọi là *giá trị lớn nhất* (**GTLN**) của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu $\begin{cases} f(x) \le M; \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = M \end{cases}$, ta kí hiệu $M = \max\limits_{x \in D} f(x)$ hoặc $M = \max\limits_{D} f(x)$.
- Số m được gọi là *giá trị nhỏ nhất* (**GTNN**) của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu $\begin{cases} f(x) \ge M; \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = M \end{cases}$, ta kí hiệu $m = \min\limits_{x \in D} f(x)$ hoặc $m = \min\limits_{D} f(x)$.

Chú ý

» Quy ước rằng khi nói GTLN và GTNN của hàm số $y = f(x)$ (mà không xét "trên tập D") thì ta hiểu đó là GTLN hay GTNN của $y = f(x)$ trên tập xác định của hàm số.

» Để tìm GTLN hay GTNN của hàm số trên tập D, ta thường lập bảng biến thiên của hàm số trên tập D để kết luận.

2. Tìm giá trị lớn nhất – nhỏ nhất trên đoạn

Cách tìm giá trị lớn nhất – nhỏ nhất trên đoạn.

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$:

- *Bước 1:* Tìm các điểm $x_1; x_2; ...; x_n$ thuộc $(a;b)$ sao cho $f'(x) = 0$.
- *Bước 2:* Tính $f(a); f(x_1); f(x_2); ...; f(x_n); f(b)$.
- *Bước 3:* Gọi M là số lớn nhất và m là số nhỏ nhất trong các giá trị ở Bước 2.
  Khi đó $M = \max\limits_{[a;b]} f(x)$ và $m = \min\limits_{[a;b]} f(x)$.

B Các dạng bài tập

Dạng 1. Giá trị lớn nhất – nhỏ nhất của hàm số trên đoạn

Phương pháp

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$:

» ***Bước 1:*** Tìm các điểm $x_1;x_2;...;x_n$ thuộc $(a;b)$ sao cho $f'(x)=0$.

» ***Bước 2:*** Tính $f(a);f(x_1);f(x_2);...;f(x_n);f(b)$

» ***Bước 3:*** Gọi M là số lớn nhất và m là số nhỏ nhất trong các giá trị ở Bước 2.
Khi đó $M=\max\limits_{[a;b]}f(x)$ và $m=\min\limits_{[a;b]}f(x)$.

Ví dụ 1.1.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-3x+1$ trên đoạn $[-2;2]$.

Lời giải

Ta có: $f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\ (n)\\x=-1(n)\end{array}\right.$

Ta có: $f(-2)=-1;\ f(-1)=3;\ f(1)=-1;\ f(2)=3$

Vậy $\max\limits_{[-2;2]}f(x)=3$ khi $\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right.$ và $\min\limits_{[-2;2]}f(x)=-1$ khi $\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=1\end{array}\right.$.

Ví dụ 1.2.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$

Lời giải

Điều kiện: $1-x^2\ge 0\Leftrightarrow -1\le x\le 1$.

Ta có: $f'(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{1-x^2}+x.\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}=0\Leftrightarrow 1-x^2-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\ (n)\\x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ (n)\end{array}\right.$

Ta có: $f(-1)=0;\ f\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{-1}{2};\ f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{1}{2};\ f(1)=0$

Vậy $\max\limits_{[-1;1]}f(x)=\dfrac{1}{2}$ khi $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ và $\min\limits_{[-1;1]}f(x)=\dfrac{-1}{2}$ khi $x=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$.

Dạng 2. Giá trị lớn nhất – nhỏ nhất của hàm số trên khoảng

Phương pháp

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên khoảng $(a;b)$

» ***Bước 1:*** Tìm điều kiện xác định của hàm số $y=f(x)$.

- $f(x)$ không liên tục trên $(a;b) \Rightarrow$ Không có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.
- $f(x)$ liên tục trên $(a;b) \Rightarrow$ Bước tiếp theo

» ***Bước 2:*** Tính đạo hàm $y'=f'(x)$.

» ***Bước 3:*** Tìm các điểm $f\ (x)$ thuộc $[a;b]$ sao cho

- $f'(x)=0$, hoặc
- $f'(x)$ không xác định.

» ***Bước 4:*** Lập bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ trên khoảng $(a;b)$ cho trước.

» ***Bước 5:*** Xác định điểm "cao nhất" và điểm "thấp nhất" của đồ thị hàm số trên $(a;b)$.

» ***Bước 6:*** Kết luận giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$.

⁂ ***Nhận xét:***

✓ Nếu đề bài không cho sẵn $(a;b)$ thì thường sẽ lấy luôn tập xác định làm khoảng phải xét.

✓ Đây là phương pháp tổng quát, tùy vào bài toán sẽ giản lược bớt 1 vài bước.

Ví dụ 2.2.

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=-x^2+2x+4$ trên khoảng $(0;3)$.

Lời giải

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số liên tục trên $(0;3)$.

Ta có: $y'=-2x+2 \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow x=1\ (n)$

x	0		1		3
y'	‖	$+$	0	$-$	‖
y	4	↗	5	↘	1

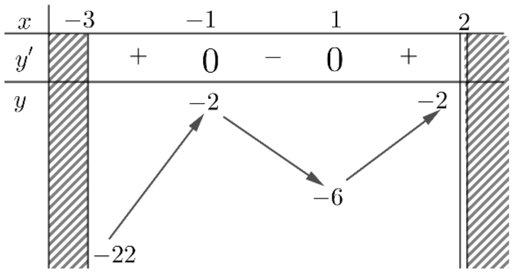
Từ bảng biến thiên, ta có $\max\limits_{(0;3)} y=5$ tại $x=1$.

Ví dụ 2.2.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $f(x)=x^3-3x-4$ trên $[-3;2)$.

Lời giải

Ta có: $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\ (n) \\ x=-1\ (n) \end{array}\right.$



Vậy $\max\limits_{[-3;2)} f(x)=-2$ khi $x=-1$ và $\min\limits_{[-3;2)} f(x)=-22$ khi $x=-3$.

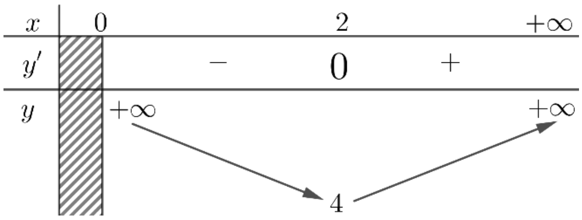
Ví dụ 2.3.

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x+\dfrac{4}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

Lời giải

Điều kiện: $x\neq 0$.

Ta có: $y'=1-\dfrac{4}{x^2} \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\in(0;+\infty) \\ x=-2\notin(0;+\infty) \end{array}\right.$.



Vậy: $\min\limits_{(0;+\infty)} y=y(2)=4$.

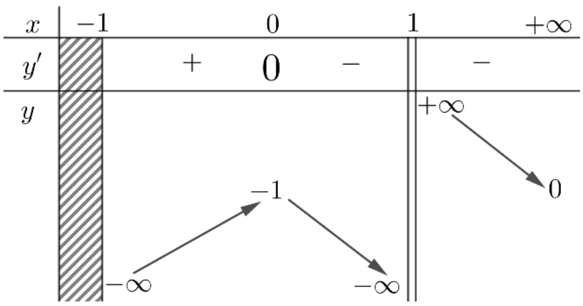
Ví dụ 2.3.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ trên $(-1;-\infty)$.

Lời giải

Điều kiện: $x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \pm 1$.

Ta có: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{-2x}{\left(x^2-1\right)^2}=0 \Leftrightarrow x=0\ (n)$.



Vậy hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

Dạng 3. Sử dụng cách đánh giá để tìm giá trị lớn nhất – nhỏ nhất

Phương pháp

Sử dụng bất đẳng thức thường gặp:

Bất đẳng thức Cô-si:

- Với hai số thực không âm: $a+b\ge 2\sqrt{ab}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b$.
- Với ba số thực không âm: $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.
- Với n thực không âm: $a_1+a_2+\ldots+a_n\ge n\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$.
  Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a_1=a_2=\ldots=a_n$.

Bất đẳng thức Bunhiacopxki

- Dạng cơ bản: $\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)\ge\left(ac+bd\right)^2$. Dấu "$=$" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.
- Dạng tổng quát:
  Với hai bộ số $\left(a_1,a_2,\ldots,a_n\right)$ và $\left(b_1,b_2,\ldots,b_n\right)$ ta có:
  $$\left(a_1^2+a_1^2+\ldots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2\right)\ge\left(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\right)^2$$
  Dấu "$=$" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}$.

Sử dụng "Tập giá trị" của hàm số lượng giác:

- Dựa vào tập giá trị của hàm số lượng giác: $\begin{cases}-1\le\sin x\le 1\\-1\le\cos x\le 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\le\sin^2 x\le 1\\0\le\cos^2 x\le 1\end{cases}$

Ví dụ 3.1.

Giả sử M và m lần lượt là GTLN và GTNN của hàm số $y=2+3\sin x$. Tính $M+m$.

Lời giải

Vì $-1\le\sin x\le 1,\forall x\in\mathbb{R}$ nên $-3\le 3\sin x\le 3\Leftrightarrow -1\le 2+3\sin x\le 5$.

$M=5$, đạt được khi $\sin x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

$m=-1$, đạt được khi $\sin x=-1\Leftrightarrow x=\frac{-\pi}{2}+k2\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Suy ra $M+m=4$.

Ví dụ 3.2.

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right)=\frac{386x}{x^2+2x+5}$ với $x>0$.

Lời giải

Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có: $x+\frac{5}{x}\ge 2\sqrt{5}\Rightarrow x+\frac{5}{x}+2\ge 2\sqrt{5}+2$

$$\Rightarrow \frac{386}{x+\frac{5}{x}+2} \le \frac{386}{2\sqrt{5}+2} \Rightarrow f\left(x\right)=\frac{386x}{x^2+2x+5} \le \frac{386}{2\sqrt{5}+2}$$

Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow x=\frac{5}{x} \Leftrightarrow x^2=5 \Leftrightarrow x=\sqrt{5}$ (vì $x>0$)

Dạng 4. Ứng dụng giá trị lớn nhất – nhỏ nhất

Phương pháp

❖ Bài toán bất phương trình

» ***Bước 1:*** Chuyển bất phương trình đã cho về dạng $f(x)-g(x)\ge 0$ và tìm điều kiện tồn tại của bất phương trình

» ***Bước 2:*** Đặt hàm số $y=h(x)=f(x)-g(x)$,

Xét tính đơn điệu của $y=h(x)$ trên điều kiện xác định.

» ***Bước 3:*** Từ đó kết luận về giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

❖ Bài toán bất phương trình chứa tham số

Ta đưa bất phương trình đề bài cho về một trong các dạng sau

» $m\ge f(x)$ nghiệm đúng với mọi $x\in D$ thì $m\ge \max\limits_D f(x)$

» $m\le f(x)$ nghiệm đúng với mọi $x\in D$ thì $m\le \min\limits_D f(x)$

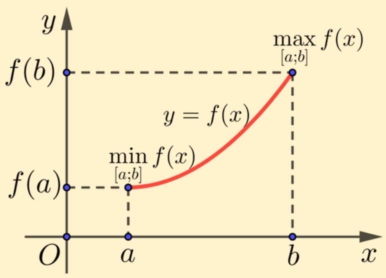
» $m\ge f(x)$ có nghiệm $x\in D$ thì $m\ge \min\limits_D f(x)$

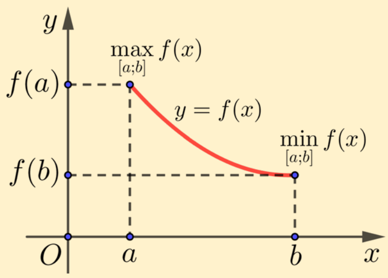
» $m\ge f(x)$ có nghiệm $x\in D$ thì $m\ge \min\limits_D f(x)$

⁂ ***Nhận xét:*** Nếu $y=f(x)$:

✓ *đồng biến* trên $[a;b]$ thì $\begin{cases}\min\limits_{[a;b]} f(x)=f(a)\\ \max\limits_{[a;b]} f(x)=f(b)\end{cases}$.

✓ *nghịch biến* trên $[a;b]$ thì $\begin{cases}\min\limits_{[a;b]} f(x)=f(b)\\ \max\limits_{[a;b]} f(x)=f(a)\end{cases}$





Ví dụ 4.1.

Tìm m bất để phương trình $x^3-3x-m>0$ có nghiệm $x\in[0;2]$?

Lời giải

$x^3-3x-m=0 \Leftrightarrow x^3-3x>m\,(1)$.

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x$ trên $[0;2]$ có $f'(x)=3x^2-3 \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\in[0;2]\\ x=-1\notin[0;2]\end{array}\right.$

Ta có $f(0)=0$; $f(1)=-2$; $f(2)=2$.

Suy ra $\max\limits_{[1;2]} f(x)=f(2)=2$.

Để bất phương trình (1) có nghiệm $x\in[0;2]$ thì $m\le \max\limits_{[0;2]} f(x)=2$

Ví dụ 4.2.

Giải bất phương trình: $\sqrt{5x-1}+\sqrt{x+3}\ge 4$

Lời giải

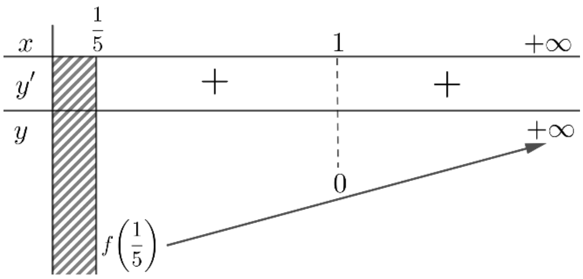
Điều kiện: $x\ge\frac{1}{5}$.

$\sqrt{5x-1}+\sqrt{x+3}\ge 4\Leftrightarrow\sqrt{5x-1}+\sqrt{x+3}-4\ge 0$.

Xét hàm số: $y=f(x)=\sqrt{5x-1}+\sqrt{x+3}-4$ liên tục trên nửa khoảng $\left[\frac{1}{5};+\infty\right)$.

Ta có: $f'(x)=\frac{5}{2\sqrt{5x-1}}+\frac{1}{2\sqrt{x+3}}>0,\forall x>\frac{1}{5}$

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\left[\frac{1}{5};+\infty\right)$.



Mặt khác: $f(1)=0$. Khi đó bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow f(x)\ge f(1)=0$.

Vậy nghiệm bất phương trình là : $x\ge 1$.

Ví dụ 4.3.

Giải bất phương trình: $\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}-\sqrt{4-x}\ge 2\sqrt{3}$

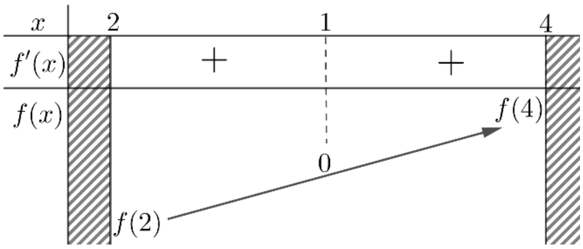
Lời giải

Điều kiện: $-2\le x\le 4$.

Xét $f(x)=\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}-\sqrt{4-x}-2\sqrt{3}$ trên $[-2;4]$.

Có $f'(x)=\frac{3\left(x^2+x+1\right)}{\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}}+\frac{1}{2\sqrt{4-x}}>0,\forall x\in(-2;4)$.

Do đó hàm số đồng biến trên $[-2;4]$

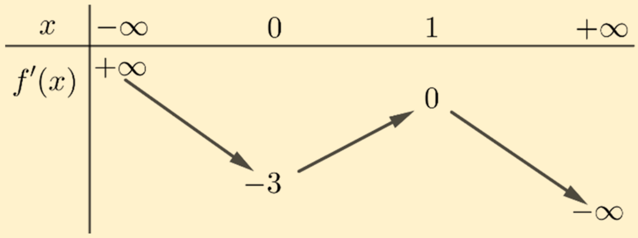


Mặt khác: $f(1)=0$. Khi đó bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow f(x)\ge f(1)=2\sqrt{3}\Leftrightarrow x\ge 1$.

So với điều kiện, tập nghiệm của bpt là $[1;4]$.

Ví dụ 4.4.

Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Biết bất phương trình $f(x)>\log x-m$ nghiệm đúng $\forall x\in(1;6)\Leftrightarrow m\geq \log a-f(a)$.

Tính $a-b$.

Lời giải

Ta có: $f(x)>\log x-m, \forall x\in(1;6)\Leftrightarrow m>\log x-f(x),\ \forall x\in(1;6)$.

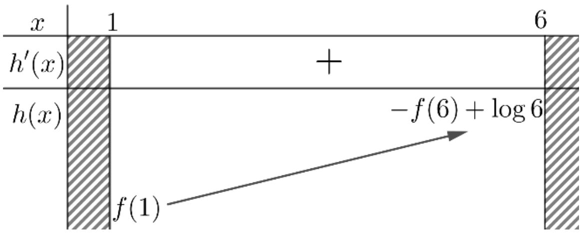
Xét hàm số: $h(x)=\log x-f(x)$ trên khoảng $(1;6)$.

Có $h'(x)=\dfrac{1}{x\ln 10}-f'(x)$.

Từ bảng biến thiên suy ra: $f'(x)<0, \forall x\in(1;6)$ và $\dfrac{1}{x\ln 10}>0, \forall x\in(1;6)$

$\Rightarrow h'(x)>0,\ \forall x\in(1;6)$.

Ta có bảng biến thiên của $h(x)$:



Từ bảng biến thiên suy ra để bất phương trình: $m>\log x-f(x),\ \forall x\in(1;6)$.

$\Leftrightarrow m\geq \log 6-f(6)$.

Suy ra $a=6; b=6$. Nên $a-b=0$.

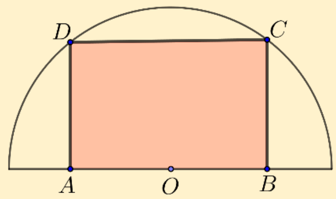
Dạng 5. Bài toán thực tế áp dụng giá trị lớn nhất - nhỏ nhất

Phương pháp

» ***Bước 1:*** Gọi ẩn và xác định điều kiện cho ẩn.
» ***Bước 2:*** Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn số và các đại lượng đã biết.
» ***Bước 3:*** Xét hàm số biểu thị đại lượng mà đề bài yêu cầu. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đó trên điều kiện của ẩn.
» ***Bước 4:*** Kết luận.

Ví dụ 5.1.

Tính diện tích lớn nhất $S_{\max}$ của một hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính $R = 6\text{cm}$ nếu một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc theo đường kính của hình tròn mà hình chữ nhật đó nội tiếp.



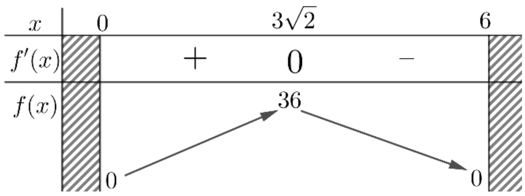
Lời giải

» Cách 1.

Gọi chiều dài $AD = 2x\left(0 < x < 6\right) \Rightarrow AB = \sqrt{36 - x^2}$.

Diện tích hình chữ nhật là $S = 2x\sqrt{36 - x^2}$.

Xét $f\left(x\right) = x\sqrt{36 - x^2}$ trên $\left(0;6\right)$, ta có $f'\left(x\right) = \sqrt{36 - x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{36 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3\sqrt{2}$.



Vậy giá tri lớn nhất của diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là 36cm^2.

» Cách 2.

Đặt $AB = CD = 2x\left(0 < x < 6\right)$. Khi đó $AD = \sqrt{DO^2 - AO^2} = \sqrt{36 - x^2}$.

Suy ra $S_{ABCD} = 2x\sqrt{36 - x^2} \le 2 \cdot \dfrac{x^2 + 36 - x^2}{2} = 36$.

Dấu bằng xảy ra khi $x = \sqrt{36 - x^2}$ hay $x = 3\sqrt{2}$.

Vậy giá tri lớn nhất của diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là 36cm^2.

Ví dụ 5.2.

Một doanh nghiệp cần sản xuất một mặt hàng trong đúng 10 ngày và phải sử dụng hai máy A và B. Máy A làm việc trong x ngày và cho số tiền lãi là $x^3 + 2x$ (triệu đồng), máy B làm việc trong y ngày và cho số tiền lãi là $326y - 27y^3$ (triệu đồng). Hỏi doanh nghiệp đó cần sử dụng máy A trong bao nhiêu ngày sao cho số tiền lãi là nhiều nhất? (Biết rằng hai máy A và B không đồng thời làm việc, máy B làm việc không quá 6 ngày).

Lời giải

Theo giả thiết :

- Thời gian làm việc của máy A là x ngày.
- Thời gian làm việc của máy B là y ngày.

Nên ta có $x+y=10 \Leftrightarrow y=10-x \qquad (*)$.

Và $0<y\le 6 \Rightarrow 4\le x<10$.

Số tiền lãi $f(x)=x^3+2x+326(10-x)-27(10-x)^3$ (thay $(*)$ vào).

$\Leftrightarrow f(x)=28x^3-810x^2+7776x-23740$ với $x\in[4;10)$.

Ta có $f'(x)=84x^2-1620x+7776$.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 84x^2-1620x+7776=0 \Leftrightarrow x=9 \vee x=\frac{72}{7}(l).$$

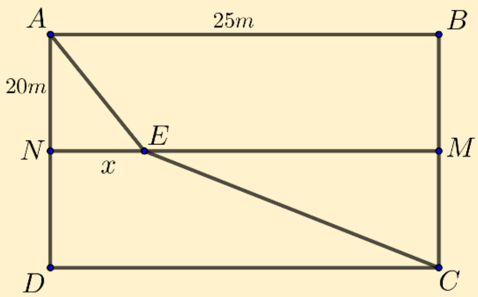
Bảng biến thiên.

x	4		9		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(4)$	$\nearrow$	$f(9)$	$\searrow$	$f(10)$

Từ BBT ta có $x=9$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 5.3.

Một mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB=25\,\text{m}$, chiều rộng $AD=20\,\text{m}$ được chia thành hai phần bằng nhau bởi vạch chắn MN (M,N lần lượt là trung điểm BC và AD). Một đội xây dựng làm một con đường đi từ A đến C qua vạch chắn MN, biết khi làm đường trên miền $ABMN$ mỗi giờ làm được 15m và khi làm trong miền $CDNM$ mỗi giờ làm được $30\,\text{m}$. Tính thời gian ngắn nhất mà đội xây dựng làm được con đường đi từ A đến C.



Lời giải

» Cách 1.

Do cần thời gian xây là ngắn nhất nên con đường làm trên mỗi miền phải là những đường thẳng.

Gọi AE và EC lần lượt là đoạn đường cần làm. Với $NE=x(\text{m})$ (với $0\le x\le 25$).

$\Rightarrow EM=25-x(\text{m})$.

Ta được $\begin{cases} AE=\sqrt{AN^2+EN^2}=\sqrt{100+x^2} \\ EC=\sqrt{MC^2+EM^2}=\sqrt{100+(25-x)^2} \end{cases}$.

$\Rightarrow$ Thời gian để làm đoạn đường từ A đến C là:

$$t(x)=\frac{AE}{15}+\frac{EC}{30}=\frac{\sqrt{100+x^2}}{15}+\frac{\sqrt{(25-x)^2+100}}{30}\ (\text{h}) \text{ (Với } 0\le x\le 25)$$

$\Rightarrow t'(x)=\dfrac{x}{15\sqrt{100+x^2}}-\dfrac{25-x}{30.\sqrt{(25-x)^2+100}}$.

Xét $t'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{15\sqrt{100+x^2}}-\dfrac{25-x}{30.\sqrt{(25-x)^2+100}}=0$

$\Leftrightarrow 2x\sqrt{(25-x)^2+100}=(25-x)\sqrt{100+x^2}$

$\Leftrightarrow 4x^2\left((25-x)^2+100\right)=(25-x)^2(100+x^2)$

$\Leftrightarrow 4x^2(25-x)^2+400x^2-100(25-x)^2-(25-x)^2x^2=0$.

$\Leftrightarrow 4(25-x)^2(x^2-25)+x^2\left(20^2-(25-x)^2\right)=0$

$\Leftrightarrow (x-5)\left(4(25-x)^2(x+5)+x^2(45-x)\right)=0 \Leftrightarrow x=5$

Ta được $\begin{cases} t(0)=\dfrac{4+\sqrt{29}}{6} \\ t(5)=\dfrac{2\sqrt{5}}{3} \\ t(25)=\dfrac{1+\sqrt{29}}{3} \end{cases}$.

Vậy thời gian ngắn nhất làm được con đường đi từ A đến C là $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}(\text{h})$.

» Cách 2.

Xét $t(x)=\dfrac{\sqrt{10^2+x^2}}{15}+\dfrac{\sqrt{(25-x)^2+10^2}}{30}=\dfrac{\sqrt{20^2+(2x)^2}+\sqrt{(25-x)^2+10^2}}{30}$ (Với $0\le x\le 25$).

Lại có $\sqrt{20^2+(2x)^2}+\sqrt{(25-x)^2+10^2}\ge\sqrt{(45-x)^2+(2x+10)^2}$ $\left(\text{do } |\vec{u}|+|\vec{v}|\ge|\vec{u}+\vec{v}|\right)$.

$\Leftrightarrow \sqrt{20^2+(2x)^2}+\sqrt{(25-x)^2+10^2}\ge\sqrt{5(x-5)^2+2000}$.

Do đó $t(x)\ge\dfrac{\sqrt{5(x-5)^2+2000}}{30}\ge\dfrac{\sqrt{2000}}{30}=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$.

Vậy $t(x)_{\min}=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}(\text{h})$ khi và chỉ khi $x=5\ (\text{m})$.

Vậy thời gian ngắn nhất làm được con đường đi từ A đến C là $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}(\text{h})$.

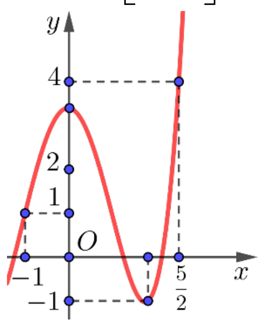
Chương 01

Bài 2. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

C. Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định, liên tục trên $\left[-1,\dfrac{5}{2}\right]$ và có đồ thị như hình vẽ.



Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f\left(x\right)$ trên $\left[-1,\dfrac{5}{2}\right]$ là

A. $M=4, m=1$. **B.** $M=4, m=-1$. **C.** $M=\dfrac{7}{2}, m=-1$. **D.** $M=\dfrac{7}{2}, m=1$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị $M=4,\ m=-1$.

» Câu 2. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên dưới đây.

x	$-\infty$		3		5		7		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[3;7\right]$. Ta có giá trị của $M+2m$ là

A. $M+2m=1$. **B.** $M+2m=7$. **C.** $M+2m=3$. **D.** $M+2m=4$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $M=\max\limits_{\left[3;7\right]} f\left(x\right)=5$ và $m=\min\limits_{\left[3;7\right]} f\left(x\right)=1$ nên $M+2m=7$.

» Câu 3. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[-3;2\right]$ và có bảng biến thiên như hình dưới đây. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên $\left[-1;2\right]$. Giá trị của $M+m$ bằng bao nhiêu?

x	-3		-1		0		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $M = \underset{[-1;2]}{Max} f(x) = f(-1) = 3$ và $m = \underset{[-1;2]}{Min} f(x) = f(0) = 0$.

Vậy $M + m = 3$.

» Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên đoạn $\left[-\sqrt{3};\sqrt{5}\right]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{5}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$2\sqrt{5}$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\underset{\left[-\sqrt{3};\sqrt{5}\right]}{\min} y = 0$. **B.** $\underset{\left[-\sqrt{3};\sqrt{5}\right]}{\max} y = 2$. **C.** $\underset{\left[-\sqrt{3};\sqrt{5}\right]}{\max} y = 2\sqrt{5}$. **D.** $\underset{\left[-\sqrt{3};\sqrt{5}\right]}{\min} y = 1$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào BBT có $\underset{\left[-\sqrt{3};\sqrt{5}\right]}{\min} y = -2$, $\underset{\left[-\sqrt{3};\sqrt{5}\right]}{\max} y = 2\sqrt{5}$

» Câu 5. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \dfrac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn $[0;2]$.

A. $M = 5$. **B.** $M = -5$. **C.** $M = \dfrac{1}{3}$. **D.** $M = -\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số đã cho xác định trên $[0;2]$.

Ta có: $y' = \dfrac{-8}{(x-3)^2} < 0, \forall x \in [0;2]$.

$y(0) = \dfrac{1}{3}$, $y(2) = -5$

Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho là $M = \dfrac{1}{3}$.

» Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

Giá trị lớn nhất của hàm số trên $\mathbb{R}$ là bao nhiêu?

A. $\underset{\mathbb{R}}{\text{Max}}\, y = -\dfrac{1}{2}$. **B.** $\underset{\mathbb{R}}{\text{Max}}\, y = -1$. **C.** $\underset{\mathbb{R}}{\text{Max}}\, y = 1$. **D.** $\underset{\mathbb{R}}{\text{Max}}\, y = 3$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng 3 tại $x = -\dfrac{1}{2}$.

» Câu 7. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -x + 3 - \dfrac{1}{x+2}$ trên nửa khoảng $\left[-4;-2\right)$.

A. $\underset{\left[-4;2\right)}{\min}\, y = 4$. **B.** $\underset{\left[-4;2\right)}{\min}\, y = 7$. **C.** $\underset{\left[-4;2\right)}{\min}\, y = 5$. **D.** $\underset{\left[-4;2\right)}{\min}\, y = \dfrac{15}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = -1 + \dfrac{1}{(x+2)^2}$.

Xét $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -3 \end{array}\right.$.

x	-4		-3		-2
y'		$-$	0	$+$	
y	$\dfrac{15}{2}$	$\searrow$	7	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $\underset{\left[-4;2\right)}{\min}\, y = 7$.

» Câu 8. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = -3x^4 + 4x^3 + 1$ bằng

A. 11. **B.** 0. **C.** 5. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = -12x^3 + 12x^2 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$. Khi đó ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên giá trị lớn nhất của hàm số bằng 2.

» Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	

Mệnh đề nào sau đây đúng

A. $\underset{(0;+\infty)}{\max} f(x) = f(1)$ **B.** $\underset{\left(-1;1\right]}{\max} f(x) = f(0)$

C. $\min\limits_{(-\infty;-1)} f(x)=f(-1)$ **D.** $\min\limits_{(-1;+\infty)} f(x)=f(0)$

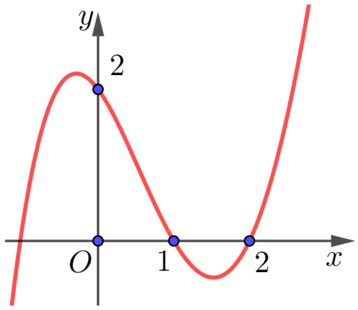
Lời giải

Chọn A

Dựa vào bảng xét dấu của đạo hàm ta có trong khoảng $(0;+\infty)$ hàm số có duy nhất một điểm cực trị và điểm đó là điểm cực đại của đồ thị hàm số.

Vậy trong khoảng $(0;+\infty)$ hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x=1$ hay $\max\limits_{(0;+\infty)} f(x)=f(1)$.

» Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$, hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Bất phương trình $f(x)<2x+m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x\in(0;2)$ khi và chỉ khi



A. $m>f(0)$. **B.** $m\ge f(2)-4$. **C.** $m\ge f(0)$. **D.** $m>f(2)-4$.

Lời giải

Chọn C

$f(x)<2x+m \Leftrightarrow m>f(x)-2x \Leftrightarrow m\ge \max\limits_{(0;2)}\left[f(x)-2x\right]$

Ta tìm $\max\limits_{[0;2]}\left[f(x)-2x\right]$. Đặt $g(x)=f(x)-2x \Rightarrow g'(x)=f'(x)-2$

Thấy rằng $\forall x\in[0;2], f'(x)-2<0$

$\Rightarrow \max\limits_{[0;2]} g(x)=g(0)=f(0)$

Vậy $m\ge f(0)$

» Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	-1		0		2		3
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	1

Gọi S là tập hợp các số nguyên dương m để bất phương trình $f(x)\ge m\left(x^3-3x^2+5\right)$ có nghiệm thuộc đoạn $[-1;3]$. Số phần tử của S là

A. 3 **B.** Vô số **C.** 2 **D.** 0

Lời giải

Chọn B

Gọi $g(x)=x^3-3x^2+5$ trên đoạn $[-1;3]$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

$g(-1)=1; g(0)=5; g(2)=1; g(3)=5 \Rightarrow 1\le g(x)\le 5, \forall x\in[-1;3]$

$f(x)\ge m(x^3-3x^2+5), \forall x\in[-1;3] \Leftrightarrow m\le \dfrac{f(x)}{g(x)}, \forall x\in[-1;3] \Leftrightarrow m\le \min\limits_{[-1;3]} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

Vì hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$

Suy ra tồn tại giá trị nhỏ nhất của hàm số $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ trên đoạn $[-1;3]$

Suy ra $m\in\left(-\infty; \min\limits_{[-1;3]}\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] \Rightarrow$ Số phần tử của tập hợp S là vô số

» Câu 12. Tìm m để bất phương trình $x+\dfrac{4}{x-1}\ge m$ có nghiệm trên khoảng $(-\infty;1)$.

A. $m\le 5$. **B.** $m\le -3$. **C.** $m\le 1$. **D.** $m\le -1$

Lời giải

Chọn B

$f(x)=x+\dfrac{4}{x-1} \Rightarrow f'(x)=1-\dfrac{4}{(x-1)^2}=\dfrac{(x-1)^2-4}{(x-1)^2}=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \quad (l) \\ x=-1\ (tm) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty$

Vậy $m\le -3$

» Câu 13. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$. Kí hiệu $M=\max\limits_{x\in[0;2]} f(x)$, $m=\min\limits_{x\in[0;2]} f(x)$. Khi đó $M+m$ bằng

A. $\dfrac{-4}{3}$. **B.** $\dfrac{-2}{3}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

$f'(x)=\dfrac{2}{(x+1)^2}>0, \forall x\in D$.

Suy ra $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ là hàm số liên tục và đồng biến trên $[0;2]$.

Vậy $M=\max\limits_{x\in[0;2]} f(x)=f(2)=\dfrac{1}{3}$, $m=\min\limits_{x\in[0;2]} f(x)=f(0)=-1 \Rightarrow M+m=\dfrac{1}{3}-1=\dfrac{-2}{3}$.

» Câu 14. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2x^3+3x^2-12x+2$ trên đoạn $[-1;2]$ đạt được tại x_0. Giá trị x_0 bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** -2. **D.** -1.

Lời giải

Chọn A

$y' = 6x^2 + 6x - 12$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in [-1;2] \\ x = -2 \notin [-1;2] \end{array}\right.$.

Khi đó: $y(-1) = 15$; $y(1) = -5$; $y(2) = 6$.

Vậy $\min\limits_{[-1;2]} y = y(1) \Rightarrow x_0 = 1$

» Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	

Mệnh đề nào sau đây đúng

A. $\max\limits_{(0;+\infty)} f(x) = f(1)$ **B.** $\max\limits_{(-1;1]} f(x) = f(0)$

C. $\min\limits_{(-\infty;-1)} f(x) = f(-1)$ **D.** $\min\limits_{(-1;+\infty)} f(x) = f(0)$

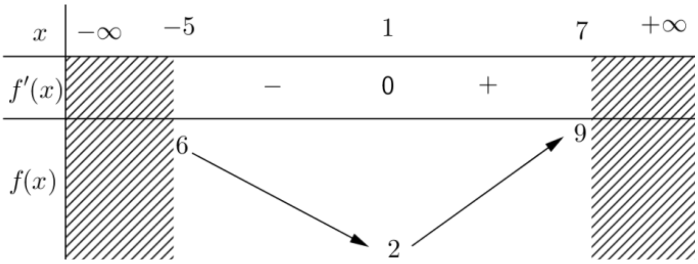
Lời giải

Chọn A

Dựa vào bảng xét dấu của đạo hàm ta có trong khoảng $(0;+\infty)$ hàm số có duy nhất một điểm cực trị và điểm đó là điểm cực đại của đồ thị hàm số.

Vậy trong khoảng $(0;+\infty)$ hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = 1$ hay $\max\limits_{(0;+\infty)} f(x) = f(1)$.

» Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ và có bảng biến thiên trên $[-5;7)$ như sau:



Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\min\limits_{[-5;7)} f(x) = 2$ và hàm số không đạt giá trị lớn nhất trên $[-5;7)$.

B. $\max\limits_{[-5;7)} f(x) = 6$ và $\min\limits_{[-5;7)} f(x) = 2$.

C. $\max\limits_{[-5;7)} f(x) = 9$ và $\min\limits_{[-5;7)} f(x) = 2$.

D. $\max\limits_{[-5;7)} f(x) = 9$ và $\min\limits_{[-5;7)} f(x) = 6$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào bảng biến thiên, ta nhận thấy:

- Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 2, đạt tại $x = 1 \in [-5;7)$.
- Ta có $\begin{cases} f(x) \le 9, \forall x \in [-5;7) \\ \lim\limits_{x \to 7^-} f(x) = 9 \end{cases}$. Mà $7 \notin [-5;7)$ nên không tồn tại $x_0 \in [-5;7)$ sao cho $f(x_0) = 9$. Do đó hàm số không đạt GTLN trên $[-5;7)$.

Vậy $\min\limits_{[-5;7)} f(x)=2$ và hàm số không đạt giá trị lớn nhất trên $[-5;7)$.

» Câu 17. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{t^2+t+4}{t+1}$ trên đoạn $[0;10]$

A. 3. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{114}{11}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $P=\dfrac{t^2+t+4}{t+1}=t+\dfrac{4}{t+1}, 0\le t\le 10.$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$P=\left(t+1+\dfrac{4}{t+1}\right)-1\ge 2\sqrt{(t+1).\dfrac{4}{t+1}}-1 \Leftrightarrow P\ge 3$.

Dấu "=" xảy ra khi $t=1$.

» Câu 18. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3-3x+4m-1=0$ có ít nhất một nghiệm thực trong $[-3;4]$.

A. $\dfrac{-51}{4}\le m\le\dfrac{19}{4}$. **B.** $\dfrac{-51}{4}<m<\dfrac{19}{4}$. **C.** $-51<m<19$. **D.** $-51\le m\le 19$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $x^3-3x+4m-1=0 \Leftrightarrow -x^3+3x+1=4m$.

Đặt $f(x)=-x^3+3x+1$.

Ta có $f(x)$ liên tục trên $[-3;4]$.

$f'(x)=-3x^2+3, f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$.

$f(-3)=19, f(4)=-51, f(-1)=-1, f(1)=3$.

Suy ra $\underset{[-3;4]}{\text{Max}}\, f(x)=19$ khi $x=-3$.

$\underset{[-3;4]}{\text{Min}}\, f(x)=-51$ khi $x=4$.

Để phương trình $x^3-3x+4m-1=0$ có ít nhất một nghiệm thực trong $[-3;4]$ thì

$-51\le 4m\le 19 \Leftrightarrow \dfrac{-51}{4}\le m\le\dfrac{19}{4}$

» Câu 19. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=2\cos x-\dfrac{4}{3}\cos^3 x$ trên $[0;\pi]$.

A. $\max\limits_{[0;\pi]} y=\dfrac{2}{3}$. **B.** $\max\limits_{[0;\pi]} y=\dfrac{10}{3}$. **C.** $\max\limits_{[0;\pi]} y=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\max\limits_{[0;\pi]} y=0$.

Lời giải

Chọn C

Đặt: $t=\cos x \Rightarrow t\in[-1;1] \Rightarrow y=2t-\dfrac{4}{3}t^3$.

$y' = 2 - 4t^2$ $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \in [-1;1] \\ x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \in [-1;1] \end{array}\right.$.

Tính: $y(-1) = \dfrac{-2}{3}$, $y\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{-2\sqrt{2}}{3}$, $y\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, $y(1) = \dfrac{2}{3}$.

Vậy: $\max\limits_{[0;\pi]} y = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

» Câu 20. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $\dfrac{x^2+3x+3}{x+1} \geq m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [0;1]$.

A. $m \geq \dfrac{7}{2}$. **B.** $m \leq 3$. **C.** $m \leq \dfrac{7}{2}$. **D.** $m \geq 3$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $f(x) = \dfrac{x^2+3x+3}{x+1}$.

Bất phương trình $\dfrac{x^2+3x+3}{x+1} \geq m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [0;1]$ khi và chỉ khi $m \leq \min\limits_{[0;1]} f(x)$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2} \geq 0$ với mọi $x \in [0;1] \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $[0;1]$.

$\Rightarrow \min\limits_{[0;1]} f(x) = f(0) = 3$.

Vậy $m \leq 3$.

» Câu 21. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0,035x^2(15-x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm (đơn vị miligam) cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất.?

A. $x = 8$. **B.** $x = 10$. **C.** $x = 15$. **D.** $x = 7$.

Lời giải

Chọn B

Đk: $x \in [0;15]$. (vì độ giảm huyết áp không thể là số âm)

Có $G'(x) = 0,035\left[2x(15-x) - x^2\right] = 0,105x(10-x) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 10 \end{array}\right.$.

$G(0) = 0$; $G(10) = \dfrac{35}{2}$; $G(15) = 0$.

Bảng biến thiên:

x	0		10		15
$G'(x)$		$+$	0	$-$	
$G(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{35}{2}$	$\searrow$	0

Vậy huyết áp bệnh nhân giảm nhiều nhất khi tiêm cho bệnh nhân liều $x=10$ miligam

» Câu 22. Sự ảnh hưởng khi sử dụng một loại độc tố với vi khuẩn X được một nhà sinh học mô tả bởi hàm số $P(t)=\dfrac{t+1}{t^2+t+4}$, trong đó $P(t)$ là số lượng vi khuẩn sau thời gian t sử dụng độc tố. Vào thời điểm nào thì số lượng vi khuẩn X bắt đầu giảm?

A. Ngay từ lúc bắt đầu sử dụng độc tố. **B.** Sau $0,5$ giờ.

C. Sau 2 giờ. **D.** Sau 1 giờ.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm $P(t)=\dfrac{t+1}{t^2+t+4}, t>0$ ta có $P'(t)=\dfrac{-t^2-2t+3}{\left(t^2+t+4\right)^2}=\dfrac{(t-1)(-t-3)}{\left(t^2+t+4\right)^2}$.

$P'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-3 \\ t=1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

t	0		1		$+\infty$
$P'(t)$		$+$	0	$-$	
$P(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có sau $1(h)$ thì vi khuẩn bắt đầu giảm.

» Câu 23. Cho hàm số $y=\dfrac{\sin x+m}{\sin x+2}$. Tìm tổng các giá trị của m để hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng -1.

A. -4. **B.** -2. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

- Nếu $m=2 \Rightarrow y=1$ không thỏa mãn
- Nếu $m\neq 2$. Đặt $t=\sin x,\left(t\in[-1;1]\right)$ hàm số trở thành $y=\dfrac{t+m}{t+2}\Rightarrow y'=\dfrac{2-m}{(t-2)^2}$

» Với $m<2: y'=\dfrac{2-m}{(t-2)^2}>0, \forall t\in[-1;1]$ khi đó hàm số liên tục và đồng biến trên $[-1;1]$ nên giá trị lớn nhất là $y(1)=\dfrac{1+m}{3}$.

Theo đề $\dfrac{1+m}{3}=-1 \Leftrightarrow m=-2$ (nhận).

» VVới $m>2: y'=\dfrac{2-m}{(t-2)^2}<0, \forall t\in[-1;1]$ khi đó hàm số liên tục và nghịch biến trên $[-1;1]$

nên giá trị lớn nhất là. $y(-1)=\dfrac{-1+m}{1}$, theo giả thuyết $-1+m=-1 \Leftrightarrow m=0$ (loại).

Vậy tổng các giá trị của m bằng -2.

» Câu 24. Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x+2020$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m sao cho hàm số có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y'=3x^2-6mx+3\left(m^2-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=m-1 \\ x_2=m+1 \end{array}\right.$.

Để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0;+\infty)$ thì $x_1 \le 0 < x_2$ hoặc $0 < x_1 < x_2$.

TH1: $x_1 \le 0 < x_2 \Leftrightarrow m-1 \le 0 < m+1 \Leftrightarrow -1 < m \le 1$. Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0;1\}$.

BBT của hàm số:

x	0		$m+1$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$	

TH2: $0 < x_1 < x_2$.

BBT của hàm số

x	0		$m-1$		$m+1$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Hàm số có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} m-1>0 \\ y(m+1) \le y(0) \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ (m+1)^3-3m(m+1)^2+3\left(m^2-1\right)(m+1)+2020 \le 2020 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ (m+1)^2(m-2) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ \left[\begin{array}{l} m \le 2 \\ m=-1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 1<m \le 2.$$

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m=2$.

Vậy $m \in \{0;1;2\}$.

» Câu 25. Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[2;4]} y=3$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $m>4$ **B.** $3<m \le 4$ **C.** $m<-1$ **D.** $1 \le m<3$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=\dfrac{-1-m}{(x-1)^2}$

» TH1: $-1-m>0\Leftrightarrow m<-1$

suy ra y đồng biến trên $[2;4]$

suy ra $\min\limits_{[2;4]} f(x)=f(2)=\dfrac{2+m}{1}=3\Leftrightarrow m=1$ (loại)

» TH2: $-1-m<0\Leftrightarrow m>-1$

suy ra y nghịch biến trên $[2;4]$

suy ra $\min\limits_{[2;4]} f(x)=f(4)=\dfrac{4+m}{3}=3\Leftrightarrow m=5$ suy ra $m>4$.

» Câu 26. Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[0;1]} y=3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $1\le m<3$ **B.** $m>6$ **C.** $m<1$ **D.** $3<m\le 6$

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

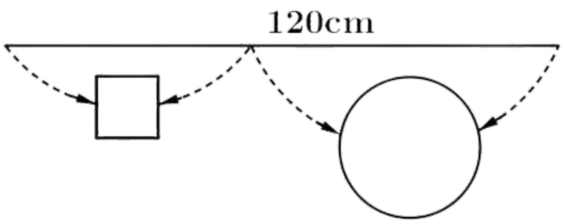
Với $m=1 \Rightarrow y=1,\ \forall x\in[0;1]$ thì $\min\limits_{[0;1]} y\ne 3$.

Suy ra $m\ne 1$. Khi đó $y'=\dfrac{1-m}{(x+1)^2}$ không đổi dấu trên từng khoảng xác định.

» TH1: $y'>0\Leftrightarrow m<1$ thì $\min\limits_{[0;1]} y=y(0)\Rightarrow m=3$ (loại).

» TH2: $y'<0\Leftrightarrow m>1$ thì $\min\limits_{[0;1]} y=y(1)\Rightarrow m=5$ (thỏa mãn).

» Câu 27. Một sợi dây kim loại dài 120cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất được uốn thành hình vuông, đoạn dây thứ hai được uốn thành vòng tròn **(tham khảo hình bên dưới)**.



Tổng diện tích của hình vuông và hình tròn đạt giá trị nhỏ nhất là **(làm tròn đến hàng đơn vị)**?

A. 504. **B.** 462. **C.** 426. **D.** 498.

Lời giải

Chọn A

Gọi độ dài là của đoạn dây thứ hai là x cm.

Khi đó, độ dài của đoạn dây thứ nhất là $(120-x)$cm $(0<x<120)$.

Khi đó cạnh hình vuông là $\frac{120-x}{4} \Rightarrow$ diện tích của hình vuông bằng $\left(\frac{120-x}{4}\right)^2$

Bán kính hình tròn là $\frac{x}{2\pi} \Rightarrow$ diện tích của hình tròn bằng $\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = \frac{x^2}{4\pi}$.

Tổng diện tích của hình vuông và hình tròn:

$$S(x) = \left(\frac{120-x}{4}\right)^2 + \frac{x^2}{4\pi} = \left(\frac{1}{4\pi} + \frac{1}{16}\right)x^2 - 15x + 900,\ (0 < x < 120).$$

Ta có $S(x)$ là một hàm số bậc hai, đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = \frac{120\pi}{4+\pi} \in (0;120)$.

Vậy $\min S(x) = S\left(\frac{120\pi}{4+\pi}\right) \approx 504cm^2$.

B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai

» Câu 28. Gọi giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[a;b]$ lần lượt là m và M. Xét tính đúng sai của mệnh đề sau.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$m = \min\limits_{[a;b]} f(x)$		
(b)	$m \le M$		
(c)	Với mọi $x \in [a;b]$ ta có $f(x) \ge m$		
(d)	Với mọi $x \in [a;b]$ ta có $f(x) < M$		

Lời giải

(a) $m = \min\limits_{[a;b]} f(x)$.

m là giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên $[a;b]$ được ký hiệu là $m = \min\limits_{[a;b]} f(x)$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) $m \le M$.

m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên $[a;b]$ thì $m \le M$.

» Chọn ĐÚNG.

(c) Với mọi $x \in [a;b]$ ta có $f(x) \ge m$.

m là giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên $[a;b]$, ta có $f(x) \ge m, \forall x \in [a;b]$.

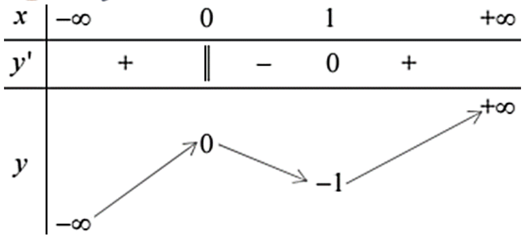
» Chọn ĐÚNG.

(d) Với mọi $x \in [a;b]$ ta có $f(x) < M$.

Ta có $M = \max\limits_{[a;b]} f(x) \Rightarrow \exists x_0 \in [a;b] : f(x_0) = M$.

» Chọn SAI.

» Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:



Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.		
(b)	Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.		
(c)	Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=1$.		
(d)	Hàm số có đúng một cực trị.		

Lời giải

(a) *Hàm số có giá trị cực tiểu bằng* 1.

Vì hàm số có giá trị cực tiểu $y=-1$ khi $x=0$.

» **Chọn** SAI.

(b) *Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng* -1.

Hàm số không có GTLN và GTNN trên $\mathbb{R}$.

» **Chọn** SAI.

(c) *Hàm số đạt cực đại tại* $x=0$ *và đạt cực tiểu tại* $x=1$.

Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=1$.

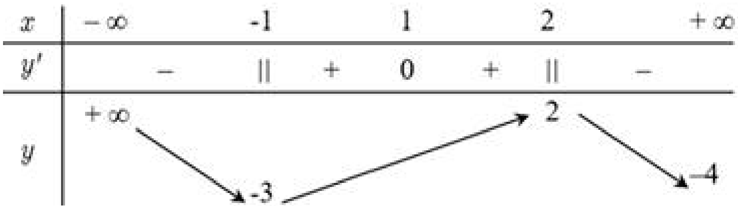
» **Chọn** ĐÚNG.

(d) *Hàm số có đúng một cực trị.*

Hàm số có 2 điểm cực trị.

» **Chọn** SAI.

» **Câu 30.** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình sau:



Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số có hai điểm cực trị.		
(b)	Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng -3.		
(c)	Hàm số đạt cực đại tại $x=2$.		
(d)	Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty;-1\right)$, $\left(2;+\infty\right)$.		

Lời giải

(a) Hàm số có hai điểm cực trị.

Dựa vào BBT ta thấy hàm số có điểm cực trị $x=-1; x=2$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng -3.

Dựa vào BBT ta thấy hàm số không tồn tại GTLN; GTNN.

» **Chọn** SAI.

(c) Hàm số đạt cực đại tại $x=2$

Dựa vào BBT ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x=2$

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$, $(2;+\infty)$.

Dựa vào BBT ta thấy hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-1)$, $(2;+\infty)$

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 31.** Gọi giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $(a;b)$ lần lượt là m và M. Xét tính đúng sai của mệnh đề sau.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$m<M$		
(b)	$f(a)=m$		
(c)	Với mọi $x\in(a;b)$ ta có $f(x)>m$		
(d)	Với mọi $x\in(a;b)$ ta có $m\le f(x)<M$		

Lời giải

(a) $m<M$.

Với $f(x)=0$ thì $m=\min\limits_{(0;1)} f(x)=0$ và $M=\max\limits_{(0;1)} f(x)=0$ thì $m=M$.

» **Chọn** SAI.

(b) $f(a)=m$.

Giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên $(a;b)$ không tính đến $f(a)$.

» **Chọn** SAI.

(c) Với mọi $x\in(a;b)$ ta có $f(x)>m$.

Ta có $m=\min\limits_{(a;b)} f(x)\Rightarrow \exists x_0\in(a;b): f(x_0)=m$.

» **Chọn** SAI.

(d) Với mọi $x\in(a;b)$ ta có $m\le f(x)<M$.

Ta có $\begin{cases} m=\min\limits_{(a;b)} f(x) \\ M=\max\limits_{(a;b)} f(x)\end{cases}\Rightarrow \forall x\in(a;b): m\le f(x)\le M$.

» **Chọn** SAI.

» **Câu 32.** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi m và M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Xét tính đúng sai của mệnh đề sau.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Phương trình $f(x)=m$ có nghiệm.		
(b)	Phương trình $f(x)=C$ vô nghiệm với $m\le C\le M$.		
(c)	Bất phương trình $f(x)>M$ vô nghiệm.		
(d)	Bất phương trình $f(x)>m$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.		

Lời giải

(a) Phương trình $f(x)=m$ có nghiệm.

Ta có $m=\min\limits_{\mathbb{R}} f(x)\Rightarrow \exists x_0\in\mathbb{R}: f(x_0)=m$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) Phương trình $f(x)=C$ vô nghiệm với $m\le C\le M$.

Với $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $m\le C\le M$ thì phương trình $f(x)=C$ luôn có nghiệm.

» **Chọn** SAI.

(c) Bất phương trình $f(x)>M$ vô nghiệm.

Ta có $M=\max\limits_{\mathbb{R}} f(x)\Rightarrow f(x)\le M,\forall x\in\mathbb{R}$. Do đó $f(x)>M$ vô nghiệm.

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) Bất phương trình $f(x)>m$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$

$m=\min\limits_{(a;b)} f(x)\Rightarrow \exists x_0\in(a;b): f(x_0)=m$. Đó đó tập nghiệm của $f(x)>m$ khác $\mathbb{R}$.

» **Chọn** SAI.

» **Câu 33.** Cho hàm số $y=x^3-3x+2$. Xét tính đúng sai của mệnh đề sau.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\min\limits_{[0;1]} y=0$		
(b)	$\min\limits_{[0;2]} y=y(0)$		
(c)	$\min\limits_{[-1;0]} y+\max\limits_{[0;1]} y=4$		
(d)	$\min\limits_{\left[-\frac{3}{2};0\right]}\frac{1}{y}=\frac{8}{25}$		

Lời giải

(a) $\min\limits_{[0;1]} y=0$.

Ta có $y'=3x^2-3$; $y'=0\Leftrightarrow x=\pm1$.

$f(0)=2; f(1)=0$. Vậy $\min\limits_{[0;1]} y=0$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) $\min\limits_{[0;2]} y=y(0)$.

Ta có $y'=3x^2-3$; $y'=0\Leftrightarrow x=\pm1$.

$f(0)=2; f(1)=0; f(2)=4$. Vậy $\min\limits_{[0;2]} y=f(1)$.

» **Chọn** SAI.

(c) $\min\limits_{[-1;0]} y+\max\limits_{[0;1]} y=4$.

Ta có $y'=3x^2-3$; $y'=0\Leftrightarrow x=\pm1$.

$f(0)=2; f(1)=0; f(-1)=4$. Suy ra $\min\limits_{[-1;0]} y=2; \max\limits_{[0;1]} y=2$. Vậy $\min\limits_{[-1;0]} y+\max\limits_{[0;1]} y=4$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) $\min\limits_{\left[-\frac{3}{2};0\right]} \frac{1}{y} = \frac{8}{25}$.

Ta có $g(x) = \frac{1}{y} = \frac{1}{x^3 - 3x + 2}$; $g'(x) = \frac{3x^2 - 3}{\left(x^3 - 3x + 2\right)^2}$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Và $g(-1) = \frac{1}{4}$; $g\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{8}{25}$; $g(0) = \frac{1}{2}$. Vậy $\min\limits_{\left[-\frac{3}{2};0\right]} \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$.

» Chọn SAI.

» Câu 34. Cho hàm số $y = 2\sin x - 1$. Khi đó

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\max\limits_{\mathbb{R}} y = 1$		
(b)	$\min\limits_{\mathbb{R}} y = -3$		
(c)	$\max\limits_{[0;\pi]} y = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$		
(d)	$\min\limits_{[0;\pi]} y = y(0) = -1$		

Lời giải

(a) $\max\limits_{\mathbb{R}} y = 1$.

Ta có $-1 \le \sin x \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $-3 \le 2\sin x - 1 \le 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Do đó $\max\limits_{\mathbb{R}} y = 1$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) $\min\limits_{\mathbb{R}} y = -3$.

Ta có $-1 \le \sin x \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $-3 \le 2\sin x - 1 \le 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Do đó $\min\limits_{\mathbb{R}} y = -3$.

» Chọn ĐÚNG.

(c) $\max\limits_{[0;\pi]} y = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Ta có $0 \le \sin x \le 1, \forall x \in [0;\pi]$ nên $-1 \le 2\sin x - 1 \le 1$, $\forall x \in [0;\pi]$. Do đó $\max\limits_{[0;\pi]} y = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

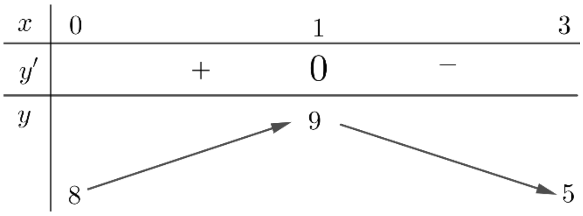
» Chọn ĐÚNG.

(d) $\min\limits_{[0;\pi]} y = y(0) = -1$.

Ta có $0 \le \sin x \le 1, \forall x \in [0;\pi]$ nên $-1 \le 2\sin x - 1 \le 1$, $\forall x \in [0;\pi]$. Do đó $\min\limits_{[0;\pi]} y = y(0) = -1$.

» Chọn ĐÚNG.

» Câu 35. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;3]$ và có bảng biến thiên như sau



	Mệnh đề	Đúng	Sai

(a)	Có 7 số nguyên m để phương trình $f\left(x\right)=m\left(x^4-2x^2+2\right)$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[0;3\right]$.		
(b)	Giá trị m lớn nhất để phương trình $f\left(x\right)=m\left(x^4-2x^2+2\right)$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[0;3\right]$ là 7.		
(c)	Giá trị m nhỏ nhất để phương trình $f\left(x\right)=m\left(x^4-2x^2+2\right)$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[0;3\right]$ là 3.		
(d)	Tổng các giá trị của m để phương trình $f\left(x\right)=m\left(x^4-2x^2+2\right)$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[0;3\right]$ là 45.		

Lời giải

Theo đề ta có $f\left(x\right)=m\left(x^4-2x^2+2\right)\Leftrightarrow m=\dfrac{f\left(x\right)}{x^4-2x^2+2}$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[0;3\right]$ $\left(*\right)$.

Đặt $h\left(x\right)=\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}$, trong đó $g\left(x\right)=x^4-2x^2+2$.

$$g'\left(x\right)=4x^3-4x;\ g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\in\left[0;3\right]\\x=1\in\left[0;3\right]\end{array}\right.,\ g\left(0\right)=2;g\left(1\right)=1;g\left(3\right)=65$$

Nên $\min\limits_{\left[0;3\right]}g\left(x\right)=g\left(1\right)=1;\ \max\limits_{\left[0;3\right]}g\left(x\right)=g\left(3\right)=65$.

Từ bảng biến thiên ta có: $\max\limits_{\left[0;3\right]}f\left(x\right)=f\left(1\right)=9;\ \min\limits_{\left[0;3\right]}f\left(x\right)=f\left(3\right)=5$.

Do đó $\min\limits_{\left[0;3\right]}h\left(x\right)=\dfrac{f\left(3\right)}{g\left(3\right)}=\dfrac{1}{13};\ \max\limits_{\left[0;3\right]}h\left(x\right)=\dfrac{f\left(1\right)}{g\left(1\right)}=9$.

Vậy $(*)\Leftrightarrow\dfrac{1}{13}\le m\le 9\Rightarrow m\in\{1,\ldots,9\}$.

(a) *Có 7 số nguyên m để phương trình $f\left(x\right)=m\left(x^4-2x^2+2\right)$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[0;3\right]$.*

Có 9 số nguyên m để phương trình $f(x)=m\left(x^4-2x^2+2\right)$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;3]$.

» **Chọn** SAI.

(b) *Giá trị m lớn nhất để phương trình $f\left(x\right)=m\left(x^4-2x^2+2\right)$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[0;3\right]$ là 7.*

Giá trị m lớn nhất để phương trình $f\left(x\right)=m\left(x^4-2x^2+2\right)$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[0;3\right]$ là 9.

» **Chọn** SAI.

(c) *Giá trị m nhỏ nhất để phương trình $f\left(x\right)=m\left(x^4-2x^2+2\right)$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[0;3\right]$ là 3.*

Giá trị m nhỏ nhất để phương trình $f\left(x\right)=m\left(x^4-2x^2+2\right)$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;3]$ là 1.

» **Chọn** SAI.

(d) *Tổng các giá trị của m để phương trình $f\left(x\right)=m\left(x^4-2x^2+2\right)$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[0;3\right]$ là 45.*

Tổng các giá trị của m để phương trình $f\left(x\right)=m\left(x^4-2x^2+2\right)$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[0;3\right]$ là 45.

» Chọn ĐÚNG.

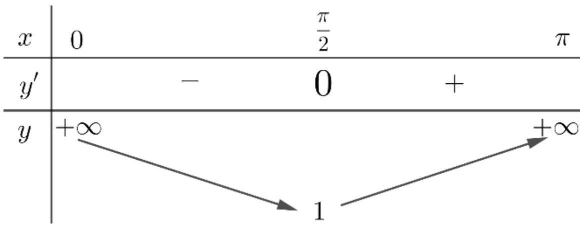
» Câu 36. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{\sin x}$. Khi đó

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{1}{\sin x}$ trên khoảng $\left(0;\pi\right)$ là 1.		
(b)	Không tồn tại giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{1}{\sin x}$ trên $\left(0;\pi\right)$.		
(c)	Không tồn tại giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{1}{\sin x}$ trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.		
(d)	Không tồn tại giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{1}{\sin x}$ trên $\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$.		

Lời giải

$y'=\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}$; $y'=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}\left(x\in\left(0;\pi\right)\right)$

Bảng biến thiên



Vậy $\min\limits_{\left(0;\pi\right)} y=1$ và $\max\limits_{\left(0;\pi\right)} y$ không tồn tại.

(a) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{1}{\sin x}$ *trên khoảng* $\left(0;\pi\right)$ *là* 1.

» Chọn ĐÚNG.

(b) Không tồn tại giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{1}{\sin x}$ *trên* $\left(0;\pi\right)$.

» Chọn ĐÚNG.

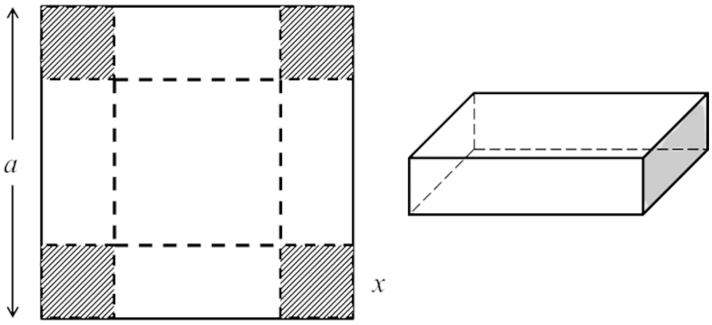
(c) Không tồn tại giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{1}{\sin x}$ *trên* $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

» Chọn ĐÚNG.

(d) Không tồn tại giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{1}{\sin x}$ *trên* $\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$.

» Chọn ĐÚNG.

» Câu 37. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh a. Người ta cắt ở 4 góc 4 hình vuông bằng nhau, rồi gập tấm nhôm lại để được một cái hộp không nắp.



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Ta có $0 < x < \frac{a}{2}$.		
(b)	Thể tích của khối hộp là: $V(x) = x(a-2x)^2 \left(0 < x < \frac{a}{2}\right)$.		
(c)	Thể tích của khối hộp lớn nhất bằng $\frac{2a^3}{9}$.		
(d)	Cạnh của hình vuông bị cắt sao cho thể tích của khối hộp là lớn nhất bằng $\frac{a}{6}$.		

Lời giải

Gọi x là độ dài cạnh của hình vuông bị cắt $\left(0 < x < \frac{a}{2}\right)$.

Thể tích của khối hộp là: $V(x) = x(a-2x)^2 \left(0 < x < \frac{a}{2}\right)$.

$V'(x) = (a-2x)^2 + x.2(a-2x).(-2) = (a-2x)(a-6x)$; $V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{6} \left(0 < x < \frac{a}{2}\right)$.

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{a}{6}$		$\frac{a}{2}$
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{2a^3}{27}$	$\searrow$	0

Vậy trong khoảng $\left(0;\frac{a}{2}\right)$ ta có $\max\limits_{\left(0;\frac{a}{2}\right)} V(x) = V\left(\frac{a}{6}\right) = \frac{2a^3}{27}$.

(a) Ta có $0 < x < \frac{a}{2}$.

Gọi x là độ dài cạnh của hình vuông bị cắt $\left(0 < x < \frac{a}{2}\right)$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) Thể tích của khối hộp là: $V(x) = x(a-2x)^2 \left(0 < x < \frac{a}{2}\right)$.

Thể tích của khối hộp là: $V(x) = x(a-2x)^2 \left(0 < x < \frac{a}{2}\right)$.

» Chọn ĐÚNG.

(c) *Thể tích của khối hộp lớn nhất bằng* $\frac{2a^3}{9}$.

Thể tích của khối hộp lớn nhất bằng $\frac{2a^3}{27}$.

» Chọn SAI.

(d) *Cạnh của hình vuông bị cắt sao cho thể tích của khối hộp là lớn nhất bằng* $\frac{a}{6}$

Trong khoảng $\left(0;\frac{a}{2}\right)$ ta có $\max\limits_{\left(0;\frac{a}{2}\right)} V(x)=V\left(\frac{a}{6}\right)=\frac{2a^3}{27}$.

» Chọn ĐÚNG.

C. *Câu hỏi – Trả lời ngắn*

» Câu 38. Trên đoạn $\left[-1;2\right]$, hàm số $y=x^3+3x^2+1$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm có hoành độ bao nhiêu?

Lời giải

✓Trả lời: 0

$y=x^3+3x^2+1$

$y'=3x^2+6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2\notin\left[-1;2\right]\end{array}\right.$

$y\left(-1\right)=3; y\left(0\right)=1; y\left(2\right)=21$

Vậy GTNN trên đoạn $[-1;2]$ của hàm số bằng 1 tại $x=0$.

» Câu 39. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=3+\sqrt{x^2-2x+5}$ bằng

Lời giải

✓Trả lời: 5

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Nhận xét: Hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$

Ta có $y'=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}$.

$y'=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty, \lim\limits_{x\to-\infty} y=+\infty$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là 5.

» Câu 40. Hàm số $y=\sin^4 x-\cos^4 x$ có giá trị lớn nhất bằng

Lời giải

✓Trả lời: 1

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y=\sin^4 x-\cos^4 x=\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=-\cos 2x$

Mà $-1\le \cos 2x\le 1 \Leftrightarrow -1\le -\cos 2x\le 1 \Rightarrow \max y=1$.

» Câu 41. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $x^3-3x-m=0$ có nghiệm $x\in\left[0;2\right]$?

Lời giải

✔Trả lời: 5

Ta có: $x^3-3x-m=0 \Rightarrow m=x^3-3x$

Xét hàm $f\left(x\right)=x^3-3x, \forall x\in\left[0;2\right]$.

$f'\left(x\right)=3x^2-3$.

$f\left(x\right)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\in[-1;2] \\ x=-1\notin[-1;2] \end{array}\right.$.

$f(0)=0; f(1)=-2; f(2)=2$

$\min\limits_{[-1;2]} f\left(x\right)=-2$, $\max\limits_{[-1;2]} f\left(x\right)=2$.

Để phương trình có nghiệm thì $m\in\left[-2;2\right]$.

» Câu 42. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x-m^2+m}{x+1}$ trên đoạn $\left[0;1\right]$ bằng -2.

Lời giải

✔Trả lời: 2

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-1\right\}$.

Hàm số đã cho liên tục trên $\left[0;1\right]$.

Ta có: $y'=\dfrac{1-\left(-m^2+m\right)}{\left(x+1\right)^2}=\dfrac{m^2-m+1}{\left(x+1\right)^2}>0$; $\forall x\in D$.

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên đoạn $\left[0;1\right]$.

Trên $\left[0;1\right]$ hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=0$.

$\Leftrightarrow y\left(0\right)=-2 \Leftrightarrow -m^2+m=-2 \Leftrightarrow m^2-m-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=2 \end{array}\right.$.

Vậy có 2 giá trị của tham số m.

» Câu 43. Cho hàm số $f\left(x\right)=\left(m-1\right)x^4-2mx^2+1$ với m là tham số thực. Nếu $\min\limits_{[0;3]} f\left(x\right)=f\left(2\right)$ thì $\max\limits_{[0;3]} f\left(x\right)$ bằng

Lời giải

✔Trả lời: 4

Ta có: $f'\left(x\right)=4\left(m-1\right)x^3-4mx=4x\left[\left(m-1\right)x^2-m\right]$.

$f'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=\dfrac{m}{m-1} \end{array}\right.$ (vì $m=1$ không thỏa yêu cầu bài toán).

Vì $\min\limits_{[0;3]} f\left(x\right)=f\left(2\right) \Rightarrow x=2$ là nghiệm của $f'\left(x\right)=0$.

$\Rightarrow \dfrac{m}{m-1}=4 \Rightarrow m=4m-4 \Rightarrow m=\dfrac{4}{3}$.

$\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{3}x^4-\dfrac{8}{3}x^2+1$.

$f(0)=1, f(3)=\dfrac{81}{3}-\dfrac{72}{3}+\dfrac{3}{3}=\dfrac{12}{3}=4$.

Vậy $\max\limits_{[0;3]} f(x)=4$.

» **Câu 44.** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{2x-2}$ trên khoảng $(0;1)$. *(kết quả làm tròn đến hàng phần chục)*

Lời giải

✓Trả lời: 5,5

Hàm số xác định và liên tục trên $(0;1)$ và có $f'(x)=-\dfrac{4}{x^3}+\dfrac{1}{2(x-1)^2}$.

Giải phương trình $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^3-8x^2+16x-8=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2-6x+4)=0$

$\Rightarrow x=3-\sqrt{5}$ (do $x\in(0;1)$).

Bảng biến thiên

x	0		$3-\sqrt{5}$		1
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{11+5\sqrt{5}}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $\min\limits_{(0;1)} f(x)=\dfrac{11+5\sqrt{5}}{4}\approx 5,5$.

» **Câu 45.** Tìm giá trị lớn nhất hàm số $y=\dfrac{x+4}{\sqrt{x^2+2}}$.

Lời giải

✓Trả lời: 3

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$$y'=\dfrac{\sqrt{x^2+2}-(x+4)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}}{x^2+2}=\dfrac{2-4x}{\sqrt{x^2+2}\left(x^2+2\right)}$$

$y'=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	1

Vậy $\max\limits_{\mathbb{R}} y=3$.

» **Câu 46.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $x^3-3x+4m-1=0$ có ít nhất một nghiệm thực trong $\left[-3;4\right]$?

Lời giải

✓Trả lời: 17

Ta có $x^3-3x+4m-1=0 \Leftrightarrow -x^3+3x+1=4m$.

Đặt $f\left(x\right)=-x^3+3x+1$.

Ta có $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[-3;4\right]$.

$f'\left(x\right)=-3x^2+3, f'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

$f\left(-3\right)=19, f\left(4\right)=-51, f\left(-1\right)=-1, f\left(1\right)=3$.

Suy ra $\max\limits_{\left[-3;4\right]} f\left(x\right)=19$ khi $x=-3$.

$\min\limits_{\left[-3;4\right]} f\left(x\right)=-51$ khi $x=4$.

Để phương trình $x^3-3x+4m-1=0$ có ít nhất một nghiệm thực trong $\left[-3;4\right]$ thì

$\min\limits_{\left[-3;4\right]} f\left(x\right) \le 4m \le \max\limits_{\left[-3;4\right]} f\left(x\right) \Leftrightarrow \dfrac{-51}{4} \le m \le \dfrac{19}{4}$

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \left\{-12;-11;...;4\right\}$.

Vậy có 17 giá trị nguyên của tham số m.

» **Câu 47.** Tìm giá trị lớn nhất của tham số m để bất phương trình $\dfrac{x^2+3x+3}{x+1} \ge m$ nghiệm đúng với mọi $x \in \left[0;1\right]$.

Lời giải

✓Trả lời: 3

Đặt $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+3x+3}{x+1}$.

Bất phương trình $\dfrac{x^2+3x+3}{x+1} \ge m$ nghiệm đúng với mọi $x \in \left[0;1\right]$ khi và chỉ khi

$m \le \min\limits_{\left[0;1\right]} f\left(x\right)$.

Ta có $f'\left(x\right)=\dfrac{x^2+2x}{\left(x+1\right)^2} \ge 0$ với mọi $x \in \left[0;1\right] \Rightarrow f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left[0;1\right]$.

$\Rightarrow \min\limits_{\left[0;1\right]} f\left(x\right)=f\left(0\right)=3$.

Suy ra $m \le 3$.

Vậy giá trị lớn nhất của tham số m bằng 3.

» **Câu 48.** Tìm giá trị của tham số thực m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{2x+m}{x+1}$ trên đoạn $\left[0;4\right]$ bằng 3.

Lời giải

✓Trả lời: 7

Ta có: $y'=\dfrac{2-m}{(x+1)^2}$.

+ Xét $m=2$.

$\Rightarrow$ Hàm số trở thành: $y=2$ là hàm số hằng nên không đạt giá trị nhỏ nhất bằng 3

$\Rightarrow m=2$ (loại)

+ Xét $m>2$.

$\Rightarrow y'=\dfrac{2-m}{(x+1)^2}<0\ (\forall x\neq -1)\ \Rightarrow \min\limits_{[0;4]} y=y(4)=\dfrac{8+m}{5}\Rightarrow \dfrac{8+m}{5}=3\Leftrightarrow m=7$ (thoả mãn).

+ Xét $m<2$.

$\Rightarrow y'=\dfrac{2-m}{(x+1)^2}>0\ (\forall x\neq -1)\Rightarrow \min\limits_{[0;4]} y=y(0)=m\Rightarrow m=3$ (loại).

Vậy $m=7$.

» Câu 49. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=-x^3-3x^2+m$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 0.

Lời giải

✓Trả lời: 4

Xét hàm số $y=-x^3-3x^2+m$ trên đoạn $[-1;1]$,

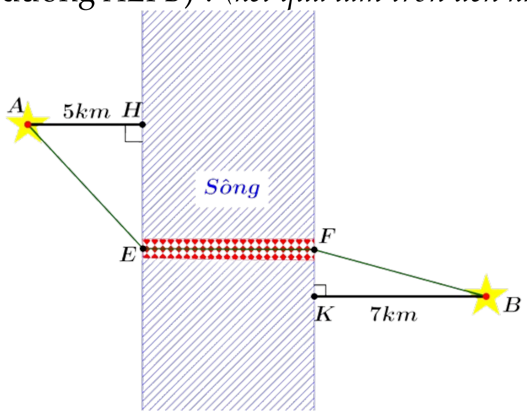
Ta có $y'=-3x^2-6x;\ y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\in[-1;1] \\ x=-2\notin[-1;1]\end{array}\right.$

Mà $\begin{cases} y'(-1)=m-2 \\ y'(0)=m \\ y'(1)=m-4 \end{cases}$

Do đó $\min\limits_{[-1;1]} y=-4+m=0\Leftrightarrow m=4$.

Vậy $m=4$ thỏa yêu cầu bài toán.

» Câu 50. Hai thành phố A và B cách nhau một con sông. Người ta xây dựng một cây cầu EF bắc qua sông biết rằng thành phố A cách con sông một khoảng là $5km$ và thành phố B cách con sông một khoảng là $7km$ (hình vẽ), biết $HE+KF=24km$ và độ dài EF không đổi. Hỏi xây cây cầu cách thành phố B là bao nhiêu để đường đi từ thành phố A đến thành phố B là ngắn nhất (đi theo đường $AEFB$) ? *(kết quả làm tròn đến km)*



Lời giải

✓Trả lời: 16

Đặt $HE = x$ và $FK = y$, với $x, y > 0$

Ta có: $HE + KF = 24 \Rightarrow x + y = 24$

$$\begin{cases} AE = \sqrt{25 + x^2} \\ BF = \sqrt{49 + y^2} = \sqrt{49 + (24 - x)^2} \end{cases}$$

Nhận định AB ngắn nhất khi $AE + BF$ nhỏ nhất (vì EF không đổi).

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 + 25} + \sqrt{(24 - x)^2 + 49}$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 25}} + \frac{x - 24}{\sqrt{x^2 - 48x + 625}}, \forall x \in (0; 24).$$

Cho $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 10$

Bảng biến thiên

x	0		10		24
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$12\sqrt{5}$	$\nearrow$	

Vậy GTNN của $f(x)$ bằng $7\sqrt{5}$ tại $x = 10 \Rightarrow BF = 7\sqrt{5} \approx 16\,\text{km}$.

--------------------**Hết**--------------------

Chương 01

Bài 3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

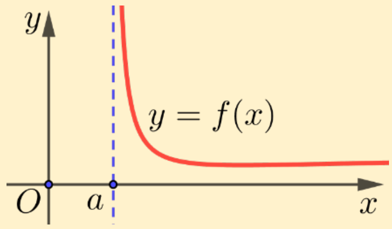
A. Lý thuyết

1. Tiệm cận đứng

Định nghĩa:

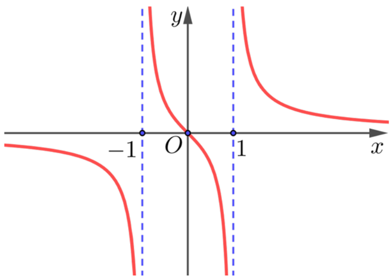
Đường thẳng $x=a$ được gọi là một đường tiệm cận đứng (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau thoả mãn:

- $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$



Chú ý

» Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{x^2-1}$ cùng với hai tiệm cận đứng $x=1$ và $x=-1$

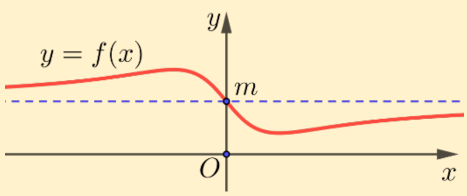


2. Tiệm cận ngang

Định nghĩa:

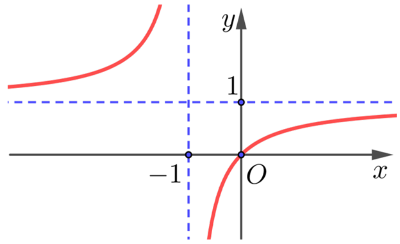
Đường thẳng $y=m$ được gọi là một đường tiệm cận ngang (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=m$ hoặc
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=m$



Chú ý

» Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x}{x+1}$ cùng với tiệm cận ngang $y=1$ và tiệm cận đứng $x=-1$



3. Tiệm cận xiên

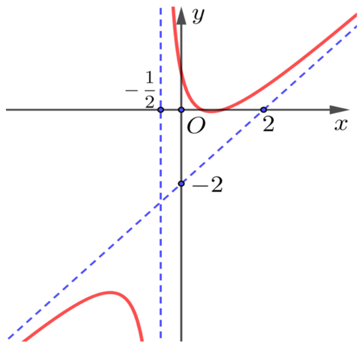
Định nghĩa:

Đường thẳng $y=ax+b, a\neq 0$, được gọi là đường tiệm cận xiên (hay tiệm cận xiên) của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ hoặc • $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$

Chú ý

» Đồ thị hàm số $f(x)=x-2+\dfrac{3}{2x+1}$ cùng tiệm cận đứng $x=-\dfrac{1}{2}$ và tiệm cận xiên $y=x-2$



B Các dạng bài tập

Dạng 1. Tìm các đường tiệm cận khi cho bảng biến thiên – đồ thị

Phương pháp

» ***Bước 1:*** Tìm Tập xác định của hàm số. Giả Sử $D=(-\infty;+\infty)\setminus\{x_0\}$.

» ***Bước 2:*** Quan sát Bảng biến thiên hoặc đồ thị, tìm giới hạn

» $\left[\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} y=y_0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} y=y_0\end{array}\right.\Rightarrow y=y_0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

» $\left[\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0^-} y=+\infty\\ \lim\limits_{x\to x_0^-} y=-\infty\\ \lim\limits_{x\to x_0^+} y=+\infty\\ \lim\limits_{x\to x_0^+} y=-\infty\end{array}\right.\Rightarrow x=x_0$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

» $\left[\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\left[y-(ax+b)\right]=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left[y-(ax+b)\right]=0\end{array}\right.$ thì $y=ax+b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

⁂ ***Chú ý:***

» $\lim\limits_{x\to+\infty} y=y_1;\lim\limits_{x\to-\infty} y=y_2\Rightarrow y=y_1;y=y_2$ là hai đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

» Tập xác định không có chứa $+\infty;-\infty$ thì đồ thị hàm số không có đường tiện cận ngang.

» Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ thì đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng.

Ví dụ 1.1.

Cho hàm số $y=f(x)$ có báng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
y	1	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ 2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	3

Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

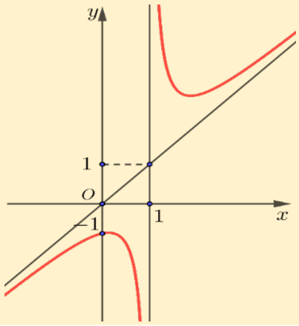
Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} y=1$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y=3$ nên đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận ngang là $y=1;y=3$.

Lại có: $\lim\limits_{x\to0^-} y=-\infty$ nên đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=0$.

Vậy tổng số đường tiệm cận của hàm số bằng 3.

Ví dụ 1.2.

Cho đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ như hình bên. Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.



Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{1\right\}$.

» $\lim\limits_{x\to 1^-} y=-\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to 1^+} y=+\infty$ nên đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=1$.

Dựa vào hình vẽ, ta thấy đường thẳng $\left(d\right)$ đi qua $O\left(0;0\right)$ và $A\left(1;1\right)$ nên suy ra phương trình đường thẳng $\left(d\right): y=x$.

» $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f\left(x\right)-\left(x-y\right)\right]=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left[f\left(x\right)-\left(x-y\right)\right]=0\end{cases}$ $\Rightarrow$ đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên $y=x$.

Ví dụ 1.3.

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\left\{1\right\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		-1		3		$+\infty$
y'		$-$	‖	$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	5	↘	3	↗	$+\infty$ ‖ -2	↗	1	↘	-5

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ là bao nhiêu?

Lời giải

Từ bảng biến thiên ta thấy:

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=5$ nên đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ nhận đường thẳng $y=5$ làm tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=-5$ nên đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ nhận đường thẳng $y=-5$ làm tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to 1^-} y=+\infty$ nên đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ nhận đường thẳng $x=1$ làm tiệm cận đứng.

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ là 3.

Dạng 2. Tìm các đường tiệm cận khi cho bảng biến thiên – đồ thị

Phương pháp

Để tìm tiệm cận ngang, tiệm cận đứng, tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$

» ***Bước 1:*** Tìm Tập xác định của hàm số.

» ***Bước 2:*** Tìm ***tiệm cận ngang*** của đồ thị hàm số bằng cách tính các giới hạn (nếu có): $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)$

» ***Bước 3:*** Tìm ***tiệm cận đứng*** của đồ thị hàm số bằng cách tính các giới hạn (nếu có): $\lim\limits_{x\to k^+} f\left(x\right)$ và $\lim\limits_{x\to k^-} f\left(x\right)$

» ***Bước 4:*** Tìm ***tiệm cận xiên*** (*dành cho hàm số có dạng phân thức có bậc tử số lớn hơn bậc mẫu số 1 bậc*) bằng một trong hai cách sau:

» *Cách 1:* Nếu biểu diễn $f\left(x\right)=ax+b+g\left(x\right)$ thì tính $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f\left(x\right)-\left(ax+b\right)\right)\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f\left(x\right)-\left(ax+b\right)\right)\end{cases}$

» *Cách 2:* Xác định đường tiệm cận xiên $y=ax+b$ bằng cách xác định hệ số a,b:

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f\left(x\right)}{x} \text{ hoặc } a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(x\right)}{x} \text{ với } a\neq 0.$$

Khi đó tương ứng ta có $b=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f\left(x\right)-ax\right)$ hoặc $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f\left(x\right)-ax\right)$

⁂ ***Chú ý:***

» Đồ thị hàm số chỉ có thể có một trong hai loại tiệm cận ngang hoặc tiệm cận xiên.

» Nếu hàm số xác định trên toàn bộ tập số thực thì không có tiệm cận đứng.

» Hàm số hằng $y=b$ có đồ thị nhận $y=b$ là tiệm cận ngang, hàm số bậc nhất $y=ax+b$ có đồ thị nhận chính nó $y=ax+b$ là tiệm cận xiên.

Ví dụ 2.1.

Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{1\right\}$.

» $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=2\to y=2$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

» $\lim\limits_{x\to1^-} y=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{-2x-1}{x-1}=+\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to1^+} y=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{-2x-1}{x-1}=-\infty\to x=1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Ví dụ 2.2.

Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+1}{x}$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

» $\lim\limits_{x\to 0^-} y=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2+1}{x}=-\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to 0^+} y=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2+1}{x}=+\infty \to x=0$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

» $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x}-x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)=0\to y=x$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Ví dụ 2.3.

Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^3-x^2+1}{x^2-1}$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^-} y=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^3-x^2+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^3-x^2+1}{(x-1)(x+1)}=-\infty$; hoặc

$\lim\limits_{x\to 1^+} y=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^3-x^2+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^3-x^2+1}{(x-1)(x+1)}=+\infty$;

suy ra $x=1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Lại có:

$\lim\limits_{x\to -1^-} y=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x^3-x^2+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x^3-x^2+1}{(x-1)(x+1)}=-\infty$; hoặc

$\lim\limits_{x\to -1^+} y=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^3-x^2+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^3-x^2+1}{(x-1)(x+1)}=+\infty$;

Suy ra $x=-1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-x^2+1}{x^2-1}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-x^2+1}{x^2-1}=-\infty$.

Nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

$a=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3-x^2+1}{x(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3-x^2+1}{x(x^2-1)}=1$ và

$b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^3-x^2+1}{x^2-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-x^2+x+1}{x^2-1}=-1$;

Vậy $y=x-1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Dạng 3. Đường tiệm cận liên quan góc - khoảng cách - diện tích

Phương pháp

» *Bước 1:* Xác định các đường tiệm cận của đồ thị hàm số.

» *Bước 2:* Dựa vào các giả thiết: khoảng cách, góc, diện tích,...để tính toán hoặc thiết lập phương trình, hệ phương trình để tìm ẩn cần tìm.

Ví dụ 3.1.

Tìm các giá trị m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{4mx+3m}{x-2}$ có đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 2024?

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ lần lượt là $y=\dfrac{a}{c}$ và $x=\dfrac{-d}{c}$

Do đó tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{4mx+3m}{x-2}$ là $y=4m; x=2$

Hai đường tiệm cân tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 2024

$\Leftrightarrow |4m|.2=2024 \Leftrightarrow m=\pm 253$.

Ví dụ 3.2.

Cho hàm số $y=\dfrac{2x^2-x}{x-1}$ có đồ thị (C).

(1) Tính khoảng cách từ $M(2;1)$ đến đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số (C).

(2) Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (C) cắt hai trục tọa độ lần lượt tại hai điểm A,B. Tính diện tích của tam giác OAB đó.

Lời giải

(1) Tính khoảng cách từ $M(2;1)$ đến đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số (C).

Đồ thị (C) có đường tiệm cận đứng: $x-1=0\,(d_1)$.

Khoảng cách từ điểm $M(2;1)$ đến đường tiệm cận đứng $d_1: x-1=0$ của đồ thị hàm số (C) là 1.

(2) Tính diện tích của tam giác OAB đó.

Ta có $y=\dfrac{2x^2-x}{x-1}=2x+1+\dfrac{1}{x-1}$ và $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[y-(2x+1)\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x-1}=0$ nên đồ thị hàm số (C) có tiệm cận xiên là $y=2x+1\ (d_2)$.

Tiệm cận xiên cắt Ox tại $A\left(-\frac{1}{2};0\right)$, cắt trục Oy tại $B(0;1)$ nên

$S_{OAB}=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{1}{2}.\left|-\frac{1}{2}\right|.|1|=\frac{1}{4}$.

Ví dụ 3.3.

Cho hàm số $y=\frac{4x+4}{3-x}$ có đồ thị là (C). Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng các khoảng cách từ một điểm M tùy ý trên (C) đến hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số (C).

Lời giải

$M\in(C)$ suy ra $M\left(m;\frac{4m+4}{3-m}\right)\in(C)$ và $m\neq 3$.

Đồ thị của hàm số $y=\frac{4x+4}{3-x}$ có tiệm cận đứng là $\Delta_1: x-3=0$ và tiệm cận ngang là $\Delta_2: y+4=0$.

Khoảng cách từ M đến đường tiệm cận đứng là $\mathrm{d}(M;\Delta_1)=|m-3|$.

Khoảng cách từ M đến đường tiệm cận ngang là $\mathrm{d}(M;\Delta_2)=\left|\frac{4m+4}{3-m}+4\right|=\left|\frac{16}{3-m}\right|$

Do đó tổng các khoảng cách từ một điểm M tùy ý trên (C) đến hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số (C) là $d=\mathrm{d}(M;\Delta_1)+\mathrm{d}(M;\Delta_2)=|3-m|+\left|\frac{16}{3-m}\right|;\forall m\neq 3$.

Áp dụng bất đẳng thức cosi ta có $|3-m|+\left|\frac{16}{3-m}\right|\geq 2\sqrt{|3-m|\left|\frac{16}{3-m}\right|}=8;\forall m\neq 3$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $|3-m|=\left|\frac{16}{3-m}\right|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m-3=4\\m-3=-4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=7\\m=-1\end{array}\right.$ thỏa mãn điều kiện.

Vậy giá trị nhỏ nhất của tổng các khoảng cách từ một điểm M tùy ý trên (C) đến hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số (C) bằng là 8 khi $M(7;-8)$, $M_1(-1;0)$.

Dạng 4. Bài toán thực tế và ý nghĩa của giá trị gần về tiệm cận

Phương pháp

» *Bước 1:* Biểu diễn các đại lượng với nhau thông qua hàm số.
» *Bước 2:* Tìm tiệm của hàm số vừa tìm được.
» *Bước 3:* Nêu ý nghĩa của giá trị gần về tiệm cận

Ví dụ 4.1.

Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy, người ta ước tính chi phí cần bỏ ra là

$$C(x)=\frac{300x}{100-x} \text{ (triệu đồng)},\ 0\le x<100.$$

Hãy cho biết:

(1) Chi phí cần bỏ ra sẽ thay đổi như thế nào khi x tăng?

(2) Có thể loại bỏ được 100% chất gây ô nhiễm không khí không? Vì sao?

Lời giải

Tập xác định: $D=[0;100)$.

Xét hàm số $y=C(x)=\dfrac{300x}{100-x}, 0\le x<100$.

Ta có: $y'=\dfrac{30000}{(100-x)^2}>0$, với mọi $x\in[0;100)$.

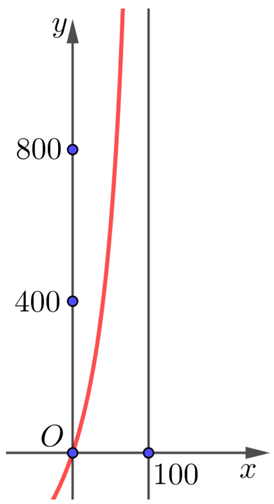
Do đó hàm số luôn đồng biến trên nửa khoảng $[0;100)$.

$\lim\limits_{x\to100^-} C(x)=\lim\limits_{x\to100^-}\dfrac{300x}{100-x}=+\infty$, nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=100$.

Bảng biến thiên:

x	0		$+\infty$
$C'(x)$		$+$	
$C(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị hàm số:



(1) Chi phí cần bỏ ra sẽ thay đổi như thế nào khi x tăng?

Chi phí cần bỏ ra $C(x)$ sẽ luôn tăng khi x tăng.

(2) Có thể loại bỏ được 100% chất gây ô nhiễm không khí không? Vì sao?

Vì $\lim\limits_{x\to 100^-} C(x)=+\infty$ (hàm số $C(x)$ không xác định khi $x=100$)

Nên nhà máy không thể loại bỏ 100% chất gây ô nhiễm không khí (dù bỏ ra chi phí là bao nhiêu đi chăng nữa).

Ví dụ 4.2.

Số lượng sản phẩm bán được của một công ty trong x (tháng) được tính theo công thức

$$S(x)=200\left(5-\frac{9}{2+x}\right), \text{ trong đó } x\ge 1.$$

(1) Xem $y=S(x)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[1;+\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.

(2) Nêu nhận xét về số lượng sản phẩm bán được của công ty đó trong x (tháng) khi x đủ lớn.

Lời giải

(1) Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty} 200\left(5-\frac{9}{2+x}\right)=1000$

Vậy đường thẳng $y=1000$ là đường tiệm cận nganh của đồ thị hàm số đã cho.

(2) Nêu nhận xét về số lượng sản phẩm bán được của công ty đó trong x (tháng) khi x đủ lớn.

Khi x đủ lớn thì số lượng sản phẩm bán được của công ty sẽ tiến gần đến 1000.

Ví dụ 4.3.

Một bể chứa 5000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 30 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 25 lít/phút.

(1) Chứng tỏ nồng độ muối trong bể sau t phút (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể, đơn vị: gam/lít) là $f(t)=\dfrac{30t}{200+t}$.

(2) Xem $y=f(t)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0;+\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.

(3) Nêu nhận xét về nồng độ muối trong bể sau thời gian t ngày càng lớn.

Lời giải

(1) Chứng tỏ nồng độ muối trong bể sau t phút (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể, đơn vị: gam/lít) là $f(t)=\dfrac{30t}{200+t}$.

Sau t phút, ta có khối lượng muối trong bể là $25\,.30t=750t(gam)$.

Thể tích của lượng nước trong bể là $5000+25t$ (lít).

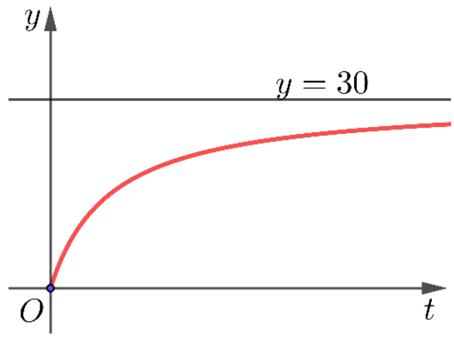
Vậy nồng độ muối sau t phút là $f(t)=\dfrac{750t}{5000+25t}=\dfrac{30t}{200+t}(gam/lit)$.

(2) Xem $y=f(t)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0;+\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.

Ta có:

$$\lim_{t\to+\infty} f(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{30}{200+t}=\lim_{t\to+\infty}\left(30-\frac{6000}{200+t}\right)=30.$$

Vậy đường thẳng $y=30$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$.



(3) Nêu nhận xét về nồng độ muối trong bể sau thời gian t ngày càng lớn.

Ta có đồ thị hàm số $y=f(t)$ nhận đường thẳng $y=30$ làm tiệm cận ngang, tức là khi t càng lớn thì nồng độ muối trong bể sẽ tiến gần đến mức 30 (gam/lít). Lúc đó, nồng độ muối trong bể sẽ gần như bằng nồng độ muối trong nước muối được bơm vào bể.

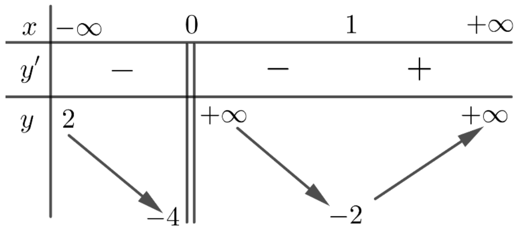
Chương 01

Bài 3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

C Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:



Số đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

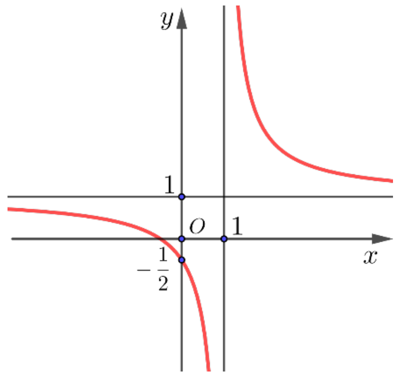
A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=2;\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=+\infty$ vậy $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

» Câu 2. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$.



Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số có phương trình là

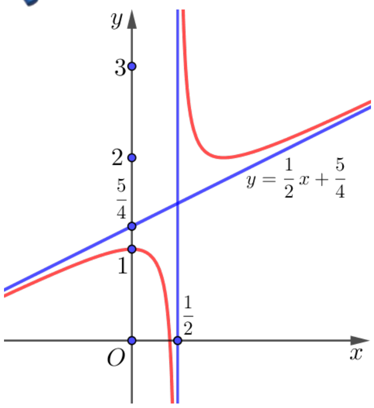
A. $x=1$. **B.** $x=2$. **C.** $y=1$. **D.** $y=2$

Lời giải

Chọn A

Quan sát hình vẽ dễ thấy đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x=1$ làm tiệm cận đứng.

» Câu 3. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2x-1}{2x-1}$ có đồ thị như sau:



Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là:

A. $x=\frac{1}{2}$. **B.** $y=2x-1$. **C.** $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}$. **D.** $x=1$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị của hàm số bậc 2/ bậc 1. Ta thấy đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}$.

» Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$ và $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x=1$ và $x=-1$.
B. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.
C. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.
D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y=1$ và $y=-1$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào định nghĩa đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số ta chọn đáp án D.

» Câu 5. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\frac{x-2}{x+1}$ là

A. $y=-2$. **B.** $y=1$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2}{x+1}=1$ và $\lim_{x\to-\infty}\frac{x-2}{x+1}=1$

Suy ra $y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

» Câu 6. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\frac{4x+1}{x-1}$ là

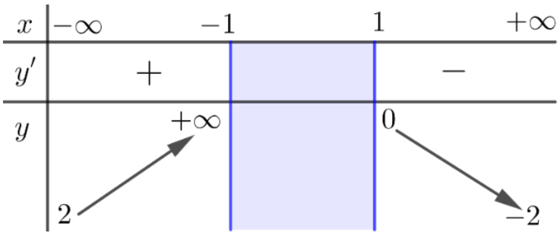
A. $y=\frac{1}{4}$. **B.** $y=4$. **C.** $y=1$. **D.** $y=-1$.

Lời giải

Chọn B

Tiệm cận ngang $\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to-\infty} y=\frac{4}{1}=4$

» Câu 7. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left[-1;1\right]$ liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:



Tính tổng số đường tiệm cận đứng và số đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$?

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty} y=2; \lim\limits_{x\to+\infty} y=-2$ nên $y=\pm2$ là các đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

$\Rightarrow$ Số đường tiệm cận ngang là 2.

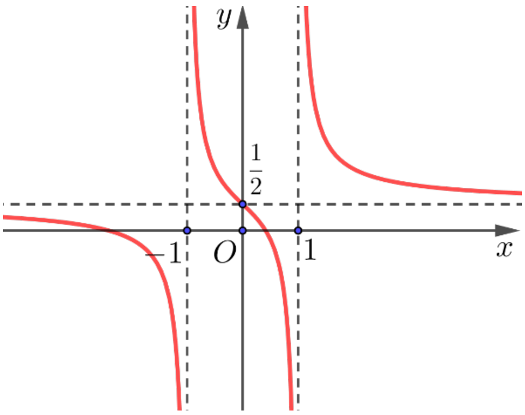
Vì $\lim\limits_{x\to-1^-} y=+\infty$ nên $x=-1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to1^+} y=0$ nên $x=1$ không là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\Rightarrow$ Số đường tiệm cận đứng là 1.

Vậy tổng số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ là 3.

» Câu 8. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ là:

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ ta có:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}$ nên đường thẳng $y=\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$.

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có đường tiệm cận ngang là $y=\dfrac{1}{2}$.

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} f\left(x\right)=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f\left(x\right)=+\infty$ nên $x=-1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị .

$\lim\limits_{x\to(1)^-} f\left(x\right)=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to(1)^+} f\left(x\right)=+\infty$ nên $x=1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị.

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có hai đường tiệm cận đứng là $x=\pm 1$

Vậy đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có tất cả 3 đường tiệm cận.

» Câu 9. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ là:

A. $y=1$. **B.** $y=-2$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x+1}=1$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-2}{x+1}=1$.

Suy ra $y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

» Câu 10. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+2024}{x-1}$ là:

A. $x=2$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-1$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{1\right\}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to1^-}y=-\infty;\lim\limits_{x\to1^+}y=+\infty$.

Suy ra đồ thị có tiệm cận đứng là $x=1$.

» Câu 11. Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)=x+2+\dfrac{3}{2x+1}$ là:

A. $y=\dfrac{1}{2}$. **B.** $y=2x+1$. **C.** $y=x-2$. **D.** $y=x+2$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f\left(x\right)-\left(x+2\right)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{2x+1}=0;\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f\left(x\right)-\left(x+2\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{2x+1}=0$.

Suy ra đồ thị có tiệm cận xiên là đường thẳng: $y=x+2$.

» Câu 12. Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-16}{x+5}$ là:

A. $y=2x+5$. **B.** $y=x+5$. **C.** $y=x-5$. **D.** $y=2x-5$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-5\right\}$.

Ta có: $y=f\left(x\right)=\dfrac{x^2-16}{x+5}=\dfrac{x^2-25+9}{x+5}=\dfrac{x^2-25}{x+5}+\dfrac{9}{x+5}=\dfrac{\left(x-5\right)\left(x+5\right)}{x+5}+\dfrac{9}{x+5}=x-5+\dfrac{9}{x+5}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f\left(x\right)-\left(x+5\right)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{9}{x-5}=0;\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f\left(x\right)-\left(x+5\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9}{x-5}=0$

Suy ra đồ thị có tiệm cận xiên là đường thẳng: $y=x+5$.

» Câu 13. Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-5}{x+1}$ là:

A. 0. **<u>B.</u>** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\lim\limits_{x \to -1^-} y = +\infty; \lim\limits_{x \to -1^+} y = -\infty$.

Suy ra đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-5}{x+1} = 2$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x-5}{x+1} = 2$.

Suy ra $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là: 2.

» Câu 14. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$. Khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường tiệm cận đứng bằng

A. 2. **<u>B.</u>** 1. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^+} y = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2x+1}{x-1} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^-} y = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{2x+1}{x-1} = -\infty \end{cases}$ nên đường tiệm cận đứng $\Delta : x = 1$

Khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường tiệm cận đứng là: $d(O, \Delta) = 1$.

» Câu 15. (Sở **Hà Nội 2019**) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	
y	$+\infty$	1	$\Vert$ $-\infty$	$+\infty$	$\Vert$ 1		0

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$\lim\limits_{x \to -2^+} y = -\infty \Rightarrow x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$\lim\limits_{x \to 0^-} y = +\infty \Rightarrow x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$\lim\limits_{x \to +\infty} y = 0 \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có tổng đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là 3.

» Câu 16. Hàm số nào sau đây có một tiệm cận:

A. $y = \dfrac{x+3}{2x-1}$ **B.** $y = \dfrac{x^2+3x-2}{x+3}$ **C.** $y = \dfrac{4}{x-1}$ **<u>D.</u>** $y = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y=\dfrac{x+3}{2x-1}$ có một tiệm cận đứng $x=\dfrac{1}{2}$ và một tiệm cận ngang $y=\dfrac{1}{2}$

Hàm số $y=\dfrac{x^2+3x-2}{x+3}=x-\dfrac{2}{x+3}$ có một tiệm cận đứng $x=-3$ và một tiệm cận xiên $y=x$

Hàm số $y=\dfrac{4}{x-1}$ có một tiệm cận đứng $x=1$ và một tiệm cận ngang $y=0$.

Hàm số $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$ có một tiệm cận ngang $y=0$.

» Câu 17. Đường thẳng $2y+1=0$ là tiệm cận ngang của hàm số nào sau đây?

A. $y=\dfrac{x+1}{2x+1}$ **B.** $y=\dfrac{x^2+x+1}{1-2x}$ **C.** $y=\dfrac{2x+1}{1-x}$ **D.** $y=\dfrac{3-x^2}{2x^2-3x+1}$

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y=\dfrac{x+1}{2x+1}$ có tiệm cận ngang $y=\dfrac{1}{2}$.

Hàm số $y=\dfrac{x^2+x+1}{1-2x}$ không có tiệm cận ngang.

Hàm số $y=\dfrac{2x+1}{1-x}$ có tiệm cận ngang $y=-2$.

Hàm số $y=\dfrac{3-x^2}{2x^2-3x+1}$ có tiệm cận ngang $y=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 2y+1=0$.

» Câu 18. Đường thẳng $x=-1$ là tiệm cận đứng của hàm số nào sau đây?

A. $y=\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-1}$ **B.** $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$ **C.** $y=\dfrac{x+1}{x^2+4x+3}$ **D.** $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$

Lời giải

Chọn B

Ta có $x^2+1>0,\forall x$, vậy hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$ không có tiệm cận đứng. $y=\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-1}=\dfrac{x+2}{x-1}$ không có tiệm cận đứng là $x=-1$.

$y=\dfrac{x+1}{x^2+4x+3}=\dfrac{1}{x+3}$ không có tiệm cận đứng là $x=-1$.

$y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\dfrac{x-2}{x+1}$ có tiệm cận đứng là $x=-1$.

» Câu 19. Cho hàm số $(C): y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-2}$. Góc tạo bởi đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (C) với trục hoành bằng

A. 45°. **B.** 60°. **C.** 120°. **D.** 135°.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-2}=\dfrac{x(x-2)}{x-2}+\dfrac{2}{x-2}=x+\dfrac{2}{x-2}$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2}{x-2}=0$ nên $y=x$ là tiệm cận xiên.

Nên góc tạo bởi đường thẳng $y = x$ với trục hoành bằng 45^o.

Vậy góc tạo bởi đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (C) với trục hoành bằng 45^o.

» Câu 20. Các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+3}{x-1}$ tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng

A. 3. **B.** 6. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y = \dfrac{2x+3}{x-1}$ có các đường tiệm cận là $x = 1, y = 2$.

Do vậy đồ thị hàm số tạo với hai tọa độ hình chữ nhật diện tích bằng $|1.2| = 2$.

» Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	
y	1	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty \;\|\|\; -\infty$	$\nearrow$	-1

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị.

B. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(-1;+\infty)$.

C. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;1)$.

D. Hàm số $y = f(x)$ có tổng cộng 3 đường tiệm cận.

Lời giải

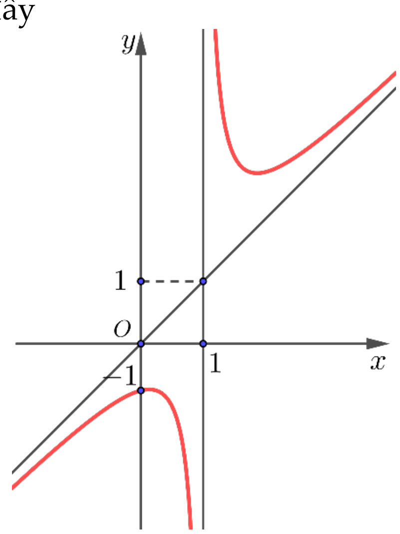
Chọn D

Do $\lim\limits_{x\to 1^+} y = -\infty; \lim\limits_{x\to 1^-} = +\infty \Rightarrow$ TCĐ: $x = 1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} y = -1; \lim\limits_{x\to-\infty} y = 1 \Rightarrow$ đồ thị có 2 tiệm cận ngang là $y = \pm 1$

Vậy hàm số đã cho có tổng số TCĐ và TCN là 3.

» Câu 22. Đồ thị hàm số (C) (màu xanh) và đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (C) (nét đứt). Hình vẽ minh họa dưới đây



Mệnh đề nào sau đây là **sai** ?

A. Hàm số (C) đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

B. Hàm số (C) đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

C. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (C) có hệ số góc là một số âm.

D. Hàm số (C) không có cực trị.

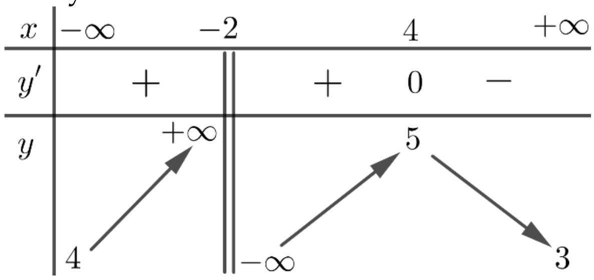
Lời giải

Chọn C

Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (C) là đường thẳng đi lên từ trái sang phải nên hàm số tương ứng đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra hệ số góc của nó dương.

B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai

» Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình dưới đây.



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.		
(b)	Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số có phương trình: $x=-2$.		
(c)	Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang có phương trình: $x=3$ và $x=4$.		
(d)	Đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.		

Lời giải

(a) *Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.*

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=3$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y=4$ nên đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang $y=3, y=4$.

» Chọn SAI.

(b) *Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số có phương trình:* $x=-2$.

Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-2)^+} y=-\infty\\ \lim\limits_{x\to(-2)^-} y=+\infty\end{cases}$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-2$.

» Chọn ĐÚNG.

(c) *Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang có phương trình:* $x=3$ *và* $x=4$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=3$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y=4$ nên đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang $y=3, y=4$.

» Chọn SAI.

(d) *Đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.*

Ta có $\begin{cases} \lim\limits_{x \to (-2)^+} y = -\infty \\ \lim\limits_{x \to (-2)^-} y = +\infty \end{cases}$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -2$.

Mặt khác $\lim\limits_{x \to +\infty} y = 3$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} y = 4$ nên đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang $y = 3, y = 4$.

Vậy đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận.

» Chọn ĐÚNG.

» Câu 24. Cho hàm số $y = \dfrac{\sqrt{4x^2 - 9}}{x - 1}$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số		
(b)	Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 1$		
(c)	Đường thẳng $y = -2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số		
(d)	Đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận		

Lời giải

(a) Đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{4 - \frac{9}{x^2}}}{1 - \frac{1}{x}} = 2$ nên đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

» Chọn ĐÚNG.

(b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 1$

Tập xác định $D = \left(-\infty; -\dfrac{3}{2}\right] \cup \left[\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$.

Do không tồn tại các giới hạn khi $x \to 1^+$, $x \to 1^-$ nên đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng.

» Chọn SAI.

(c) Đường thẳng $y = -2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

Ta có $\lim\limits_{x \to -\infty} y = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-\sqrt{4 - \frac{9}{x^2}}}{1 - \frac{1}{x}} = -2$ nên đường thẳng $y = -2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

» Chọn ĐÚNG.

(d) Đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận

Tập xác định $D = \left(-\infty; -\dfrac{3}{2}\right] \cup \left[\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$.

Do không tồn tại các giới hạn khi $x \to 1^+$, $x \to 1^-$ nên đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng.

Mặt khác, $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{4-\dfrac{9}{x^2}}}{1-\dfrac{1}{x}} = 2$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-\sqrt{4-\dfrac{9}{x^2}}}{1-\dfrac{1}{x}} = -2$ nên đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang $y=2, y=-2$.

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 25.** Cho hàm số $y = \dfrac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2-2x}$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Đường thẳng $x=0$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.		
(b)	Đường thẳng $y=0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.		
(c)	Đường thẳng $x=2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.		
(d)	Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang.		

Lời giải

(a) Đường thẳng $x=0$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Tập xác định: $D = [-1;+\infty)\setminus\{0;2\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to0} y = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2-2x} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{(5x+1)^2-x-1}{(x^2-2x)\left(5x+1+\sqrt{x+1}\right)}$

$= \lim\limits_{x\to0} \dfrac{25x^2+9x}{(x^2-2x)\left(5x+1+\sqrt{x+1}\right)} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{25x+9}{(x-2)\left(5x+1+\sqrt{x+1}\right)} = \dfrac{-9}{4}$

$\Rightarrow x=0$ **không** là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

» **Chọn** SAI.

(b) Đường thẳng $y=0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2-2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\sqrt{\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}}}{x^2-2x} = 0$

$\Rightarrow y=0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) Đường thẳng $x=2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim\limits_{x\to2^+} y = \lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2-2x} = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to2^-} y = \lim\limits_{x\to2^-} \dfrac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2-2x} = -\infty$

$\Rightarrow x=2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang.

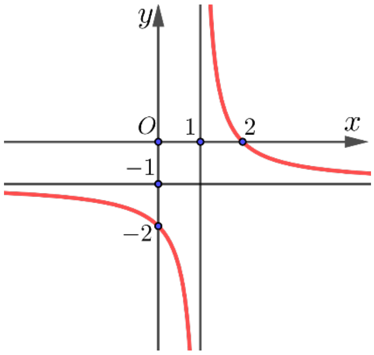
Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2-2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\sqrt{\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}}}{x^2-2x} = 0$

$\Rightarrow y=0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Mặt khác, không tồn tại giới hạn khi $x\to-\infty$ nên đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận ngang.

» **Chọn** SAI.

» Câu 26. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $a,\, b,\, c\in\mathbb{R}$ có đồ thị là hình bên dưới



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$ và đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.		
(b)	Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x=1$.		
(c)	Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=-1$.		
(d)	Tổng $a+b+c=5$.		

Lời giải

(a) *Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$ và đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.*

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

» Chọn SAI.

(b) *Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x=1$.*

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy hàm số có đường tiệm cận đứng là $x=1$.

» Chọn ĐÚNG.

(c) *Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=-1$.*

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=-1$.

» Chọn ĐÚNG.

(d) *Tổng $a+b+c=5$.*

Vì hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$ và tiệm cận ngang là $y=-1$ nên ta suy ra hàm số có dạng: $y=\dfrac{-x+b}{x-1}$

Hàm số đi qua điểm $(2;0)$ nên thay $x=2,\, y=0$ vào $y=\dfrac{-x+b}{x-1}$, ta được:

$$\frac{-2+b}{2-1}=0\Leftrightarrow b=2$$

Vậy $y=\dfrac{-x+2}{x-1}$

Suy ra $a+b+c=(-1)+2+1=2$

» Chọn SAI.

» Câu 27. Nồng độ oxygen trong hồ theo thời gian t cho bởi công thức $y(t)=5-\dfrac{15t}{9t^2+1}$, với y được tính theo mg/l và t được tính theo giờ, $t\geq 0$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai

(a)	Đồ thị hàm số $y(t)$ có một đường tiệm cận ngang và một đường tiệm cận xiên.		
(b)	Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=5$.		
(c)	Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x=\frac{1}{3}$.		
(d)	Sau một thời gian đủ dài, nồng độ oxygen trong hồ sẽ bão hòa và đạt ngưỡng $5\ mg/l$		

Lời giải

$$y(t)=5-\frac{15t}{9t^2+1}=\frac{45t^2+5-15t}{9t^2+1}=\frac{45t^2-15t+5}{9t^2+1}$$

$$\lim_{t\to+\infty} y(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{45t^2-15t+5}{9t^2+1}=\lim_{t\to+\infty}\frac{45-\frac{15}{t}+\frac{5}{t^2}}{9+\frac{1}{t^2}}=\frac{45-0+0}{9+0}=5$$

(a) Đồ thị hàm số $y(t)$ có một đường tiệm cận ngang và một đường tiệm cận xiên.

Đồ thị hàm số $y(t)$ có một đường tiệm cận ngang là $y=5$ và không có tiệm cận xiên.

» **Chọn** SAI.

(b) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=5$.

$\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)=5 \Rightarrow y=5$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x=\frac{1}{3}$.

$$\lim_{t\to\frac{1}{3}} y(t)=\lim_{t\to\frac{1}{3}}\frac{45t^2-15t+5}{9t^2+1}=\frac{45.\left(\frac{1}{3}\right)^2-15.\frac{1}{3}+5}{9.\left(\frac{1}{3}\right)^2+1}=\frac{5}{2}\Rightarrow x=\frac{1}{3}$$ không phải là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

» **Chọn** SAI.

(d) Sau một thời gian đủ dài, nồng độ oxygen trong hồ sẽ bão hòa và đạt ngưỡng $5\ mg/l$.

Ta nhận thấy $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)=5$ điều này chứng tỏ rằng khi thời gian đủ dài, nồng độ oxygen trong hồ sẽ bão hòa và đạt ngưỡng $5\ mg/l$.

» **Chọn** ĐÚNG.

» Câu 28. Cho hàm số $y=\frac{x^2-2x+2}{x+2}$.

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số có hai tiệm cận.		
(b)	Giao điểm của hai tiệm cận là $I(-2;-6)$.		
(c)	Khoảng cách từ O đến tiệm cận xiên bằng $4\sqrt{2}$.		
(d)	Tiệm cận xiên của hàm số đi qua điểm $M(0;-4)$.		

Lời giải

(a) *Hàm số có hai tiệm cận.*

Ta có $y = x - 4 + \dfrac{10}{x+2}$.

$\lim\limits_{x \to -2} y = \infty$ nên $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{10}{x+2} = 0$ nên $y = x - 4$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) *Giao điểm của hai tiệm cận là $I(-2;-6)$.*

Giao điểm của hai tiệm cận thỏa mãn $\begin{cases} x = -2 \\ y = x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -6 \end{cases} \Rightarrow I(-2;-6)$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) *Khoảng cách từ O đến tiệm cận xiên bằng $4\sqrt{2}$.*

Khoảng cách từ O đến tiệm cận xiên bằng $\dfrac{4}{\sqrt{2}}$.

» **Chọn** SAI.

(d) *Tiệm cận xiên của hàm số đi qua điểm $M(0;-4)$.*

Ta có tiệm cận xiên: $\Delta : y = x - 4$, thay $M(0;-4)$ *vào* Δ $0 - 4 = -4$

Nên M nằm trên tiệm cận xiên.

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 29.** Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = \dfrac{mx^2 + (3-m)x + m^2 - 2}{x-1}$, m là tham số. Khi (C) có tiệm cận xiên, gọi đường tiệm cận xiên này là (d). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Khi $m = 2$ thì (d) có phương trình là $y = 2x + 3$.		
(b)	Khi $m = 1$ thì (d) đi qua điểm $A(1;4)$.		
(c)	Có 1 đường thẳng (d) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 6.		
(d)	Khi $m = \pm\sqrt{3}$ thì khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (d) bằng $\sqrt{3}$.		

Lời giải

Ta có $y = mx + 3 + \dfrac{m^2 + 1}{x - 1}$, suy ra (C) có tiệm cận xiên $d \Leftrightarrow m \neq 0$.

Khi đó phương trình của $d : y = mx + 3$.

(a) *Khi $m = 2$ thì (d) có phương trình là $y = 2x + 3$*

Với $m = 2 \Rightarrow d : y = 2x + 3$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) *Khi $m = 1$ thì (d) đi qua điểm $A(1;4)$.*

$A(1;4) \in d \Leftrightarrow 4 = m + 3 \Leftrightarrow m = 1$ (thỏa mãn điều kiện $m \neq 0$).

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) Có 1 đường thẳng (d) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 6.

Giao điểm của (d) với hai trục tọa độ là $M(0;3)$ và $M\left(-\frac{3}{m};0\right)$.

Diện tích tam giác vuông OMN: $S=\frac{1}{2}OM.ON=\frac{1}{2}3.\left|\frac{3}{m}\right|=\frac{9}{2|m|}$.

Theo giả thiết: $S=6\Leftrightarrow\frac{9}{2|m|}=9\Leftrightarrow|m|=\frac{1}{2}\Leftrightarrow m=\pm\frac{1}{2}$ (thỏa mãn điều kiện $m\neq 0$).

» **Chọn** SAI.

(d) Khi $m=\pm\sqrt{3}$ thì khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (d) bằng $\sqrt{3}$.

$$d(O;d)=\sqrt{3}\Leftrightarrow\frac{3}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{3}\Leftrightarrow\sqrt{m^2+1}=\sqrt{3}\Leftrightarrow m^2+1=3\Leftrightarrow m=\pm\sqrt{2}$$

» **Chọn** SAI.

» **Câu 30.** Cho hàm số $y=\frac{x^2+mx-1}{x-1}(C_m)$ (m là tham số). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Để đồ thị (C_m) của hàm số có tiệm cận xiên thì $m\neq 0$.		
(b)	Để tiệm cận xiên của (C_m) đi qua $M(2;-5)$ thì $m=-8$.		
(c)	Để tiệm cận xiên của (C_m) tạo với hai trục toạ độ một tam giác có diện tích bằng 8 (đvdt) thì tổng tất cả các giá trị m tìm được bằng 2.		
(d)	Với $m=3$ thì giao điểm của hai đường tiệm cận của (C_m) nằm trên Parapol $y=x^2+3$.		

Lời giải

Hàm số xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

(a) Để đồ thị (C_m) của hàm số có tiệm cận xiên thì $m\neq 0$.

Ta có $y=x+m+1+\frac{m}{x-1}$

Để đồ thị (C_m) của hàm số có tiệm cận xiên thì $m\neq 0$.

Với $m\neq 0,(C_m)$ có tiệm cận xiên

$$y=x+m+1(\Delta_m)\text{ vì }\lim_{x\to\infty}\left[y-(x+m+1)\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{m}{x-1}=0.$$

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) Để tiệm cận xiên của (C_m) đi qua $M(2;-5)$ thì $m=-8$

Để (Δ_m) qua $M(2;-5)$ thì $-5=2+m+1\Leftrightarrow m=-8$. (thỏa mãn $m\neq 0$).

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) Để tiệm cận xiên của (C_m) tạo với hai trục toạ độ một tam giác có diện tích bằng 8 (đvdt) thì tổng tất cả các giá trị m tìm được bằng 2

Gọi A là giao điểm của Δ_m với Ox. Khi đó $A(-m-1;0)$

Gọi B là giao điểm của Δ_m với Oy. Khi đó $B(0;m+1)$.

Suy ra $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}OA\cdot OB=\frac{1}{2}\left|-m-1\right|\left|m+1\right|=\frac{1}{2}(m+1)^2$

Để $S_{\Delta OAB}=8\Leftrightarrow\frac{1}{2}(m+1)^2=8\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-5\\m=3\end{array}\right.$ (thỏa mãn $m\neq 0$).

» **Chọn** SAI.

(d) *Với $m=3$ thì giao điểm của hai đường tiệm cận của (C_m) nằm trên Parapol $y=x^2+3$*

Ta có với $m\neq 0, x=1$ là tiệm cận đứng vì $\lim\limits_{x\to 1} y=\infty$ nên $y=x+m+1$ là tiệm cận xiên.

Khi đó giao điểm của 2 tiệm cận là $I(1;m+2)$.

Để I nằm trên Parabol $y=x^2+3$ thì $m+2=1+3\Leftrightarrow m=2$ (t/m $m\neq 0$).

» **Chọn** SAI.

C. *Câu hỏi – Trả lời ngắn*

» **Câu 31.** Cho hàm số $y=\frac{3x-2}{x+1}$. Giả sử đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x=a$ và đường tiệm cận ngang là $y=b$. Tính giá trị $a+b$

Lời giải

✓Trả lời: 2

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x-2}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{3-0}{1+0}=3\Rightarrow y=3$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} y=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\frac{3x-2}{x+1}=-\infty\Rightarrow x=-1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy $a+b=3+(-1)=2$

» **Câu 32.** Cho hàm số có bảng biến thiên bên dưới. Khi đó, đồ thị hàm số có số đường tiệm cận là bao nhiêu?

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	1 ↗		$+\infty$ ‖ $-\infty$		↗ 1

Lời giải

✓Trả lời: 2

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x=-2$ và đường tiệm cận ngang là $y=1$

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận bao gồm một đường tiệm cận đứng và một đường tiệm cận ngang.

» **Câu 33.** Cho hàm số $y=f(x)=\frac{x^2-5x+7}{x-3}$ có đồ thị (C). Đường tiệm cận xiên của đồ thị (C) là đường thẳng $\Delta: y=ax+b$. Tính $a+b$.

Lời giải

✔Trả lời: -1

Ta có $f(x)=\dfrac{x^2-5x+7}{x-3}=x-2+\dfrac{1}{x-3}$.

Do đó $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-2)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^2-5x+7}{x-3}-(x-2)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x-3}\right)=0$.

Suy ra đường thẳng $\Delta: y=x-2$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

$\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=-2\end{cases}\Rightarrow a+b=-1$.

» Câu 34. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+3}{x-2}$ có đồ thị (C). Hai đường tiệm cận của đồ thị (C) cùng với hai trục tọa độ tạo thành một hình thang vuông có diện tích S. Tính S.

Lời giải

✔Trả lời: 6

Ta thấy $x-2=0\Leftrightarrow x=2$ và $-2^2+4.2+3\neq 0$ nên đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $d_1: x=2$.

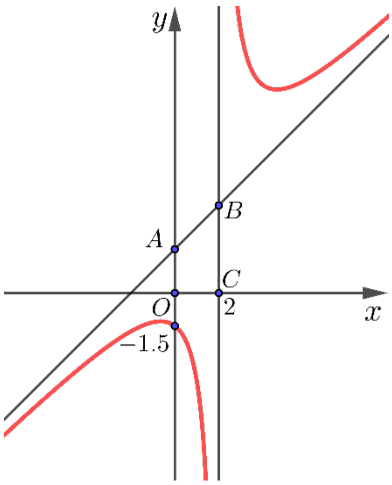
Ta có $y=x+2+\dfrac{7}{x-2}$ nên $d_2: y=x+2$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (C).

Đường thẳng $d_2: y=x+2$ cắt trục Oy tại $A(0;2)$.

Đường thẳng $d_1: x=2$ cắt $d_2: y=x+2$ tại $B(2;4)$.

Đường thẳng $d_1: x=2$ cắt trục Ox tại $C(2;0)$.

Do đó hai đường tiệm cận của đồ thị (C) cùng với hai trục tọa độ tạo thành một hình thang vuông $OABC$.



$\Rightarrow S_{OABC}=\dfrac{(OA+BC).OC}{2}=6$.

» Câu 35. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1

Tìm tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f(x)-1}$.

Lời giải

✔Trả lời: 3

» Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f(x)-1}$ đúng bằng số nghiệm thực của phương trình $2f(x)-1=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{1}{2}$.

Mà số nghiệm thực của phương trình $f(x)=\dfrac{1}{2}$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ với đường thẳng $y=\dfrac{1}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y=\dfrac{1}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 2 điểm phân biệt. Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f(x)-1}$ có 2 tiệm cận đứng.

» Lại có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{2f(x)-1}=1 \Rightarrow$ đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là $y=1$.

Vậy tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f(x)-1}$ là 3.

» Câu 36. Cho hàm số $y=\dfrac{12+\sqrt{4x-x^2}}{\sqrt{x^2-6x+2m}}$ có đồ thị (C_m). Tập S tất cả các giá trị của tham số thực m để (C_m) có đúng hai tiệm cận đứng có dạng $(a;b)$. Tính $a+2b$.

Lời giải

✔Trả lời: 13

Điều kiện $4x-x^2\ge 0 \Leftrightarrow x\in[0;4]$.

Dễ thấy $12+\sqrt{4x-x^2}>0, \forall x\in[0;4]$.

Do đó để đồ thị hàm số có đúng hai tiệm cận đứng thì phương trình $x^2-6x+2m=0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $(0;4)$.

Xét $g(x)=x^2-6x=-2m$ có $g'(x)=2x-6=0 \Leftrightarrow x=3\in(0;4)$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên đoạn $(0;4)$:

x	$-\infty$		3		4
g'		$-$	0	$+$	
g	0	$\searrow$	-9	$\nearrow$	-8

Từ đó ta thấy phương trình $x^2-6x+2m=0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $(0;4)$ khi $-9<-2m<-8 \Leftrightarrow 4<m<\dfrac{9}{2}$.

$$\Rightarrow S=\left(4;\frac{9}{2}\right)\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=\dfrac{9}{2}\end{cases}\Rightarrow a+2b=13.$$

» **Câu 37.** Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x^2-x}$ là ?

Lời giải

✓Trả lời: 2

Tập xác định $D=\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2};1\right)\cup(1;+\infty)$

Ta có

$$\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x^2-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}+3+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}=3$$

$$\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x^2-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\frac{1}{x}\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}+3+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}=3$$

Do đó đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y=3$ là tiệm cận ngang.

$$\lim_{x\to1^+}y=\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x^2-x}=+\infty$$

Do đó đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng.
Vậy đồ thị hàm số đã cho có 1 tiệm cận đứng và 1 tiệm cận ngang.

» **Câu 38.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{mx^2+(3m+1)x-m+2}{x+1}$ có tiệm cận xiên là (d) và (d) tiếp xúc với đường tròn tâm $I(1;2)$, bán kính bằng $\sqrt{2}$.

Lời giải

✓Trả lời: 1

Điều kiện: $m\neq0$, $(d): mx-y+2m+1=0$

Theo bài toán, ta có $d(I;d)=\sqrt{2}$ tức có phương trình $7m^2-6m-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=-\dfrac{1}{7}\end{array}\right.$.

Nên có 1 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

» **Câu 39.** Tổng các giá trị của tham số m để đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2+2(m-1)x+m^2-2}$ có đúng một tiệm cận đứng.

Lời giải

✓Trả lời: -0,5

Đặt $f(x)=x^2+2(m-1)x+m^2-2$

Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng khi và chỉ khi $f(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm $x=1$ hoặc $f(x)=0$ có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(1)=0 \end{cases} \\ \Delta' = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (m-1)^2-(m^2-2)>0 \\ 1+2(m-1)+m^2-2=0 \end{cases} \\ m=\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m<\dfrac{3}{2} \\ m=1; m=-3 \end{cases} \\ m=\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-3 \\ m=\dfrac{3}{2} \end{array}\right..$$

Vậy tổng các giá trị m thỏa mãn là: $-\dfrac{1}{2}\approx -0,5$.

» Câu 40. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f(x)$			3				$+\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				0		

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f(x)-1}$ là?

Lời giải

✔Trả lời: 4

Đặt $h(x)=\dfrac{1}{2f(x)-1}$.

*) Tiệm cận ngang:

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2f(x)-1}=0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{2f(x)-1}=0$.

Suy ra đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang $y=0$.

*) Tiệm cận đứng:

Xét phương trình: $2f(x)-1=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{1}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(x)=\dfrac{1}{2}$ có ba nghiệm phân biệt a, b, c thỏa mãn $a<1<b<2<c$.

Đồng thời $\lim\limits_{x\to a^+} h(x)=\lim\limits_{x\to b^-} h(x)=\lim\limits_{x\to c^+} h(x)=+\infty$ nên đồ thị hàm số $y=h(x)$ có ba đường tiệm cận đứng là $x=a$, $x=b$ và $x=c$.

Vậy tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=h(x)$ là 4.

-------------------Hết-------------------

Chương 01

Bài 4. KHẢO SÁT & VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ CƠ BẢN

A. Lý thuyết

1. Sơ đồ khảo sát hàm số

Định nghĩa:

①. Tìm tập xác định của hàm số.

②. Xét sự biến thiên của hàm số:

» Tìm y', xét dấu y', xác định khoảng đơn điệu, cực trị (nếu có) của hàm số.

» Tìm giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực của hàm số và các đường tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có).

» Lập bảng biến thiên của hàm số.

③. Vẽ đồ thị của hàm số:

» Xác định các điểm cực trị (nếu có), giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ (nếu có và dễ tìm), ...

» Vẽ các đường tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có).

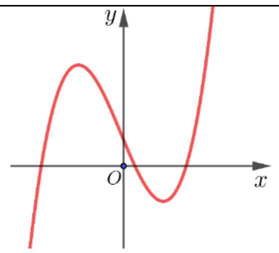
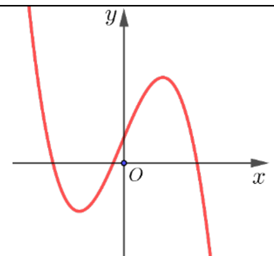
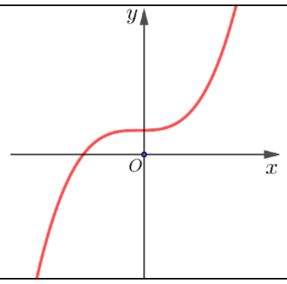
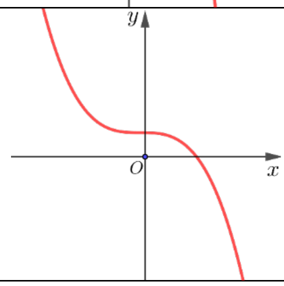
» Vẽ đồ thị hàm số.

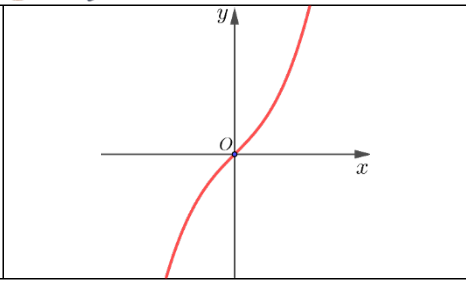
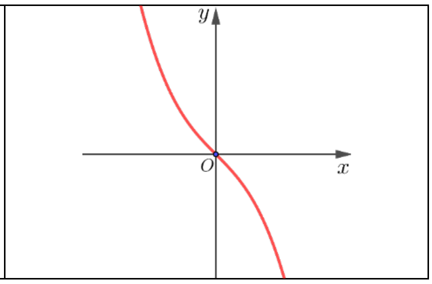
Chú ý

» Chỉ ra tâm đối xứng và trục đối xứng của đồ thị hàm số (nếu có).

2. Khảo sát hàm số

✓ Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$

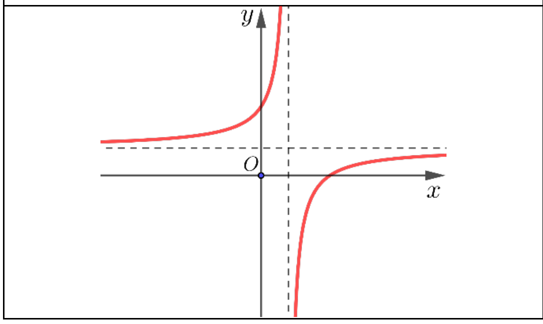
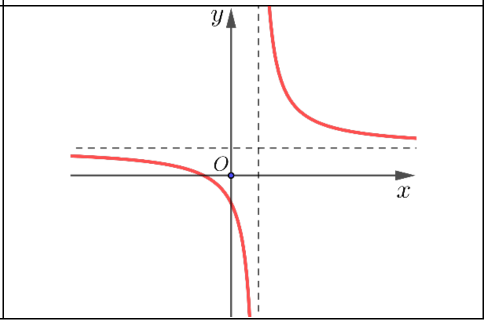
Trường hợp	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\left(b^2 - 3ac > 0\right)$		
Phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép $\left(b^2 - 3ac = 0\right)$		

Phương trình $y'=0$ vô nghiệm $\left(b^2-3ac<0\right)$		

Chú ý

» *Trường hợp: $y'=0$ vô nghiệm và có nghiệm kép, đồ thị hàm số sẽ ở dạng luôn đơn điệu nhưng trường hợp có nghiệm kép thì đồ thị hàm số có 1 đoạn hơi ngang ngang 1 chút (nhìn hình vẽ trên)*

✓ Hàm số phân thức bậc nhất trên bậc nhất $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $\left(c\neq 0,\ ad-bc\neq 0\right)$

$D=ad-bc>0$	$D=ad-bc<0$
	

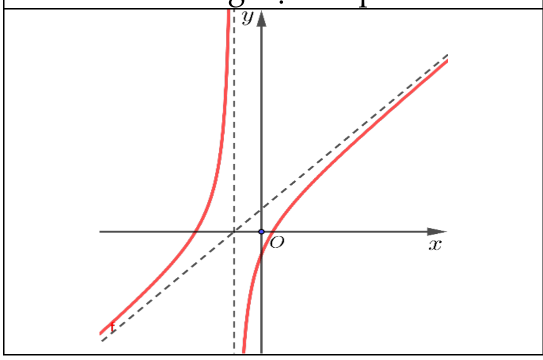
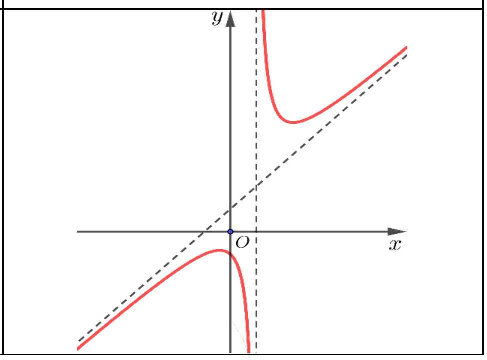
Chú ý

» ĐTHS có tiệm cận đứng $x=-\dfrac{d}{c}$, tiệm cận ngang $y=\dfrac{a}{c}$.

» *Các điểm đặc biệt:* Giao điểm với $Ox: A\left(\dfrac{-b}{a};0\right)$, Giao điểm với $Oy: B\left(0;\dfrac{b}{d}\right)$.

Giao của hai đường tiệm cận $I\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ là tâm đối xứng.

✓ Hàm số phân thức bậc hai trên bậc nhất $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}\left(a\neq 0\right)$

$y'=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép	$y'=0$ có hai nghiệm phân biệ
	

Chú ý

» Ta luôn tách được $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}=\dfrac{a}{d}x+f+\dfrac{m}{dx+e}$.

» Khi đó đồ thị hàm số có tiện cận đứng $x=-\dfrac{e}{d}$, Tiệm cận xiên $y=\dfrac{a}{d}x+f$.

Chú ý

» Đồ thị của hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\left(a\neq 0\right)$ luôn nhận điểm $I\left(x_0;y_0\right)$ làm tâm đối xứng, trong đó x_0 là nghiệm của phương trình $y''=0$ và $y_0=y\left(x_0\right)$.

» Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\left(c\neq 0, ad-bc\neq 0\right)$:

(a) Nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận ngang làm tâm đối xứng;
(b) Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi tiệm cận đứng và tiệm cận ngang làm trục đối xứng.

» Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}\left(a\neq 0, m\neq 0\right)$:

(a) Nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm tâm đối xứng;
(b) Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm trục đối xứng.

B Các dạng bài tập

Dạng 1. Khảo sát hàm số bậc ba

Phương pháp

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$

» ***Bước 1:*** Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

» ***Bước 2:*** Khảo sát sự biến thiên của hàm số

» Giới hạn:

- Với $a > 0$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$.
- Với $a < 0$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y = +\infty$.

» Đạo hàm và cực trị: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Khi đó:

- Hàm số có hai điểm cực trị khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'_{y'} > 0$.
- Gọi $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$ là hai điểm cực trị, theo định lý Viet: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-2b}{3a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{3a} \end{cases}$
- Hàm số không có cực trị khi $y' = 0$ vô nghiệm hoặc nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta'_{y'} \leq 0$

» Bảng biến thiên.

» Đồ thị hàm số:

- Không có tiệm cận.
- Tâm đối xứng là điểm có hoành độ thỏa mãn $y'' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-b}{3a}$.

Ví dụ 1.1.

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$.

Lời giải

» Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

» Sự biến thiên:

Ta có $y' = -3x^2 + 6x$. Suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Giới hạn: $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^3 + 3x^2 - 4\right) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3 + 3x^2 - 4\right) = +\infty$.

» Bảng biến thiên:

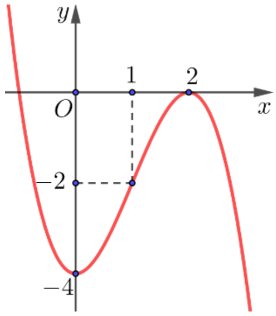
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$; nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

Hàm số đạt giá trị cực tiểu $y_{CT}=-4$ tại $x_{CT}=0$

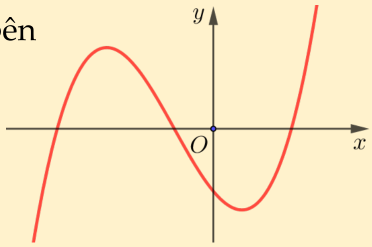
Hàm số đạt giá trị cực đại $y_{CD}=0$ tại $x_{CD}=2$

» Đồ thị đi qua điểm $A(-1;0), B(3;-4)$ và có tâm đối xứng là $I(1;-2)$.



Ví dụ 1.2.

Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hãy xác định dấu của các hệ số a, b, c và d.



Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy: $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty \Rightarrow a>0$; đồ thị hàm số đi qua điểm $(0;d)\Rightarrow d<0$.

Hàm số đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 dựa vào hình vẽ ta thấy $x_1<0$, $x_2>0$.

Mặt khác: $y'=3ax^2+2bx+c \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{-2b}{3a}<0 \xrightarrow{a>0} b>0 \\ x_1x_2=\dfrac{c}{3a}<0 \xrightarrow{a>0} c<0 \end{cases}$.

Vậy $a>0$, $b>0$, $c<0$, $d<0$.

Dạng 2. Khảo sát hàm số hữu tỉ bậc nhất trên bậc nhất

Phương pháp

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ \left(a \neq 0\right)$

» ***Bước 1:*** Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.

» ***Bước 2:*** Khảo sát sự biến thiên của hàm số

» Giới hạn và đường tiệm cận

- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \dfrac{a}{c} \Rightarrow y = \dfrac{a}{c}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
- $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{d}{c}\right)^+} y = +\infty$, $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{d}{c}\right)^-} y = -\infty$ hoặc $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{d}{c}\right)^+} y = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{d}{c}\right)^-} y = +\infty$

$\Rightarrow x = -\dfrac{d}{c}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

» Đạo hàm $y' = \dfrac{ad - bc}{\left(cx + d\right)^2}$

- Nếu $ad - bc > 0$, $\forall x \in D$.

+ Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty; -\dfrac{d}{c}\right)$ và $\left(-\dfrac{d}{c}; +\infty\right)$.

- Nếu $ad - bc < 0$, $\forall x \in D$.

+ Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty; -\dfrac{d}{c}\right)$ và $\left(-\dfrac{d}{c}; +\infty\right)$.

» Bảng biến thiên.

» Đồ thị hàm số:

- Đồ thị luôn nhận giao điểm của 2 đường tiệm cận là tâm đối xứng. Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là $I\left(-\dfrac{d}{c}; \dfrac{a}{c}\right)$

Ví dụ 2.1.

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \dfrac{2x + 1}{x + 1}$.

Lời giải

» Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-1\right\}$.

» Sự biến thiên: Ta có $y' = \dfrac{1}{\left(x + 1\right)^2} > 0 \, \forall x \in D$.

» Giới hạn: $\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x + 1}{x + 1}\right) = 2$; $\lim\limits_{x \to -\infty} y = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{2x + 1}{x + 1}\right) = 2$.

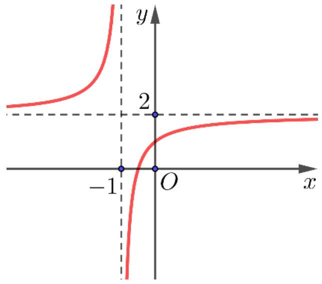
$\lim\limits_{x \to -1^+} y = \lim\limits_{x \to -1^+} \left(\dfrac{2x + 1}{x + 1}\right) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -1^-} y = \lim\limits_{x \to -1^-} \left(\dfrac{2x + 1}{x + 1}\right) = +\infty$

» Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	2

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1);(-1;+\infty)$.

» Đồ thị đi qua điểm $(0;1)$ và có tâm đối xứng là $I(-1;2)$.



Ví dụ 2.1.

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x}{x+1}$.

Lời giải

» Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-5\}$.

» Sự biến thiên: Ta có $y'=\dfrac{1}{(x+1)^2}>0\ \forall x\in D$.

» Giới hạn: $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)=1$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)=1$.

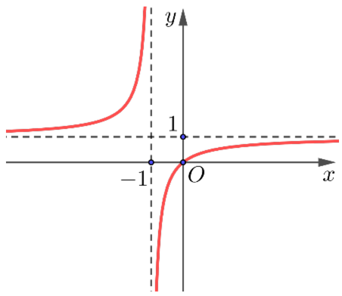
$\lim\limits_{x\to-1^+} y=\lim\limits_{x\to-1^+}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-1^-} y=\lim\limits_{x\to-1^-}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)=+\infty$

» Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	1

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

» Đồ thị đi qua điểm $(0;1)$ và có tâm đối xứng là $I(-1;2)$.



Dạng 3. Khảo sát hàm số hữu tỉ bậc hai trên bậc nhất

Phương pháp

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e},\left(ad\neq 0\ ,\ x\neq -\dfrac{e}{d}\right)$, *tử và mẫu không có nghiệm chung*. Viết hàm số dưới dạng $y=\alpha x+\beta+\dfrac{\gamma}{dx+e}$ (bằng cách chia đa thức)

» ***Bước 1:*** Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{e}{d}\right\}$.

» ***Bước 2:*** Khảo sát sự biến thiên của hàm số

» Giới hạn và đường tiệm cận

- $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{e}{d}\right)^{\pm}} y=\pm\infty \Rightarrow x=-\dfrac{e}{d}$ là tiệm cận đứng
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[y-\left(\alpha x+\beta\right)\right]=0 \Rightarrow y=\alpha x+\beta$ là đường tiệm cận xiên

» Đạo hàm $y'=\dfrac{\alpha\left(dx+e\right)^2-\gamma d}{\left(dx+e\right)^2}$.

Dấu của đạo hàm là dấu của $g\left(x\right)=\alpha\left(dx+e\right)^2-\gamma d$.

- Phương trình $y'=0$ vô nghiệm, hoặc có nghiệm kép thì không có cực trị.
- Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt thì có hai cực trị.

» Bảng biến thiên.

» Đồ thị hàm số:

- Tìm giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ (nếu có).
- Đồ thị hàm số nhận giao điểm I của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

⁂ **Nhận xét:**

» Đồ thị hàm số nhận giao điểm hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng

» Đồ thị hàm có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt khác $-\dfrac{e}{d}$.

» Trong trường hợp đồ thị hàm số có cực đại, cực tiểu thì phương trình đường thẳng qua hai cực trị là $y=\dfrac{2ax+b}{d}$.

» Mọi tiếp tuyến tại điểm $M\in\left(C\right)$ cắt hai đường tiệm cận tại A,B thì M là trung điểm AB

» Diện tích tam giác IAB không đổi

» Mọi điểm $M\in\left(C\right)$ có tích khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận là một hằng số

» Nếu từ một điểm E nằm trên một đường tiệm cận của $\left(C\right)$ thì qua E kẻ duy nhất một tiếp tuyến với $\left(C\right)$.

Ví dụ 3.1.

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y=\dfrac{2x^2+5x+4}{x+2}\ (H)$.

Lời giải

Ta có $y=\dfrac{2x^2+5x+4}{x+2}=2x+1+\dfrac{2}{x+2}$.

» Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

» Giới hạn và tiệm cận:

$\lim\limits_{x\to -2^+} y=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to -2^-} y=-\infty$ nên $x=-2$ là đường tiệm đường cận đứng.

$\lim\limits_{x\to \pm\infty}\left[y-(2x+1)\right]=0$ nên $y=2x+1$ là đường tiệm cận xiên.

» Sự biến thiên: Ta có: $y'=2-\dfrac{2}{(x+2)^2}=\dfrac{2x^2+8x+6}{(x+2)^2}$.

$y'=0 \Leftrightarrow 2x^2+8x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-3 \end{array}\right.$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-3)$ và $(-1;+\infty)$.

Hàm số nghich biến trên khoảng $(-3;-2)$ và $(-2;-1)$.

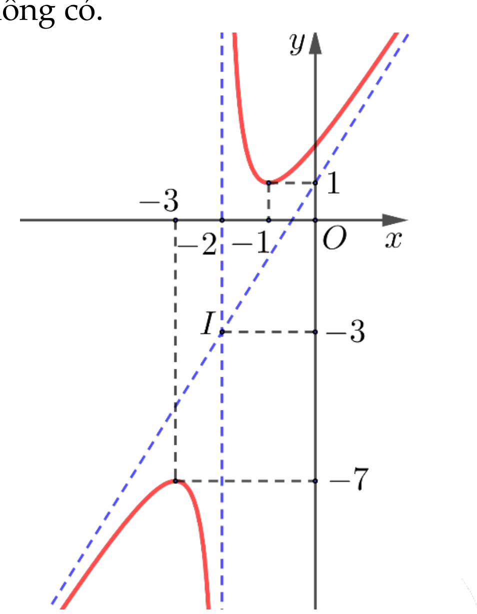
» Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-7	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

» Đồ thị:

Giao điểm với trục tung $A(0;2)$.

Giao điểm với trục hoành: không có.



Ví dụ 3.2.

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2+x-2}{x+1}$.

Lời giải

Ta có: $y=\dfrac{x^2+x-2}{x+1}=x-\dfrac{2}{x+1}$.

» Tập xác định của hàm số: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

» Sự biến thiên: Ta có: $y'=1+\dfrac{2}{(x+1)^2}>0$ với mọi $x\neq-1$.

Hàm số đồng biến trên từng khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

Hàm số không có cực trị.

» Giới hạn và đường tiệm cận:

$\lim\limits_{x\to-1^-} y=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-1^+} y=-\infty$ nên $x=-1$ là đường tiệm đường cận đứng.

$\lim\limits_{x\to+\infty}[y-x]=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}[y-x]=0$ nên $y=x$ là đường tiệm cận xiên

» Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

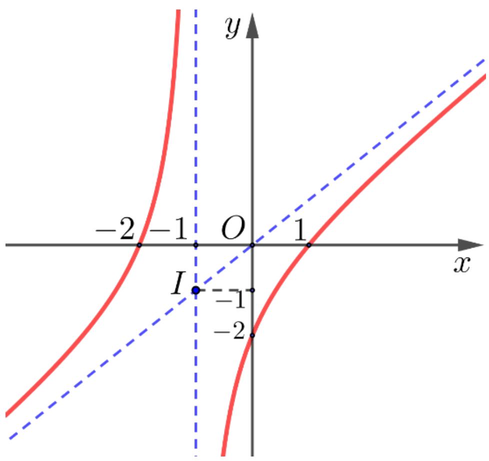
» Đồ thị:

Giao điểm với trục tung $(0;-2)$.

Giao điểm với trục hoành là các điểm $(-2;0)$ và $(1;0)$.

Nhận giao điểm $I(-1;-1)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng

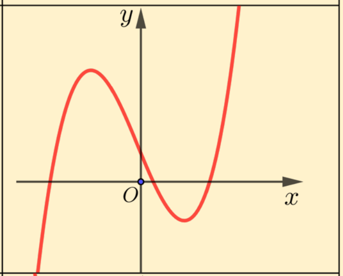
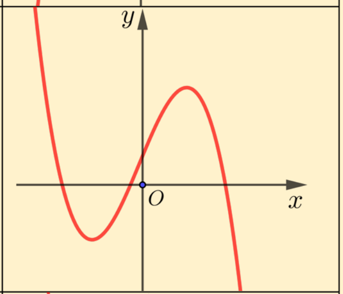
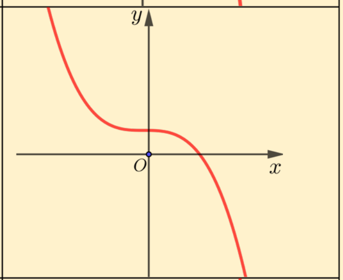
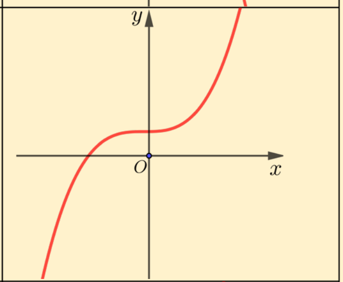
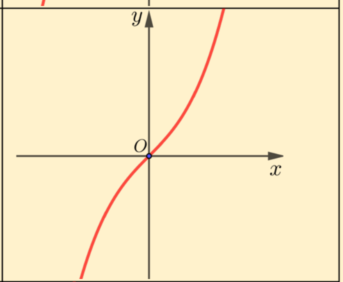
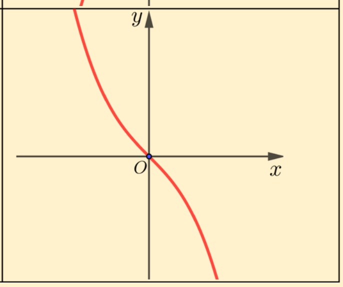
Nhận hai đường phân giác của góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.



Dạng 4. Nhận dạng hàm số khi biết đồ thị - bảng biến thiên

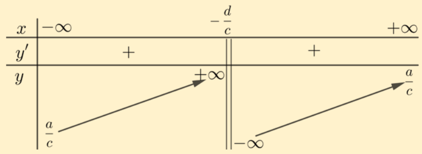
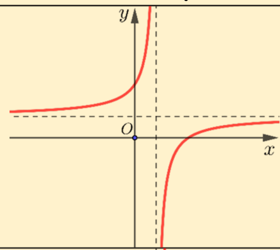
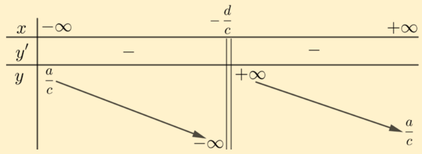
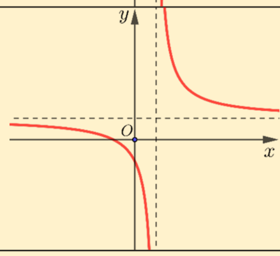
Phương pháp

⁂ Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ a \neq 0$

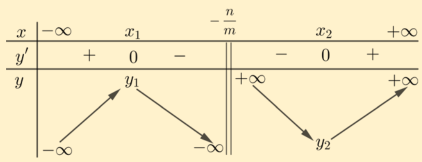
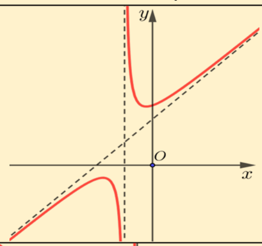
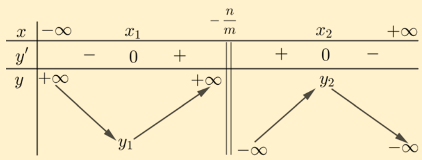
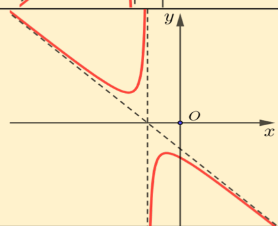
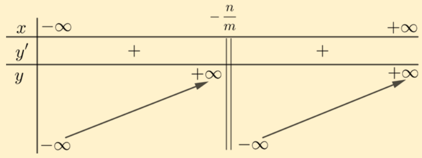
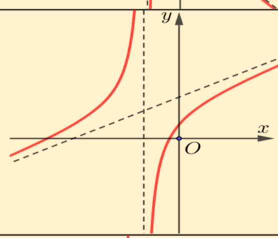
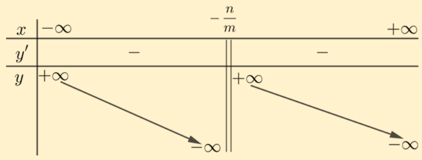
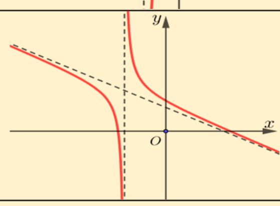
<table>
<tr><th colspan="2">Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$</th><th>Bảng biến thiên</th><th>Đồ thị</th></tr>
<tr><td rowspan="2">» TH1: y' có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2\ (x_1 < x_2)$</td><td>$a > 0$</td><td>$\begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & & x_1 & & x_2 & & +\infty \\ \hline y' & & + & 0 & - & 0 & + & \\ \hline y & -\infty & \nearrow & y_1 & \searrow & y_2 & \nearrow & +\infty \end{array}$</td><td></td></tr>
<tr><td>$a < 0$</td><td>$\begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & & x_1 & & x_2 & & +\infty \\ \hline y' & & - & 0 & + & 0 & - & \\ \hline y & +\infty & \searrow & y_1 & \nearrow & y_2 & \searrow & -\infty \end{array}$</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">» TH2: y' có 1 nghiệm x_0</td><td>$a > 0$</td><td>$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & x_0 & & +\infty \\ \hline y' & & + & 0 & + & \\ \hline y & -\infty & \nearrow & y_0 & \nearrow & +\infty \end{array}$</td><td></td></tr>
<tr><td>$a < 0$</td><td>$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & x_0 & & +\infty \\ \hline y' & & - & 0 & - & \\ \hline y & +\infty & \searrow & y_0 & \searrow & -\infty \end{array}$</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">» TH3: y' vô nghiệm</td><td>$a > 0$</td><td>$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline y' & & + & \\ \hline y & -\infty & \nearrow & +\infty \end{array}$</td><td></td></tr>
<tr><td>$a < 0$</td><td>$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline y' & & - & \\ \hline y & +\infty & \searrow & -\infty \end{array}$</td><td></td></tr>
</table>

Phương pháp

⁂ Hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\left(c\neq 0, ad-bc\neq 0\right)$ có $y'=\dfrac{ad-bc}{\left(cx+d\right)^2}$ và TCĐ: $x=-\dfrac{d}{c}$ và TCN: $y=\dfrac{a}{c}$

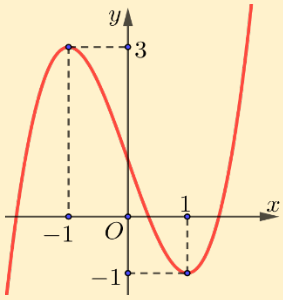
	Bảng biến thiên	Đồ thị
» **TH1 :** $ad-bc>0 \Leftrightarrow y'>0\ \ \forall x\neq -\dfrac{d}{c}$		
» **TH2 :** $ad-bc<0 \Leftrightarrow y'<0\ \ \forall x\neq -\dfrac{d}{c}$		

⁂ Hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}\left(a\neq 0, m\neq 0\right)$ có $y=Ax+B+\dfrac{C}{mx+n}\Rightarrow y'=A-\dfrac{C}{\left(mx+n\right)^2}$ và TCĐ: $x=-\dfrac{n}{m}$ và TCX: $y=Ax+B$

		Bảng biến thiên	Đồ thị
» **TH1:** y' có 2 nghiệm phân biệt	$A>0$		
	$A<0$		
» **TH2:** y' có 1 nghiệm hoặc vô nghiệm	$A>0$		
	$A<0$		

Ví dụ 4.1.

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Viết công thức của hàm số.



Lời giải

» Ta thấy đồ thị có hai cực trị, nên hàm số của đồ thị đã cho có dạng: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

» Mà đồ thị giao với trục tung tại điểm có tung độ bằng 1 nên $d = 1$.

» Mặt khác $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = -1$ nên

$$\begin{cases} y'(1) = 0 \\ y'(-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ 3a - 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4b = 0 \Leftrightarrow b = 0$$

» Theo Viet thì $1.(-1) = \dfrac{c}{3a} \Leftrightarrow c = -3a$

Suy ra hàm số có dạng $y = ax^3 - 3ax + 1$

» Mặt khác đồ thị đi qua điểm $(1; -1)$ nên

$y(1) = -1 \Leftrightarrow a - 3a + 1 = -1 \Leftrightarrow -2a = -2 \Leftrightarrow a = 1 \Rightarrow c = -3$

Vậy hàm số cần tìm là $y = x^3 - 3x + 1$.

Ví dụ 4.2.

Cho hàm số $y = \dfrac{ax - 1}{2x + b}$ có bảng biến thiên như hình bên dưới. Xác định a, b.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	-1 ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$		↘ -1

Lời giải

» Đồ thị có đường tiệm cận đứng $x = -1$ nên $x = -1$ là nghiệm của $2x + b = 0$

Suy ra $2(-1) + b = 0 \Leftrightarrow b = 2$

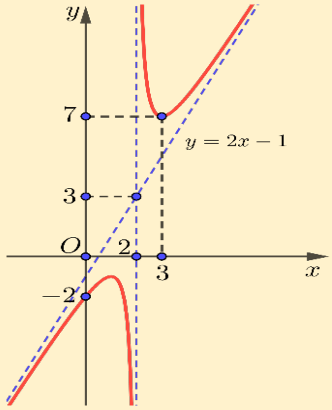
» Mặt khác đồ thị có đường tiệm cận ngang $y = -1$ nên $\dfrac{a}{2} = -1 \Leftrightarrow a = -2$

Vậy hàm số đã cho có $a = -2,\ b = 2$.

Ví dụ 4.3.

Cho hàm số hữu tỉ $y=\dfrac{2x^2+ax+b}{cx-2}$ có đồ thị như hình bên.

Viết công thức của hàm số.



Lời giải

» Đồ thị có đường tiệm cận đứng $x=2$ nên $x=2$ là nghiệm của $cx-2=0$

$\Leftrightarrow c.2-2=0 \Leftrightarrow c=1$

Suy ra hàm số có dạng $y=\dfrac{2x^2+ax+b}{x-2}$

» Mặt khác đồ thị hàm số đi qua điểm $(1;-1)$ và $(3;7)$ nên

$$\begin{cases} y(1)=-1 \\ y(3)=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2+a+b}{1-2}=-1 \\ \dfrac{18+3a+b}{3-2}=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=-1 \\ 3a+b=-11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-5 \\ b=4 \end{cases}$$

Vậy hàm số cần tìm là $y=\dfrac{2x^2-5x+4}{x-2}$.

Dạng 5. Nhận dạng đồ thị - bảng biến thiên khi biết hàm số

Phương pháp

Vận dụng các kiến thức liên quan: Đơn điệu, Cực trị, Đường tiệm cận

» ***Bước 1:*** Tập xác định.

» ***Bước 2:*** Sự biến thiên

» Chiều biến thiên.

» Cực trị .

» Đường tiệm cận.

» Điểm đi qua.

» ***Bước 3:*** Kết luận đồ thị

Ví dụ 5.1.

Xác định bảng biến thiên của hàm số $y=-x^3-3x^2+9x-9$.

Lời giải

» Tập xác định $D=\mathbb{R}$

» Sự biến thiên: $y'=-3x^2-6x+9$, $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-3 \end{array}\right.$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3;1)$, nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-3)$ và $(1;+\infty)$.

» Cực trị:

Hàm số đạt cực đại tại $x=1$ và $y_{CD}=-4$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-3$ và $y_{CT}=-36$

» Các giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$

» Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-36	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-\infty$

Ví dụ 5.2.

Xác định đồ thị của hàm số hữu tỉ $y=\dfrac{x^2+3}{x+1}$.

Lời giải

» Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

» Sự biến thiên:

Ta có $y=\dfrac{x^2+3}{x+1}=x-1+\dfrac{4}{x+1}$

Đạo hàm $y'=1-\dfrac{4}{(x+1)^2}$, $y'=0\Leftrightarrow (x+1)^2-4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=2\\ x+1=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\\ x=-3\end{array}\right.$

Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-3)$ và $(1;+\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên $(-3;-1)$ và $(-1;1)$.

» Cực trị:

Hàm số đạt cực đại tại $x=-3$ và $y_{CĐ}=-6$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$ và $y_{CT}=2$

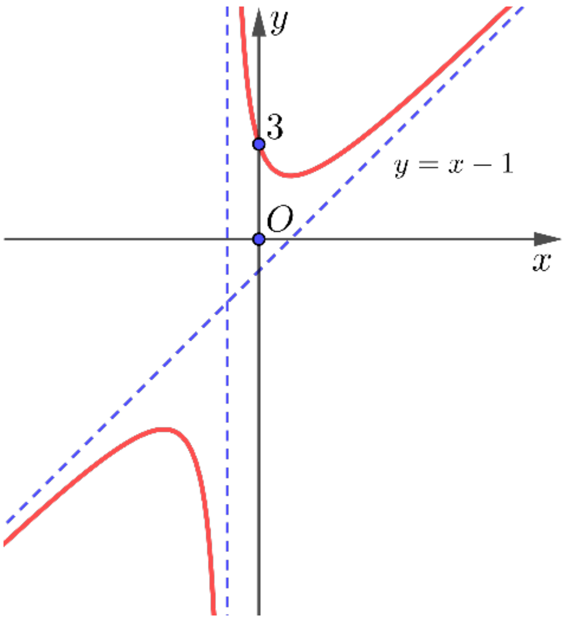
» Các giới hạn:

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} y=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$

Và $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[y-(x-1)\right]=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[y-(x-1)\right]=0\Rightarrow$ đồ thị có đường tiệm cận xiên là $y=x-1$

Mặt khác $\lim\limits_{x\to(-1)^+} y=+\infty$; $\lim\limits_{x\to(-1)^-} y=-\infty$ $\Rightarrow$ đồ thị có đường tiệm cận đứng là $x=-1$

» Đồ thị:



Dạng 6. Xác định dấu – giá trị các hệ số

Phương pháp

- **Loại 1.** Hàm đa thức bậc ba $y = f\left(x\right) = ax^3 + bx^2 + cx + d\ \left(a \neq 0\right)$

» *Bước 1:* Nhìn vào nhánh ngoài cùng của đồ thị Xác định dấu của hệ số a.

» *Bước 2:* Điểm cắt trục tung: xác định dấu hệ số d.

» *Bước 3:* Nhìn vào hai điểm cực trị (nếu có):

» Phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c = 0$.

- Nếu đồ thị hàm số không có điểm cực trị $\Rightarrow \Delta' = b^2 - 3ac \leq 0$.
- Nếu đồ thị hàm số có hai điểm cực trị:

Các điểm cực trị x_1, x_2 của hàm số là hai nghiệm của phương trình $y' = 0$.

Khi đó $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{2b}{3a} \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{3a} \end{cases}$ (Vi-ét).

Dựa vào vị trí của x_1, x_2 để suy luận các phép tính $x_1 + x_2$ và x_1x_2 mang dấu gì.

Nếu không cho tọa độ rõ ràng, ước lượng khoảng cách từ O tới các điểm x_1, x_2.

» *Bước 4:* Xác định tọa độ các điểm đã cho.

» *Bước 5:* Dựa vào điểm uốn U

» Là tâm đối xứng của đồ thị hàm số.

» x_U là nghiệm của phương trình $y'' = 0$.

» Điểm U là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm cực trị.

⁂ **Nhận xét:** Bảng biến thiên mô phỏng đồ thị hàm số.

Cách đọc bảng biến thiên giống như cách đọc đồ thị.

- **Loại 2.** Hàm phân thức $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ và $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$.

» *Bước 1:* Xác định các đường tiệm cận.

Dùng công thức tính nhanh định nghĩa) để tìm mối quan hệ giữa các hệ số.

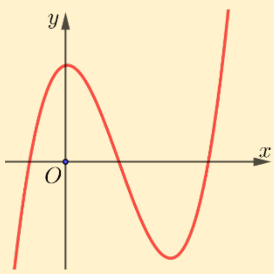
Lưu ý: Giao điểm của hai đường tiệm cận là tâm đối xứng của đồ thị hàm số.

» *Bước 2:* Xác định các điểm thuộc đồ thị hàm số: giao với các trục tọa độ, cực trị.

» *Bước 3:* Từ hình dáng đồ thị (bảng biến thiên), xác định dấu của đạo hàm dựa vào các khoảng đồng biến/nghịch biến. Từ đó xác định dấu của các hệ số.

Ví dụ 6.1.

Cho hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên dưới. Trong các hệ số a, b, c, d có bao nhiêu giá trị dương?



Lời giải

» Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

» Đồ thị có nhánh cuối cùng đi lên nên $a > 0$

» Đồ thị giao với trục Oy tại điểm có tung độ lớn hơn 0 nên $d > 0$

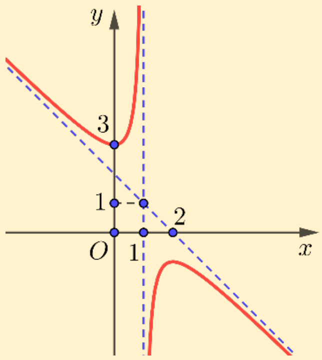
» Từ đồ thị ta thấy hàm số có 1 điểm cực trị bằng 0 nên $c = 0$ và một điểm cực trị dương nên $-\dfrac{2b}{3a} > 0 \Rightarrow b < 0$

Vậy trong các hệ số a, b, c, d có 2 giá trị dương là a và d.

Ví dụ 6.2.

Cho hàm số hữu tỉ $y = ax + 2 + \dfrac{b}{x+c}$ có đồ thị như hình bên.

Tính $P = a + b + c$.



Lời giải

Ta có $y = ax + 2 + \dfrac{b}{x+c}$

» Nên đồ thị của hàm số có đường tiệm cận xiên là $y = ax + 2$, mà như hình vẽ đường tiệm cận xiên đi qua điểm $(1;1)$ suy ra $1 = a.1 + 2 \Leftrightarrow a = -1$

» Đồ thị của hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = 1$ nên $1 + c = 0 \Leftrightarrow c = -1$

Khi đó hàm số đã cho có dạng $y = -x + 2 + \dfrac{b}{x-1}$

» Mặt khác đồ thị hàm số đi qua điểm $(0;3)$ nên $-0 + 2 + \dfrac{b}{0-1} = 3 \Leftrightarrow 2 - b = 3 \Leftrightarrow b = -1$

Vậy $P = a + b + c = -1 + (-1) + (-1) = -3$.

Dạng 7. Đọc đồ thị của đạo hàm

Phương pháp

Xác định tính đơn điệu, cực trị, giá trị lớn nhất nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$, $g(x)=f(u(x))$, $g(x)=g(f(x))$ khi biết đồ thị (bảng biến thiên) của đồ thị đạo hàm $y=f'(x)$ hoặc $y=f'(u(x))$

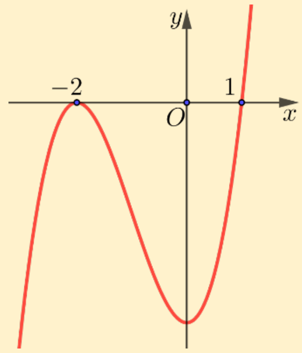
» ***Bước 1:*** Tính $g'(x)$ (chú ý hàm hợp dạng $g(x)=f(u(x))\Rightarrow g'(x)=u'(x).f'(u(x))$)

» ***Bước 2:*** Giải $g'(x)=0$ ta được $x_1;x_2...;x_i$ là các điểm mà tại đó $g'(x)=0$ hoặc $g'(x)$ không xác định.

» ***Bước 3:*** Lập bảng xét dấu của $g'(x)\to$ lập được bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)$. Dựa vào bảng biến thiên xét các tính chất đơn điệu, cực trị, min, max…

Ví dụ 7.1.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $y=f'(x)$ có đồ thị trong hình dưới đây. Lập bảng xét dấu của $y=f'(x)$?



Lời giải

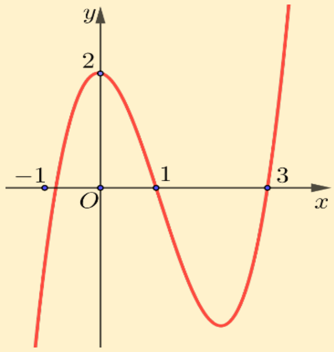
» Từ đồ thị của $y=f'(x)$ ta có, $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=1\end{array}\right.$

» Bảng xét dấu của $y=f'(x)$:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Ví dụ 7.2.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $y=f'(x)$ có đồ thị trong hình dưới đây. Tìm điểm cực đại của hàm số đã cho.



Lời giải

Từ đồ thị của $f'(x)$ ta có, $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \\ x=1 \\ x=3 \end{array}\right. \quad (x_1<0)$

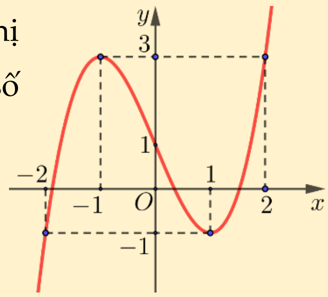
Bảng biến thiên của $y=f(x)$:

x	$-\infty$		x_1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	f_{CT}	$\nearrow$	f_{CD}	$\searrow$	f_{CT}	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x=1$.

Ví dụ 7.3.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Xác định giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f(2x-1)-2x+1$ trên $[0;1]$



Lời giải

Ta có $g'(x)=2f'(2x-1)-2$

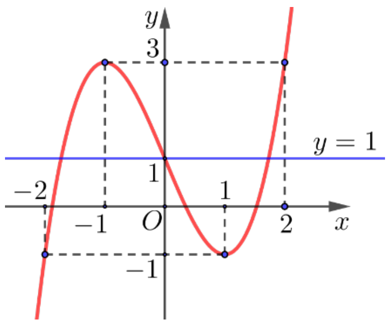
Cho $g'(x)\ge 0 \Leftrightarrow 2f'(2x-1)-2\ge 0 \Leftrightarrow f'(2x-1)\ge 1$

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta thấy trên $[0;1]$:

» Đường thẳng $y=1$ cắt $y=f'(x)$ tại $x=0$.

» $y=f'(x)$ nằm phía trên $y=1$ khi $x<0$

» $y=f'(x)$ nằm phía dưới $y=1$ khi $x>0$



Do đó $f'(2x-1)\ge 1 \Leftrightarrow 2x-1\le 0 \Leftrightarrow x\le \dfrac{1}{2}$

Từ đó ta lập được bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ như sau

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	$f\left(\frac{1}{2}\right)$	$\searrow$	

Từ BBT giá trị lớn nhất của hàm số $y=g(x)$ trên đoạn $[0;1]$ là $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$

Dạng 8. Sự tương giao

Phương pháp

Các hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ có đồ thị lần lượt là các đường (C_1), (C_2), khi đó:

» Số nghiệm của phương trình $f(x)=g(x)$ chính là số giao điểm của các đồ thị (C_1), (C_2).

» Số giao điểm của các đường (C_1), (C_2) chính là số nghiệm của phương trình $f(x)=g(x)$.

Ví dụ 8.1.

Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị của hàm số $y=3x^3-9x+3(m-1)$ giao với trục hoành tại hai điểm phân biệt?

Lời giải

» Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=3x^3-9x+3(m-1)$ với trục hoành là: $3x^3-9x+3(m-1)=0 \Leftrightarrow -x^3+3x=m-1 \quad (1)$

» Xét hàm số $f(x)=-x^3+3x$ (C) có $f'(x)=-3x^2+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

» Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thì $f(x)=-x^3+3x$ (C) giao $y=m-1$ tại hai điểm phân biệt. Do đó $m=3$ hoặc $m=-1$.

Vậy chỉ có một giá trị nguyên dương của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 8.2.

Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2+(2m^2+1)x+m-3$ và parabol $y=2x^2+x-m-2$ có hai giao điểm phân biệt và tổng hoành độ hai giao điểm đó là 3?

Lời giải

» Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường là:

$x^3-3x^2+(2m^2+1)x+m-3=2x^2+x-m-2 \Leftrightarrow x^3-5x^2+2m^2x+2m-1=0 \quad (1)$

Ycbt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1; x_2 (trong đó có một nghiệm đơn và một nghiệm kép). Không mất tính tổng quát giả sử nghiệm kép là x_1.

» Theo Vi - et: $x_1+x_2=5$.

» Theo đề bài: $x_1+x_2=3$. Do đó $x_1=2$, $x_2=1$. PT (1) nhận $x_1=2$, $x_2=1$ làm nghiệm nên $\begin{cases} 8-20+4m^2+2m-1=0 \\ 1-5+2m^2+2m-1=0 \end{cases}$ (vô nghiệm). Không tồn tại giá trị m thỏa mãn.

Dạng 9. Bài toán thực tế liên môn đưa về khảo sát hàm số

Phương pháp

» *Bước 1:* Xác định yếu tố chọn làm ẩn, chỉ ra điều kiện (nếu có)
» *Bước 2:* Xây dựng phương trình hàm số từ các dữ kiện của bài toán.
» *Bước 3:* Giải bài toán liên quan đến hàm số và kết luận.

Ví dụ 9.1.

Nhiệt độ T của một người trong cơn bệnh được cho bởi công thức $T(t)=-0,1t^2+1,2t+98,6\ (0\le t\le 11)$, trong đó T là nhiệt độ $\left({}^oF-Fahrenheit\right)$ theo thời gian t trong ngày. Biết rằng ${}^oC=\dfrac{{}^oF-32}{1,8}$, độ chênh lệch (theo độ ${}^oC$) giữa nhiệt độ lớn nhất và nhiệt độ thấp nhất trong một ngày là bao nhiêu?

Lời giải

» Xét hàm số: $T(t)=-0,1t^2+1,2t+98,6$ với $t\in[0;\,11]$

$\Rightarrow T'(t)=-0,2t+1,2;\ \ T'(t)=0\Leftrightarrow t=6$

» Đồng thời ta có: $\begin{cases}T(0)=98,6^oF=37^0C\\T(6)=102,2^oF=39^0C\\T(11)=99,7^oF=37,6^0C\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\max\limits_{t\in[0;12]}T(t)=T(6)=39^0C\\\min\limits_{t\in[0;12]}T(t)=T(0)=37^0C\end{cases}\Leftrightarrow \Delta t=2^0C$

» Vậy độ chênh lệch (theo độ ${}^oC$) giữa nhiệt độ lớn nhất và nhiệt độ thấp nhất trong một ngày là 2^0C.

Ví dụ 9.2.

Một sợi dây kim loại dài 60 cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất uốn thành hình vuông cạnh a, đoạn dây thứ hai uốn thành đường tròn bán kính r. Để tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là nhỏ nhất thì tỉ số $\dfrac{a}{r}$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

» Theo giả thiết chiều dài đoạn dây thứ nhất chính là chu vi của hình vuông và bằng $4a$

» Ta có chiều dài đoạn dây thứ hai là $60-4a$ và cũng chính là chu vi của đường tròn bán kính r $\Rightarrow 2\pi r=60-4a\Rightarrow r=\dfrac{30-2a}{\pi}>0\Rightarrow a<15$

» Do đó tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là

$$S_{vuong}+S_{tron}=a^2+\pi\frac{(30-2a)^2}{\pi^2}=a^2+\frac{(30-2a)^2}{\pi}$$

» Đặt $S(a)=a^2+\dfrac{(30-2a)^2}{\pi}$ với $0<a<15$

» Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của $S(a)$ với $0 < a < 15$

» Khi đó ta có: $S'(a) = 2a + \dfrac{-4(30-2a)}{\pi} = \dfrac{2}{\pi}\left[(\pi+4)a - 60\right]$, $S'(a) = 0 \Leftrightarrow a = \dfrac{60}{\pi+4} < 15$

» Lập bảng biến thiên:

a	0		$\dfrac{60}{\pi+4}$		15
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		$\searrow$	min	$\nearrow$	

» Dựa vào bảng biến ta có: $\min\limits_{a\in\left(0;\frac{L}{4}\right)} S(a) = S\left(\dfrac{60}{\pi+4}\right)$ và khi đó bán kính của đường tròn sẽ là $r = \dfrac{30}{\pi+4} = \dfrac{a}{2}$. Do đó lập tỉ số ta sẽ có $\dfrac{a}{r} = 2$.

Ví dụ 9.3.

Một cơ sở sản xuất khăn mặt đang bán mỗi chiếc khăn với giá 30.000 đồng một chiếc và mỗi tháng cơ sở bán được trung bình 3000 chiếc khăn. Cơ sở sản xuất đang có kế hoạch tăng giá bán để có lợi nhận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lý thấy rằng nếu từ mức giá 30.000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 100 chiếc. Biết vốn sản xuất một chiếc khăn không thay đổi là 18.000 đồng. Hỏi cơ sở sản xuất phải bán với giá mới là bao nhiêu để đạt lợi nhuận lớn nhất.

Lời giải

» Gọi số tiền cần tăng giá mỗi chiếc khăn là x (nghìn đồng).

» Vì cứ tăng giá thêm 1 (nghìn đồng) thì số khăn bán ra giảm 100 chiếc nên tăng x (nghìn đồng) thì số xe khăn bán ra giảm $100x$ chiếc.
Do đó tổng số khăn bán ra mỗi tháng là: $3000 - 100x$ chiếc.

» Lúc đầu bán với giá 30 (nghìn đồng), mỗi chiếc khăn có lãi 12 (nghìn đồng).

» Sau khi tăng giá, mỗi chiếc khăn thu được số lãi là: $12 + x$ (nghìn đồng).

» Do đó tổng số lợi nhuận một tháng thu được sau khi tăng giá là:

$$f(x) = (3000 - 100x)(12 + x) \text{ (nghìn đồng).}$$

» Xét hàm số $f(x) = (3000-100x)(12+x)$ trên $(0;+\infty)$.

» Ta có: $f(x) = -100x^2 + 1800x + 36000 = -100(x-9)^2 + 44100 \le 44100$.
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 9$.

» Như vậy, để thu được lợi nhuận cao nhất thì cơ sở sản xuất cần tăng giá bán mỗi chiếc khăn là 9.000 đồng, tức là mỗi chiếc khăn bán với giá mới là 39.000 đồng.

Chương 01
Bài 4. KHẢO SÁT & VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ CƠ BẢN

C Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» **Câu 1.** Hàm số $y=-x^3+3x^2-2$ đồng biến trên khoảng

A. $(0;2)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(1;4)$. **D.** $(4;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

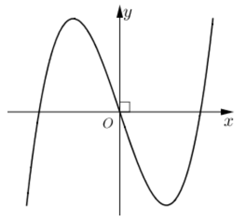
Ta có: $y'=-3x^2+6x$; $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	

Nhìn vào bảng xét dấu của y' ta thấy hàm số $y=-x^3+3x^2-2$ đồng biến trên $(0;2)$.

Vậy hàm số $y=-x^3+3x^2-2$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

» **Câu 2.** Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



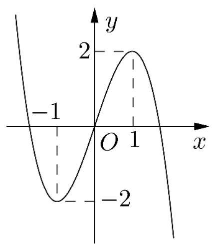
A. $y=x^3-3x$. **B.** $y=-x^3+3x$. **C.** $y=x^3-3x^2+1$. **D.** $y=-x^3+3x^2$.

Lời giải

Chọn A

Đường cong có dạng của đồ thị hàm số bậc 3 với hệ số $a>0$ nên chỉ có hàm số $y=x^3-3x$ thỏa yêu cầu bài toán.

» **Câu 3.** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=1$ là



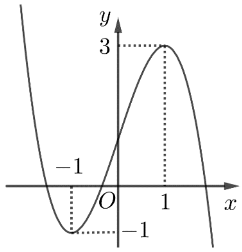
A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị hàm số ta có số nghiệm thực của phương trình $f\left(x\right)=1$ là 3.

» Câu 4. Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f\left(x\right)=1$ là



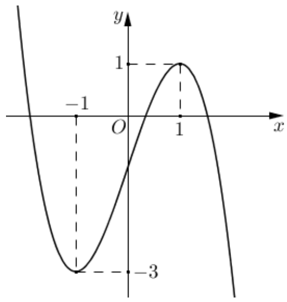
A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta thấy đường thẳng $y=1$ cắt đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình $f\left(x\right)=1$ có 3 nghiệm.

» Câu 5. Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(x\right)=m$ có ba nghiệm thực phân biệt?

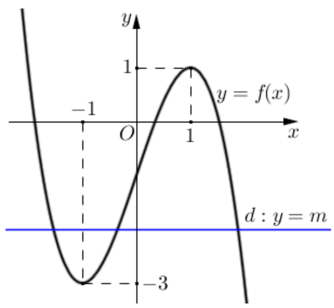


A. 2. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Số nghiệm của phương trình $f\left(x\right)=m$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và đường thẳng $d:y=m$.



Dựa vào hình vẽ, ta có:

Phương trình $f\left(x\right)=m$ có ba nghiệm thực phân biệt khi đường thẳng $d:y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại ba điểm phân biệt, tức là $-3<m<1$. Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\left\{-2;-1;0\right\}$.

» Câu 6. Tìm giá trị cực đại của hàm số $y=x^3-3x+2$.

A. $y=-1$ **B.** $y=4$ **C.** $y=1$ **D.** $y=0$

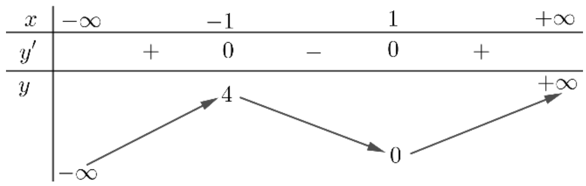
Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 3x^2 - 3 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \;\; \Rightarrow y(1) = 0 \\ x = -1 \;\Rightarrow y(-1) = 4 \end{array}\right.$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3 - 3x + 2) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3\left(1 - \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{2}{x^3}\right) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3 - 3x + 2) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(1 - \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{2}{x^3}\right) = +\infty$

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên, ta thấy giá trị cực đại của hàm số bằng 4

» Câu 7. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{5x+1}{x-1}$ là

A. $y = -\dfrac{1}{5}$ **B.** $y = 5$ **C.** $y = 1$ **D.** $y = 0$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{5x+1}{x-1}\right) = 5 \Rightarrow y = 5$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

» Câu 8. Biết rằng đồ thị của hàm số $y = \dfrac{(n-3)x + n - 2017}{x + m + 3}$ (m, n là các số thực) nhận trục hoành làm tiệm cận ngang và trục tung là tiệm cận đứng. Tính tổng $m + n$.

A. 0 **B.** -3 **C.** 3 **D.** 6

Lời giải

Chọn A

Theo công thức tìm nhanh tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ ta có

Đồ thị hàm số nhận $x = -\dfrac{d}{c} = -m - 3 = 0$ làm TCĐ $\Rightarrow m = -3$

Đồ thị hàm số nhận $y = \dfrac{a}{c} = n - 3 = 0$ làm TCN $\Rightarrow n = 3$.

Vậy $m + n = 0$.

» Câu 9. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{2x - 2}$ là

A. $x = 1$ **B.** $x = \dfrac{1}{2}$

C. $x = 2$ **D.** Không có tiệm cận đứng

Lời giải

Chọn D

Ta có: $2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Thay $x = 1$ lên tử => $1^2 + 2.1 - 3 = 0$. Vậy $x = 1$ không là TCĐ =>Không có TCĐ

» Câu 10. Đồ thị hàm số $y = -x^3 + 2x^2 - 1$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

A. 3. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Từ hàm số: $y=-x^3+2x^2-1$, cho $x=0\to y=-1$.

Vậy đồ thị hàm số $y=-x^3+2x^2-1$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -1.

» Câu 11. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2$ và đồ thị hàm số $y=3x^2+3x$ là

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị đã cho là:

$$x^3+3x^2=3x^2+3x\Leftrightarrow x^3-3x=0\Leftrightarrow x\left(x^2-3\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\sqrt{3}\\x=-\sqrt{3}\end{array}\right..$$

Hai đồ thị đã cho cắt nhau tại 3 điểm.

» Câu 12. Biết rằng đường thẳng $y=4x+5$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+2x+1$ tại điểm duy nhất; kí hiệu $\left(x_0;y_0\right)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0.

A. $y_0=10$. **B.** $y_0=13$. **C.** $y_0=11$. **D.** $y_0=12$.

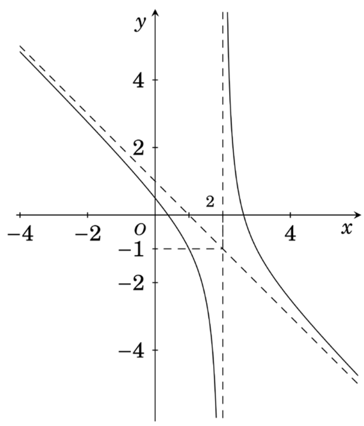
Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm là $x^3+2x+1=4x+5\Leftrightarrow x^3-2x-4=0\Leftrightarrow x=2$

Với $x=2\Rightarrow y=13$. Vậy $y_0=13$

» Câu 13. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ có đồ thị như hình bên dưới



Xét các mệnh đề sau:

a). Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

b). Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

c). Điểm $I(1;2)$ là tâm đối xứng của đồ thị.

d). Hệ số a và m trái dấu.

Có bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị, ta thấy $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
Suy ra tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$ nên mệnh đề a) sai.

Dựa vào đồ thị, ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

Suy ra mệnh đề b) đúng.

Dựa vào đồ thị, ta thấy điểm $(2;-1)$ là tâm đối xứng của đồ thị suy ra mệnh đề c) sai.

Dựa vào đồ thị, ta thấy $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$ nên hệ số a và m trái dấu.

Suy ra mệnh đề d) đúng.

» Câu 14. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+x^2$ và đồ thị hàm số $y=x^2+5x$

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

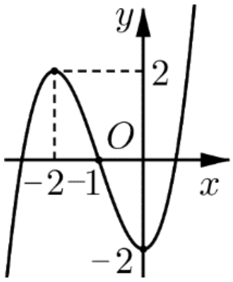
Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3+x^2=x^2+5x \Leftrightarrow x^3-5x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{5} \end{array}\right.$.

Vậy số giao điểm của 2 đồ thị là 3.

» Câu 15. Đường cong ở hình bên dưới là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=-x^3-3x^2-2$. **B.** $y=x^3+3x^2-2$. **C.** $y=-x^3+3x^2-2$. **D.** $y=x^3-3x^2-2$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị, ta thấy đồ thị hàm số là hàm bậc ba và $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$ nên $a>0$ suy ra loại A, C.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(-1;0)$ nên chọn đáp án B.

» Câu 16. Gọi M,N là giao điểm của đường thẳng $y=x+1$ và đường cong $y=\dfrac{2x+4}{x-1}$. Khi đó hoành độ x_I của trung điểm I của đoạn MN bằng bao nhiêu?

A. $x_I=2$. **B.** $x_I=1$. **C.** $x_I=-5$. **D.** $x_I=-\dfrac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$\dfrac{2x+4}{x-1}=x+1\,(x\neq1) \Leftrightarrow x^2-2x-5=0$ (*)

Khi đó $x_I=\dfrac{x_M+x_N}{2}=1$.

Chú ý: có thể giải (*), tìm được $x_M=1+\sqrt{6}, x_N=1-\sqrt{6} \Rightarrow x_I=1$

» Câu 17. Biết đường thẳng $y=x-1$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{-x+5}{x-2}$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2. Giá trị x_1+x_2 bằng

A. -1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

$x-1=\dfrac{-x+5}{x-2}$ (1)

Với $x\neq 2$, phương trình $(1)\Leftrightarrow (x-1)(x-2)=-x+5 \Leftrightarrow x^2-3x+2=-x+5$

$\Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Đặt $x_1=-1$, $x_2=3$. Khi đó $x_1+x_2=-1+3=2$.

» Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;+\infty)$. **B.** $(-2;2)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

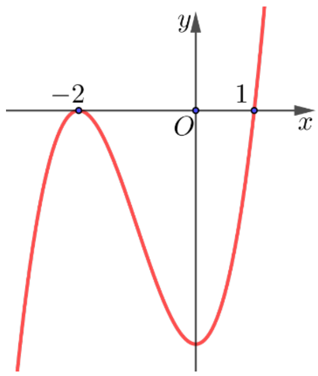
Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng xét dấu của đạo hàm ta thấy, $f'(x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x<2 \\ x<-2 \end{array}\right.$.

Do đó, trong các khoảng đã cho, hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

» Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau.



Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;0)$. **B.** $(-4;-2)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta suy ra $f'(x)<0 \Leftrightarrow x<1$ và $f'(x)>0 \Leftrightarrow x>1$

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$

» Câu 20. Trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hàm số nào có bảng biến thiên sau?

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	-2	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	-2

A. $y=\dfrac{x-1}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{-2x}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{-2+x}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{1-2x}{x+1}$.

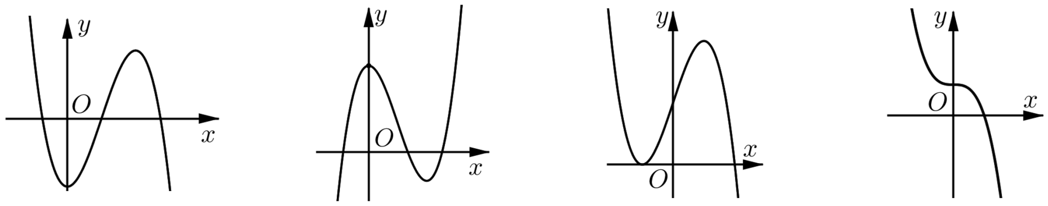
Lời giải

Chọn D

Dựa vào BBT, ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=-2$ nên $y=-2$ là TCN của đồ thị hàm số suy ra loại A, C.

Dựa vào BBT, ta có $\lim\limits_{x\to-1^+} y=+\infty$ nên $x=-1$ là TCĐ của đồ thị hàm số nên ta chọn D.

» Câu 21. Hình nào dưới đây là dạng đồ thị của hàm số $y=-x^3+3x^2-2$?



(I) (II) (III) (IV)

A. (I). **B.** (III). **C.** (IV). **D.** (II).

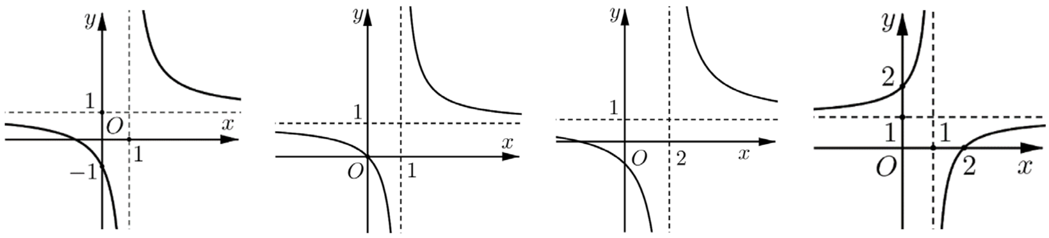
Lời giải

Chọn A

Vì hàm số $y=-x^3+3x^2-2$ có $a=-1<0$ nên nhánh cuối đồ thị đi xuống, suy ra loại (II).

Đồ thị $y=-x^3+3x^2-2$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2 nên chọn (I).

» Câu 22. Hình nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-1}$?



(I) (II) (III) (IV)

A. (I). **B.** (III). **C.** (IV). **D.** (II).

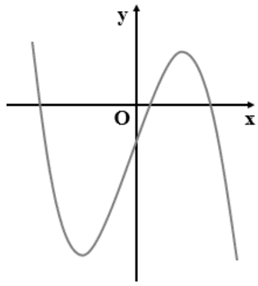
Lời giải

Chọn D

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-1}$ có TCĐ là đường thẳng $x=1$. Suy ra loại (III).

Vì $y'=\dfrac{1}{(x-1)}>0,\forall x\neq 1$ nên hàm số đồng biến trên $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$. Vậy chọn (IV).

» Câu 23. Cho hàm số $y=ax^3+3x+d$ $(a;d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a>0,d>0$. **B.** $a<0,d>0$. **C.** $a>0,d<0$. **D.** $a<0,d<0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}=-\infty \Rightarrow$ đồ thị nhánh ngoài cùng của hàm số hướng đi xuống nên hệ số $a<0$.

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung $Oy: x=0$ là điểm nằm bên dưới trục hoành nên khi $x=0 \Rightarrow y=d<0$.

» Câu 24. Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d\left(a,b,c,d\in\mathbb{R}\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu số dương trong các số a,b,c,d?

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

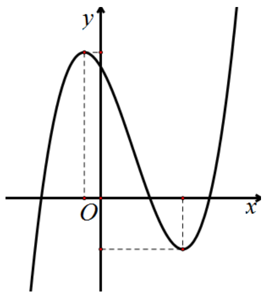
Chọn A

Từ bảng biến thiên, ta có

$$\begin{cases} f\left(0\right)=3 \\ f\left(4\right)=-5 \\ f'\left(0\right)=0 \\ f'\left(4\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=3 \\ 64a+16b+4c+d=-5 \\ c=0 \\ 48a+8b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{4} \\ b=-\dfrac{3}{2} \\ c=0 \\ d=3 \end{cases}$$

Vậy trong các số a,b,c,d có 2 số dương.

» Câu 25. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\left(a\neq0\right)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Chọn khẳng định đúng về dấu của a, b, c, d?



A. $a>0, b>0, d>0, c>0$ **B.** $a>0, c>0>b, d<0$

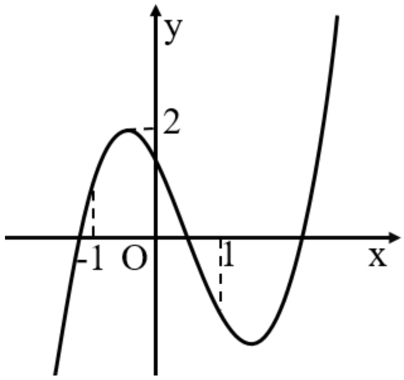
C. $a>0, b>0, c>0, d>0.$ **D.** $a>0, b<0, c<0, d>0$

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị ta có $a>0$, đồ thị cắt Oy tại 1 điểm có tung độ dương nên $d>0$, đồ thị có 2 cực trị trái dấu nên $x_1.x_2<0 \Rightarrow \frac{c}{a}<0 \Rightarrow c<0$. Vậy đáp án D

» Câu 26. Hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Khẳng định nào là đúng?

A. $a<0$, $b<0$, $c<0$, $d<0$.
B. $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d<0$.
C. $a>0$, $b>0$, $c<0$, $d>0$.
D. $a>0$, $b<0$, $c<0$, $d>0$.

Lời giải

Chọn D

+ Dựa vào hình dạng đồ thị ta khẳng định được $a>0$.

+ Đồ thị cắt trục Oy tại điểm có tọa độ $(0;d)$. Dựa vào đồ thị suy ra $d>0$.

+ Ta có: $y'=3ax^2+2bx+c$. Hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 $(x_1<x_2)$ trái dấu nên phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 trái dấu. Vì thế $3a.c<0$, nên suy ra $c<0$.

+ Mặt khác từ đồ thị ta thấy $\begin{cases} x_1>-1 \\ x_2>1 \end{cases}$ nên $x_1+x_2>0$.

Mà $x_1+x_2=\frac{-2b}{3a}$ nên suy ra $\frac{-2b}{3a}>0 \Rightarrow b<0$.

Vậy $a>0$, $b<0$, $c<0$, $d>0$.

» Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗			$+\infty$ || $+\infty$	↘	$\frac{27}{4}$	↗	$+\infty$

Tìm điều kiện của m để phương trình $f(x)=m$ có 3 nghiệm phân biệt.

A. $m<0$.
B. $m>0$.
C. $0<m<\frac{27}{4}$.
D. $m>\frac{27}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Để phương trình $f(x)=m$ có 3 nghiệm phân biệt thì đường thẳng $y=m$ phải cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại ba điểm phân biệt.

Qua bảng biến thiên ta thấy, đường thẳng $y=m$ phải cắt đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại ba điểm phân biệt khi $m>\frac{27}{4}$.

» Câu 28. Đồ thị của hàm số $y=\frac{x-1}{x+1}$ cắt hai trục Ox và Oy tại A và B. Khi đó diện tích tam giác OAB (O là gốc tọa độ bằng)

A. 1. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** 2. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Đồ thị của hàm số $y=\frac{x-1}{x+1}$ cắt hai trục Ox tại điểm $A\left(1;0\right)$.

Đồ thị của hàm số $y=\frac{x-1}{x+1}$ cắt hai trục Oy tại điểm $B\left(0;-1\right)$.

Tam giác OAB vuông tại O nên $S_{OAB}=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{1}{2}.\left|1\right|.\left|-1\right|=\frac{1}{2}$.

» Câu 29. Đồ thị hàm số $y=\frac{x^2-x+1}{x-1}$ có tiệm cận xiên là

A. $y=x$. **B.** $y=-x$. **C.** $y=x+1$. **D.** $y=-x+1$.

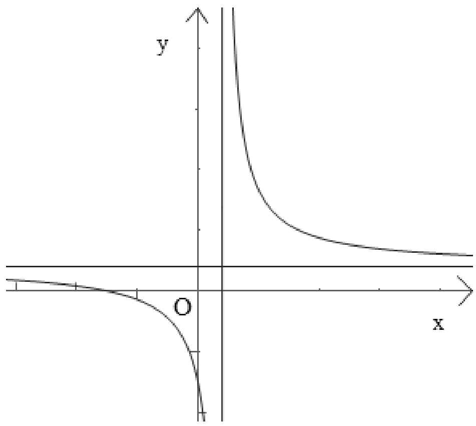
Lời giải

Chọn A

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(y-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1}=0,\lim\limits_{x\to-\infty}\left(y-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x-1}=0$.

Do đó, đường thẳng $y=x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số

» Câu 30. Cho hàm số $y=\frac{\left(a-1\right)x+b}{\left(c-1\right)x+d}$, $d<0$ có đồ thị như hình trên. Khẳng định nào dưới đây là đúng?



A. $a>1,b>0,c<1$. **B.** $a>1,b<0,c>1$. **C.** $a<1,b>0,c<1$. **D.** $a>1,b>0,c>1$.

Lời giải

Chọn D

Theo bài ra, đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x=-\frac{d}{c-1}$.

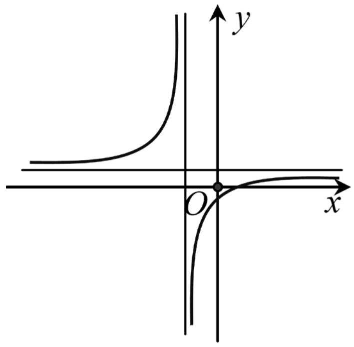
Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là: $y=\frac{a-1}{c-1}$.

Nhìn đồ thị ta thấy: $x=-\dfrac{d}{c-1}>0$ mà $d<0\Rightarrow c-1>0\Rightarrow c>1$.

$y=\dfrac{a-1}{c-1}>0\Rightarrow a-1>0\Rightarrow a>1$.

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $\dfrac{b}{d}<0\Rightarrow b>0$.

» Câu 31. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?



A. $\begin{cases} ad<0 \\ bc>0 \end{cases}$.   **B.** $\begin{cases} ad<0 \\ bc<0 \end{cases}$.   **C.** $\begin{cases} ad>0 \\ bc<0 \end{cases}$.   **D.** $\begin{cases} ad>0 \\ bc>0 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Nhận xét từ đồ thị:

+ Giao với trục hoành tại $x_o=-\dfrac{b}{a}>0\Rightarrow$ a và b trái dấu (1).

+ Giao với trục tung tại $y_o=\dfrac{b}{d}<0\Rightarrow b$ và d trái dấu (2).

+ Tiệm cận đứng: $x=-\dfrac{d}{c}<0\Rightarrow d$ và c cùng dấu (3).

Từ (1) và (2) suy ra: a và d cùng dấu hay $ad>0$.

Từ (2) và (3) suy ra: b và c trái dấu hay $bc<0$.

» Câu 32. Tính tổng các hoành độ giao điểm giữa hai đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-3}{4-x}$ và $y=6-x$.

A. 12.   **B.** 27.   **C.** -12.   **D.** -27.

Lời giải

Chọn A

Ta có phương trình hoành độ giao điểm :

$$6-x=\frac{2x-3}{4-x}\Leftrightarrow x^2-12x+27=0, x\neq 4\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=9 \end{array}\right.$$

Vậy tổng các hoành độ giao điểm bằng 12

» Câu 33. Một học sinh được giao thiết kế một cái hộp thỏa mãn: Tổng của chiều dài và chiều rộng bằng 12cm; tổng của chiều rộng và chiều cao là 24cm. Giáo viên yêu cầu học sinh ấy phải thiết kế sao cho thể tích cái hộp lớn nhất, giá trị thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. 600.   **B.** $843\sqrt{3}$.   **C.** $384\sqrt{3}$.   **D.** $348\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

+ Gọi chiều rộng là x, $0 < x < 12$.

+ Thể tích hình hộp là: $V = x(12-x)(24-x) = x^3 - 36x^2 + 288x$

+ Xét hàm số $f(x) = x^3 - 36x^2 + 288x$ trên $(0;12)$ ta có:

$$f'(x) = 3x^2 - 72x + 288;\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 12 + 4\sqrt{2} \notin (0;12) \\ x = 12 - 4\sqrt{3} \in (0;12) \end{array}\right.$$

+ Lập bảng biến thiên ta tìm được: $\max\limits_{(0;12)} f(x) = f\left(12 - 4\sqrt{3}\right) = 384\sqrt{3} \Rightarrow V_{\max} = 384\sqrt{3}$

» Câu 34. Một con cá hồi bơi ngược dòng (từ nơi sinh sống) để vượt khoảng cách 400 km tới nơi sinh sản. Vận tốc dòng nước là 6 km/h. Giả sử vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v km/h thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ cho bởi công thức E(v) = cv^{3t} . Trong đó c là hằng số cho trước; E tính bằng Jun. Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng của cá tiêu hao ít nhất bằng

A. $9km/h$.   **B.** $8km/h$.   **C.** $10km/h$.   **D.** $12km/h$.

Lời giải

Chọn A

+ Vận tốc của cá khi bơi ngược dòng là $v - 6$ km/h ($v > 6$)

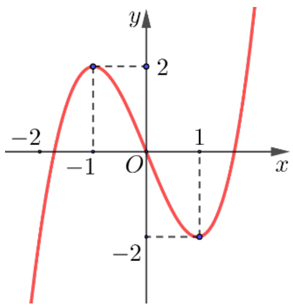
+ Năng lượng cá tiêu hao cả quá trình tìm về nguồn là: $E(v) = cv^3 t = cv^3.\dfrac{400}{v-6}$.

+ Ta có: $E'(v) = c.400.\dfrac{2v^3 - 18v^2}{(v-6)^2} = 0 \Leftrightarrow v = 9(km/h)$

+ Từ đó tìm được $MinE(v) = E(9) = 97200c$

B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai

» Câu 35. Cho đồ thị hàm số bậc ba như hình bên dưới. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng ? Khẳng định nào sai ?



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(-1;2)$		
(b)	Đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.		
(c)	Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$		
(d)	Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị đối xứng với nhau qua gốc toạ độ O		

Lời giải

(a) Điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(-1;2)$

Điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(-1;2)$

Dễ thấy $x_{CD}=-1$, $y_{CD}=2$ nên điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(-1;2)$

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) *Đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.*

Đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.

Quan sát đồ thị thì cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt

» **Chọn** SAI.

(c) *Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$*

Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

Quan sát đồ thị hàm số thì $x\in(1;+\infty)$ đồ thị hàm số đi lên nên hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) *Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị đối xứng với nhau qua gốc toạ độ O*

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị đối xứng với nhau qua gốc toạ độ O

Nếu hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đối xứng qua gốc toạ $O \Leftrightarrow O$ trung điểm hai điểm cực đó $\Rightarrow x_O=\dfrac{-1+1}{2}=0$ và $y_O=\dfrac{-2+2}{2}=0$

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 36.** Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+x+1}{x+1}$ có đồ thị (C)

	Mệnh đề	**Đúng**	**Sai**
(a)	Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;-1);(-1;0)$.		
(b)	Hàm số có hai điểm cực trị.		
(c)	Đồ thị (C) không cắt trục Ox.		
(d)	Đồ thị (C) có tiệm cận xiên đi qua điểm $A(1;2)$		

Lời giải

Ta có $y=\dfrac{-x^2+x+1}{x+1}=-x+2-\dfrac{1}{x+1}$

$$y'=\frac{-x-2x}{(x+1)^2}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$$

Khi đó ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	CT	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	CĐ	↘	$-\infty$

(a) *Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;-1);(-1;0)$.*

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) *Hàm số có hai điểm cực trị.*

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) *Đồ thị (C) không cắt trục Ox.*

Mặt khác, $y=0 \Leftrightarrow -x^2+x+1=0 \;(*)$

Vậy phương trình $(*)$ luôn có hai nghiệm phân biệt.

Hay (C) luôn cắt Ox tại hai điểm phân biệt.

» **Chọn** SAI.

(d) *Đồ thị (C) có tiệm cận xiên đi qua điểm $A(1;2)$*

Tiệm cận xiên của đồ thị là $y=-x+2$

Thay $A(1;2)$ *vào tiệm cận xiên thấy:* $-1+2=1$ không thỏa nên tiệm cận xiên không đi qua điểm A

» **Chọn** SAI.

» Câu 37. Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2-3x+4}{x-3}$ có đồ thị là (C).

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Đồ thị (C) có tiệm cận xiên là $y=-x-6$.		
(b)	Đồ thị (C) nhận giao điểm $I(3;-9)$ làm tâm đối xứng.		
(c)	Đồ thị (C) có hai điểm cực trị nằm 2 phía đối với Oy.		
(d)	Đồ thị không cắt trục Ox.		

Lời giải

Ta có $y=-x-6-\dfrac{14}{x-3}$

(a) *Đồ thị (C) có tiệm cận xiên là $y=-x-6$.*

Khi đó tiệm cận xiên là $y=-x-6$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) *Đồ thị (C) nhận giao điểm $I(3;-9)$ làm tâm đối xứng.*

Tiệm cận đứng là $x=3$.

Suy ra, giao điểm 2 tiệm cận là $I(3;-9)$ là tâm đối xứng.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) *Đồ thị (C) có hai điểm cực trị nằm 2 phía đối với Oy.*

Mặt khác, $y'=\dfrac{-x+6x+5}{(x-3)^2}=0 \Leftrightarrow x^2-6x-5=0$ (*)

Phương trình (*) luôn có 2 nghiệm $x_1<0<x_2$.

Nên (C) luôn có 2 điểm cực trị nằm 2 phía đối với Oy.

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) *Đồ thị không cắt trục Ox.*

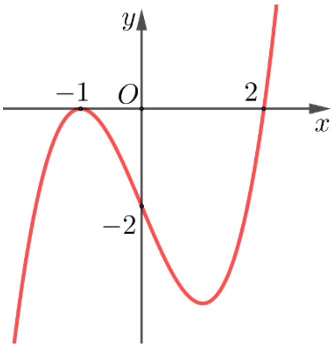
Hơn nữa, $y=0 \Leftrightarrow -x^2-3x+4=0$.

Phương trình luôn có 2 nghiệm (vì $(-1).4<0$)

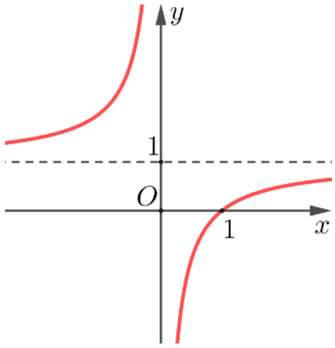
Suy ra (C) cắt Ox tại hai điểm phân biệt.

» **Chọn** SAI.

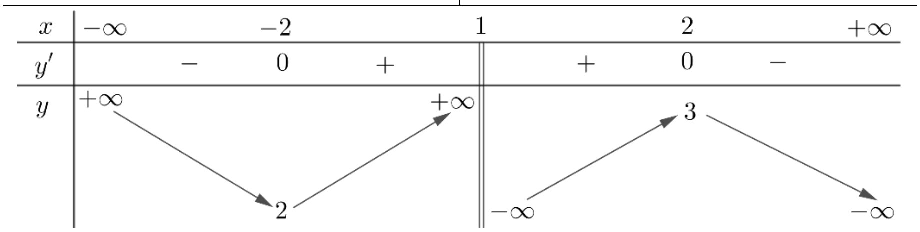
» **Câu 38.** Cho ba dạng đồ thị hàm số. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng ? Khẳng định nào sai ?



Hình 1



Hình 2



Hình 3

Xét tính đúng/sai các mệnh đề sau:

	Mệnh đề	**Đúng**	**Sai**
(a)	Hình 1 là đồ thị hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có hệ số $a>0$ và $d=-2$		
(b)	Hình 2 là đồ thị hàm số có dạng $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ thoả $a=c$, với $a\neq 0, c\neq 0$		
(c)	Hình 3 là đồ thị hàm số có dạng $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ với $a\neq 0, m\neq 0$ và có điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(2;3)$		
(d)	Hình 3 có $y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho		

Lời giải

(a) Hình 1 là đồ thị hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có hệ số $a>0$ và $d=-2$

Do nhánh bên phải cuối đi lên nên hệ số $a>0$, đồ thị hàm số trên cắt trục Oy tại $y=-2$ $\Rightarrow d=-2$

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) Hình 2 là đồ thị hàm số có dạng $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ thoả $a=c$, với $a\neq 0, c\neq 0$

Đồ thị hàm số đã cho có đường tiệm cận ngang $y=1$ nên $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{a}{c}=1\Leftrightarrow a=c$

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) Hình 3 là đồ thị hàm số có dạng $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ với $a\neq 0, m\neq 0$ và có điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(2;3)$

Dễ thấy bảng biến thiên của Hình 3 là dạng đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ với $a\neq 0, m\neq 0$ và có điểm đại của đồ thị hàm số là $(2;3)$

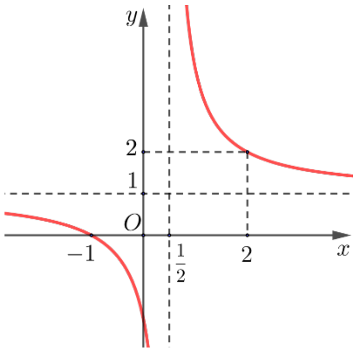
» Chọn ĐÚNG

(d) Hình 3 có $y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho

Hình 3 có $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho

» Chọn SAI

» Câu 39. Cho hai đồ thị hàm số hình 1 là: $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ và hình 2 là: $y=ax^3+bx^2+cx+d$



Hình 1

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Hình 2

Xét tính đúng/sai các mệnh đề sau:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ thoả mãn: $a+2d=0$		
(b)	Đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ thoả mãn $3b-4c-2d=0$		
(c)	Hình 2 có đồ thị hàm số có dạng là: $y=-x^3+3x^2-1$		
(d)	Hình 2 là đồ thị hàm số có tổng các hệ số $a+b+c+d<0$		

Lời giải

(a) Đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ thoả mãn: $a+2d=0$

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có TCN: $y=1=\dfrac{a}{c}$ và TCĐ: $x=\dfrac{1}{2}=-\dfrac{d}{c}$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=c\\c=-2d\end{cases}\Rightarrow a+2d=0$$

» Chọn ĐÚNG.

(b) Đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ thoả mãn $3b-4c-2d=0$

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ qua điểm $(2;2)$ nên $\dfrac{2a+b}{2c+d}=2 \Leftrightarrow 2a+b=4c+2d$

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ qua điểm $(-1;0)$ nên $\dfrac{-a+b}{-c+d}=0 \Leftrightarrow b=a$

Từ đó suy ra $2b+b=4c+2d \Leftrightarrow 3b-4c-2d=0$

» Chọn ĐÚNG.

(c) Hình 2 có đồ thị hàm số có dạng là: $y=-x^3+3x^2-1$

Độ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có hai điểm cực trị $(0;-1)$; $(2;3)$

Suy ra ta có: $\begin{cases}(0;-1)\in y\\ y'(0)=0\\ y'(2)=0\\ (2;3)\in y\end{cases}$, với $y'=3ax^2+2bx+c$

$\Leftrightarrow \begin{cases}d=-1\\ c=0\\ 8a+4b+2c+d=3\\ 12a+4b+c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}d=-1\\ c=0\\ a=-1\\ b=3\end{cases} \Rightarrow y=-x^3+3x^2-1$

» Chọn ĐÚNG.

(d) Hình 2 là đồ thị hàm số có tổng các hệ số $a+b+c+d<0$

Ta có đồ thị hàm số bậc 3 là $y=-x^3+3x^2-1$ có các hệ số $\begin{cases}d=-1\\ c=0\\ a=-1\\ b=3\end{cases} \Rightarrow a+b+c+d>0$

» Chọn SAI.

» Câu 40. Cho hàm số $y=x-\dfrac{1}{x+1}$

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Đồ thị của hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$		
(b)	Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại M. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là $y=2x-1$		
(c)	Tồn tại hai tiếp tuyến của đồ thị vuông góc với nhau		
(d)	Để đường thẳng $y=k$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho $OA\perp OB$ khi đó k là nghiệm của phương trình $k^2-k-1=0$		

Lời giải

(a) Đồ thị của hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$

$y=x-\dfrac{1}{x+1}$

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$y'=1+\dfrac{1}{(x+1)^2}>0,\forall x\in D$: hàm số luôn luôn đồng biến, không có cực đại, cực tiểu

$\lim\limits_{x\to -1^{\mp}} y = \pm\infty : x = -1$ là tiệm cận đứng

$\lim\limits_{x\to \pm\infty} y = x : y = x$ là tiệm cận xiên

» **Chọn** SAI.

(b) *Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại M. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là $y = 2x - 1$*

$M(0;-1), y_0' = 2$

Phương trình tiếp tuyến (T) tại $M : y = 2(x-0) - 1 \Leftrightarrow y = 2x - 1$

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) *Tồn tại hai tiếp tuyến của đồ thị vuông góc với nhau*

Tiếp tuyến (T_1) của (C) tại $P(x_1, y_1)$ có hệ số góc

$$k_1 = y'_{x_1} = 1 + \frac{1}{(x_1+1)^2} > 0$$

Tiếp tuyến (T_2) của (C) tại $Q(x_2, y_2)$ có hệ số góc

$$k_2 = y'_{x_2} = 1 + \frac{1}{(x_2+1)^2} > 0$$

Do $y'_{x_1} > 0, y'_{x_2} > 0$ nên không thể có 2 tiếp tuyến của (C) vuông góc nhau

» **Chọn** SAI.

(d) *Để đường thẳng $y = k$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho $OA \perp OB$ khi đó k là nghiệm của phương trình $k^2 - k - 1 = 0$*

$$y = x - \frac{1}{x+1} = \frac{x^2 + x - 1}{x+1}$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng $y = k$:

$$\frac{x^2+x-1}{x+1} = k \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x^2 - (k-1)x - (k+1) = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Do vị trí của (C) trên hệ tọa độ Oxy, có thể kết luận $(*)$ luôn có 2 nghiệm phân biệt

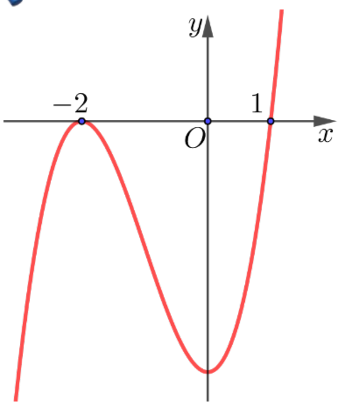
$x_A, x_B \neq -1$ và $\begin{cases} x_A + x_B = k - 1 \\ x_A \cdot x_B = -(k+1) \end{cases}; A(x_A; k), B(x_B; k)$

$\overrightarrow{OA} = (x_A, k), \overrightarrow{OB} = (x_B, k)$

$$OA \perp OB \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow x_A x_B + k^2 = 0 \Leftrightarrow -k - 1 + k^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ k = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 41.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Xét hàm số $g(x)=f(x^2-3)$ và các mệnh đề sau:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;1)$.		
(b)	Hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.		
(c)	Hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x=0$.		
(d)	Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x=2$.		

Lời giải

Xét hàm số $g(x)=f(x^2-3)$.

Có $g'(x)=(x^2-3)'.f'(x^2-3)=2x.f'(x^2-3)$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f'(x^2-3)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2-3=-2\\x^2-3=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\\x=\pm2\end{array}\right..$$

Ta lại có $x>1$ thì $f'(x)>0$. Do đó $x^2>4$ thì $f'(x^2-3)>0$.

$x<1$ thì $f'(x)<0$. Do đó $x^2<4$ thì $f'(x^2-3)<0$.

Từ đó ta có bảng biến thiên của $g(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
x		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x^2-3)$		$+$	0	$-$	0	$-$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta có

(a) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;1)$.

Đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm dưới Ox trên khoảng $(-\infty;1)$. Do đó hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;1)$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) Hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

» **Chọn** ĐÚNG.

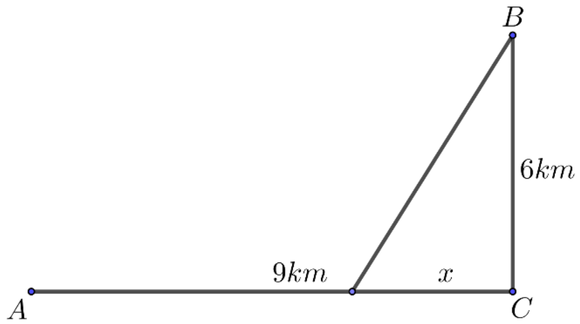
(c) Hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

» **Chọn** SAI.

(d) *Hàm số* $g\left(x\right)$ *đạt cực đại tại* $x=2$.

» **Chọn** SAI.

» Câu 42. Một công ty muốn xây một đường ống dẫn từ một điểm A trên bờ biển đến một điểm B trên một hòn đảo (như hình vẽ).



Giá để xây đường ống trên bờ là 50000 USD mỗi km và 130000 USD để xây mỗi km dưới nước. Gọi C là điểm trên bờ biển sao cho BC vuông góc với bờ biển, $BC=6$ km, $AC=9$ km. Gọi M là vị trí trên đoạn AC sao cho khi làm ống dẫn theo đường gấp khúc AMB thì chi phí ít nhất.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Nếu công ty lắp đường ống theo đường ACB thì chi phí hết số tiền 1230000 USD.		
(b)	Nếu công ty lắp đường ống thẳng theo đường trên biển từ A đến B thì chi phí hết số tiền nhỏ hơn 1400000 USD.		
(c)	Nếu công ty lắp đường ống theo đường gấp khúc AMB thì khi M là trung điểm của AC chi phí hết số tiền 1200000 USD.		
(d)	Chi phí thấp nhất để hoàn thành việc xây dựng đường ống dẫn là 1170000 USD.		

Lời giải

(a) *Nếu công ty lắp đường ống theo đường ACB thì chi phí hết số tiền 1230000 USD.*

Chi phí để lắp đoạn ống AC là: 450000 USD.

Chi phí lắp đoạn ống BC là: 780000 USD.

Tổng chi phí là : 1230000 USD.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) *Nếu công ty lắp đường ống thẳng theo đường trên biển từ A đến B thì chi phí hết số tiền nhỏ hơn 1400000 USD.*

Độ dài đoạn $AB=\sqrt{9^2+6^2}=\sqrt{117}km$.

Chi phí làm đoạn ống AB sấp xỉ bằng 1406165 USD.

» **Chọn** SAI.

(c) *Nếu công ty lắp đường ống theo đường gấp khúc AMB thì khi M là trung điểm của AC chi phí hết số tiền 1200000 USD.*

Khi M là trung điểm của AC lắp ông theo đường gấp khúc AMB thì đoạn ống

$MB=\sqrt{MC^2+BC^2}=\sqrt{56,25}=7,5km$

Chi phí lắp đoạn ống AM là: $4,5.50000=225000$ USD.

Chi phí lắp đoạn ống MB là: $7,5.130000=975000$ USD.

Tổng chi phí làm đường ống là 1200000 USD.

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) Chi phí thấp nhất để hoàn thành việc xây dựng đường ống dẫn là 1170000 USD.

Đặt $CM = x\ (\text{km})$, với $0 \le x \le 9$.

Ta có: tổng chi phí để xây dựng đường ống dẫn theo đường gấp khúc AMB là:

$T = 50000.(9-x) + 130000.\sqrt{x^2+36}$ USD.

Xét hàm số $f(x) = 50000.(9-x) + 130000.\sqrt{x^2+36}$ trên đoạn $[0;9]$, ta có :

$f'(x) = -5000 + \dfrac{13000x}{\sqrt{x^2+36}} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{2}$.

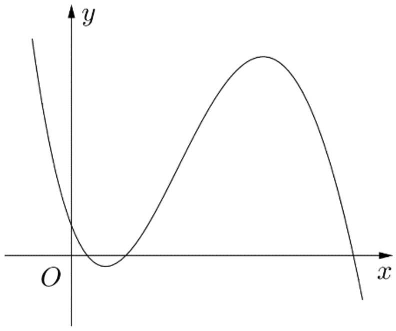
Lại có : $f(0) = 1230000$, $f\left(\dfrac{5}{2}\right) = 1170000$, $f(9) \approx 1406165$.

Vậy $T_{\min} = 1170000$ USD.

» Chọn ĐÚNG.

C. *Câu hỏi – Trả lời ngắn*

» Câu 43. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a,b,c,d \in \mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d?

Lời giải

✓Trả lời: 2

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty \Rightarrow a < 0$.

Gọi x_1, x_2 là hoành độ hai điểm cực trị của hàm số suy ra x_1, x_2 nghiệm phương trình $y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ nên theo định lý Viet:

+) Tổng hai nghiệm $x_1 + x_2 = -\dfrac{2b}{3a} > 0 \Rightarrow \dfrac{b}{a} < 0 \Rightarrow b > 0$.

+) Tích hai nghiệm $x_1x_2 = \dfrac{c}{3a} > 0 \Rightarrow c < 0$.

Lại có đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d > 0$.

Vậy có 2 số dương trong các số a, b, c, d.

» Câu 44. Ta xác định được các số a,b,c để đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ đi qua điểm $(1;0)$ và có điểm cực trị $(-2;0)$. Tính giá trị biểu thức $T = a^2 + b^2 + c^2$.

Lời giải

✓Trả lời: 25

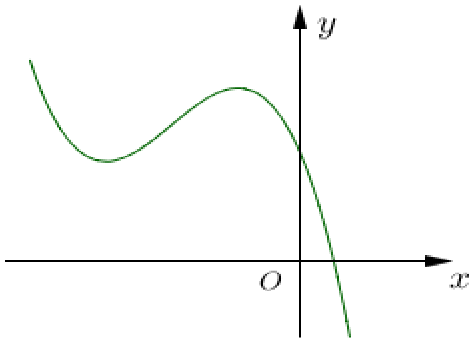
Ta có $y = x^3 + ax^2 + bx + c \Rightarrow y' = 3x^2 + 2ax + b$.

Theo đề, ta có hệ phương trình $\begin{cases} y(1)=0 \\ y(-2)=0 \\ y'(-2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=1^3+a.1^2+b.1+c \\ 0=(-2)^3+a.(-2)^2+b.(-2)+c \\ 0=3.(-2)^2+2a.(-2)+b \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=-1 \\ 4a-2b+c=8 \\ -4a+b=-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=0 \\ c=-4 \end{cases}$.

Vậy $T=a^2+b^2+c^2=3^2+0^2+(-4)^2=25$.

» Câu 45. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như sau:



Có bao nhiêu số dương trong các số a,b,c,d?

Lời giải

✔Trả lời: 1

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương $\Rightarrow d>0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} y<0 \Rightarrow a<0$.

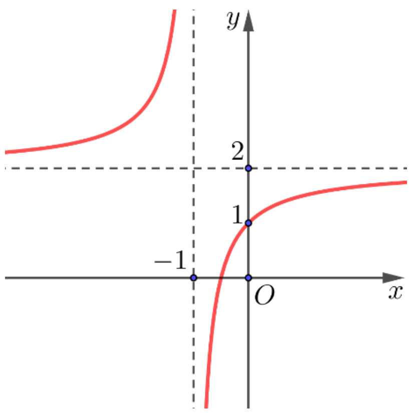
Ta có: $y'=3ax^2+2bx+c$.

Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị nằm về bên trái trục tung nên phương trình $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1<x_2<0$.

Khi đó theo Viet ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{2b}{3a}<0 \\ x_1.x_2=\dfrac{c}{3a}>0 \end{cases}$. Từ đó suy ra $b<0$ và $c<0$.

Vậy trong các số a,b,c,d chỉ có $d>0$.

» Câu 46. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{x+d}$ $(ad-b\neq 0)$ có đồ thị như hình dưới đây



Gọi điểm $M(a;b), a<0$ thuộc đồ thị hàm số $y=f(x)$ sao cho tổng khoảng cách từ M đến 2 đường tiệm cận là nhỏ nhất khi đó $a+b$ bằng

Lời giải

✓Trả lời: 1

Ta có: Tiệm cận đứng $x=-\frac{d}{1}=-1 \Rightarrow d=1$.

Tiệm cận ngang $y=\frac{a}{1}=2 \Rightarrow a=2$.

Đồ thị đi qua điểm $(0;1) \Rightarrow \frac{b}{d}=1 \Rightarrow b=d=1$.

Suy ra $f(x)=\frac{ax+b}{x+d}=\frac{2x+1}{x+1}$.

Gọi điểm $M\left(m;\frac{2m+1}{m+1}\right)$ thuộc đồ thị $f(x)=\frac{2x+1}{x+1}$.

Khoảng cách từ điểm $M\left(m;\frac{2m+1}{m+1}\right)$ đến tiệm cận đứng $x=-1$ là: $|m+1|$.

Khoảng cách từ điểm $M\left(m;\frac{2m+1}{m+1}\right)$ đến tiệm cận ngang $y=2$ là: $\frac{1}{|m+1|}$.

Ta có tổng $T=|m+1|+\frac{1}{|m+1|} \geq 2$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow |m+1|=\frac{1}{|m+1|} \Leftrightarrow |m+1|^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \Rightarrow M(0;1) \\ m=-2 \Rightarrow M(-2;3) \end{array}\right.$.

Vì M có hoành độ âm nên $M(-2;3)$ là điểm cần tìm.

Khi đó $a=-2; b=3 \Rightarrow a+b=-2+3=1$.

» Câu 47. Cho hàm số $y=\frac{mx^2-mx+1}{x-1}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=\frac{mx^2-mx+1}{x-1}$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành.

Lời giải

✓Trả lời: 3

$y=\frac{mx^2-mx+1}{x-1}(1)$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

$y=mx+\frac{1}{x-1} \Rightarrow y'=m-\frac{1}{(x-1)^2}, (x\neq 1)$.

Để hàm số (1) có hai điểm cực trị thì $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$\Leftrightarrow m(x-1)^2=1$ có hai nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow m>0$.

Khi $m>0$ thì đồ thị hàm số (1) luôn có hai điểm cực trị nằm trên đường thẳng $d: y=2mx-m$.

Khi $m>0$ gọi hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (1) là A,B.

Suy ra $A\left(x_1;2mx_1-m\right),B\left(x_2;2mx_2-m\right)$ với x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình $m\left(x-1\right)^2=1\Leftrightarrow mx^2-2mx+m-1=0$ (2).

Ta có: $y_A.y_B=\left(2mx_1-m\right)\left(2mx_2-m\right)=m^2\left(2x_1-1\right)\left(2x_2-1\right)=m^2\left(4x_1x_2-2\left(x_1+x_2\right)+1\right)$

Áp dụng định lý Viet ta có: $x_1x_2=\dfrac{m-1}{m};x_1+x_2=2$

Suy ra $y_A.y_B=m^2\left(\dfrac{4m-4}{m}-4+1\right)=m\left(m-4\right)$.

Để A,B nằm khác phía so với trục hoành thì $y_A.y_B<0\Leftrightarrow 0<m<4,m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\left\{1;2;3\right\}$.

» Câu 48. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-2c+1$	$\searrow$	$-a$	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm $S=a+b+c+d$.

Lời giải

✓Trả lời: -2

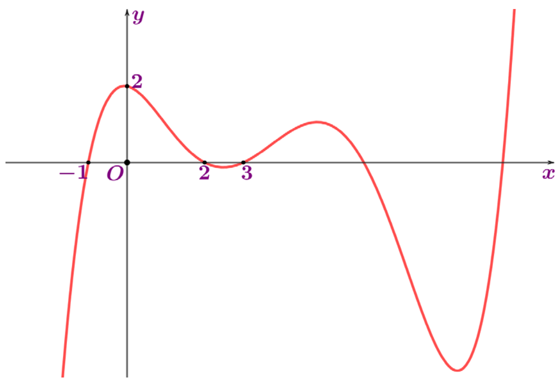
Ta có: $y'=3ax^2+2bx+c$

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

$$\begin{cases}f'\left(-2\right)=0\\f'\left(1\right)=0\\f\left(-2\right)=-2c+1\\f\left(1\right)=-a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}12a-4b+c=0\\3a+2b+c=0\\-8a+4b-2c+d=-2c+1\\a+b+c+d=-a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=3\\c=-12\\d=5\end{cases}$$

$\Rightarrow S=2+3-12+5=-2$.

» Câu 49. Hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Tổng các nghiệm S của phương trình $f\left(x^3-3x\right)+3x^3-3x-13=\left(x^2-2\right)^3-3\left(x-1\right)^2$ là

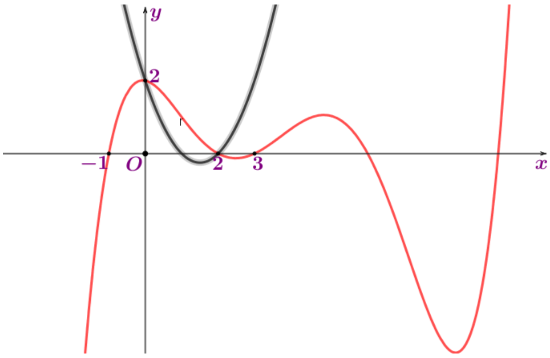
Lời giải

✓Trả lời: 1

Ta có $f\left(x^3-3x\right)+3x^3-3x-13=\left(x^2-2\right)^3-3\left(x-1\right)^2$

$\Leftrightarrow f\left(x^3-3x\right)=\left(x^3-3x\right)^2-3\left(x^3-3x\right)+2$.

Đặt $t=x^3-3x$ được phương trình $f\left(t\right)=t^2-3t+2$. Đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f\left(t\right)$ và $y=t^2-3t+2$.



Dựa vào đồ thị suy ra phương trình có nghiệm $t=0, t=2$.

Với $t=0 \Rightarrow x^3-3x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Với $t=2 \Rightarrow x^3-3x=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Vậy $S=0+\sqrt{3}-\sqrt{3}+2-1=1$.

» Câu 50. Giả sử chi phí cho xuất bản x cuốn tạp chí (gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in,...) được cho bởi công thức :

$$C\left(x\right)=0,0001x^2-0,2x+10000,$$

trong đó $C\left(x\right)$ được tính theo đơn vị là vạn đồng (1 vạn đồng = 10.000 đồng). Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng. Tỉ số $M\left(x\right)=\dfrac{T\left(x\right)}{x}$ được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn và tổng chi phí $T\left(x\right)$ (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí. Tính $M\left(x\right)$ theo x và tìm số lượng tạp chí cần xuất bản sao cho chi phí trung bình là thấp nhất, biết rằng nhu cầu hiện tại xuất bản không quá 30.000 cuốn. Khi đó chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí là bao nhiêu?

Lời giải

✓Trả lời: 22000

Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng, tức là 0,4 vạn đồng.
Suy ra chi phí phát hành cho x cuốn là $0,4x$ (vạn đồng).
Theo để bài, ta có tổng chi phí xuất bản và phát hành cho x cuốn tạp chí là:
$T\left(x\right)=C\left(x\right)+0,4x=0,0001x^2+0,2x+10000$, với $x>0$.

Ta có $f\left(x\right)=M(x)=\dfrac{T(x)}{x}=0,0001x+0,2+\dfrac{10000}{x}$.

Xét hàm số $f(x)=0,0001x+0,2+\dfrac{10000}{x}$, với $0<x\le 30000$.

$f'(x)=0,0001-\dfrac{10000}{x^2}=\dfrac{0,0001x^2-10000}{x^2}$;

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=10000$ $\left(\text{do } x>0\right)$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$.

Bảng biến thiên:

x	0		10000		30000
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(10000)$	$\nearrow$	$f(30000)$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy giá trị của $M(x)$ nhỏ nhất khi $x=10000$.

Vậy số lượng tạp chí cần xuất bản sao cho chi phí trung bình thấp nhất là $x=10000$ (cuốn).

Chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản 10000 cuốn là: $M(10000)=2,2$ (vạn đồng) $=22000$ (đồng)

» Câu 51. Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được x mét vải lụa ($1\le x\le 18$).

Tổng chi phí sản xuất x mét vải lụa, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí:

$$C(x)=x^3-3x^2-20x+500.$$

Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét. Gọi $B(x)$ là số tiền bán được và $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x mét vải lụa. Hộ làm nghề dệt này cần sản xuất và bán ra mỗi ngày bao nhiêu mét vải lụa để thu được lợi nhuận tối đa. Hãy tính lợi nhuận tối đa đó.

Lời giải

✓Trả lời: 1200

Khi bán x mét vải lụa:

- Số tiền thu được là: $B(x)=220x$ (nghìn đồng).

- Lợi nhuận thu được là: $L(x)=B(x)-C(x)=-x^3+3x^2+240x-500$ (nghìn đồng).

Hàm số $L(x)$ xác định trên $\left[1;18\right]$.

- Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

- Đạo hàm $L'(x)=-3x^2+6x+240; L'(x)=0 \Leftrightarrow x=10$ hoặc $x=-8$ (loại).

- Trên khoảng $\left(1;10\right), L'(x)>0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng này.

- Trên khoảng $\left(1;10\right), L'(x)<0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng này.

+ Cực trị: Hàm số $L(x)$ đạt cực đại tại $x=10$ và $L_{CD}=L(10)=1200$.

+ Bảng biến thiên:

x	1		10		18
$L'(x)$		$+$	0	$-$	
$L(x)$	-258	$\nearrow$	1200	$\searrow$	-1040

Từ bảng biến thiên, ta nhận thấy khi $x = 10$ thì hàm số đạt giá trị lớn nhất là 1200. Như vậy, hộ làm nghề dệt cần sản xuất và bán ra mỗi ngày 10 mét vải lụa để thu được lợi nhuận tối đa. Lợi nhuận tối đa này là 1200 nghìn đồng.

--------------------Hết--------------------