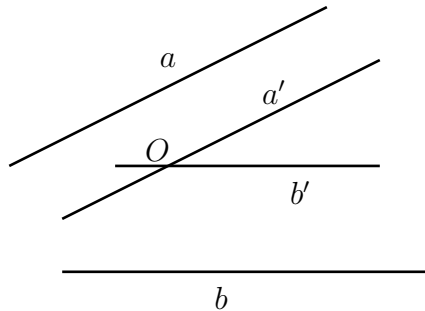


§1. Các dạng toán liên quan đến tính Góc

1.1 Góc giữa hai đường thẳng

Góc giữa hai đường thẳng a và b trong không gian là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với a và b .



- ✍ Để xác định góc giữa hai đường thẳng a và b ta có thể lấy điểm O thuộc một trong hai đường thẳng đó rồi vẽ một đường thẳng qua O và song song với đường thẳng còn lại.
- ✍ Nếu $\vec{u}$ và $\vec{v}$ lần lượt là vec-tơ chỉ phương của a và b , đồng thời $(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha$ thì góc giữa hai đường thẳng a và b bằng α nếu $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ và bằng $180^\circ - \alpha$ nếu $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$.
- ✍ Nếu a và b là hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau thì góc giữa chúng bằng 0° .

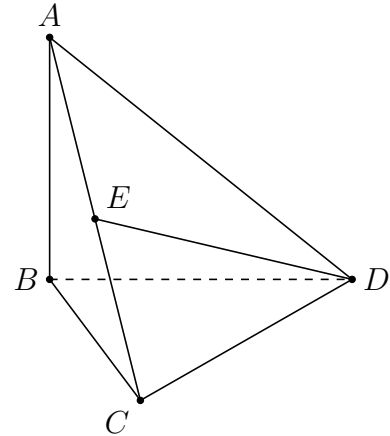
Xác định góc giữa hai đường thẳng trong không gian. Ta thường có hai phương pháp để giải quyết cho dạng toán này.

- ! ⚙ **Phương pháp 1:** Sử dụng định nghĩa góc giữa hai đường thẳng, kết hợp sử dụng hệ thức lượng trong tam giác (định lý cos, công thức trung tuyến).
- ⚙ **Phương pháp 2:** Sử dụng tích vô hướng của hai vec-tơ.

Ví dụ 1.

Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với mặt phẳng (BCD) . Biết tam giác BCD vuông tại C và $AB = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, $AC = a\sqrt{2}$, $CD = a$. Gọi E là trung điểm của AC (tham khảo hình vẽ bên). Góc giữa hai đường thẳng AB và DE bằng

- A. 45° . B. 60° . C. 30° . D. 90° .



🍏 Hướng dẫn giải:

Gọi I là trung điểm của BC , suy ra $EI \parallel AB$.

Khi đó $(AB, DE) = (EI, ED) = \widehat{IED}$.

Ta có $\begin{cases} DC \perp BC \text{ (giả thiết)} \\ DC \perp AB \text{ (} AB \perp (BCD) \text{)} \end{cases} \Rightarrow DC \perp (ABC),$

suy ra DC vuông góc với EC . Do đó

$$DE^2 = CD^2 + EC^2 = CD^2 + \frac{AC^2}{4} = \frac{3a^2}{2} \Rightarrow DE = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Ta có $IE = \frac{AB}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$ và $BC^2 = AC^2 - AB^2 = \frac{a^2}{2}$.

Tam giác ICD vuông tại C nên

$$DI^2 = CD^2 + IC^2 = CD^2 + \frac{BC^2}{4} = \frac{9a^2}{8}.$$

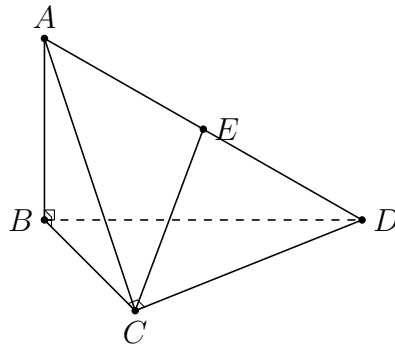
Áp dụng định lý cô-sin cho tam giác IDE , ta có

$$\cos \widehat{IED} = \frac{IE^2 + DE^2 - DI^2}{2IE \cdot DE} = \frac{\frac{3a^2}{8} + \frac{3a^2}{2} - \frac{9a^2}{8}}{2 \cdot \frac{a\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{IED} = 60^\circ.$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng AB và DE bằng 60° .

! Có thể chứng minh EI vuông góc với mặt phẳng (BCD) , suy ra tam giác EID vuông tại I để tính góc $\widehat{IED}$ đơn giản hơn mà không cần sử dụng định lý cô-sin.

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với mặt phẳng (BCD) . Biết tam giác BCD vuông tại C và $AB = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, $AC = a\sqrt{2}$, $CD = a$. Gọi E là trung điểm của AD (tham khảo hình vẽ dưới đây).



Góc giữa hai đường thẳng AB và CE bằng

- A. 60° . B. 45° . C. 30° . D. 90° .

Hướng dẫn giải:

Gọi F là trung điểm của BD , suy ra $EF \parallel AB$ nên $(AB, CE) = (EF, CE)$.

Do $AB \perp (BCD)$ nên $EF \perp (BCD)$, suy ra $\triangle EFC$ vuông tại F .

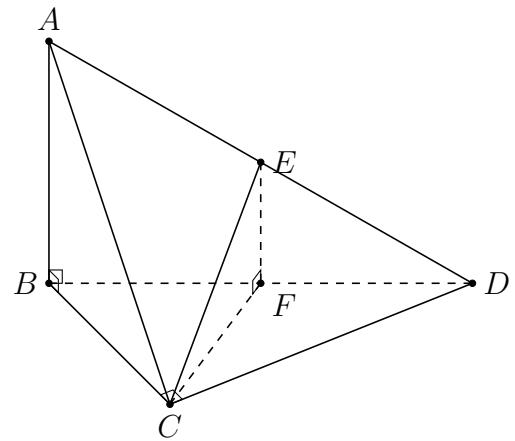
$$\text{Mặt khác } \begin{cases} CD \perp BC \\ CD \perp AB \end{cases} \Rightarrow CD \perp AC.$$

$$\text{Ta có } EF = \frac{1}{2}AB = \frac{a\sqrt{6}}{4}, AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = a\sqrt{3}.$$

$$\triangle ACD \text{ vuông tại } C \text{ và có } E \text{ là trung điểm của } AD \text{ nên } CE = \frac{1}{2}AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\cos \widehat{CEF} = \frac{EF}{EC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{CEF} = 45^\circ.$$

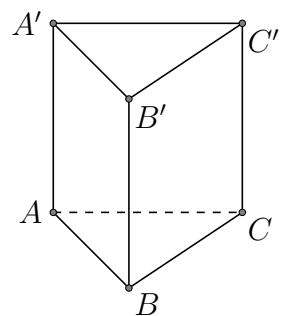
$$\text{Vậy } (AB, CE) = (EF, CE) = \widehat{CEF} = 45^\circ.$$



Ví dụ 3.

Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB' và BC (tham khảo hình vẽ bên).

- A. 90° . B. 30° . C. 45° . D. 60° .



Hướng dẫn giải:

Dựng AP sao cho song song và bằng với CB như hình vẽ.

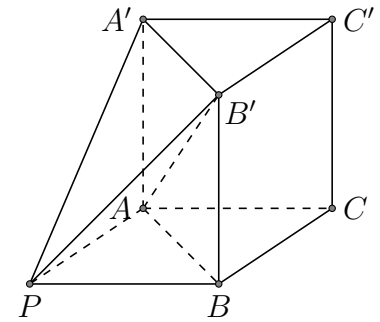
Suy ra $(BC, AB') = (AP, AB')$.

Ta có $AP = CB = a\sqrt{3}$.

Ta lại có $AB' = \sqrt{B'B^2 + AB^2} = a\sqrt{3}$;

$B'P = \sqrt{B'B^2 + PB^2} = a\sqrt{3}$.

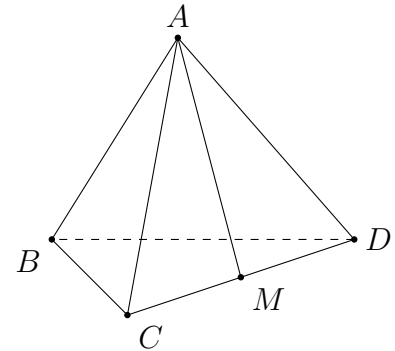
Vậy $\triangle APB'$ đều nên $(BC, AB') = (AP, AB') = 60^\circ$.



Ví dụ 4.

Cho tứ diện đều $ABCD$ có M là trung điểm của cạnh CD (tham khảo hình vẽ), φ là góc giữa hai đường thẳng AM và BC . Giá trị $\cos \varphi$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.
C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{6}$.



Hướng dẫn giải: Giả sử cạnh của tứ diện đều bằng a .

Ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{CB} \cdot (\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} \\ &= CB \cdot CM \cdot \cos \widehat{ACM} - CB \cdot CA \cdot \cos \widehat{ACB} = -\frac{a^2}{4}.\end{aligned}$$

$$\cos \varphi = \left| \cos (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AM}) \right| = \left| \frac{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AM}}{BC \cdot AM} \right| = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

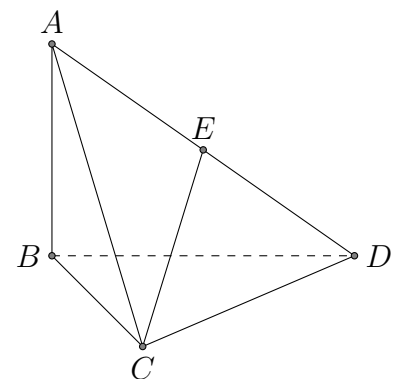
Ví dụ 5.

Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với mặt phẳng (BCD) .

Biết tam giác BCD vuông tại C và $AB = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, $AC = a\sqrt{2}$, $CD = a$. Gọi E là trung điểm của AD (tham khảo hình vẽ bên).

Góc giữa hai đường thẳng AB và CE bằng

- A. 45° . B. 60° .
C. 30° . D. 90° .



Hướng dẫn giải:

Gọi H là trung điểm của BD . Khi đó $EH \parallel AB$ và $EH \perp (BCD)$.

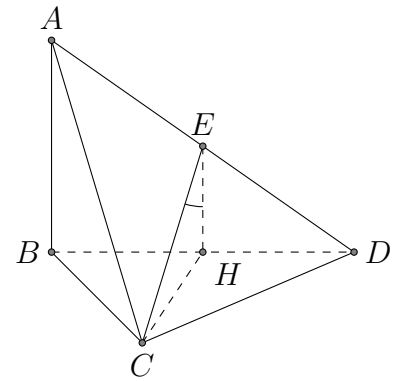
Góc giữa AB và CE bằng góc giữa EH và EC và bằng $\widehat{HEC}$.

$$\text{Ta có } EH = \frac{1}{2}AB = \frac{a\sqrt{6}}{4}, \quad BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2},$$

$$CH^2 = \frac{2(CB^2 + CD^2) - BD^2}{4} = \frac{3a^2}{8} \Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

$$\text{Vì } \tan \widehat{HEC} = \frac{CH}{EH} = \frac{a\sqrt{6}}{4} \div \frac{a\sqrt{6}}{4} = 1 \text{ nên } \widehat{HEC} = 45^\circ.$$

Vậy góc giữa AB và CE bằng 45° .



Ví dụ 6. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa $A'C'$ và $D'C$ là

- A. 120° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

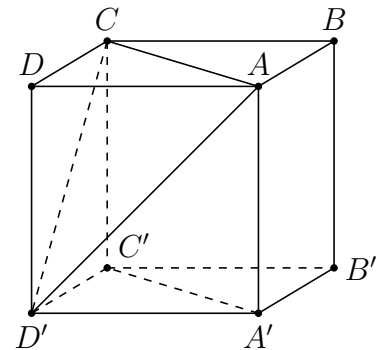
Hướng dẫn giải:

Ta có $A'C' \parallel AC$ nên

$$(A'C', D'C) = (D'C, AC).$$

Để thấy tam giác ACD' là tam giác đều nên $\widehat{D'CA} = 60^\circ$, do đó

$$(A'C', D'C) = (D'C, AC) = 60^\circ.$$



Ví dụ 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = 1$, $BC = \sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB , SC .

- A. 45° . B. 120° . C. 30° . D. 60° .

Hướng dẫn giải:

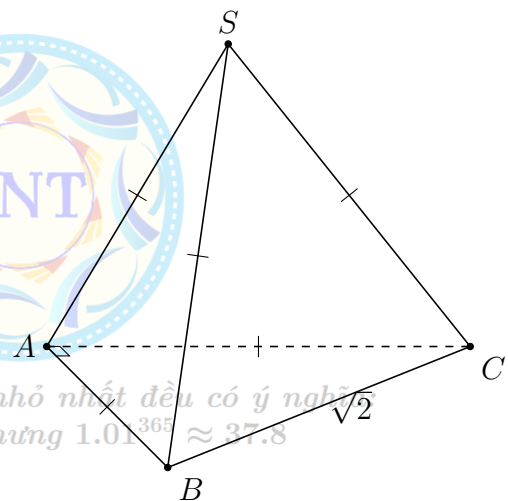
Ta có $AB^2 + AC^2 = 2 = BC^2 \Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại A .

$$\begin{aligned} \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{SC}) &= \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{SC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{SC}|} = \frac{\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AS})}{1 \cdot 1} \\ &= \overrightarrow{ABAC} - \overrightarrow{ABAS} \\ &= 0 - 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ \\ &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Suy ra $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{SC}) = 120^\circ$.

Do đó góc giữa hai đường thẳng AB và SC

bằng $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.



Mọi sự nỗ lực dù là nhỏ nhất đều có ý nghĩa
 $0.99^{365} \approx 0.03$ nhưng $1.01^{365} \approx 37.8$

Ví dụ 8. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $AB, BC, C'D'$. Xác định góc giữa hai đường thẳng MN và AP .

- A. 60° . B. 90° . C. 30° . D. 45° .

Hướng dẫn giải:

Do AC song song với MN nên góc giữa hai đường thẳng MN và AP bằng góc giữa hai đường thẳng AC và AP .

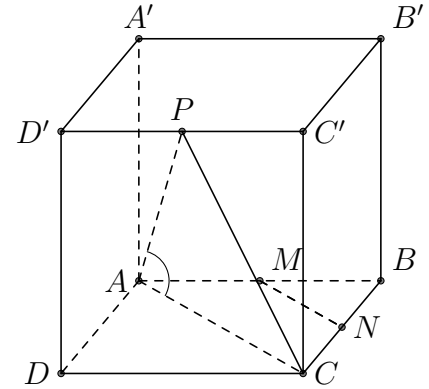
Tính được $PC = \frac{a\sqrt{5}}{2}$; $AP = \frac{3a}{2}$; $AC = a\sqrt{2}$.

Áp dụng định lý cosin cho $\triangle ACP$ ta có

$$\cos \widehat{CAP} = \frac{AP^2 + AC^2 - PC^2}{2AP \cdot AC} = \frac{\frac{9a^2}{4} + 2a^2 - \frac{5a^2}{4}}{2 \cdot \frac{3a}{2} \cdot a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{CAP} = 45^\circ.$$

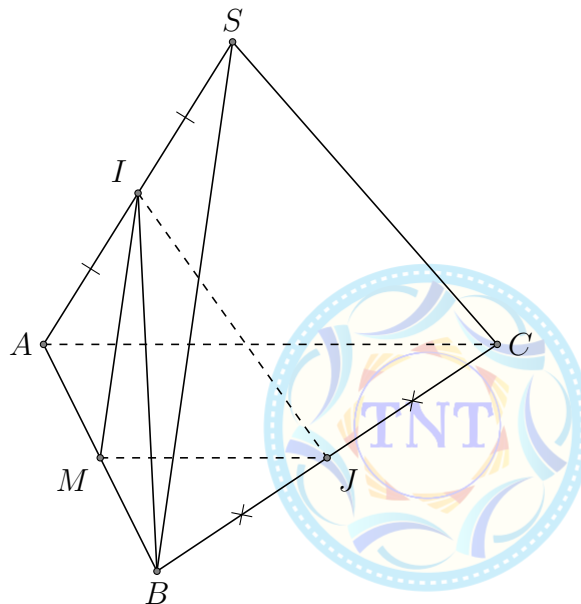
Vậy góc giữa hai đường thẳng MN và AP bằng 45° .



Ví dụ 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SA, BC . Tính số đo của góc hợp bởi IJ và SB .

- A. 45° . B. 30° . C. 60° . D. 90° .

Hướng dẫn giải:



Mọi sự nỗ lực dù là nhỏ nhất đều có ý nghĩa:

$$0.99^{365} \approx 0.03 \text{ nhưng } 1.01^{365} \approx 37.8$$

Gọi M là trung điểm của AB . Khi đó IM là đường trung bình của tam giác SAB nên $IM \parallel SB$ và $IM = \frac{SB}{2} = \frac{a}{2}$. Tương tự $MJ = \frac{a}{2}$.

Mặt khác, dễ dàng chứng minh tam giác IBJ vuông tại J nên

$$IJ = \sqrt{IB^2 - JB^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Tam giác IMJ có $MI = MJ = \frac{a}{2}, IJ = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ nên là tam giác vuông cân tại M . Suy ra

$$(IJ, SB) = (IJ, IM) = \widehat{MIJ} = 45^\circ \text{ (do } IM \parallel SB).$$

Ví dụ 10. Tứ diện đều $ABCD$ cạnh a , M là trung điểm của cạnh CD . Cô-sin của góc giữa AM và BD là

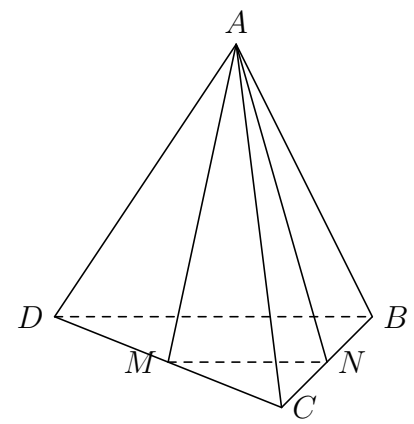
A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{6}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi N là trung điểm của BC . Do $MN \parallel BD$ nên góc giữa AM và BD bằng góc giữa AM và MN . Suy ra góc cần tìm là góc $\widehat{AMN}$.

Ta có

$$\begin{aligned} \cos \widehat{AMN} &= \frac{MA^2 + MN^2 - AN^2}{2MA \cdot MN} \\ &= \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6}. \end{aligned}$$



Ví dụ 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA = a$. Gọi M là trung điểm của SB . Góc giữa AM và BD bằng

A. 45° . B. 30° . C. 90° . D. 60° .

Hướng dẫn giải:

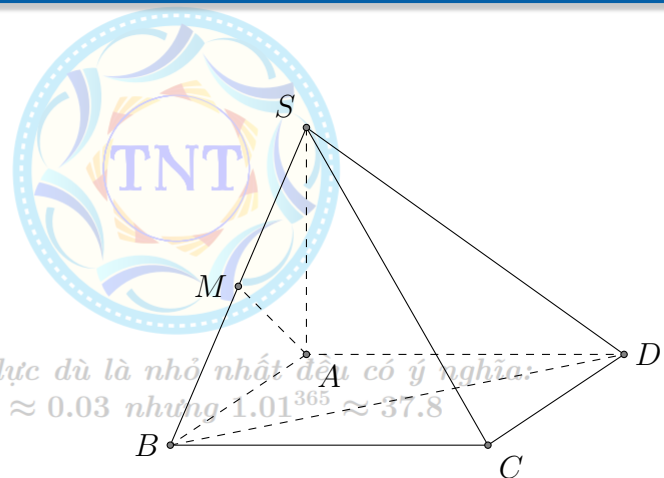
Cách 1. Ta có

$$\begin{aligned} 2\vec{AM} \cdot \vec{BD} &= (\vec{AS} + \vec{AB}) \vec{BD} = \vec{AB} \cdot \vec{BD} \\ &= AB \cdot BD \cdot \cos 135^\circ = -\frac{a \cdot a\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} = -a^2. \end{aligned}$$

Từ đó

$$\begin{aligned} \cos(\vec{AM}; \vec{BD}) &= \frac{\vec{AM} \cdot \vec{BD}}{AM \cdot BD} = \frac{-\frac{a^2}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{2}} \\ &= -\frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{AM}; \vec{BD}) = 120^\circ. \end{aligned}$$

Vậy góc giữa AM và BD bằng 60° .



Cách 2. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng A , các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia AB, AD, AS . Không mất tính tổng quát, giả sử $a = 1$. Khi đó ta có tọa độ các điểm $A(0;0;0)$,

$B(1; 0; 0), D(0; 1; 0), S(0; 0; 1), M\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$. Từ đó $\overrightarrow{AM} = \left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right), \overrightarrow{BD} = (-1; 1; 0)$. Và

$$\cos(AM; BD) = \left| \cos(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BD}) \right| = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{AM}| \cdot |\overrightarrow{BD}|} = \frac{\left| \frac{1}{2}(-1) + 0 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 \right|}{\sqrt{\frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4}} \cdot \sqrt{1 + 1 + 0}} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow (AM; BD) = 60^\circ$.

Ví dụ 12. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và AD . Biết $AB = CD = 2a, MN = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD .

- A. 45° . B. 90° . C. 60° . D. 30° .

Hướng dẫn giải:

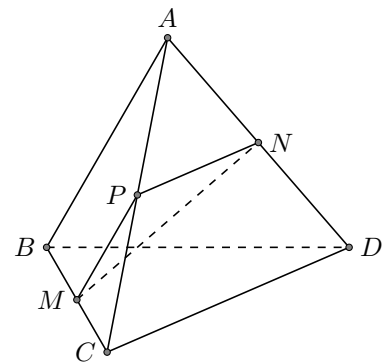
Gọi P là trung điểm $AC \Rightarrow MP \parallel AB, MP = \frac{1}{2}AB = a$ và

$NP \parallel CD, NP = \frac{1}{2}CD = a$.

$(AB, CD) = (PM, PN)$.

Ta có $\cos \widehat{MPN} = \frac{PM^2 + PN^2 - MN^2}{2PM \cdot PN} = \frac{a^2 + a^2 - 3a^2}{2a^2} = -\frac{1}{2}$.

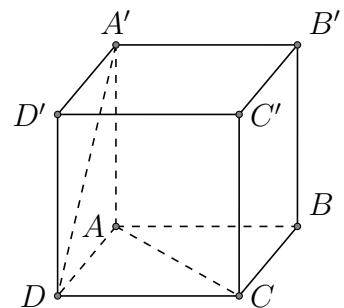
Từ đó suy ra $\widehat{MPN} = 120^\circ \Rightarrow (AB, CD) = 60^\circ$.



Ví dụ 13.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (tham khảo hình vẽ bên). Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ bằng

- A. 45° . B. 30° . C. 60° . D. 90° .

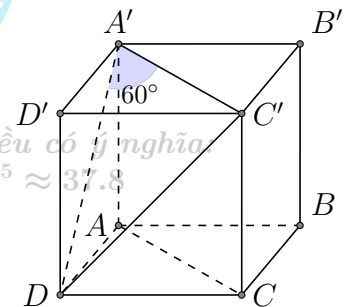


Hướng dẫn giải:

Ta có: $AC \parallel A'C' \Rightarrow (AC, A'D) = (A'C', A'D)$.

Mặt khác: $A'C' = A'D = DC' = a\sqrt{2}$ nên suy ra $\triangle A'DC'$ đều.

Do đó $(A'C', A'D) = 60^\circ$.



Mọi sự nỗ lực dù là nhỏ nhất đều có ý nghĩa
 $0.99^{365} \approx 0.03$ nhưng $1.01^{365} \approx 37.8$

Ví dụ 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , cạnh a , góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$, có SO vuông góc với mặt đáy và $SO = a$. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC) là

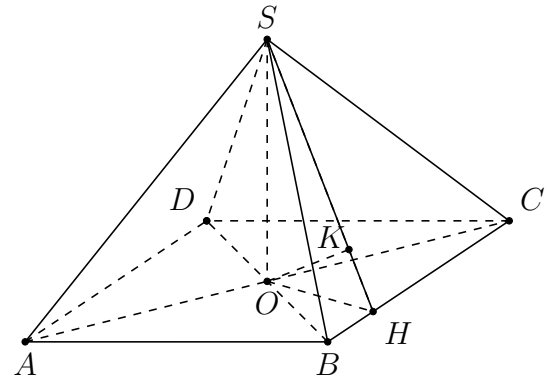
- A. $\frac{a\sqrt{57}}{19}$. B. $\frac{a\sqrt{57}}{18}$. C. $\frac{a\sqrt{45}}{7}$. D. $\frac{a\sqrt{52}}{16}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi H là hình chiếu của O trên BC , K là hình chiếu của O trên SH . Khi đó ta có $OK \perp (SBC)$ hay $d(O, (SBC)) = OK$. Ta có

$$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$$

Do $\widehat{BAD} = 60^\circ$ nên $\widehat{OBC} = 60^\circ$, suy ra $OB = \frac{a}{2}$, $OC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Thay vào đẳng thức trên ta được $OK = \frac{a\sqrt{57}}{19}$.



Ví dụ 15. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình vuông, E là điểm đối xứng với D qua trung điểm SA . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AE và BC . Góc giữa hai đường thẳng MN và BD bằng

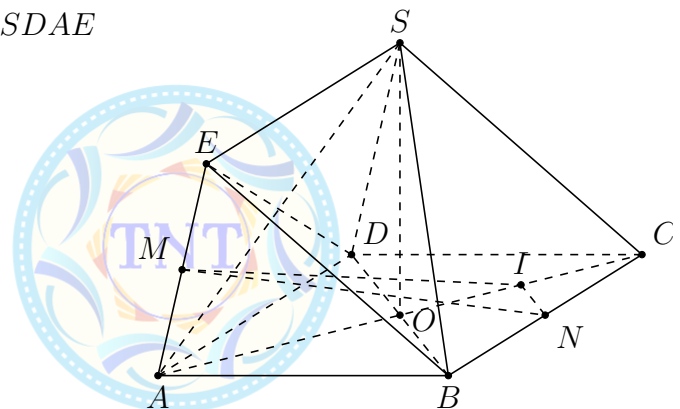
- A. 90° . B. 60° . C. 45° . D. 75° .

Hướng dẫn giải:

Do D đối xứng với E qua trung điểm của SA nên $SDAE$ là hình bình hành, suy ra $EA \parallel SD$. Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EC}}{2} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC}}{2} \\ &= \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DC}}{2} \\ &= \frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{SC}}{2}. \end{aligned}$$

Mà $BD \perp AC$ và $BD \perp SC$ (do $BD \perp (SAC)$) nên $BD \perp MN$. Vậy $(MN, BD) = 90^\circ$.



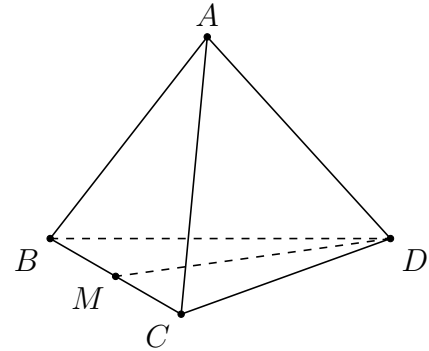
$$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BD} \cdot \frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{SC}}{2} = 0.$$

Vậy $(MN, BD) = 90^\circ$.

Ví dụ 16.

Cho tứ diện đều $ABCD$. Gọi M là trung điểm cạnh BC (tham khảo hình vẽ bên). Giá trị cô-sin của góc giữa hai đường thẳng AB và DM bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.



🍏 Hướng dẫn giải:

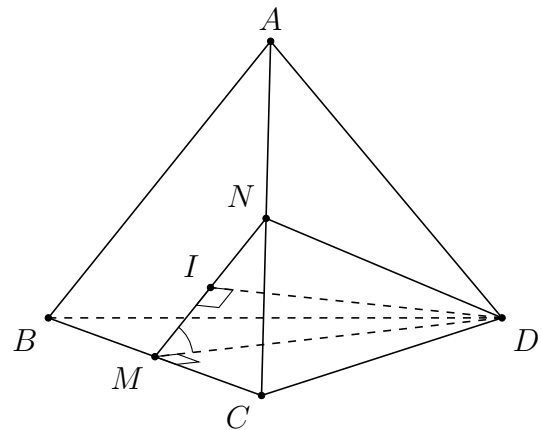
Gọi N là trung điểm AC .

Gọi I là trung điểm MN .

Ta có $\begin{cases} MN \parallel AB \\ DI \perp MN \end{cases} \Rightarrow (AB, DM) = (MN, DM)$.

Do vậy, $\cos(AB, DM) = \cos(MN, DM) = \cos \widehat{IMD}$.

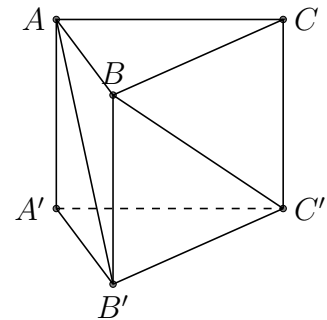
Ta có $\begin{cases} DM = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ MI = \frac{a}{4} \end{cases} \Rightarrow \cos \widehat{IMD} = \frac{\sqrt{3}}{6}$.



Ví dụ 17.

Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$ và $AA' = \sqrt{2}a$. Góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng

- A. 30° . B. 90° . C. 45° . D. 60° .

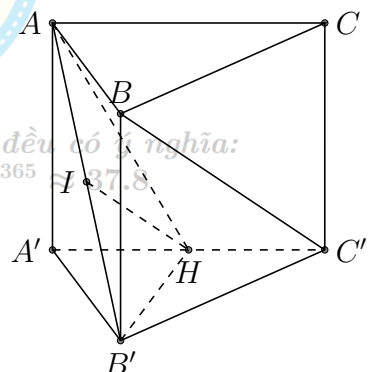


🍏 Hướng dẫn giải:

Gọi I, H lần lượt là trung điểm của AB' và $A'C'$. Khi đó IH là đường trung bình của $\triangle A'BC'$ nên $IH \parallel BC' \Rightarrow (AB', BC') = (AB', IH)$.

Ta có $AB' = a\sqrt{3}$, $B'H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AH = \frac{3a}{2}$ nên $B'H^2 + HA^2 = AB'^2$ hay $\triangle HAB'$ vuông tại H .

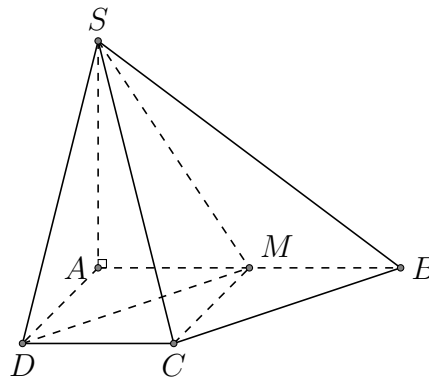
$IH = \frac{AB'}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \triangle B'IH$ đều, suy ra $(AB', BC') = (AB', IH) = \widehat{B'IH} = 60^\circ$.



Ví dụ 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và S , SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính cô-sin góc giữa 2 đường thẳng SD và BC biết $AD = DC = a, AB = 2a, SA = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$.

- A. $\frac{1}{\sqrt{42}}$. B. $\frac{2}{\sqrt{42}}$. C. $\frac{3}{\sqrt{42}}$. D. $\frac{4}{\sqrt{42}}$.

🍏 **Hướng dẫn giải:**



• Gọi M là trung điểm AB , ta có $DM \parallel BC$. Do đó $(BC, SD) = (DM, SD)$.

• Ta có $SD^2 = SA^2 + AD^2 = \frac{4a^2}{3} + a^2 = \frac{7a^2}{3} \Rightarrow SD = \frac{a\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$.

$$SM^2 = SA^2 + AM^2 = \frac{4a^2}{3} + a^2 = \frac{7a^2}{3} \Rightarrow SM = \frac{a\sqrt{7}}{\sqrt{3}}.$$

$$DM^2 = AM^2 + AD^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow DM = a\sqrt{2}.$$

• Ta có $\cos \widehat{SDM} = \frac{DS^2 + DM^2 - SM^2}{2 \cdot DS \cdot DM} = \frac{\frac{7a^2}{3} + 2a^2 - \frac{7a^2}{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{7}a}{\sqrt{3}} \cdot a\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{42}}$.

Ví dụ 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA = a$ và vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của SB . Góc giữa hai đường thẳng AM và BD bằng

- A. 30° . B. 60° . C. 45° . D. 90° .

🍏 **Hướng dẫn giải:**

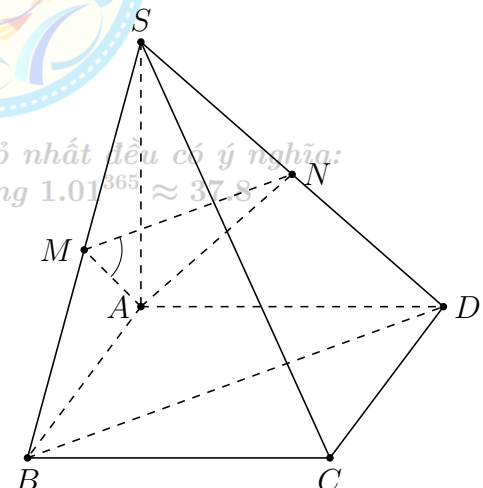
Lấy N là trung điểm SD , suy ra $MN \parallel BD$, dẫn tới

$$(AM, BD) = (AM, MN) = \widehat{AMN}.$$

$$\text{Vì } SA \perp AB \Rightarrow AM = \frac{SB}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \text{ Tương tự } AN = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Lại có MN là đường trung bình của $\triangle SBD$ nên ta có

$$MN = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \text{ Suy ra } \triangle AMN \text{ là tam giác đều, nên } \widehat{AMN} = 60^\circ.$$



Ví dụ 20. Cho tứ diện $SABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc và $SA = SB = SC = a$. Gọi M là trung điểm của BC . Tính góc giữa hai vec-tơ $\overrightarrow{SM}$ và $\overrightarrow{AB}$.

🍏 **Hướng dẫn giải:**

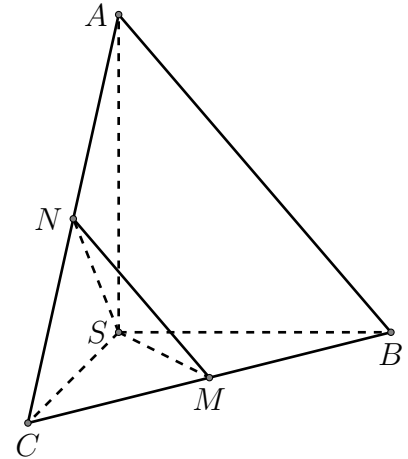
📝 **Cách 1:**

Gọi α là góc giữa hai vec-tơ $\overrightarrow{SM}$ và $\overrightarrow{AB}$, ta có $\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{AB}}{SM \cdot AB}$.

Có $BC = AB = \sqrt{SA^2 + SB^2} = a\sqrt{2}$, $SM = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Mặt khác ta có $\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}) \cdot (\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA})$
 $= \frac{1}{2}(\overrightarrow{SB}^2 - \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SA}) = \frac{a^2}{2}$

Vậy $\cos \alpha = \frac{a^2}{2 \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$.



📝 **Cách 2:**

Gọi N là trung điểm của AC , ta dễ dàng chứng minh được $\triangle SMN$ đều.

Có $(\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{NM}) = (\overrightarrow{MS}, \overrightarrow{MN}) = \widehat{NMS} = 60^\circ$.

Ví dụ 21 (Thi thử, THPT chuyên KHTN Hà Nội, 2019). Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Biết $MN = \sqrt{3}a$, góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. 45° .

B. 90° .

C. 60° .

D. 30° .

🍏 **Hướng dẫn giải:**

Gọi P là trung điểm của AC . Khi đó, ta có

$PM \parallel CD$, $PN \parallel AB$. Suy ra góc giữa AB và CD bằng góc giữa PM và PN .

Ta có $PM = \frac{CD}{2} = \frac{a}{2}$, $PN = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$.

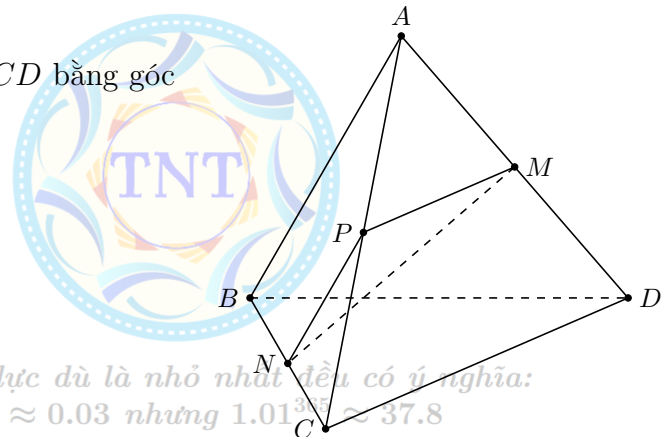
Xét tam giác PMN có
 $\cos \widehat{MPN} = \frac{PM^2 + PN^2 - MN^2}{2 \cdot PM \cdot PN}$

$= \frac{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{3a^2}{4}}{2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}} = -\frac{1}{2}$.

Suy ra $\widehat{MPN} = 120^\circ$.

Suy ra góc giữa hai đường thẳng PM và PN bằng $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng 60° .



Mọi sự nỗ lực dù là nhỏ nhất đều có ý nghĩa:
 $0.99^{365} \approx 0.03$ nhưng $1.01^{365} \approx 37.8$

Ví dụ 22. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a\sqrt{2}$ và $BC = 2a$.
Tính góc giữa hai đường thẳng AC và SB .

Hướng dẫn giải:

Cách 1:

Ta có SAB và SAC là tam giác đều, ABC và SBC là tam giác vuông cân cạnh huyền BC .

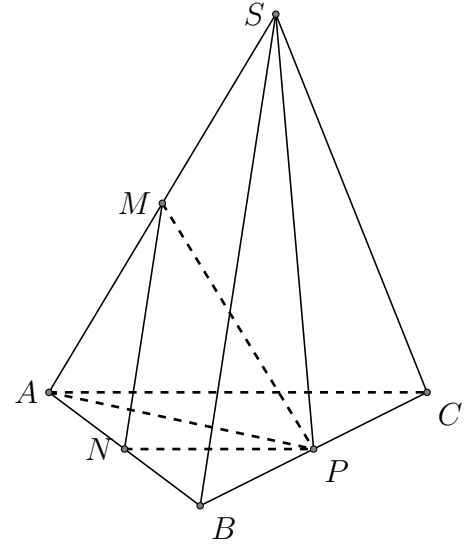
Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, AB, BC , ta có $MN \parallel SB, NP \parallel AC$ nên $(AC, SB) = (NP, MN)$.

$$MN = \frac{SB}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}, NP = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$AP = SP = \frac{BC}{2} = a, SA = a\sqrt{2}$$

$$\text{Nên } \triangle SAP \text{ vuông cân tại } P \Rightarrow MP = \frac{SA}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Vậy } \triangle MNP \text{ đều} \Rightarrow (AC, SB) = (NP, NM) = \widehat{MNP} = 60^\circ.$$



Cách 2:

$$\vec{AC} \cdot \vec{SB} = (\vec{SC} - \vec{SA}) \cdot \vec{SB} = \vec{SC} \cdot \vec{SB} - \vec{SA} \cdot \vec{SB}$$

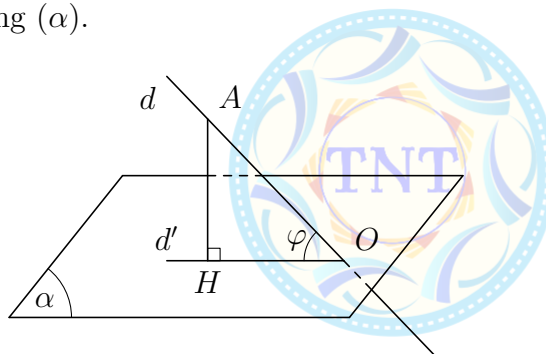
$$= 0 - SA \cdot SB \cdot \cos \widehat{ASB} = -a^2.$$

$$\cos(AC, SB) = \frac{|\vec{AC} \cdot \vec{SB}|}{AC \cdot SB} = \frac{a^2}{a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow (AC, SB) = 60^\circ.$$

1.2 Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α) .



Mọi sự nỗ lực dù là nhỏ nhất đều có ý nghĩa:
 $0.99^{365} \approx 0.03$ nhưng $1.01^{365} \approx 37.8$

Trường hợp đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) thì ta nói rằng góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) bằng 90° .

Trường hợp đường thẳng d không vuông góc với mặt phẳng (α) thì góc giữa đường thẳng d và hình chiếu d' của nó trên (α) gọi là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) .

Để xác định góc giữa d và (P) , ta thường làm như sau


 Xác định giao điểm O của d và (P) .


 Lấy một điểm A trên d (A khác O). Xác định hình chiếu vuông góc (vuông góc) H của A lên (P) . Lúc đó $(d, (P)) = (d, d') = \widehat{AOH}$.


 Nếu φ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) thì ta luôn có $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$.

Ví dụ 23. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $AB = 2a$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$ và $SA = a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng

- A. 45° . B. 30° . C. 60° . D. 90° .


Hướng dẫn giải:

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên $AC \Rightarrow BH \perp (SAC)$

Xét tam giác ABH vuông tại H , ta có

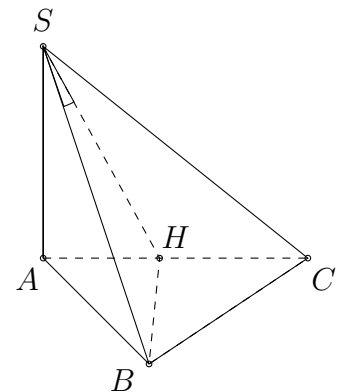
$$\sin \widehat{BAH} = \frac{BH}{AB} \Rightarrow BH = AB \cdot \sin 60^\circ = a\sqrt{3}$$

$$SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{6}.$$

Xét tam giác SBH vuông tại H , ta có

$$\sin \widehat{BSH} = \frac{BH}{SB} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{BSH} = 45^\circ$$

$$\text{Vậy } [SB, (SAC)] = \widehat{BSH} = 45^\circ.$$



Ví dụ 24. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SA \perp (ABC)$, $SA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính góc α giữa SC và mặt phẳng (SAB) .

- A. $\alpha = 45^\circ$. B. $\alpha = 30^\circ$. C. $\alpha = 90^\circ$. D. $\alpha = 60^\circ$.

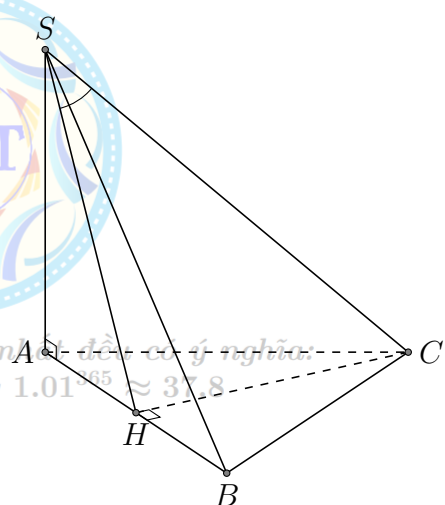
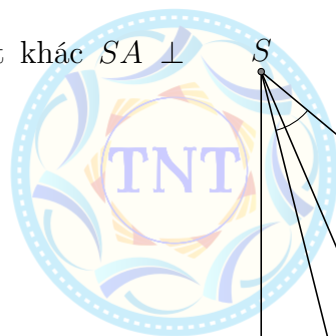

Hướng dẫn giải:

Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow CH \perp AB$ mặt khác $SA \perp$

$$CH \Rightarrow CH \perp (SAB) \Rightarrow (SC, (SAB)) = \widehat{HSC}$$

$$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = a\sqrt{\frac{3}{2}}; CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin \widehat{HSC} = \frac{HC}{SC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ.$$



Mọi sự nỗ lực dù là nhỏ nhất đều có ý nghĩa:
 $0.99^{365} \approx 0.03$ nhưng $1.01^{365} \approx 37.8$

Ví dụ 25.

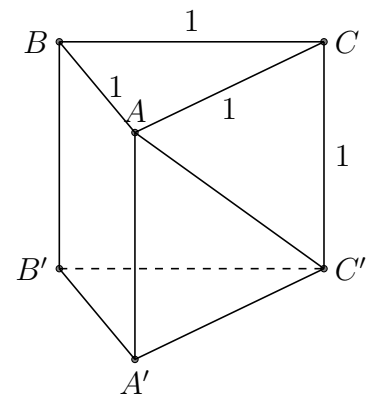
Cho hình trụ đều $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng 1 (tham khảo hình vẽ). Gọi φ là góc hợp bởi đường thẳng AC' với mặt phẳng $(BCC'B')$. Tính $\sin \varphi$.

A. $\sin \varphi = \frac{\sqrt{10}}{4}$.

B. $\sin \varphi = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

C. $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

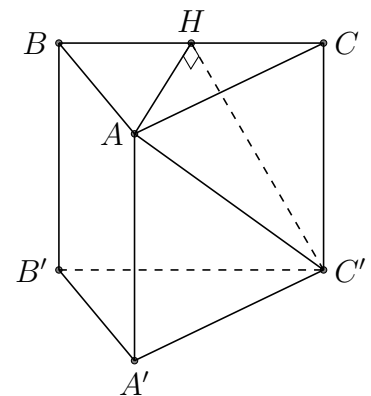
D. $\sin \varphi = \frac{\sqrt{13}}{4}$.



🍏 Hướng dẫn giải:

Gọi H là trung điểm của BC ta có $\varphi = \widehat{AC'H}$.

Ta có $AC' = \sqrt{2}$, $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ nên $\sin \varphi = \frac{AH}{AC'} = \frac{\sqrt{6}}{4}$.



Ví dụ 26. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B . Biết $AB = a$, $BC' = a\sqrt{2}$. Tính góc hợp bởi đường thẳng BC' và mặt phẳng $(ACC'A')$.

A. 90° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 30° .

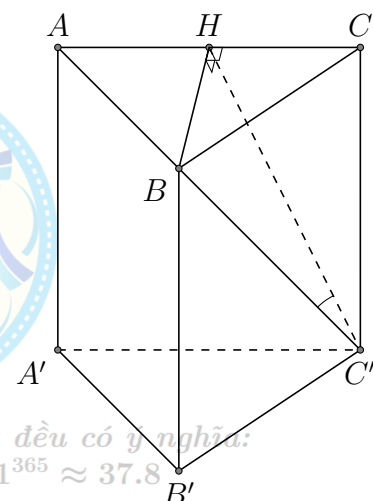
🍏 Hướng dẫn giải:

• Gọi H là trung điểm của AC . Do tam giác ABC vuông cân tại B nên $BH \perp AC$. Mặt khác $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên $CC' \perp BH$. Do đó $BH \perp (ACC'A')$. Suy ra góc giữa BC' với mặt phẳng $(ACC'A')$ là góc $\widehat{BC'H}$.

• Ta có $BC = AB = a$ nên $AC = a\sqrt{2}$.

Do đó $HB = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

• $\sin \widehat{BC'H} = \frac{HB}{BC'} = \frac{1}{2}$ nên $\widehat{BC'H} = 30^\circ$.

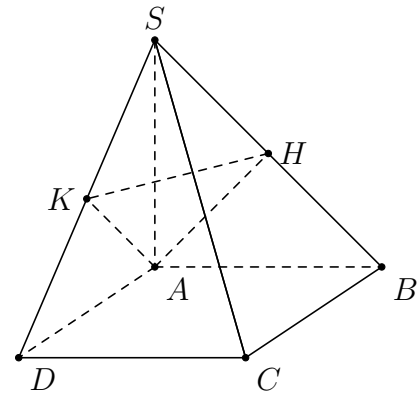


Mọi sự nỗ lực dù là nhỏ nhất đều có ý nghĩa:
 $0.99^{365} \approx 0.03$ nhưng $1.01^{365} \approx 37.8$

Ví dụ 27.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có cạnh bằng a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SD (hình vẽ bên). Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng SD và mặt phẳng (AHK) , tính $\tan \alpha$.

- A. $\tan \alpha = \sqrt{3}$. B. $\tan \alpha = \sqrt{2}$.
C. $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$. D. $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



🍏 Hướng dẫn giải:

Gọi L là giao điểm của SC và (AHK) .

Ta có $AK \perp (SCD)$ và $AH \perp (SBC)$ nên $SC \perp (AKLH)$.

Do đó

$$(SD, (AHK)) = (SK, KL) = \widehat{SKL} = \alpha.$$

Xét $\triangle SAC$ ta có

$$SA^2 = SL \cdot SC \Leftrightarrow SL = \frac{SA^2}{SC} = \frac{a^2}{a\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

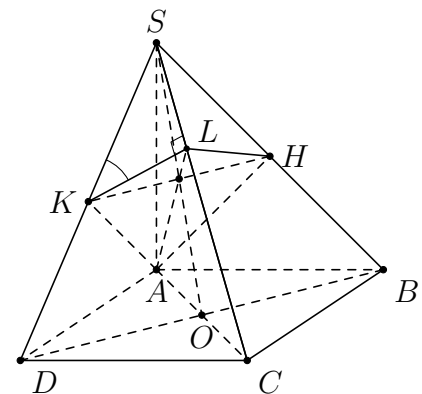
Mặt khác $\triangle SLK \sim \triangle SDC$ nên

$$\frac{LK}{DC} = \frac{SK}{SC} \Leftrightarrow LK = \frac{SK \cdot DC}{SC} = \frac{\frac{a}{\sqrt{2}} \cdot a}{a\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

Xét $\triangle SLK$ ta có

$$\tan \alpha = \frac{SL}{KL} = \frac{\frac{a}{\sqrt{3}}}{\frac{a}{\sqrt{6}}} = \sqrt{2}.$$

Vậy $\tan \alpha = \sqrt{2}$.

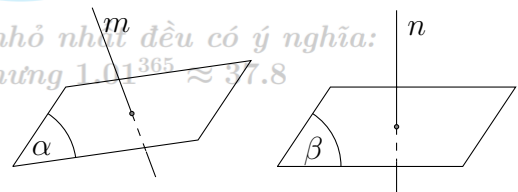


1.3 Góc giữa hai mặt phẳng

📌 Định nghĩa:

Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

Hai mặt phẳng song song hoặc trùng nhau thì góc giữa chúng bằng 0° .



📌 Diện tích hình chiếu của một đa giác Cho đa giác $\mathcal{H}$ nằm trong mặt phẳng (α) có diện tích là S và $\mathcal{H}'$ là hình chiếu vuông góc của $\mathcal{H}$ trên mặt phẳng (β) . Khi đó diện tích S' của hình $\mathcal{H}'$

được tính theo công thức như sau:

$$S' = S \cdot \cos \varphi$$

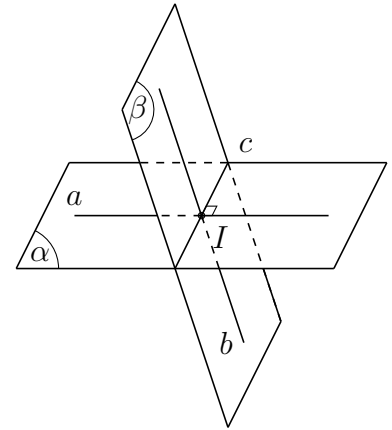
với φ là góc giữa (α) và (β) .

 Cách xác định góc của hai mặt phẳng cắt nhau

Bước 1. Tìm giao tuyến c của (α) và (β) .

Bước 2. Tìm hai đường thẳng a, b lần lượt thuộc hai mặt phẳng và cùng vuông góc với c tại một điểm.

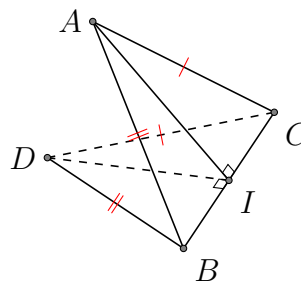
Bước 3. Góc giữa (α) và (β) là góc giữa a và b .



Muốn tìm góc giữa hai mặt phẳng ta có thể tìm góc giữa hai nửa đường thẳng lần lượt nằm trên hai mặt phẳng và vuông góc với giao tuyến của chúng.

Một số trường hợp thường gặp:

 **Trường hợp 1:** $\triangle ABC = \triangle DBC$.



Gọi I là chân đường cao của $\triangle ABC$.

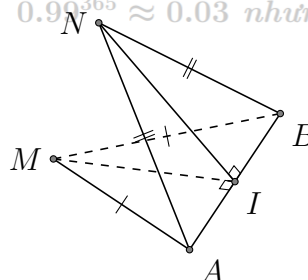
Nối DI . Vì $\triangle ABC = \triangle DBC$ nên $DI \perp BC$.

$$\Rightarrow ((ABC), (DBC)) = \widehat{AID}.$$

 **Trường hợp 2:** Xét góc giữa hai mặt phẳng (MAB) và (NAB) với $\triangle MAB$ và $\triangle NAB$ cân có cạnh đáy AB .

Mọi sự nỗ lực dù là nhỏ nhất đều có ý nghĩa:

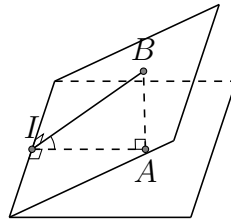
$$0.99^{365} \approx 0.03 \text{ nhưng } 1.01^{365} \approx 37.8$$



Gọi I là trung điểm AB . Khi đó $NI \perp AB$ và $MI \perp AB$.

$$\Rightarrow ((MAB), (NAB)) = \widehat{MIN}.$$

Trường hợp 3: Hai mặt phẳng cắt nhau $(\alpha) \cap (\beta) = \Delta$.



Tìm giao tuyến Δ của hai mặt phẳng.

Dựng AB có hai đầu mút nằm ở trên hai mặt phẳng và vuông góc với một mặt. (giả sử là (β)).

Chiếu vuông góc của A hoặc B lên Δ là điểm I .

$\Rightarrow \widehat{AIB}$ là góc giữa hai mặt phẳng.

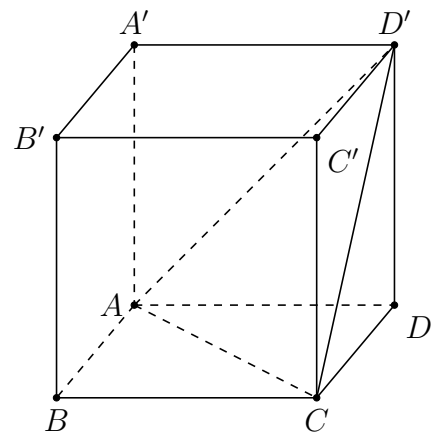
Trường hợp 4: Nếu $a \perp (\alpha); b \perp (\beta)$ thì $((\alpha), (\beta)) = (\widehat{a, b})$.

Trường hợp 5: Trường hợp khó vẽ được góc giữa hai mặt phẳng thì có thể dùng công thức phép chiếu diện tích đa giác.

Ví dụ 28.

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$, $AA' = a\sqrt{3}$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ACD') và $(ABCD)$ (tham khảo hình vẽ dưới đây). Giá trị $\tan \alpha$ bằng

- A. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. C. 2. D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.



Hướng dẫn giải:

Mọi sự nỗ lực dù là nhỏ nhất đều có ý nghĩa:
 $0.99^{365} \approx 0.03$ nhưng $1.01^{365} \approx 37.8$

Kẻ DO vuông góc với AC .

Mà ta có $AC \perp DD'$ nên $AC \perp D'O$.

Do đó, $[(ACD'), (ABCD)] = (D'O, DO) = \widehat{D'OD} = \alpha$.

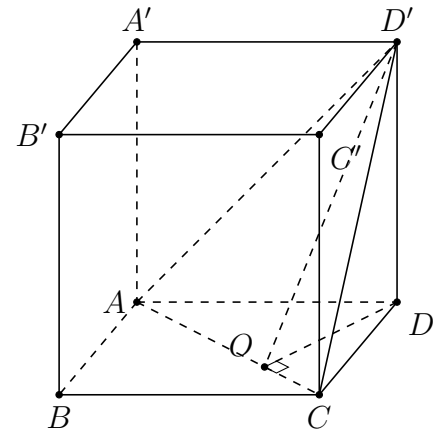
Xét tam giác ACD vuông tại D , đường cao DO , ta có

$$\frac{1}{DO^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{CD^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{2a^2},$$

suy ra $DO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Tam giác $D'DO$ vuông tại D , ta có

$$\tan \alpha = \frac{DD'}{DO} = \frac{a\sqrt{3}}{\frac{a\sqrt{6}}{3}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$



Ví dụ 29. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, $SA = 2BC$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Hình chiếu của A trên các đoạn SB, SC lần lượt là M, N . Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AMN) .

A. 45° .

B. 15° .

C. 30° .

D. 60° .

🍏 Hướng dẫn giải:

Đặt $BC = a$. Vẽ đường kính AD của đường tròn ngoại tiếp đáy.

Ta có $\begin{cases} CD \perp AC \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAC) \Rightarrow CD \perp AN$.

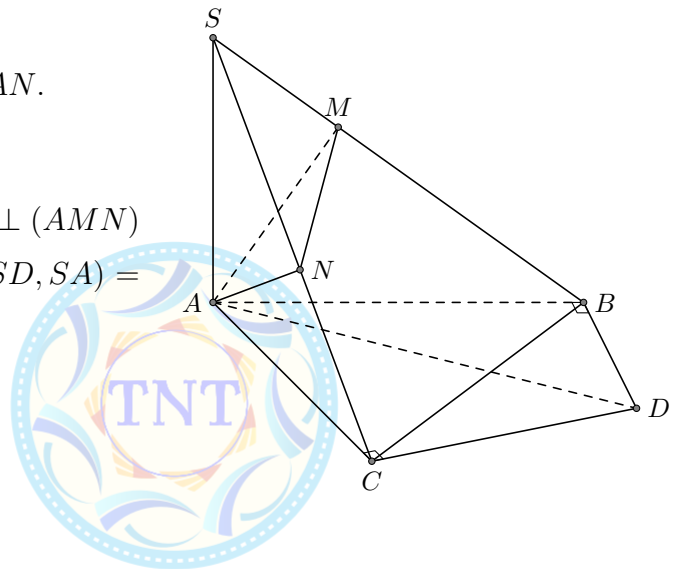
Mà $AN \perp SC \Rightarrow AN \perp (SCD) \Rightarrow AN \perp SD$.

Tương tự ta chứng minh $SD \perp AM$. Suy ra $SD \perp (AMN)$

lại có $SA \perp (ABC)$ nên $((AHK), (ABC)) = (SD, SA) = \widehat{ASD}$.

Ta có $AD = \frac{BC}{\sin A} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

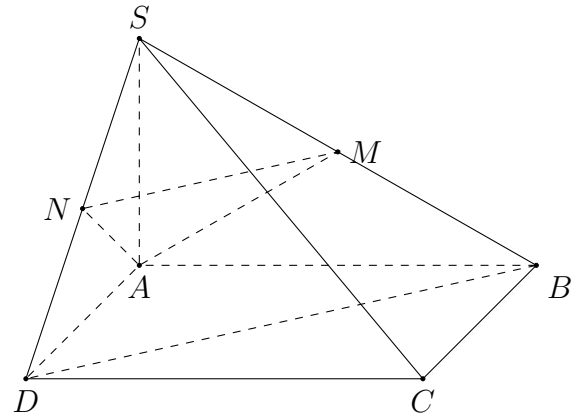
$\tan \widehat{ASD} = \frac{AD}{SA} = \frac{\frac{2a\sqrt{3}}{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{ASD} = 30^\circ$.



Mọi sự nỗ lực dù là nhỏ nhất đều có ý nghĩa:
 $0.99^{365} \approx 0.03$ nhưng $1.01^{365} \approx 37.8$

Ví dụ 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SB và SD (tham khảo hình vẽ), α là góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và (SBD) . Giá trị $\sin \alpha$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.
C. $\frac{\sqrt{7}}{3}$. D. $\frac{1}{3}$.



Hướng dẫn giải:

Gọi O là trung điểm của BD .

Gọi $I = MN \cap SO$, $P = AI \cap SC$.

Ta có $\begin{cases} SB \perp AM \\ BC \perp AM \end{cases} \Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp SC$.

Tương tự ta có $AN \perp SC$

Suy ra $SC \perp (AMN)$

Mặt khác $\begin{cases} MN \parallel BD \\ BD \perp (SAO) \end{cases} \Leftrightarrow MN \perp (SAO)$.

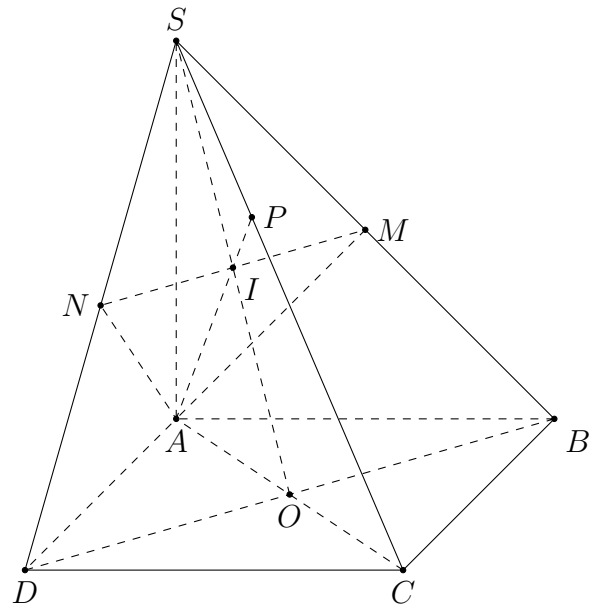
Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và (SBD) là góc giữa AI và SO hay là $\widehat{SIP} = \alpha$.

Xét tam giác vuông SIP vuông tại P . Ta có.

$$SI = \frac{1}{2}SO = \frac{\sqrt{6}}{4}a.$$

$$SP = \frac{SA^2}{SC} = \frac{\sqrt{3}}{3}a \text{ (áp dụng hệ thức lượng cho tam giác vuông } SAC).$$

$$\sin \alpha = \frac{SP}{SI} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$



Ví dụ 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABC)$, đáy ABC là tam giác vuông tại C . Cho $\widehat{ASC} = 60^\circ$, $\widehat{BSC} = 45^\circ$, $\sin$ của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng

- A. $\frac{\sqrt{6}}{4}$. B. $\frac{\sqrt{7}}{7}$. C. $\frac{\sqrt{42}}{7}$. D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

$$0.99^{365} \approx 0.03 \text{ nhưng } 1.01^{365} \approx 37.8$$

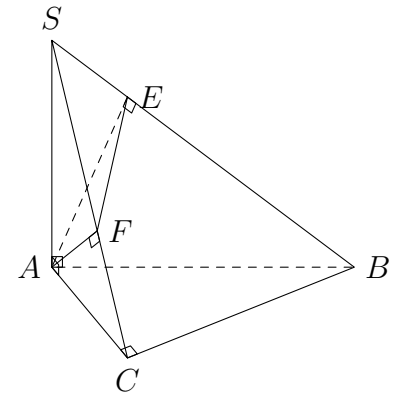
Dựng $AE \perp SB, AF \perp SC$. Dễ dàng chứng minh được $SB \perp (AEF)$.

Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) là góc $\widehat{AEF}$.

Giả sử $SA = 1 \Rightarrow SC = 2, BC = 2, AC = \sqrt{3}$ và $AB = \sqrt{7}, SB = 2\sqrt{2}$.

Từ đó có $AF = \frac{\sqrt{3}}{2}, AE = \frac{\sqrt{14}}{4}$.

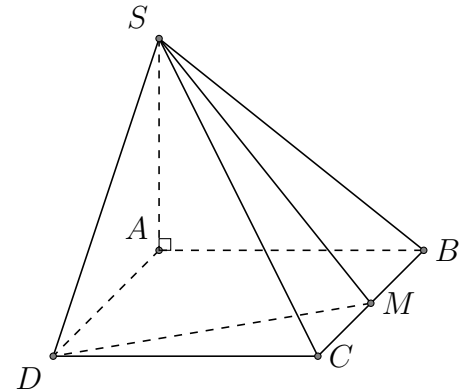
Tam giác AFE vuông tại F nên $\sin \widehat{FEA} = \frac{\sqrt{42}}{7}$.



Ví dụ 32.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA = a$ và vuông góc $(ABCD)$. Gọi M là trung điểm của BC (tham khảo hình vẽ bên). Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SMD) và $(ABCD)$.

- A. $\frac{3}{\sqrt{10}}$. B. $\frac{2}{\sqrt{5}}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

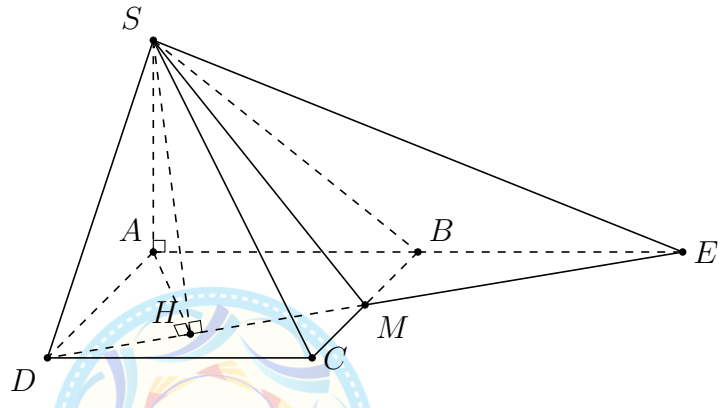


Hướng dẫn giải:

Kéo dài DM cắt AB tại E . Kẻ $AH \perp DM$ ($H \in DM$). Khi đó B là trung điểm của AE , góc $\widehat{SHA}$ là góc giữa (SMD) và đáy.

Ta có $AH = \frac{AD \cdot AE}{\sqrt{AD^2 + AE^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$.

$\tan \widehat{SHA} = \frac{SA}{AH} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \cos \widehat{SHA} = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 \widehat{SHA}}} = \frac{2}{3}$.



Ví dụ 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính $AB = 2a$, $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) bằng

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{5}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi I là giao điểm của AD và BC .

$$\text{Ta có } \begin{cases} BD \perp AD \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAD).$$

Mà $SI \subset (SAD)$ nên $BD \perp SI$.

Kẻ $DE \perp SI$ tại E .

$$\text{Ta có } \begin{cases} SI \perp DE \\ SI \perp BD \end{cases} \Rightarrow SI \perp (BDE) \Rightarrow SI \perp BE.$$

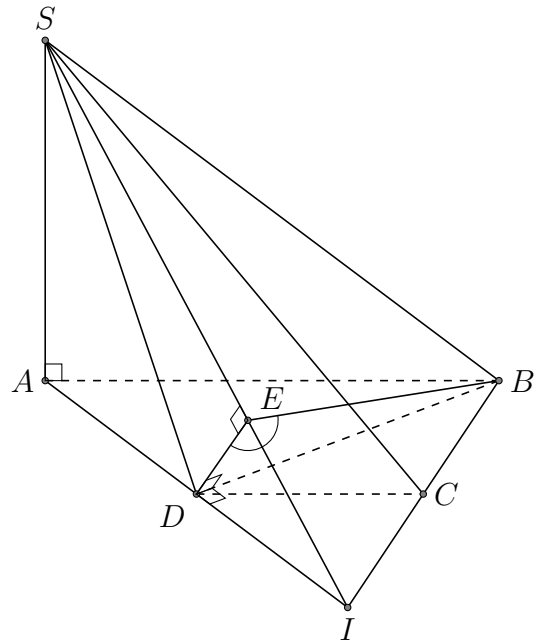
Suy ra góc giữa (SAD) và (SBC) là góc giữa DE và BE .

$$\text{Tính: } BD = a\sqrt{3}, \sin \widehat{AIS} = \frac{SA}{SI} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}},$$

$$DE = DI \cdot \sin \widehat{AIS} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}},$$

$$BE = \sqrt{BD^2 + DE^2} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{7}}.$$

$$\text{Khi đó } \cos \widehat{BED} = \frac{DE}{BE} = \frac{a\sqrt{3}}{7} \cdot \frac{\sqrt{7}}{2a\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

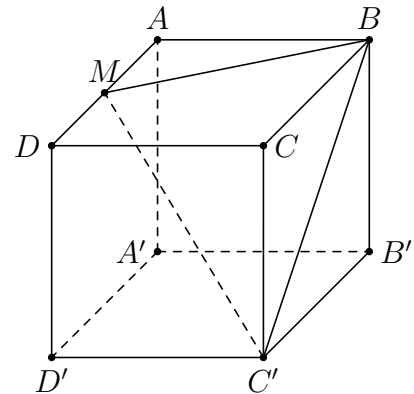


1. 4 Một số bài toán áp dụng phương pháp tọa độ trong không gian

Ví dụ 34 (THPT Nghèn - Hà Tĩnh, 2019). Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

Gọi M là trung điểm của AD , ϕ là góc giữa hai mặt phẳng (BMC') và $(ABB'A')$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $\cos \phi = \frac{3}{4}$.
- B. $\cos \phi = \frac{4}{5}$.
- C. $\cos \phi = \frac{1}{3}$.
- D. $\cos \phi = \frac{2}{3}$.



🍏 Hướng dẫn giải:

Mọi sự nỗ lực dù là nhỏ nhất đều có ý nghĩa:
 $0.99^{365} \approx 0.03$ nhưng $1.01^{365} \approx 37.8$

• **Cách 1: Tính góc theo công thức diện tích hình chiếu.**

Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương $\Rightarrow MA, CB, C'B'$ cùng vuông góc với $(ABB'A') \Rightarrow \triangle MBC'$ có hình chiếu vuông góc lên mặt phẳng $(ABB'A')$ là $\triangle ABB'$.

$$\text{Ta có } S_{\triangle ABB'} = S_{\triangle MBC'} \cdot \cos \phi \Rightarrow \cos \phi = \frac{S_{\triangle ABB'}}{S_{\triangle MBC'}}.$$

Xét tam giác MBC' , ta có

$$MB = \sqrt{MA^2 + AB^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} = \frac{\sqrt{5}a}{2}.$$

$$C'B = \sqrt{2}a.$$

$$MC' = \sqrt{DM^2 + DC'^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + 2a^2} = \frac{3}{2}a.$$

$$\text{Đặt } p = \frac{MB + MC' + BC'}{2}.$$

Áp dụng công thức Hê-rông ta có

$$S_{\triangle MBC'} = \sqrt{p(p - MC')(p - MB)(p - BC')} = \frac{3a^2}{4}.$$

$$\text{Mặt khác } S_{\triangle ABB'} = \frac{a^2}{2} \Rightarrow \cos \phi = \frac{S_{\triangle ABB'}}{S_{\triangle MBC'}} = \frac{1}{2}a^2 : \frac{3a^2}{4} = \frac{2}{3}.$$

• **Cách 2: Phương pháp tọa độ hóa.**

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $AB = 1$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với các tọa độ các điểm như sau:

$$A'(0; 0; 0), B'(0; 1; 0), D'(1; 0; 0), A(0; 0; 1).$$

$$\text{Khi đó ta có } B(0; 1; 1), M\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right), C'(1; 1; 0).$$

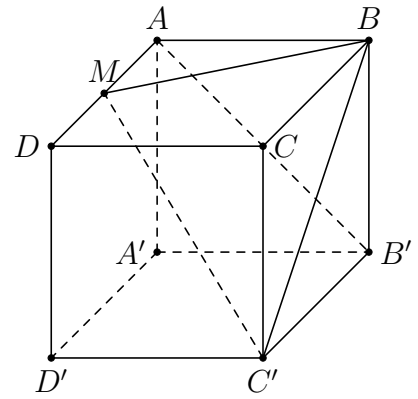
$$\text{Ta có } \overrightarrow{BC'} = (1; 0; -1), \overrightarrow{BM} = \left(\frac{1}{2}; -1; 0\right), [\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{BM}] = \left(-1; -\frac{1}{2}; -1\right).$$

Từ đây suy ra véc-tơ pháp tuyến của các mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(BC'M)$ lần lượt là

$$\vec{n}_1 = (1; 0; 0), \vec{n}_2 = \left(1; \frac{1}{2}; 1\right).$$

$$\text{Ta có } \cos \phi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{\left|1 \cdot 1 + 0 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot 1\right|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1}} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Vậy } \cos \phi = \frac{2}{3}.$$



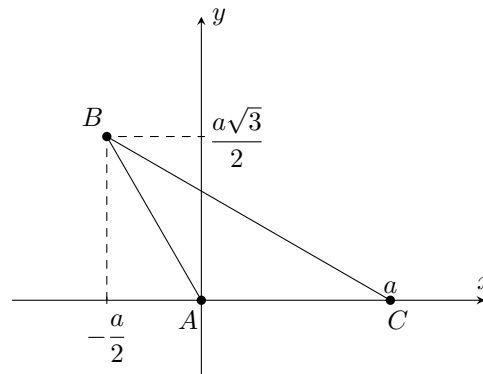
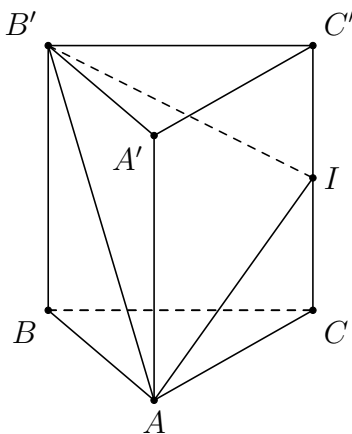
Ưu điểm của hai cách tính này là không phải dựng góc

- a) Cách 1, mở tư duy vì thường ta chỉ chú ý việc chuyển bài toán tính diện tích thiết diện thành bài toán tính góc mà ít khi nghĩ đến hướng ngược lại. Đặc biệt ở đây ta chỉ cần “một phần thiết diện” chính là $\triangle BC'M$. Việc tính diện tích tam giác này là khá đơn giản.
- b) Cách 2, nhấn mạnh việc tọa độ hóa bài toán liên quan đến hình lập phương là hướng đi tốt. Không cần nhiều tư duy hình.

Ví dụ 35 (Thi thử, THPT Thiệu Hóa - Thanh Hóa, 2019). Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = BB' = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Gọi I là trung điểm của CC' . Tính cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$.

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{3\sqrt{5}}{12}$. C. $\frac{\sqrt{30}}{10}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

🍏 Hướng dẫn giải:



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $A \equiv O$, C thuộc tia Ox , A' thuộc tia Oy và B thuộc góc phần tư thứ II của mặt phẳng tọa độ Oxy .

Khi đó, $A(0; 0; 0)$, $B\left(-\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right)$, $C(a; 0; 0)$, $B'\left(-\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; a\right)$, $I\left(a; 0; \frac{a}{2}\right)$.

Ta có:

- $\overrightarrow{AB} = \left(-\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ và $\overrightarrow{AC} = (a; 0; 0)$ suy ra $\vec{n}_1 = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \left(0; 0; -\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)$.
- $\overrightarrow{AB'} = \left(-\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; a\right)$ và $\overrightarrow{AI} = \left(a; 0; \frac{a}{2}\right)$ suy ra $\vec{n}_2 = [\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AI}] = \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}; \frac{5a^2}{4}; -\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)$.

Hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$ lần lượt nhận $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ làm véc-tơ pháp tuyến.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$, ta có

$$\cos \varphi = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{\sqrt{30}}{10}.$$

Ví dụ 36 (Hà Huy Tập, 2019). Cho hình chóp $S.ABCD$. đáy là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Biết SA vuông góc với đáy $(ABCD)$, $SA = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SB, CD . Tính sin góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SAC) .

- A. $\frac{3\sqrt{5}}{10}$. B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. D. $\frac{\sqrt{55}}{10}$.

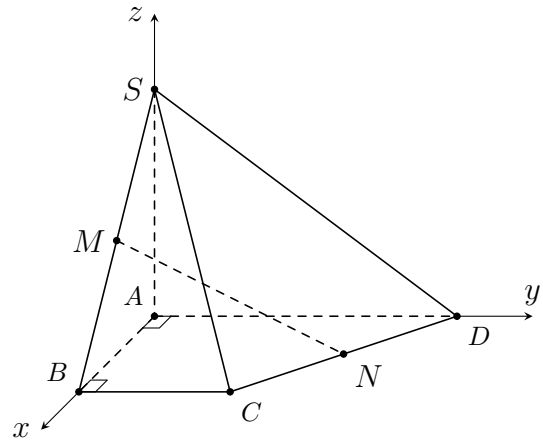
Hướng dẫn giải:

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Ta có $A(0; 0; 0)$, $S(0; 0; a)$, $C(a; a; 0)$, $D(0; 2a; 0)$, $B(a; 0; 0)$, $M\left(\frac{a}{2}; 0; \frac{a}{2}\right)$, $N\left(\frac{a}{2}; \frac{3a}{2}; 0\right)$.

Ta có $[\vec{AS}, \vec{AC}] = a^2(-1; 1; 0)$, do đó mặt phẳng (SAC) có véc-tơ pháp tuyến là $(-1; 1; 0)$. Mặt khác $\vec{MN} = (0; \frac{3a}{2}; -\frac{a}{2})$, suy ra đường thẳng MN có véc-tơ chỉ phương $(0; 3; -1)$.

Gọi φ là góc giữa đường thẳng MN và (SAC) , ta có

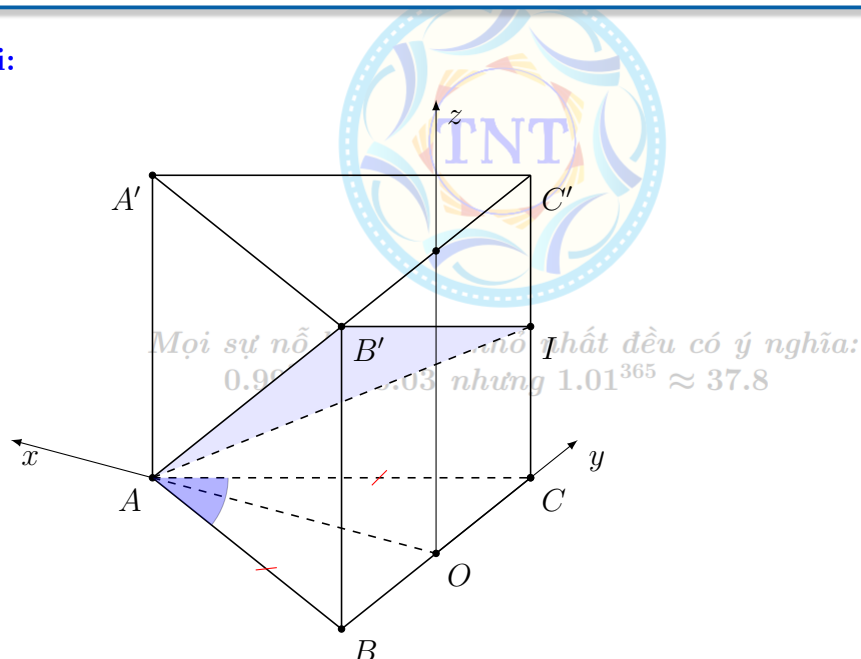
$$\sin \varphi = \frac{|-1 \cdot 0 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot (-1)|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{0^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{10}.$$



Ví dụ 37 (Thi thử, Chuyên Sơn La). Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = a$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$, cạnh bên $BB' = a$, gọi I là trung điểm CC' . Cosin góc giữa (ABC) và $(AB'I)$ bằng:

- A. $\frac{\sqrt{20}}{10}$. B. $\sqrt{30}$. C. $\frac{\sqrt{30}}{10}$. D. $\frac{\sqrt{30}}{5}$.

Hướng dẫn giải:



Gọi O là trung điểm BC , ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos 120^\circ = a^2 + a^2 - 2a \cdot a \cos 120^\circ = 3a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Tam giác } AOB \text{ vuông tại } O \text{ có: } AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3}{4}a^2} = \frac{a}{2}.$$

Chọn hệ trục $Oxyz$ (như hình vẽ). Ta có:

$$A\left(\frac{a}{2}; 0; 0\right), B'\left(0; -\frac{\sqrt{3}}{2}a; a\right), I\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}a; \frac{a}{2}\right).$$

Mặt phẳng (ABC) có một VTPT $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

$$\vec{AB'} = \left(-\frac{a}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}a; a\right), \vec{AI} = \left(-\frac{a}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}a; \frac{a}{2}\right).$$

$$\Rightarrow [\vec{AB'}, \vec{AI}] = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2; -\frac{1}{4}a^2; -\frac{\sqrt{3}}{2}a^2\right) = -\frac{1}{4}a^2(3\sqrt{3}; 1; 2\sqrt{3}).$$

Mặt phẳng $(AB'I)$ có một VTPT $\vec{n} = (3\sqrt{3}; 1; 2\sqrt{3})$.

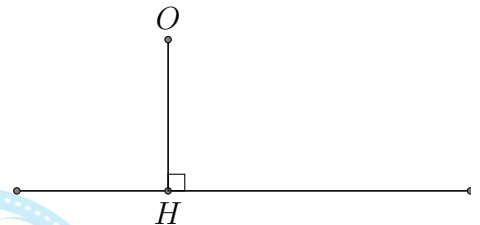
$$\cos((ABC), (AB'I)) = \left| \cos(\vec{k}, \vec{n}) \right| = \frac{|\vec{k} \cdot \vec{n}|}{|\vec{k}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{30}}{10}.$$

§2. Khoảng cách

2.1 Khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng

Để tính khoảng cách từ điểm O tới đường thẳng (d) , ta thực hiện các bước sau:

- Trong mặt phẳng $(O; d)$, hạ $OH \perp (d)$ tại H .
- Tính độ dài OH dựa trên các công thức về hệ thức lượng trong tam giác, tứ giác và đường tròn.



Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$, $AB = BC = a$. Gọi M là điểm thuộc AB sao cho $AM = \frac{2a}{3}$. Tính khoảng cách d từ S đến đường thẳng CM .

A. $d = \frac{2a\sqrt{110}}{5}$. B. $d = \frac{a\sqrt{10}}{5}$. C. $d = \frac{a\sqrt{110}}{5}$. D. $d = \frac{2a\sqrt{10}}{5}$.

 **Hướng dẫn giải:**

Trong (SMC) kẻ $SH \perp MC$ tại H .

$$\text{Có } \begin{cases} MC \perp SH \\ MC \perp SA \end{cases} \Rightarrow MC \perp (SAH) \Rightarrow MC \perp AH.$$

$$\text{Diện tích tam giác } ABC \text{ là } S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{a^2}{2}.$$

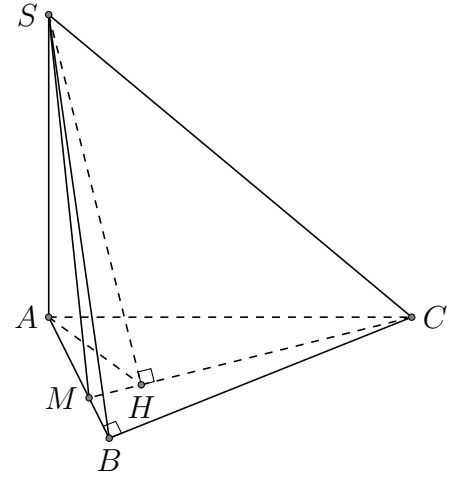
$$\text{Diện tích tam giác } MBC \text{ là } S_{MBC} = \frac{1}{2}MB \cdot BC = \frac{a^2}{6}.$$

$$\Rightarrow S_{AMC} = S_{ABC} - S_{MBC} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{6} = \frac{a^2}{3}.$$

$$\text{Xét } \triangle BMC \Rightarrow MC = \sqrt{MB^2 + BC^2} = \frac{\sqrt{10}a}{3}.$$

$$\text{Độ dài cạnh } AH = \frac{2S_{AMC}}{MC} = \frac{2a\sqrt{10}}{10}.$$

$$\text{Xét } \triangle AHS \Rightarrow SH = \sqrt{AH^2 + SH^2} = \frac{a\sqrt{110}}{5}.$$



Ví dụ 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng $B'D$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

C. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Vì } \begin{cases} AD \perp AB \text{ (} ABCD \text{ là h.vuông)} \\ AD \perp AA' \text{ (} ADD'A' \text{ là h.vuông)} \end{cases} \Rightarrow AD \perp (ABB'A') \Rightarrow AD \perp AB'.$$

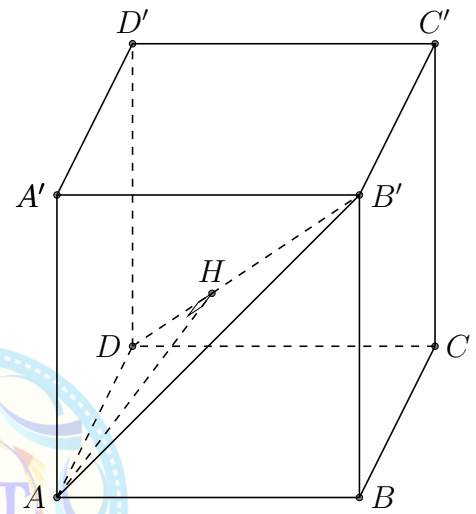
Trong $\triangle ADB'$ vuông tại A ta vẽ đường cao AH .

Vậy $AH = d(A, B'D)$.

Theo hệ thức lượng trong $\triangle ADB'$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AB'^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2}$$

$$\text{Suy ra } AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$



Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh 1. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách từ A đến (SCD) .

A. 1.

B. $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

D. $\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

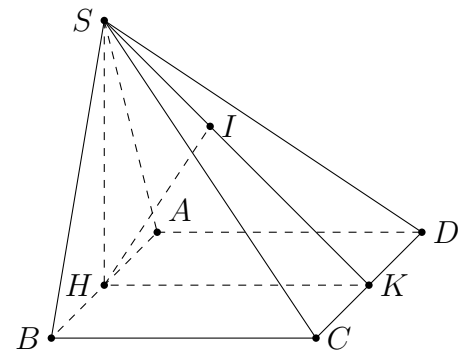
Gọi K là trung điểm của $CD \Rightarrow HK \perp CD \Rightarrow CD \perp (SHK)$.

Trong mặt phẳng (SHK) dựng $HI \perp SK \Rightarrow HI \perp (SCD)$.

Ta có $AH \parallel (SCD) \Rightarrow d(A, (SCD)) = d(H, (SCD)) = HI$.

Tam giác SAB đều $\Rightarrow SH = \frac{\sqrt{3}}{2}$ và $HK = 1$.

Xét ΔSHK có $\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HK^2} \Rightarrow HI = \frac{\sqrt{21}}{7}$.



Ví dụ 4. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , G là trọng tâm tam giác ABC . Góc giữa mặt bên với đáy bằng 60° . Khoảng cách từ điểm G đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{a}{2}$.

B. $\frac{a}{4}$.

C. $\frac{3a}{4}$.

D. $\frac{3a}{2}$.

 Hướng dẫn giải:

Gọi I là trung điểm BC .

Trong mặt phẳng (SAI) , kẻ $GH \perp SI$ (1)

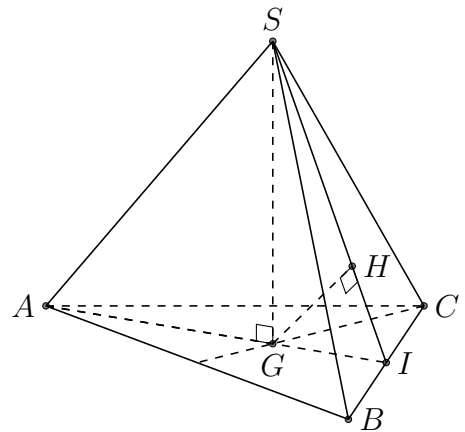
Ta có: $\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp SI \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp GH$ (2).

Từ (1), (2) $\Rightarrow GH \perp (SBC) \Rightarrow d(G; (SBC)) = GH$.

Có: $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ SI \perp BC \\ AI \perp BC \end{cases} \Rightarrow ((SBC); (ABC)) =$

$(SI; AI) = \widehat{SIA} = \widehat{SIG} = 60^\circ$.

Ta có $GI = \frac{1}{3}AI = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow GH = GI \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{4}$.



Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , SA vuông góc với mặt đáy và $SA = AB = \sqrt{3}$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB . Khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

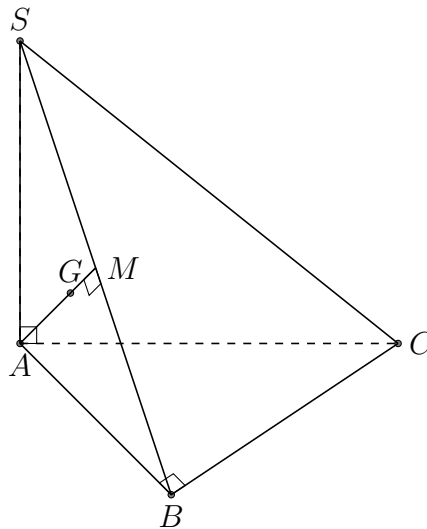
B. $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

C. $\sqrt{3}$.

D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

 Hướng dẫn giải:

Mọi sự nỗ lực dù là nhỏ nhất đều có ý nghĩa:
 $0.99^{365} \approx 0.03$ nhưng $1.01^{365} \approx 37.8$



Gọi M là trung điểm của $SB \Rightarrow AM \perp SB$ (vì tam giác SAB cân).

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$.

Và $\begin{cases} AM \perp SB \\ AM \perp BC \end{cases} \Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow GM \perp (SBC) \text{ tại } M$.

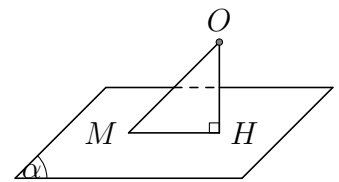
Do đó $d(G, (SBC)) = GM$.

$$SB = AB\sqrt{2} = \sqrt{6}, AM = \frac{SB}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow GM = \frac{AM}{3} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

2.2 Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Phương pháp

Cho mặt phẳng (α) và một điểm O , gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm O trên mặt phẳng (α) . Khi đó khoảng cách OH được gọi là khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (α) , kí hiệu $d(O, (\alpha)) = OH$.



Tính chất 1. Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) thì khoảng cách từ mọi điểm trên đường thẳng d đến mặt phẳng (P) là như nhau.

Tính chất 2. Nếu $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{BM}$ thì $d(A, (P)) = |k|d(B, (P))$, trong đó (P) là mặt phẳng đi qua M .

Mọi sự nỗ lực dù là nhỏ nhất đều có ý nghĩa:
 $0.99^{365} \approx 0.03$ nhưng $1.01^{365} \approx 37.8$

Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AB = AC = a$. Biết tam giác SAB có $\widehat{ABS} = 60^\circ$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) theo a .

A. $d = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

B. $d = 3\sqrt{3}$.

C. $d = 2a\sqrt{3}$.

D. $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $\begin{cases} CA \perp AB \\ (ABC) \perp (SAB) \\ (ABC) \cap (SAB) = AB \end{cases} \Rightarrow CA \perp (SAB).$

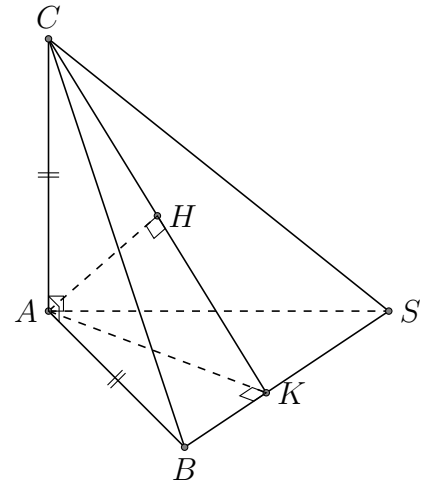
Kẻ $AK \perp SB$ tại K và $AH \perp CK$ tại H .

Ta có $\begin{cases} SB \perp AK \\ SB \perp CA \end{cases} \Rightarrow SB \perp (ACK) \Rightarrow SB \perp AH.$

Do $\begin{cases} AH \perp CK \\ AH \perp SB \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A; (SBC)) = AH.$

Xét $\triangle ABK$, ta có $AK = AB \cdot \sin \widehat{ABK} = a \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$

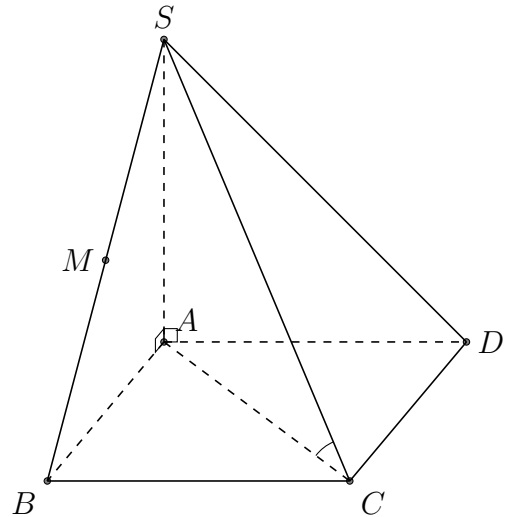
Xét $\triangle ACK$, ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AK^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{7}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$



Ví dụ 7.

Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật cạnh $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Gọi M là trung điểm của cạnh SB (tham khảo hình vẽ). Tính khoảng cách từ điểm M tới mặt phẳng $(ABCD)$.

- A. $d(M, (ABCD)) = \frac{a}{2}.$
- B. $d(M, (ABCD)) = \frac{3a}{2}.$
- C. $d(M, (ABCD)) = 2a\sqrt{3}.$
- D. $d(M, (ABCD)) = a\sqrt{3}.$




Hướng dẫn giải: Do $SA \perp (ABCD)$ suy ra góc giữa SC và đáy là $\widehat{SCA} = 60^\circ.$ (1)

Do $ABCD$ là hình chữ nhật nên $AC = a\sqrt{3}.$ (2)

Trong tam giác vuông SAC có $SA = AC \cdot \tan 60^\circ = 3a.$

Do M là trung điểm cạnh SB nên $d(M, (ABCD)) = \frac{1}{2}d(S, (ABCD)) = \frac{3a}{2}.$

Ví dụ 8. Cho hình chóp đều $S.ABCD$, cạnh đáy bằng a , góc giữa mặt bên và mặt đáy là 60° . Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) .

- A. $\frac{a}{4}.$
- B. $\frac{a\sqrt{3}}{4}.$
- C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}.$
- D. $\frac{a}{2}.$


Hướng dẫn giải:

Trong đó H là hình chiếu vuông góc của O lên (SCD) , ta có

$$\frac{d(B; (SCD))}{d(O; (SCD))} = \frac{BD}{OD} = 2 \Rightarrow d(B; (SCD)) = 2 \cdot d(O; (SCD)) = 2OH$$

Gọi I là trung điểm của CD ta có

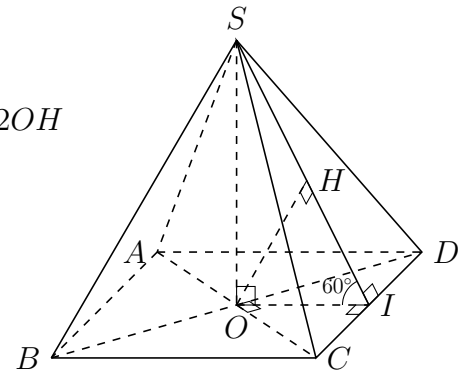
$$\begin{cases} SI \perp CD \\ OI \perp CD \end{cases} \Rightarrow ((SCD); (ABCD)) = (OI; SI) = \widehat{SIO} = 60^\circ.$$

Xét tam giác SOI vuông tại O ta có $SO = OI \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do $SOCD$ là tứ diện vuông tại O nên

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OD^2} + \frac{1}{OS^2} = \frac{2}{a^2} + \frac{2}{a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{16}{3a^2}.$$

$$\Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow d(B; (SCD)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$



Ví dụ 9. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $2a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

- A. $\frac{a\sqrt{165}}{30}$. B. $\frac{a\sqrt{165}}{45}$. C. $\frac{a\sqrt{165}}{15}$. D. $\frac{2a\sqrt{165}}{15}$.

🍏 Hướng dẫn giải:

Gọi O là tâm của tam giác đều ABC và H là trung điểm của BC .

$$\text{Ta có } SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{33}}{3}.$$

$$\text{Ta có } SH = \sqrt{SO^2 + OH^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{33}}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{15}}{2}.$$

Cách 1.

$$\text{Tính } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{33}}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{11}}{12}.$$

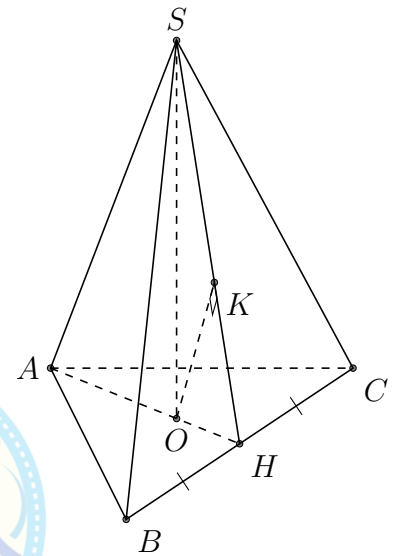
$$\text{Vậy } d[A, (SBC)] = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{\triangle SBC}} = \frac{3 \cdot \frac{a^3\sqrt{11}}{12}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{15}}{2} \cdot a} = \frac{a\sqrt{165}}{15}.$$

Cách 2.

$$\text{Ta có } \frac{d[A, (SBC)]}{d[O, (SBC)]} = \frac{AH}{OH} = 3. \text{ Trong } (SAH) \text{ vẽ } OK \perp SH.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp SO \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp OK.$$

Mà $OK \perp SH \Rightarrow OK \perp (SBC)$. Khi đó $OK = d[O, (SBC)]$.



Vì $\triangle SOH$ vuông tại O có OK là đường cao

$$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{\frac{11}{3}a^2} + \frac{1}{\frac{a^2}{12}} \Rightarrow OK = \frac{a\sqrt{165}}{45}.$$

Do đó $d[A, (SBC)] = 3 \cdot \frac{a\sqrt{165}}{45} = \frac{a\sqrt{165}}{15}.$

Ví dụ 10. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng $(AD'B')$ bằng

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. D. a .

Hướng dẫn giải:

Gọi O, O' lần lượt là tâm của các mặt $(A'B'C'D')$ và $ADD'A'$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A' lên AO .

Do $A'B'C'D'$ là hình vuông nên $A'C' \perp B'D'$ (1)

$AA' \perp (A'B'C'D') \Rightarrow AA' \perp B'D'$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $B'D' \perp AA'O$.

Kẻ $A'H \perp AO$ (3)

Vì $B'D' \perp (AA'O) \Rightarrow B'D' \perp AH$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $A'H \perp (AB'D')$

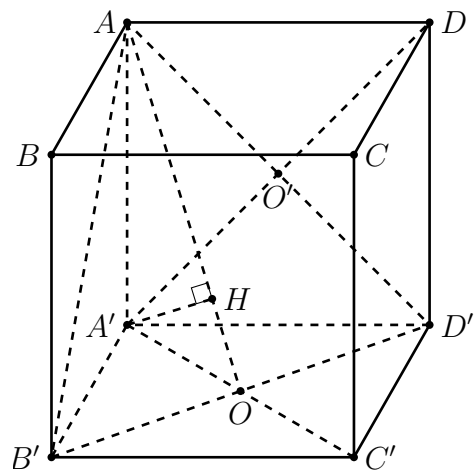
$\Rightarrow A'H = d(A', (AB'D'))$.

$$A'C' = \sqrt{A'D'^2 + D'C'^2} = a\sqrt{2} \Rightarrow A'O = \frac{A'C'}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Trong tam giác vuông $AA'O$ có $AH = \frac{A'A \cdot A'O}{AC} = \frac{A'A \cdot A'O}{\sqrt{A'A^2 + A'O^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$

Ta có : $d(D, (AB'D')) = d(A', (AB'D')) = A'H = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$

Vậy $d(D, (AB'D')) = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$



Ví dụ 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O cạnh $AB = 2a\sqrt{3}$, góc $\widehat{BAD}$ bằng 120° . Hai mặt phẳng SAB và SAD cùng vuông góc với đáy. Góc giữa mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 45° . Tính khoảng cách h từ O đến mặt phẳng (SBC) .

- A. $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $h = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$. C. $h = \frac{a\sqrt{2}}{3}$. D. $h = 3a$.

Hướng dẫn giải:

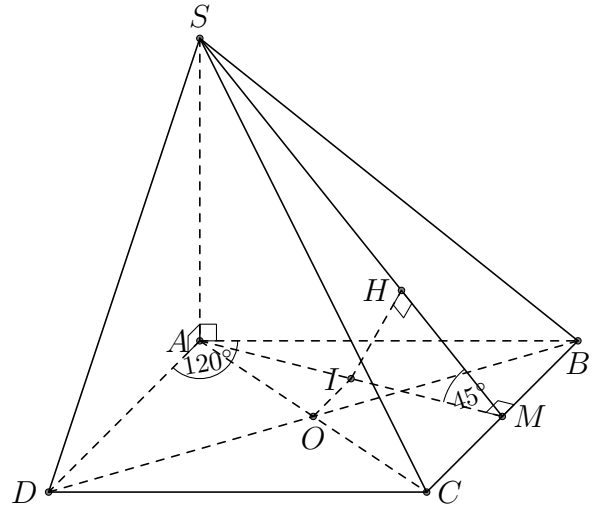
$$\text{Vì } \begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAD) \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABCD). \text{ Từ giả}$$

thiết ta suy ra $\triangle ABC$ đều và $\triangle SBC$ cân tại S .
Gọi M là trung điểm của BC . Ta có $AM \perp BC$ và $SM \perp BC$ do đó $((SBC), (ABCD)) = \widehat{SMA} = 45^\circ$.
Gọi I là trung điểm của AM suy ra $OI \parallel BC \Rightarrow OI \parallel (SBC)$. Do đó $d(O, (SBC)) = d(I, (SBC))$.
Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên SM , ta có $d(I, (SBC)) = IH$.

Vì $\triangle ABC$ đều và $\triangle SAM$ vuông cân nên

$$AM = SA = \frac{2a\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 3a \Rightarrow SM = 3a\sqrt{2}.$$

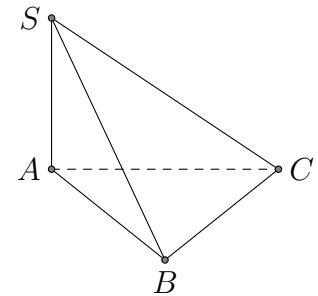
$$\text{Vì } \triangle HIM \sim \triangle SAM \text{ nên } IH = \frac{IM \cdot SA}{SM} = \frac{\frac{1}{2}3a \cdot 3a}{3a\sqrt{2}} = \frac{3a\sqrt{2}}{4}.$$



Ví dụ 12.

Cho khối chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC đều cạnh a và thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ (tham khảo hình vẽ bên).
Tính khoảng cách h từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) .

$$\text{A. } h = \frac{a\sqrt{3}}{7}. \quad \text{B. } h = \frac{2a}{\sqrt{7}}. \quad \text{C. } h = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \quad \text{D. } h = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$



🍏 Hướng dẫn giải:

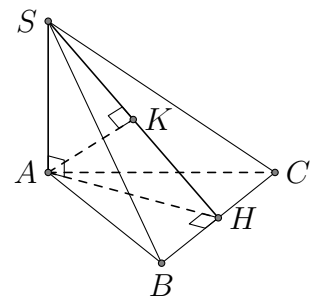
Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên BC và SH .

Ta có $d(A, (SBC)) = AK$.

$$\bullet V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot SA \Rightarrow SA = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{a^3\sqrt{3}}{12}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = a.$$

• Xét tam giác SAH vuông tại A có

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{7}{3a^2} \Leftrightarrow a = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$



Ví dụ 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy là hình chữ nhật có $AB = a, BC = a\sqrt{2}$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của SD và (P) là mặt phẳng đi qua B, M sao cho (P) cắt mặt phẳng (SAC) theo một đường thẳng vuông góc với BM . Khoảng

cách từ điểm S đến (P) bằng

A. $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$.

B. $\frac{a\sqrt{2}}{9}$.

C. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

D. $\frac{4a\sqrt{2}}{9}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi O là tâm hình chữ nhật $ABCD$. G là giao điểm của SO và BM .

Suy ra G là trọng tâm của tam giác SAC và SBD .

Gọi N là giao điểm của (P) và SA . H là hình chiếu vuông góc của B lên AC . K là hình chiếu vuông góc của H lên BG .

Ta có $OA = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + BC^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi I là trung điểm $AB \Rightarrow OI = \frac{1}{2} \cdot BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$$S_{ABO} = \frac{1}{2} \cdot OI \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot BH \cdot OA \Rightarrow BH = \frac{OI \cdot AB}{OA} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$\triangle ABH$ vuông tại H có $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

$\Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}AC \Rightarrow \frac{OH}{AH} = \frac{OG}{OS} = \frac{2}{3} \Rightarrow GH \parallel SA$

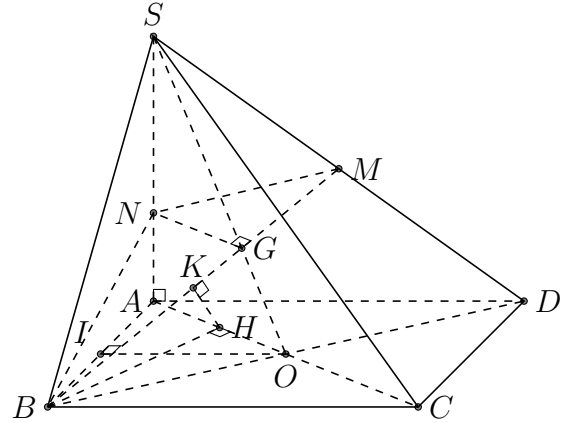
Ta có $BH \perp (SAC) \Rightarrow BH \perp NG$

Khi đó $\begin{cases} NG \perp BM \\ BH \perp NG \end{cases} \Rightarrow NG \perp GH \Rightarrow NG \parallel AC \Rightarrow (P) \parallel AC$ và $SN = 2AN$.

$d(S, (P)) = 2d(A, (P)) = 2d(H, (P)) = 2HK$.

$\triangle OSA$ có $GH = \frac{1}{3}SA = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $\triangle AHB$ vuông tại H có $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

$\triangle GHB$ vuông tại H có $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HG^2} + \frac{1}{HB^2} \Rightarrow HK = \sqrt{\frac{HG^2 \cdot HB^2}{HG^2 + HB^2}} = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.



Ví dụ 14. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a . Góc giữa mặt bên với mặt đáy bằng 60° . Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{a}{2}$.

B. $\frac{a}{4}$.

C. $\frac{3a}{2}$.

D. $\frac{3a}{4}$.

Hướng dẫn giải:

Mọi sự nỗ lực dù là nhỏ nhất đều có ý nghĩa:
 $0.99^{365} \approx 0.03$ nhưng $1.01^{365} \approx 37.8$

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC , M là trung điểm của BC , H là hình chiếu vuông góc của G lên SM .

Theo đề góc giữa (SBC) và (ABC) là góc $\widehat{SMA} = 60^\circ$.

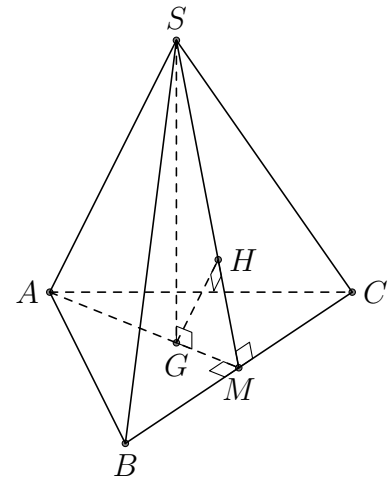
Do G là trọng tâm tam giác ABC ta có $AM = 3GM$,

suy ra $d(A, (SBC)) = 3d(G, (SBC)) = 3GH$

Trong $\triangle GHM$ vuông tại H có

$$GH = GM \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{4}.$$

Suy ra $d(A, (SBC)) = 3GH = \frac{3a}{4}$.



Ví dụ 15. Cho $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$; góc giữa SC với $(ABCD)$ bằng 45° . Khoảng cách từ trọng tâm G của tam giác SBC đến mặt phẳng (SAC) bằng

- A. $\frac{a\sqrt{55}}{33}$. B. $\frac{a\sqrt{55}}{22}$. C. $\frac{2a\sqrt{55}}{33}$. D. $\frac{a\sqrt{21}}{21}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi H là trung điểm của AB .

Vì tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$.

Khi đó góc giữa SC với $(ABCD)$ là $\widehat{SCH} = 45^\circ$. Suy ra tam giác SCH vuông cân tại H nên

$$SH = CH = \sqrt{BC^2 + BH^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Ta có $\frac{d(G, (SAC))}{d(B, (SAC))} = \frac{GM}{BM} = \frac{1}{3}$ (với M là trung điểm SC).

Hơn nữa $\frac{d(B, (SAC))}{d(H, (SAC))} = \frac{BA}{HA} = 2$.

Khi đó $d(G, (SAC)) = \frac{2}{3}d(H, (SAC))$.

Kẻ $HE \perp AC$ (trong mặt phẳng $(ABCD)$). Khi đó $AC \perp (SHE)$.

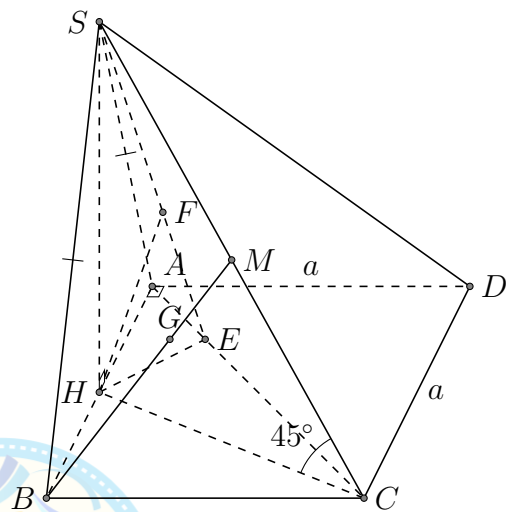
Kẻ $HF \perp SE$ (trong mặt phẳng (SHE)). Khi đó $HF \perp (SAC)$ hay $HF = d(H, (SAC))$.

Ta có tam giác AHE vuông cân tại E và $AH = \frac{a}{2}$ nên $HE = \frac{a}{2\sqrt{2}}$.

Hơn nữa, vì tam giác SHE vuông tại H và có đường cao HF nên

$$\frac{1}{HF^2} = \frac{1}{HE^2} + \frac{1}{SH^2} = \frac{4}{5a^2} + \frac{8}{a^2} \Leftrightarrow HF = \frac{\sqrt{55}a}{22}.$$

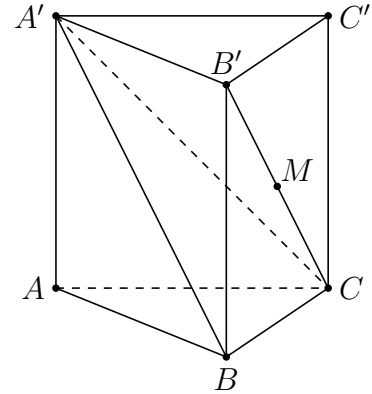
Vậy khoảng cách cần tìm là $d(G, (SAC)) = \frac{2}{3}d(H, (SAC)) = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{55}a}{22} = \frac{2\sqrt{55}a}{33}$.



Ví dụ 16.

Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a . Biết góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và $(A'B'C')$ bằng 60° , M là trung điểm của $B'C$. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(A'BC)$.

- A. $\frac{3}{8}a$. B. $\frac{1}{3}a$. C. $\frac{\sqrt{3}}{6}a$. D. $\frac{\sqrt{6}}{3}a$.



Hướng dẫn giải:

Ta có $\frac{d(M, (A'BC))}{d(B, (A'BC))} = \frac{MC}{B'C} = \frac{1}{2}$; $d(B', (A'BC)) = d(A, (A'BC))$.

Vì $(A'B'C') \parallel (ABC)$ nên góc giữa $(A'BC)$ và $(A'B'C')$ bằng góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) .

Kẻ $AH \perp BC$ tại $H \Rightarrow A'H \perp BC$. Suy ra, $\widehat{A'HA}$ là góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) . Do đó, $\widehat{A'HA} = 60^\circ$.

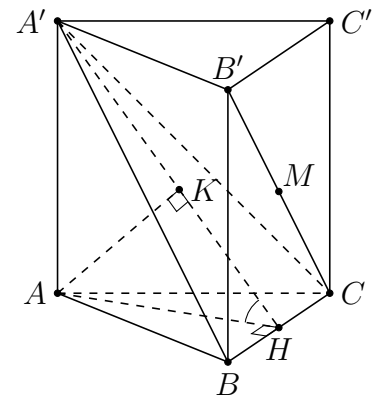
Kẻ $AK \perp A'H$ tại $K \Rightarrow AK \perp (A'BC)$.

Do đó, $d(A, (A'BC)) = AK$.

Ta có $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $A'A = AH \cdot \tan \widehat{A'HA} = \frac{3a}{2}$.

Tam giác $A'AH$ vuông tại A có AK là đường cao, suy ra $AK = \frac{AA' \cdot AH}{\sqrt{AA'^2 + AH^2}} = \frac{3a}{4}$.

Vậy $d(M, (A'BC)) = \frac{1}{2}AK = \frac{3a}{8}$.



Ví dụ 17. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B và $AB = a$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) .

Hướng dẫn giải:

Do $SA \perp (ABC)$ và $SA \subset (SAB)$ nên $(SAB) \perp (ABC)$.

Mà $(SAB) \cap (ABC) = AB$ và $AB \perp BC$

nên $BC \perp (SAB)$. Do $BC \subset (SBC)$

nên $(SBC) \perp (SAB)$.

Kẻ $AH \perp SB$ với $H \in SB$.

Do $(SAB) \cap (SBC) = SB$ nên $AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AH$.

Do $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp AB$

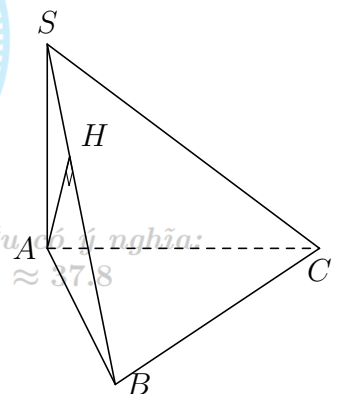
nên

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2}.$$

Vậy $d(A, (SBC)) = \frac{\sqrt{3}a}{2}$.



Mọi sự nỗ lực dù là nhỏ nhất đều có ý nghĩa:
 $0.99^{365} \approx 0.03$ nhưng $1.01^{365} \approx 37.8$



Ví dụ 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$, tứ giác $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Gọi H là trung điểm của AB . Tính khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SCD) .

Hướng dẫn giải:

Do tam giác SAB đều và H là trung điểm của AB nên $SH \perp AB$.

Mà $(SAB) \perp (ABCD)$.

Nên $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp CD$.

Do $ABCD$ là hình vuông nên gọi E là trung điểm của CD nên $HE \perp CD$.

Vậy $CD \perp (SHE)$.

Mà $CD \subset (SCD)$ nên $(SCD) \perp (SHE)$.

Ta có $(SCD) \cap (SHE) = SE$.

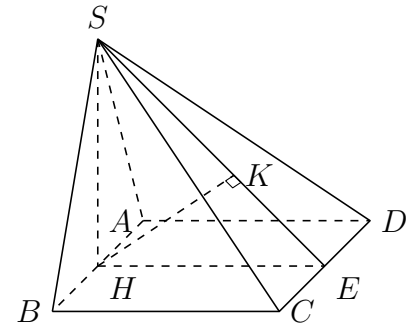
Kẻ $HK \perp SE$ với $K \in SE$ nên $HK \perp (SCD)$.

Khi đó $d(H, (SCD)) = HK$. Vì $AB = a$ nên $SH = \frac{\sqrt{3}a}{2}$.

Do $ABCD$ là hình vuông nên $HE = a$.

Vì $SH \perp (ABCD)$ nên $SH \perp HE$.

Khi đó $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HE^2} = \frac{7}{3a^2}$. Nên $HK = \frac{\sqrt{21}a}{7}$. Vậy $d(H, (SCD)) = \frac{\sqrt{21}a}{7}$.



Ví dụ 19. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = 1$, $AC = \sqrt{3}$. Tam giác SBC đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) .

Hướng dẫn giải:

Gọi H là trung điểm của BC ,

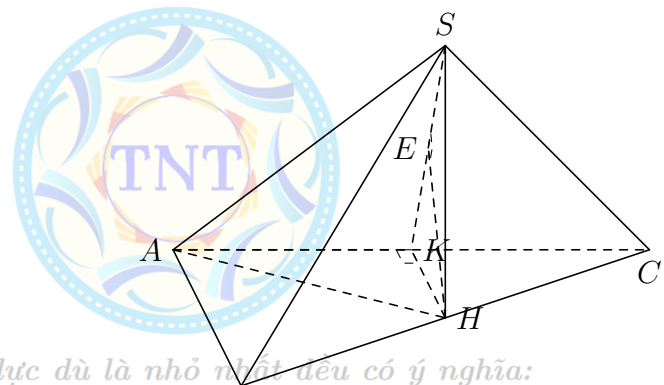
suy ra $SH \perp BC \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Gọi K là trung điểm AC , suy ra $HK \perp AC$.

Kẻ $HE \perp SK$ ($E \in SK$).

Khi đó $d(B, (SAC)) = 2d(H, (SAC))$

$$= 2HE = 2 \cdot \frac{SH \cdot HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = \frac{2\sqrt{39}}{13}.$$



Mọi sự nỗ lực dù là nhỏ nhất đều có ý nghĩa:
 $0.99^{365} \approx 0.03$ nhưng $0.01^{365} \approx 37.8$

Ví dụ 20. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh bên là $2a$ và diện tích đáy là $4a^2$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) .

Hướng dẫn giải:

Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

Ta có $d(A, (SBC)) = 2d[O, (SBC)]$.

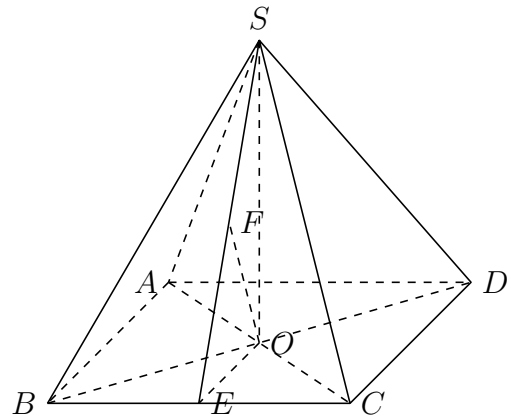
Kẻ $OE \perp BC, OF \perp SE$ ta có

$$\begin{cases} BC \perp OE \\ BC \perp SO \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SOE) \Rightarrow BC \perp OF \text{ mà } OF \perp SE \Rightarrow OF \perp (SBC).$$

Ta có $S_{ABCD} = AB^2 = 4a^2 \Rightarrow AB = 2a \Rightarrow OE = a$.

Ta có $AC = 2a\sqrt{2} \Rightarrow OA = a\sqrt{2} \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = a\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{1}{OF^2} &= \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OE^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow OF = \frac{a\sqrt{6}}{3}. \\ \Rightarrow d(O, (SBC)) &= \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow d(A, (SBC)) = \frac{2a\sqrt{6}}{3}. \end{aligned}$$



Ví dụ 21. Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh $SA = SB = SC = a$ và SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau. Tính theo a khoảng cách h từ điểm S đến mặt phẳng (ABC) .

Gọi H là chân đường cao hạ từ S xuống (ABC) và $M = AH \cap BC$.

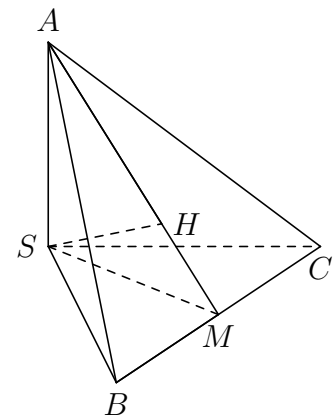
Ta có $SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp BC \Rightarrow BC \perp SH$.

$$\text{Lại có } \begin{cases} SA \perp SB \\ SA \perp SC \end{cases} \Rightarrow SA \perp (SBC) \Rightarrow SA \perp BC \Rightarrow BC \perp SA.$$

$$\text{Như vậy } \begin{cases} BC \perp SH \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp SM.$$

Từ $SA \perp (SBC) \Rightarrow SA \perp SM$

$$\text{Do đó } \frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SM^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SC^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow h = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$



2. 3 Khoảng cách giữa đường và mặt song song - giữa hai mặt song song

a) Cho đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) , để tính khoảng cách giữa d và (α) ta thực hiện

- Chọn điểm A trên d sao cho khoảng cách từ A tới (α) được xác định dễ nhất.
- Kết luận $d(d; (\alpha)) = d(A, (\alpha))$.

*Lưu ý nỗ lực dù là nhỏ nhất đều có ý nghĩa:
0.99³⁶⁵ ≈ 0.03 nhưng 1.01³⁶⁵ ≈ 37.8*

b) Cho hai mặt phẳng song song $(\alpha), (\beta)$. Để tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng ta thực hiện các bước

- Chọn điểm A trên (α) sao cho khoảng cách từ A tới (β) được xác định dễ nhất.
- Kết luận $d((\beta); (\alpha)) = d(A, (\beta))$.

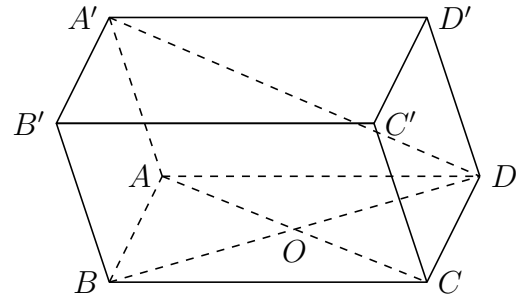
Ví dụ 22. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh đều bằng a và $\widehat{BAD} = \widehat{BAA'} = \widehat{DAA'} = 60^\circ$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $A'B'C'D'$.

Hướng dẫn giải:

Hạ $A'H \perp AC$. Ta có $BD \perp (OAA')$ suy ra $BD \perp A'H \Rightarrow A'H \perp (ABCD)$. Do $(ABCD) \parallel (A'B'C'D')$ nên $A'H$ là khoảng cách giữa hai mặt đáy.

$A'.ABD$ là hình chóp đều nên $AH = \frac{2}{3}AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

$$A'H^2 = A'A^2 - AH^2 = \frac{2a^2}{3} \Rightarrow A'H = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$



Ví dụ 23. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a , mặt bên (SBC) vuông góc với đáy. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm AB, SA, AC . Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (MNP) và (SBC) .

Ta chứng minh được $(MNP) \parallel (SBC)$.

Suy ra $d((MNP); (SBC)) = d(P; (SBC))$.

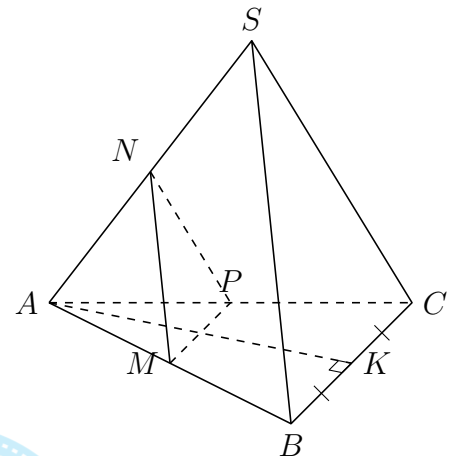
$AP \cap (SBC) = C$ suy ra $d(P; (SBC)) = \frac{AP}{AC}d(A; (SBC)) = \frac{1}{2}d(A; (SBC))$.

Gọi K là trung điểm của BC . Tam giác ABC đều suy ra $AK \perp BC$.

Do $(ABC) \perp (SBC)$ theo giao tuyến BC nên $AK \perp (SBC)$.

Do đó, $d(A; (SBC)) = AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $d((MNP); (SBC)) = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.



Ví dụ 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, đáy $(ABCD)$ là nửa lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kính $AD = 2a$.

a) Tính khoảng cách từ A, B đến mặt phẳng (SCD) .

b) Tính khoảng cách từ đường thẳng AD đến mặt phẳng (SBC) .

c) Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (SAD) và cách (SAD) một khoảng bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

a)

Ta có $(SCD) \perp (SAC)$. Hạ $AH \perp SC \Rightarrow AH \perp (SCD)$. Suy ra AH là khoảng cách từ A tới (SCD) .

Xét $\triangle SAB$: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{SA^2} \Rightarrow AH = a\sqrt{2}$.

Gọi I là trung điểm của AD , suy ra

$BI \parallel CD \Rightarrow BI \parallel (SCD) \Rightarrow d(B, (SCD)) = d(I, (SCD))$

Mặt khác, $AI \cap (SCD) = D$, nên $\frac{d(I, (SCD))}{d(A, (SCD))} = \frac{ID}{AD} = \frac{1}{2}$.

Suy ra $d(I, (SCD)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

b) Ta có $AD \parallel CD \Rightarrow AD \parallel (SBC) \Rightarrow d(AD, (SBC)) = d(A, (SBC))$.

Hạ $AK \perp BC$, ta có $BC \perp (SAK) \Rightarrow (SBC) \perp (SAK)$ và $(SBC) \perp (SAK) = AK$.

Hạ $AG \perp SK$, suy ra $AG \perp (SBC)$.

Xét $\triangle SAK$, ta có

$$\frac{1}{AG^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AK^2} \Rightarrow AG = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

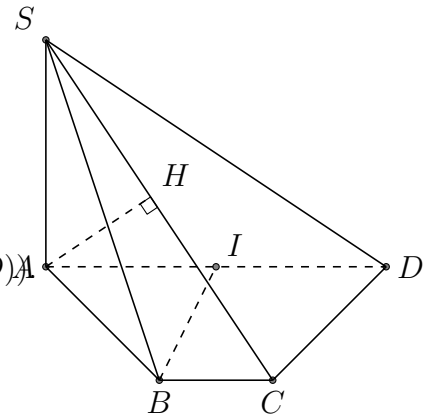
c) Ta có $AK \perp (SAD)$. Giả sử $(\alpha) \parallel (SAD)$ cắt AK tại E , khi đó

$$d((\alpha), (SAD)) = AE = \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}AK.$$

Suy ra E là trung điểm của AK . Ta xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α) qua E và song song với (SAD) .

Thiết diện là hình thang vuông $MNPQ$ với M, N, Q, P là trung điểm của AB, CD, SB, SC .

Ta tính được $S_{MNPQ} = \frac{a^2\sqrt{6}}{2}$.



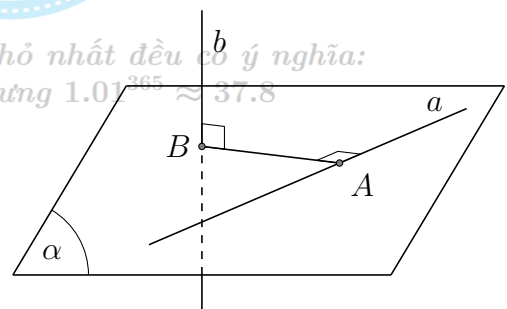
2. 4 Đoạn vuông góc chung, khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Phương pháp. Ta có các trường hợp sau:

1) Trường hợp 1

Giả sử a và b là hai đường thẳng chéo nhau và $a \perp b$.

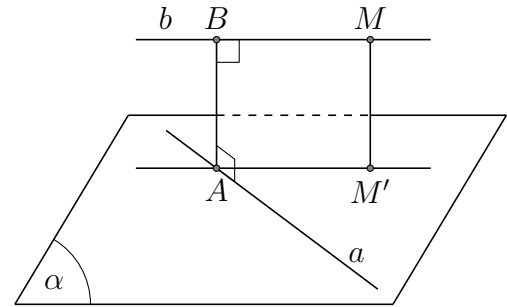
- Ta dựng mặt phẳng (α) chứa a và vuông góc với b tại B .
- Trong (α) dựng $BA \perp a$ tại A , ta được độ dài đoạn AB là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b .



2) Trường hợp 2

Giả sử a và b là hai đường thẳng chéo nhau nhưng không vuông góc với nhau.

- Ta dựng mặt phẳng (α) chứa a và song song với b .
- Lấy một điểm M tùy ý trên b và dựng MM' vuông góc với (α) tại M' .
- Từ M' dựng b' song song với b cắt a tại A .
- Từ A dựng AB song song với MM' cắt b tại B , độ dài đoạn AB là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b .



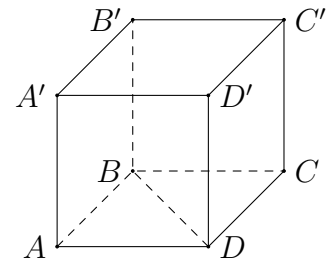
Nhận xét

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó và mặt phẳng song song với nó chứa đường thẳng còn lại.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.

Ví dụ 25.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1 (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BD bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. 1.
C. $\sqrt{2}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

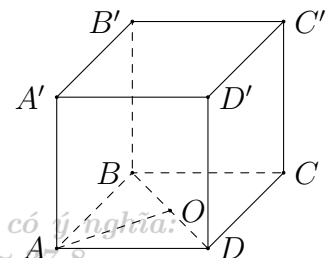


Hướng dẫn giải:

Gọi O là trung điểm của BD .

$$\text{Ta có } \begin{cases} AO \perp AA' \\ AO \perp BD. \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } d(AA', BD) = AO = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



Ví dụ 26. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a > 0$, $AC = BD = b > 0$, $AD = BC = c > 0$. Các biểu thức $a^2 + b^2 - c^2$, $a^2 + c^2 - b^2$, $c^2 + b^2 - a^2$ đều có giá trị dương. Khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

- A. $d = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 + a^2}{2}}$. B. $d = \sqrt{\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}}$.

$$\text{C. } d = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}}.$$

$$\text{D. } d = \sqrt{\frac{b^2 + a^2 - c^2}{2}}.$$

🍏 **Hướng dẫn giải:**

Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và CD .

Để chứng minh được các tam giác CED cân tại E và tam giác AFB cân tại F .

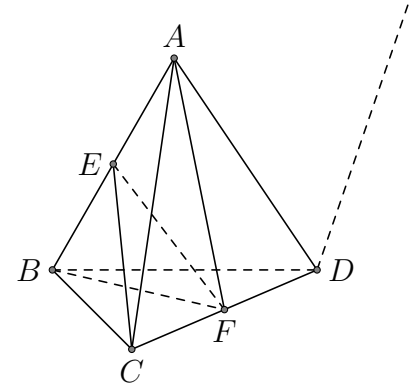
Suy ra EF là đoạn vuông góc chung của AB và CD . Vậy $d = EF$.

Trong tam giác ABC trung tuyến $CE^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$.

Trong tam giác CFE vuông tại F có:

$$FE = \sqrt{CE^2 - CF^2} = \sqrt{\left(\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) - \frac{a^2}{4}}.$$

$$\text{Suy ra } d = EF = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}}.$$



Ví dụ 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD .

A. $2a$.

B. $a\sqrt{2}$.

C. $a\sqrt{3}$.

D. a .

🍏 **Hướng dẫn giải:**

Vì $CD \parallel AB$ nên $CD \parallel (SAB)$.

Mà $SB \subset (SAB)$ nên

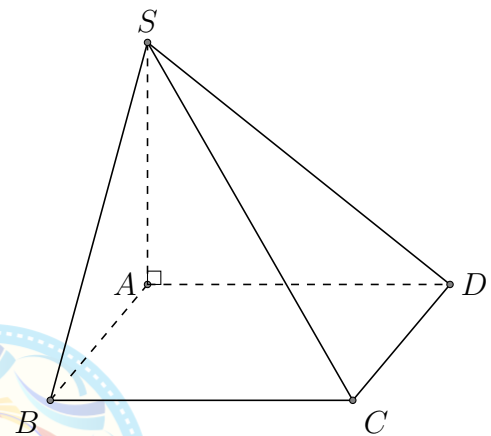
$$d(CD, SB) = d[CD, (SAB)] = d[D, (SAB)].$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} DA \perp SA (SA \perp (ABCD)) \\ DA \perp AB \end{cases} \Rightarrow DA \perp (SAB),$$

do đó

$$d[D, (SAB)] = DA = a.$$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD là a .



Ví dụ 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh bằng 1, biết $SO = \sqrt{2}$ và vuông góc với mặt đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AB .

A. $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

C. $\sqrt{2}$.

D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

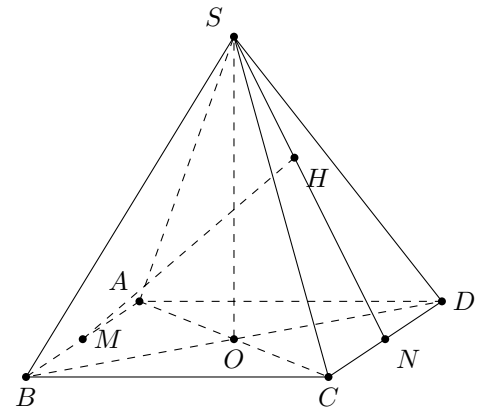
🍏 **Hướng dẫn giải:**

Vì $AB \parallel (SCD)$ nên $d(AB, SC) = d(AB, (SCD)) = d(M, (SCD))$, trong đó M là trung điểm của AB .

Gọi N là trung điểm của CD và H là hình chiếu vuông góc của M trên (SCD) thì $H \in SN$. Tính được $SN =$

$$\sqrt{SO^2 + \frac{BC^2}{4}} = \frac{3}{2} \text{ và } S_{\triangle SMN} = \frac{1}{2}SO \cdot MN = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Do đó } d(AB, SC) = d(M, (SCD)) = MH = \frac{2S_{\triangle SMN}}{SN} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$



Ví dụ 29. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân, $AB = AC = a$, $AA' = 2a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và BC' .

- A. $\frac{2a}{\sqrt{21}}$. B. $\frac{a}{\sqrt{3}}$. C. $\frac{a}{\sqrt{21}}$. D. $\frac{2a}{\sqrt{17}}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi I, K lần lượt là trung điểm BC' và AC .

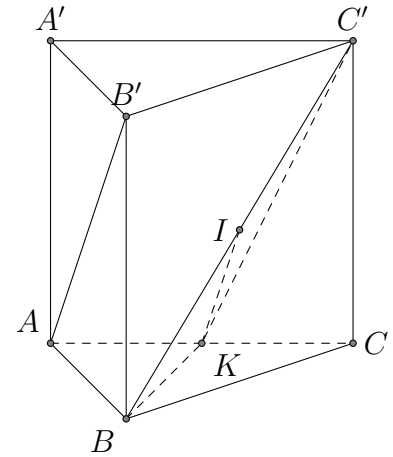
$$\Rightarrow AB' \parallel IK \Rightarrow AB' \parallel (BKC').$$

$$\Rightarrow d(AB'; BC') = d(AB'; (BKC')) = d(C; (BKC')).$$

$$\text{Mặt khác } V_{C'.BKC} = \frac{1}{6}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{a^3}{6}.$$

$$\begin{cases} BK = \frac{a\sqrt{5}}{2} \\ KC' = \frac{a\sqrt{17}}{2} \Rightarrow S_{\triangle BKC'} = \frac{a^2\sqrt{21}}{4} \\ BC' = a\sqrt{6} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } d(AB'; BC') = d(C; (BKC')) = \frac{3V_{C'.BKC}}{S_{\triangle BKC'}} = \frac{2a}{\sqrt{21}}.$$



Ví dụ 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh bằng 1, biết $SO = \sqrt{2}$ và vuông góc với mặt đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AB .

- A. $\frac{\sqrt{5}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. C. $\sqrt{2}$. D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

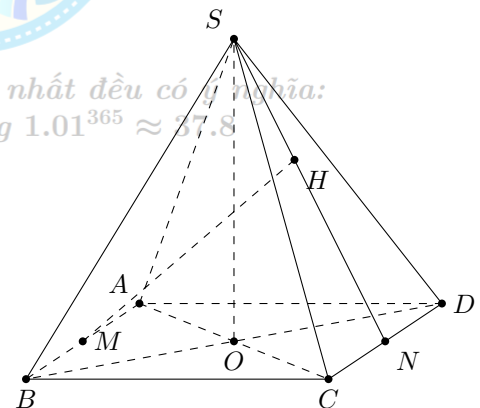
Hướng dẫn giải:

Vì $AB \parallel (SCD)$ nên $d(AB, SC) = d(AB, (SCD)) = d(M, (SCD))$, trong đó M là trung điểm của AB .

Gọi N là trung điểm của CD và H là hình chiếu vuông góc của M trên (SCD) thì $H \in SN$. Tính được $SN =$

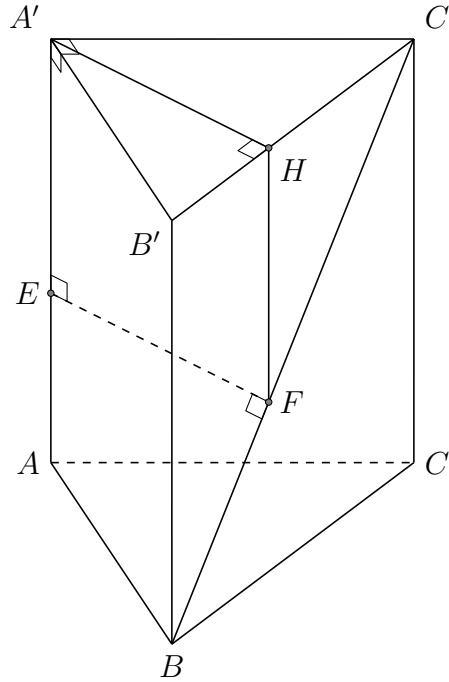
$$\sqrt{SO^2 + \frac{BC^2}{4}} = \frac{3}{2} \text{ và } S_{\triangle SMN} = \frac{1}{2}SO \cdot MN = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Do đó } d(AB, SC) = d(M, (SCD)) = MH = \frac{2S_{\triangle SMN}}{SN} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$



Ví dụ 31. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AB = a$, $AC = 2a$; cạnh bên $AA' = 2a$. Hãy dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng BC' và AA' .

🍏 **Hướng dẫn giải:**



Ta có $AA' \parallel BB' \Rightarrow AA' \parallel (BB'C'C)$.

Vì $(A'B'C') \perp (BB'C'C)$ theo giao tuyến $B'C'$ nên trong mặt phẳng $(A'B'C')$, kẻ $A'H \perp B'C'$ tại H , ta có: $A'H \perp (BB'C'C) \Rightarrow A'H \perp BC'$.

Trong mặt phẳng $(BB'C'C)$, kẻ $HF \parallel AA'$ ($F \in BC'$). Trong mặt phẳng (HF, AA') , kẻ $FE \parallel A'H$ ($E \in AA'$) $\Rightarrow FE \perp BC'$.

Ta có $AA' \perp (A'B'C') \Rightarrow AA' \perp A'H \Rightarrow AA' \perp FE$.

Do đó EF là đoạn vuông góc chung của AA' và BC' .

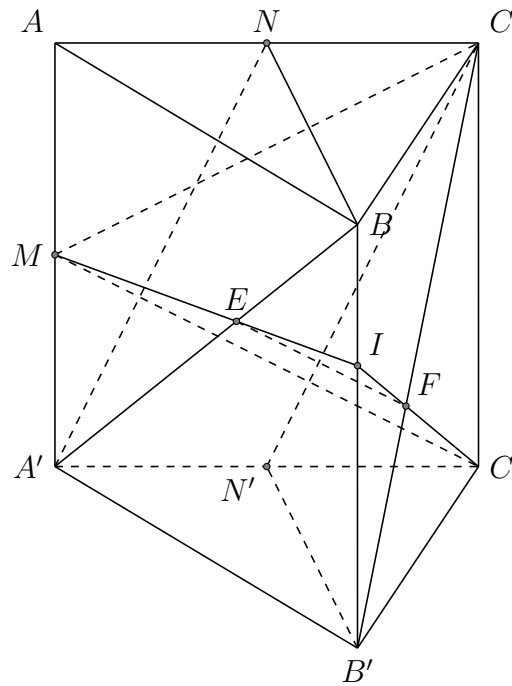
Trong tam giác vuông $A'B'C'$ ta có: $\frac{1}{A'H^2} = \frac{1}{A'B'^2} + \frac{1}{A'C'^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{5}{4a^2}$.

Suy ra $EF = A'H = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Vậy $d(AA', BC') = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Ví dụ 32. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Xác định đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$.

🍏 **Hướng dẫn giải:**



Gọi M, N, N' lần lượt là trung điểm của $AA', AC, A'C'$.

Ta có $\begin{cases} BN \perp AC \\ BN \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BN \perp (ACC'A') \Rightarrow BN \perp C'M.$

Mà $C'M \perp A'N$ nên $C'M \perp (A'BN)$. Do đó $C'M \perp A'B$.

Tương tự ta có $C'M \perp (B'N'C) \Rightarrow C'M \perp CB'.$

Vậy ta có đường thẳng $C'M$ vuông góc với cả hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$.

Lấy điểm I thuộc BB' . Gọi E là giao điểm của MI và $A'B$; F là giao điểm của IC' và $B'C$.

Ta cần tìm vị trí của I để $EF \parallel C'M$.

Ta có $EF \parallel C'M \Leftrightarrow \frac{IE}{ME} = \frac{FI}{FC'} \Leftrightarrow \frac{BI}{MA'} = \frac{IB'}{CC'}.$

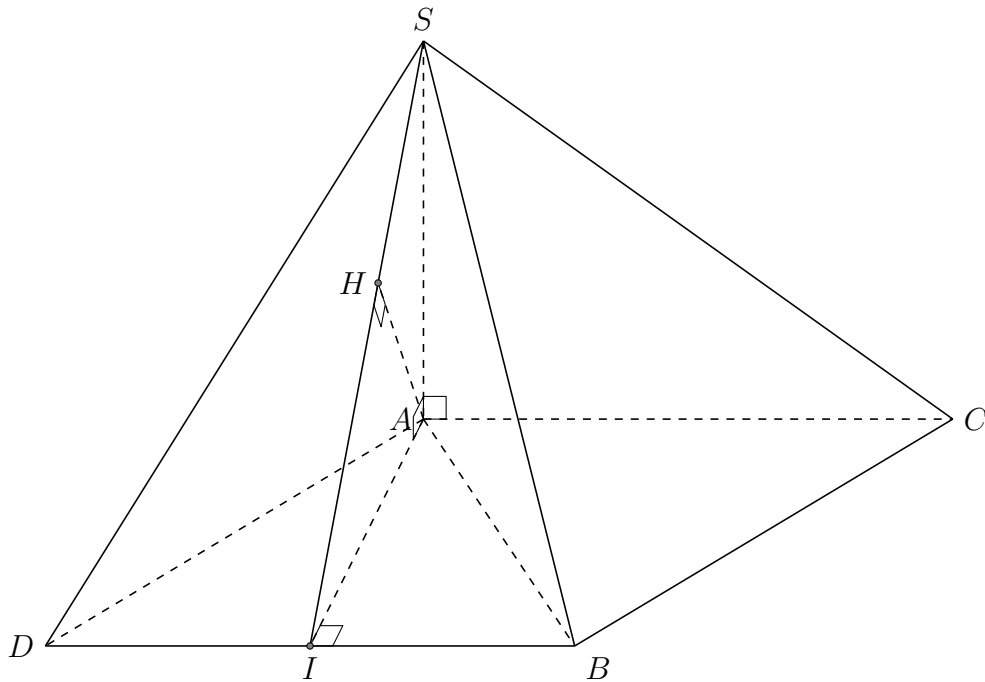
Do $CC' = 2MA'$ nên $\frac{BI}{MA'} = \frac{IB'}{CC'} \Leftrightarrow IB' = 2BI.$

Vậy I là điểm thuộc đoạn BB' sao cho $IB' = 2BI$ thì EF là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$ với E là giao điểm của MI và $A'B$; F là giao điểm của IC' và $B'C$.

Ví dụ 33. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a . $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC .

🍏 **Hướng dẫn giải:**

Mọi sự nỗ lực dù là nhỏ nhất đều có ý nghĩa:
 $0.99^{365} \approx 0.03$ nhưng $1.01^{365} \approx 37.8$



Trong mặt phẳng (ABC) , dựng hình thoi $ACBD$, ta có: $BD \parallel AC \Rightarrow AC \parallel (SBD)$.

$\Rightarrow d(AC, SB) = d(AC, (SBD)) = d(A, (SBD))$.

Gọi I là trung điểm của BD , ta có: $BD \perp AI$ và $BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SAI)$.

$\Rightarrow (SBD) \perp (SAI)$ theo giao tuyến SI .

Trong mặt phẳng (SAI) , kẻ $AH \perp SI$ tại H , ta có: $AH \perp (SBD) \Rightarrow AH = d(A, (SBD))$.

Tam giác SAI vuông tại A có đường cao AH .

$$\Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{19}{12a^2}.$$

$$\Rightarrow AH^2 = \frac{12a^2}{19} \text{ hay } AH = \frac{2a\sqrt{57}}{19}.$$

$$\text{Vậy } d(SB, AC) = \frac{2a\sqrt{57}}{19}.$$

Ví dụ 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a , SA vuông góc với đáy và $SA = a$. M là trung điểm của SB . Tính khoảng cách giữa các đường thẳng:

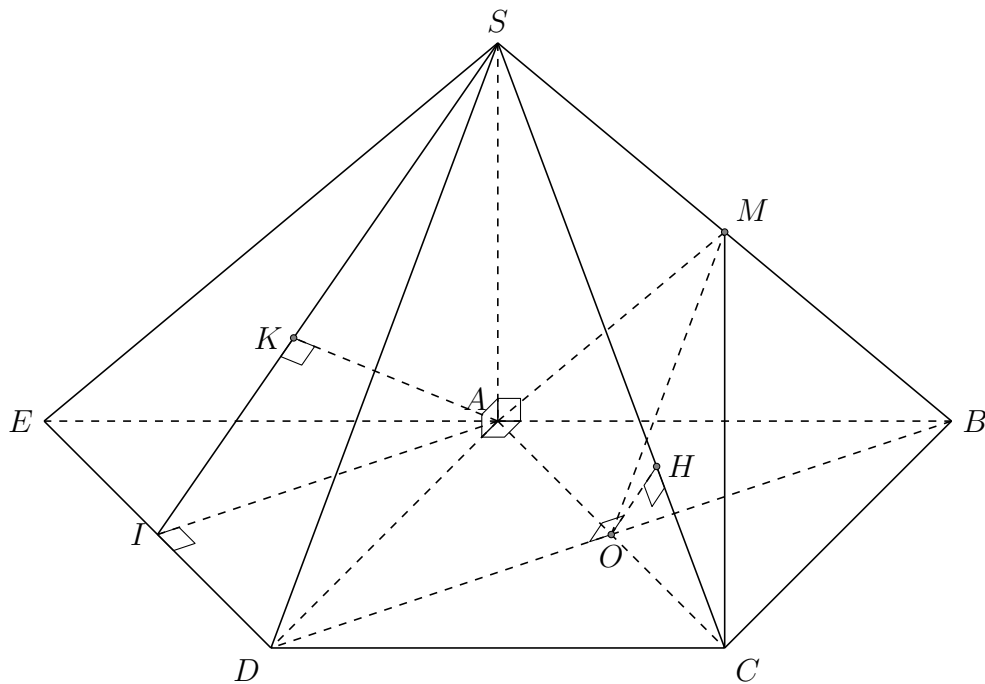
a) SC và BD .

b) AC và SD .

c) SD và AM .

🍏 **Hướng dẫn giải:**

Mọi sự nỗ lực dù là nhỏ nhất đều có ý nghĩa:
 $0.99^{365} \approx 0.03$ nhưng $1.01^{365} \approx 37.8$



- a) Gọi O là giao điểm của AC và BD . Ta có:
$$\begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \text{ tại } O.$$

Trong mặt phẳng (SAC) , kẻ $OH \perp SC$ tại H , ta có $OH \perp SC$ và $OH \perp BD$ (vì $BD \perp (SAC)$).
 Vậy OH là đoạn vuông góc chung của BD và SC .

$$\text{Ta có } \frac{OH}{OC} = \frac{SA}{SC} = \sin \widehat{ACS} \Rightarrow OH = \frac{OC \cdot SA}{SC} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

$$\text{Vậy } d(SC, BD) = OH = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

- b) dựng hình bình hành $ACDE$, ta có: $AC \parallel DE \Rightarrow AC \parallel (SDE)$.
 $\Rightarrow d(AC, SD) = d(AC, (SDE)) = d(A, (SDE)).$

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, kẻ $AI \perp DE$ tại I , ta có:
$$\begin{cases} DE \perp AI \\ DE \perp SA \end{cases} \Rightarrow DE \perp (SAI).$$

$\Rightarrow (SDE) \perp (SAI)$ theo giao tuyến SI .

Trong mặt phẳng (SAI) , kẻ $AK \perp SI$ tại K , ta có: $AK \perp (SDE) \Rightarrow AK = d(A, (SDE)).$

Ta có $AIDO$ là hình bình hành nên $AI = OD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Trong tam giác vuông SAI ta có: $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AI^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{2}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{a^2}.$

$$\text{Suy ra } AK = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Vậy } d(AC, SD) = d(A, (SDE)) = AK = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

- c) Ta có $OM \parallel SD$ và $AC \parallel DE$ nên $(AMC) \parallel (SDE)$.

$$\text{Suy ra } d(SD, AM) = d((AMC), (SDE)) = d(A, (SDE)) = AK = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Mọi sự nỗ lực dù là nhỏ nhất đều có ý nghĩa:

$0.99^{365} \approx 0.03$ nhưng $1.01^{365} \approx 37.8$

2.5 Một số bài toán áp dụng phương pháp tọa độ trong không gian

Ví dụ 35 (Thi thử Lần 1, THPT Ninh Bình - Bạc Liêu, Ninh Bình, 2019). Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a . M là trung điểm của AA' . Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng MB' và BC .

- A. $\frac{a}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. D. a .

Hướng dẫn giải:

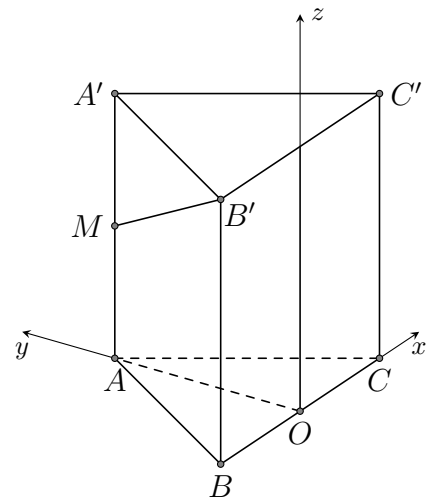
Cách 1:

Đặt $b = \frac{a}{2}$. Gọi O, O' lần lượt là trung điểm $BC, B'C'$.

Chọn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ, ta có $O(0; 0; 0)$, $B(-b; 0; 0)$, $C(b; 0; 0)$, $B'(-b; 0; 2b)$, $M(0; b\sqrt{3}; b)$, $\overrightarrow{BC} = (2b; 0; 0)$, $\overrightarrow{MB'} = (-b; -b\sqrt{3}; -b)$, $\overrightarrow{CB'} = (-2b; 0; 2b)$.

Khoảng cách giữa MB' và BC là

$$d(MB', BC) = \frac{|\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{MB'}|}{|\overrightarrow{BC}|} = b\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$



Cách 2:

Do $BC \parallel B'C'$ nên

$$d(MB', BC) = d(BC, (MB'C')) = d(B, (MB'C')).$$

Gọi $E = MB' \cap A'B$. Ta có $\frac{BE}{AE} = \frac{BB'}{AM} = 2$.

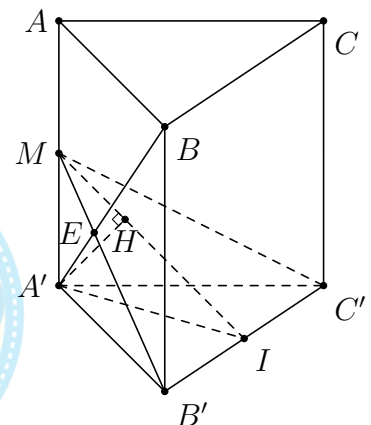
Nên $d(B, (MB'C')) = 2d(A', (MB'C'))$.

Kẻ $A'H \perp MI$ suy ra $A'H \perp (MB'C')$.

Do đó

$$\begin{aligned} d(A', (MB'C')) &= A'H = \frac{A'I \cdot A'M}{\sqrt{A'I^2 + A'M^2}} \\ &= \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{2}}{\sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{4}}} = \frac{a\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } d(MB', BC) = 2A'H = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$



Mọi sự nỗ lực dù là nhỏ nhất đều có ý nghĩa:
 $\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{2} \approx 0.03$ nhưng $1.01^{365} \approx 37.8$

Ví dụ 36 (Thi thử, Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An, 2019-L1). Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(BC'D)$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\sqrt{3}$.

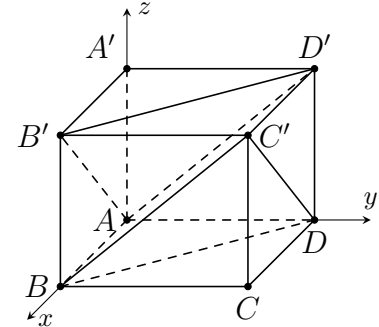
Hướng dẫn giải:

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Ta có $A(0; 0; 0), B(2; 0; 0), C(2; 2; 0), D(0; 2; 0)$.

$A'(0; 0; 2), B'(2; 0; 2), C'(2; 2; 2), D'(0; 2; 2)$.

Mặt phẳng $(AB'D')$ qua A và có một véc-tơ pháp tuyến là $-\frac{1}{4} [\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AD'}] = (1; 1; -1)$ nên có phương trình $x + y - z = 0$.



Mặt phẳng $(BC'D)$ qua B và có một véc-tơ pháp tuyến là $-\frac{1}{4} [\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{BD}] = (1; 1; -1)$ nên có phương trình $x + y - z - 2 = 0$.

Ta có $(AB'D') \parallel (BC'D)$ nên

$$d((AB'D'), (BC'D)) = d(A, (BC'D)) = \frac{|-2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Ví dụ 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, tam giác SAB đều, góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ bằng 60° . Gọi M là trung điểm của cạnh AB . Biết rằng hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ nằm trong hình vuông $ABCD$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và AC là

- A. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. B. $\frac{a\sqrt{5}}{10}$. C. $\frac{3a\sqrt{5}}{10}$. D. $\frac{5a\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi I là trung điểm cạnh CD , khi đó $\begin{cases} AB \perp SM \\ AB \perp MI \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SMI)$.

Do $CD \parallel AB$ nên $CD \perp (SMI) \Rightarrow ((SCD), (ABCD)) = \widehat{SIM}$

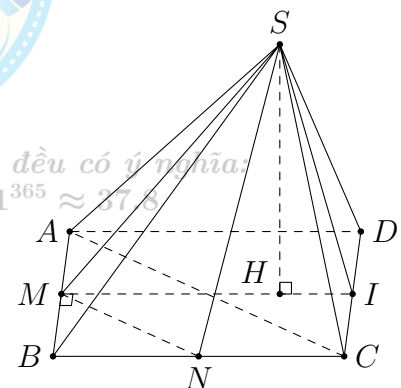
Vẽ $SH \perp MI$ tại $H \in MI$ thì $SH \perp (ABCD)$.

$\triangle SMI$ có $SM^2 = MI^2 + SI^2 - 2MI \cdot SI \cos \widehat{SIM}$

$$\Leftrightarrow 3a^2 = 4a^2 + SI^2 - 2aSI$$

$$\Leftrightarrow SI^2 - 2aSI + a^2 = 0 \Leftrightarrow SI = a.$$

Cách 1:



Theo định lý Pythagore đảo thì $\triangle SMI$ vuông tại $S \Rightarrow SH = \frac{SM \cdot SI}{MI} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi N là trung điểm cạnh BC ta có $AC \parallel MN$

$$\Rightarrow d(AC, SM) = d(AC, (SMN)) = d(C, (SMN)) = \frac{3V_{SMNC}}{S_{\triangle SMN}}.$$

$$\text{Ta có } V_{SMNC} = V_{S.MNB} = \frac{1}{3}SH \cdot \frac{1}{2}BM \cdot BN = \frac{1}{6} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a \cdot a = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$

$$\text{Tam giác } SIC \text{ có } SC = \sqrt{SI^2 + IC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Tam giác } SBC \text{ có } SN^2 = \frac{SB^2 + SC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = 2a^2 \Rightarrow SN = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Tam giác } SMN \text{ có nửa chu vi } p = \frac{SM + SN + MN}{2} = \frac{a\sqrt{3} + a\sqrt{2} + a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Và diện tích } \triangle SMN \text{ là } S_{\triangle SMN} = \sqrt{p(p-SM)(p-SN)(p-BC)} = \frac{a^2\sqrt{15}}{4}.$$

$$\text{Vậy } d(AC, SM) = \frac{3V_{SMNC}}{S_{\triangle SMN}} = \frac{3 \cdot \frac{a^3\sqrt{3}}{12}}{\frac{a^2\sqrt{15}}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

Cách 2:

Ta thấy $SM^2 + SI^2 = MI^2$ nên $\triangle SMI$ vuông tại S . Suy ra $SH = \frac{SM \cdot SI}{MI} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $HM = \frac{3a}{2}$.

Gọi $O = AC \cap BD$; N là trung điểm cạnh BC ta có $AC \parallel (SMN)$.

$$\text{Do đó, } d(AC, SM) = d(AC, (SMN)) = d(O, (SMN)) = \frac{2}{3}d(H, (SMN)).$$

$$\text{Gọi } K \text{ là hình chiếu của } H \text{ lên } MN, \text{ ta có } \triangle HKM \text{ vuông cân tại } K \text{ nên } HK = \frac{HM}{\sqrt{2}} = \frac{3a\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Vậy } d(AC, SM) = \frac{2}{3} \frac{SH \cdot HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

Tổng Ôn

GÓC VÀ KHOẢNG CÁCH

Hướng Tới Kỳ Thi THPTQG 2019

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều với $AB = BC = CD = a$, $AD = 2a$. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a$. Tính góc tạo bởi hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$.

- A. 45° . B. 30° . C. 60° . D. 75° .

(Đề thi thử THPT Hai Bà Trưng, Huế, Lần 2 - 2019)

Câu 2. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60° . Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) .

- A. a . B. $a\sqrt{3}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{a}{2}$.

(Đề thi thử THPT Hai Bà Trưng, Huế, Lần 2 - 2019)

Câu 3. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = OC$. Gọi M là trung điểm của BC . Góc giữa hai đường thẳng OM và AB bằng

- A. 90° . B. 30° . C. 60° . D. 45° .

(Đề tập huấn, Sở GD và ĐT - Vĩnh Phúc, 2019)

Câu 4. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Xác định độ dài đoạn thẳng MN để góc giữa hai đường thẳng AB và MN bằng 30° .

- A. $MN = \frac{a}{2}$. B. $MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $MN = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $MN = \frac{a}{4}$.

(Đề tập huấn, Sở GD và ĐT - Vĩnh Phúc, 2019)

Câu 5. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.MNP$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi I là trung điểm cạnh MP . Cô-sin của góc giữa hai đường thẳng BP và NI bằng

- A. $\frac{\sqrt{15}}{5}$. B. $\frac{\sqrt{6}}{4}$. C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{10}}{4}$.

(Thi thử, Sở GD và ĐT - Hà Tĩnh, 2019)

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và SA vuông góc với mặt đáy. Biết $SA = a$, $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$. Gọi I là trung điểm của BC . Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AI và SC .

- A. $-\sqrt{\frac{2}{3}}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\sqrt{\frac{2}{3}}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{8}$.

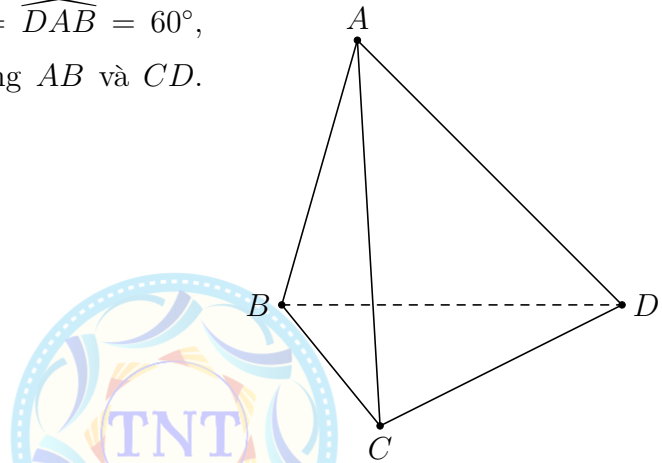
(THPT Đội Càn, Vĩnh Phúc, 2019)

Câu 7.

Cho tứ diện $ABCD$ với $AC = \frac{3}{2}AD$, $\widehat{CAB} = \widehat{DAB} = 60^\circ$, $CD = AD$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng AB và CD .

Chọn khẳng định đúng về góc φ .

- A. $\cos \varphi = \frac{3}{4}$. B. $\varphi = 30^\circ$.
C. $\varphi = 60^\circ$. D. $\cos \varphi = \frac{1}{4}$.



(Thi thử, Chuyên Lê Quý Đôn - Điện Biên, 2019)

Câu 8. Cho khối chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Cosin của góc giữa hai đường thẳng SB và AC là

- A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. C. $\frac{\sqrt{5}}{4}$. D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(THPT Lê Văn Hưu, Thanh Hóa, 2019)

Câu 9. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Biết $MN = \sqrt{3}a$, góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

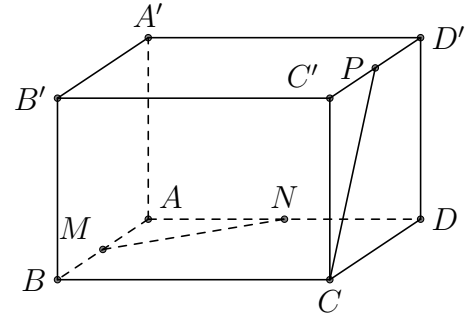
- A. 45° . B. 90° . C. 60° . D. 30° .

(Thi thử, THPT chuyên KHTN Hà Nội, 2019)

Câu 10.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AD và $C'D'$. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng MN và CP .

- A. $\frac{\sqrt{10}}{5}$. B. $\frac{\sqrt{15}}{5}$. C. $\frac{1}{\sqrt{10}}$. D. $\frac{3}{\sqrt{10}}$.



(Đề tập huấn Sở Ninh Bình, 2019)

Câu 11. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a , độ dài cạnh bên cũng bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh SA và BC . Góc giữa MN và SC bằng

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

(Thi thử, Toán học tuổi trẻ, 2019-2)

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh bằng a , $SA = a$ vuông góc với mặt phẳng đáy. Tang của góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng (SAB) bằng

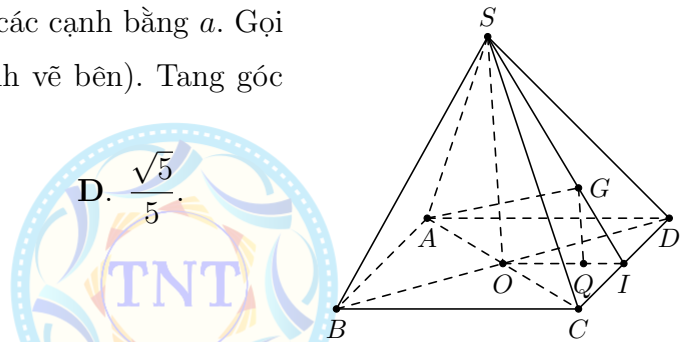
- A. $\sqrt{2}$. B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. C. $\sqrt{5}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(Thi thử lần I, Sở GD&ĐT Sơn La 2019)

Câu 13.

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ với tất cả các cạnh bằng a . Gọi G là trọng tâm tam giác SCD (tham khảo hình vẽ bên). Tang góc giữa AG và $(ABCD)$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{17}}{7}$. B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$. C. $\sqrt{17}$. D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.



(Đề tập huấn số 2, Sở GD và ĐT Quảng Ninh, 2019)

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh bằng a , $SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tan của góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng (SAB) bằng

- A. $\sqrt{2}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $\sqrt{5}$. D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(Thi thử, Chuyên Sơn La, 2018)

Câu 15. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng bao nhiêu?

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

(Đề Tập Huấn -4, Sở GD và ĐT - Hải Phòng, 2019)

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SBC) . Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{7}}{7}$. B. $\tan \varphi = \frac{1}{7}$. C. $\tan \varphi = \sqrt{7}$. D. $\tan \varphi = -\frac{\sqrt{7}}{7}$.

(Tập huấn, Sở GD và ĐT - Bắc Giang, 2019)

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là α . Khi đó $\tan \alpha$ bằng

- A. $\sqrt{2}$. B. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. C. 1. D. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(Thi thử, Sở GD và ĐT - Hà Tĩnh, 2019)

Câu 18. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng $2a$. Gọi M là trung điểm của SD . Tính $\tan$ của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$.

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{1}{3}$.

(Thi thử, Sở GD và ĐT - Vĩnh Phúc, 2018)

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Gọi I là trung điểm của AB . Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- A. Góc giữa SC và mp $(ABCD)$ là góc SCI . B. SI vuông góc với mp $(ABCD)$.
C. Góc giữa SC và mp $(ABCD)$ là góc SCA . D. Góc giữa SB và mp $(ABCD)$ là góc SBA .

(Thi thử L1, THPT Yên Dũng-Bắc Giang, 2018)

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Tìm số đo của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAD) .

- A. 45° . B. 30° . C. 90° . D. 60° .

(Thi thử L1, Quảng Xương I, 2019)

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H , K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB , AD . Tính $\sin$ của góc tạo bởi đường thẳng SA và (SHK) .

- A. $\frac{\sqrt{7}}{4}$. B. $\frac{\sqrt{14}}{4}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(GHK2, Hội 8 trường Chuyên, 2019)

Câu 22. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = a$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$, cạnh bên $BB' = a$, gọi I là trung điểm của CC' . Côsin của góc tạo bởi mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{20}}{10}$. B. $\frac{\sqrt{30}}{5}$. C. $\sqrt{30}$. D. $\frac{\sqrt{30}}{10}$.

(Thi thử lần I, Sở GD&ĐT Sơn La 2019)

Câu 23. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = AD = BC = BD = a$, $CD = 2x$, $(ACD) \perp (BCD)$. Tìm giá trị của x để $(ABC) \perp (ABD)$.

- A. $x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $x = a\sqrt{2}$. C. $x = a$. D. $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

(KSCL, Sở GD và ĐT - Thanh Hóa, 2018)

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm I , cạnh a , góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$. $SA = SB = SD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi α là góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SBC) . Giá trị $\sin \alpha$ bằng

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$. D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

(Thi thử, Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An, 2019-L1)

Câu 25. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy và cạnh bên đều bằng a . Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) .

- A. $-\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. D. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

(Đề tập huấn Sở Ninh Bình, 2019)

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A . Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Biết $AB = 2AD = 2DC = 2a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) là

- A. $\frac{\pi}{3}$. B. $\frac{\pi}{4}$. C. $\frac{\pi}{6}$. D. $\frac{\pi}{12}$.

(Đề kiểm tra định kì lần 3, Chuyên Bắc Ninh, 2018-2019)

Câu 27. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'C)$ và $(C'D'A)$.

- A. 45° . B. 30° . C. 60° . D. 90° .

Mọi sự nỗ lực dù là nhỏ nhất đều có ý nghĩa:
 (THPT Chuyên Quang Trung - Bình Phước - Lần 2, 2018-2019)

Câu 28. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , chiều cao của hình chóp bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng

- A. 60° . B. 75° . C. 30° . D. 45° .

(Thi thử Lần 1, THPT Tứ Kỳ, Hải Dương, 2019)

Câu 29. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Số đo góc giữa hai mặt phẳng $(BA'C)$ và $(DA'C)$ bằng

- A. 120° . B. 60° . C. 90° . D. 30° .

(GHK2, THPT Yên Định 2 - Thanh Hóa, 2019)

Câu 30. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $BC = a$, $BB' = a\sqrt{3}$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'C)$ và $(ABC'D')$ bằng

- A. 60° . B. 30° . C. 45° . D. 90° .

(Thi thử L3, Chuyên Quang Trung - Bình Phước, 2019)

Câu 31. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các đường thẳng AA', BB', CC' thỏa mãn diện tích của tam giác MNP bằng a^2 . Góc giữa hai mặt phẳng (MNP) và $(ABCD)$ là

- A. 60° . B. 30° . C. 45° . D. 120° .

(Thi thử L1, THPT Chuyên ĐHSPT Hà Nội, 2019)

Câu 32. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có diện tích tam giác ABC bằng $2\sqrt{3}$. Gọi M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AA', BB', CC' , diện tích tam giác MNP bằng 4. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (MNP) .

- A. 120° . B. 45° . C. 30° . D. 90° .

(Hàm Rồng, Thanh Hóa, năm 2019)

Câu 33. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và $(A'CD)$.

- A. 90° . B. 120° . C. 60° . D. 45° .

(Đề KSCL Quỳnh Lưu 1, Nghệ An, năm 2019, Lần 1)

Câu 34. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bên bằng $2a$, cạnh đáy bằng a . Gọi α là góc giữa hai mặt bên của hình chóp đó. Hãy tính $\cos \alpha$.

- A. $\cos \alpha = \frac{8}{15}$. B. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\cos \alpha = \frac{7}{15}$. D. $\cos \alpha = \frac{1}{2}$.

(KSCL Lần 1 Trường THPT Cộng Hiền - Hải Phòng, năm 2018 - 2019)

Mọi sự nỗ lực dù là nhỏ nhất đều có ý nghĩa:

Câu 35. Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $AC = 2AA' = 2a\sqrt{3}$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(C'BD)$ bằng

- A. 90° . B. 60° . C. 45° . D. 30° .

(Thi thử L1, THPT Hậu Lộc 2, Thanh Hóa, 2019)

Câu 36. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $\sqrt{3}$. Mặt phẳng (α) song song với AB và cắt tất cả các cạnh bên của hình lập phương. Tính diện tích thiết diện của hình lập phương cắt bởi mặt phẳng (α) biết (α) tạo với mặt $(ABB'A')$ một góc 60° .

- A. $2\sqrt{3}$. B. $\frac{3}{2}$. C. 6. D. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

(Thi thử lần 1, THPT Thăng Long - Hà Nội, 2019)

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại đỉnh B , $AB = a$, $SA = 2a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi H , K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB , SC . Diện tích của tam giác AHK bằng

- A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a^2\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{2\sqrt{6}a^2}{15}$. D. $\frac{2a^2\sqrt{3}}{3}$.

(Thi thử L1, THPT Yên Dũng-Bắc Giang, 2018)

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình thang vuông tại A và B , biết $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA = a\sqrt{3}$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của SB và SA . Tính khoảng cách từ M đến (NCD) theo a .

- A. $\frac{a\sqrt{66}}{22}$. B. $2a\sqrt{66}$. C. $\frac{a\sqrt{66}}{11}$. D. $\frac{a\sqrt{66}}{44}$.

(DTH, Sở GD và ĐT - Hà Nam, 2019)

Câu 39. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh a . Góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 60° . Khoảng cách từ đỉnh S đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

- A. $a\sqrt{2}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. a .

(Thi tập huấn, Sở GD và ĐT - Bắc Ninh, 2019)

Câu 40. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a . Góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 60° . Khoảng cách từ đỉnh S đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

- A. $a\sqrt{2}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. a .

(Tập huấn SGD Bắc Ninh, 2019)

Câu 41. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách h từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) .

- A. $h = \frac{a\sqrt{21}}{7}$. B. $h = a$. C. $h = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. D. $h = \frac{a\sqrt{3}}{7}$.

Mọi sự nỗ lực đều có kết quả nhất định.
 $0.99^{365} \approx 0.03$ nhưng $1.01^{365} \approx 37.8$

(Đề tập huấn tỉnh Lai Châu, 2019)

Câu 42. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $SB \perp (ABC)$. Biết $SB = 3a$, $AB = 4a$, $BC = 2a$. Tính khoảng cách từ B đến (SAC) .

- A. $\frac{12\sqrt{61}a}{61}$. B. $\frac{3\sqrt{14}a}{14}$. C. $\frac{4a}{5}$. D. $\frac{12\sqrt{29}a}{29}$.

(Đề KSCL Toán 12 trường Nguyễn Trãi, Thanh Hoá, năm 2018, lần 1)

Câu 43. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, $AA' = 2a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và $A'C$.

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}a$. C. $a\sqrt{5}$. D. $\frac{2\sqrt{17}}{17}a$.

(KSCL lần 2, THPT Chuyên Vĩnh Phúc)

Câu 44. Cho tứ diện đều $ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng $2a$, gọi M là điểm thuộc cạnh AD sao cho $DM = 2MA$. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (BCD) .

- A. $\frac{2a\sqrt{6}}{9}$. B. $a\sqrt{6}$. C. $\frac{4a\sqrt{6}}{9}$. D. $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$.

(KSCL, THPT Nông Công I, Thanh Hóa, lần 1, 2019)

Câu 45. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng cạnh bên bằng a . Khoảng cách từ AD đến mặt phẳng (SBC) bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. B. $\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}}$. C. $\frac{3a}{2}$. D. $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

(KSCL lần 1, Lưu Đình Chất - Thanh Hóa, 2019)

Câu 46. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

- A. $\frac{2a\sqrt{3}}{19}$. B. $\frac{2a\sqrt{57}}{19}$. C. $\frac{2a\sqrt{38}}{19}$. D. $\frac{a\sqrt{57}}{19}$.

(Đề KSCL, Chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa năm 2018-2019)

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B , $2SA = AC = 2a$ và SA vuông góc với đáy. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

- A. $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$. B. $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

(Thử sức trước kì thi - THPT, 2019)

Câu 48. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

- A. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. B. $a\sqrt{3}$. C. $\frac{a}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

(Thi thử L1, Quảng Xương I, 2019)

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết góc $\widehat{BAC} = 30^\circ$, $SA = a$ và $BA = BC = a$. Gọi D là điểm đối xứng với B qua AC . Khoảng cách từ B đến mặt (SCD) bằng

- A. $\frac{\sqrt{21}}{7}a$. B. $\frac{\sqrt{2}}{2}a$. C. $\frac{2\sqrt{21}}{7}a$. D. $\frac{\sqrt{21}}{14}a$.

(Thi thử L3, Chuyên Quang Trung - Bình Phước, 2019)

Câu 50. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng $3a$. Điểm H thuộc cạnh AC với $HC = a$. Dựng đoạn thẳng SH vuông góc với mặt phẳng (ABC) với $SH = 2a$. Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB) bằng

- A. $\frac{3a}{7}$. B. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. C. $\frac{3a\sqrt{21}}{7}$. D. $3a$.

(THPT Chuyên Thái Nguyên - Lần 1)

Câu 51. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính $AD = 2a$, SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi H là hình chiếu của A trên SB . Khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD) bằng

- A. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. B. $\frac{3a\sqrt{6}}{8}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. D. $\frac{3a\sqrt{6}}{16}$.

(Thi thử L1, THPT Hậu Lộc 2, Thanh Hoá, 2019)

Câu 52. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a . Tính khoảng cách giữa SC và AB biết rằng $SO = a$ và vuông góc với mặt đáy của hình chóp.

- A. a . B. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. C. $\frac{2a}{5}$. D. $\frac{2a}{\sqrt{5}}$.

(De tap huan, So GD&DT Dien Bien, 2019)

Câu 53. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a , SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SO = a$. Khoảng cách giữa SC và AB bằng

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{15}$. B. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. C. $\frac{2a\sqrt{3}}{15}$. D. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

(DTH, Sở GD và ĐT - Hà Nam, 2019)

Câu 54. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AB = 6$, $BC = 8$, $AC = 10$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SA và BC .

- A. $d = 0$. B. $d = 8$. C. $d = 10$. D. $d = 6$.

(Tập Huấn - Ninh Bình-2019)

Câu 55. Cho tứ diện $OABC$ có OA , OB , OC đôi một vuông góc và đều bằng a . Khoảng cách giữa hai đường thẳng OA và BC bằng

- A. a . B. $a\sqrt{2}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

(Thi thử, Chuyên Sơn La, 2018)

Câu 56. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có độ dài cạnh đáy bằng a , độ dài cạnh bên bằng $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC .

- A. a . B. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

(Đề tập huấn, Sở GD và ĐT - Quảng Trị, 2018)

Câu 57. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , mặt bên SBC là tam giác đều cạnh a và mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt đáy. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng SA, BC được kết quả

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

(Thi thử, Lào Cai - Phú Thọ, 2019)

Câu 58. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng 4. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

- A. $2\sqrt{2}$. B. 2. C. 3. D. $2\sqrt{3}$.

(Thi thử, Sở GD và ĐT - Hà Tĩnh, 2019)

Câu 59. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, có tất cả các cạnh đều bằng a . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SB .

- A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

(Thi KSCL, M.V. Lômônôxốp Hà Nội, 2019)

Câu 60. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Góc giữa SC và mặt đáy là 45° . Gọi E là trung điểm của BC . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DE và SC .

- A. $\frac{a\sqrt{5}}{19}$. B. $\frac{a\sqrt{38}}{19}$. C. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. D. $\frac{a\sqrt{38}}{5}$.

(Giữa HK1 THPT Hoàng Hóa 2 - Thanh Hóa - 19)

Câu 61. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thoi cạnh a , góc $\widehat{BAC} = 60^\circ$, tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Mặt phẳng (SCD) tạo với đáy góc 30° . Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SB và AD .

- A. $d = \frac{\sqrt{21}}{14}a$. B. $d = \frac{\sqrt{3}}{5}a$. C. $d = \frac{2\sqrt{3}}{5}a$. D. $d = \frac{\sqrt{21}}{7}a$.

(Thi thử L1, THPT Thuận Thành Bắc Ninh, 2019)

Câu 62. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A.A'B'D'$ là hình chóp đều, $A'B' = AA' = a$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và $A'C'$.

- A. $\frac{a\sqrt{22}}{22}$. B. $\frac{a\sqrt{11}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{22}}{11}$. D. $\frac{3a\sqrt{22}}{11}$.

Mọi sự (Thi thử, THPT Thiệu Hóa - Thanh Hóa, 2018)
 $0.99^{365} \approx 0.03$ nhưng $1.01^{365} \approx 37.8$

Câu 63. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Biết đáy ABC là tam giác vuông có $BA = BC = a$, gọi M là trung điểm của BC . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$.

- A. $d(AM, B'C) = \frac{a\sqrt{5}}{5}$. B. $d(AM, B'C) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.
 C. $d(AM, B'C) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. D. $d(AM, B'C) = \frac{a\sqrt{7}}{7}$.

(Thi thử, THPT Chuyên Thoại Ngọc Hầu - An Giang, 2018-2019)

Câu 64. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng 4. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Gọi M là trung điểm cạnh AC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng BM và $B'C$ bằng

- A. 2. B. $\sqrt{2}$. C. 1. D. $2\sqrt{2}$.

(THPT Đội Cấn, Vĩnh Phúc, 2018-2019)

Câu 65. Cho tứ diện đều $ABCD$ có các cạnh bằng a . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

(Thử sức trước kì thi - THPT, 2019)

Câu 66. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OC = 2a, OA = OB = a$. Gọi M là trung điểm của AB . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng OM và AC .

- A. $\frac{2a}{3}$. B. $\frac{2\sqrt{5}a}{5}$. C. $\frac{\sqrt{2}a}{3}$. D. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$.

(Chuyên Quang Trung, BìnhPhước, Lần2)

Câu 67. Cho hình trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A có $BC = 2a, AB = a\sqrt{3}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC là

- A. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{7}}{3}$.

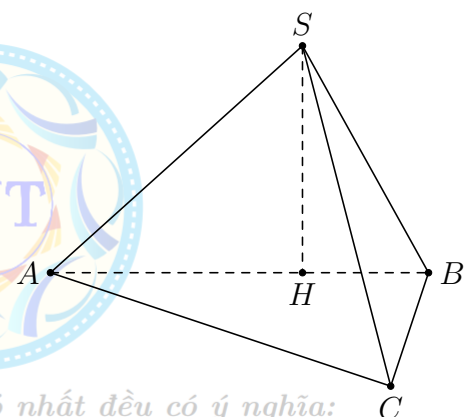
(Thi thử L1, Quảng Xương I, 2019)

Câu 68.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng 4, góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) là 45° . Hình chiếu của S lên (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$.

Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SA và BC .

- A. $d = \frac{4\sqrt{210}}{45}$. B. $d = \frac{\sqrt{210}}{5}$.
C. $d = \frac{4\sqrt{210}}{15}$. D. $d = \frac{2\sqrt{210}}{15}$.



Mọi sự nỗ lực dù là nhỏ nhất đều có ý nghĩa:

$0.99^{365} \approx 0.03$ nhưng $1.01^{365} \approx 37.8$

(Thi thử, Chuyên Lê Quý Đôn - Điện Biên, 2019)

Câu 69. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $BA = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$, M là trung điểm của BC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$ bằng

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. C. $\frac{a\sqrt{7}}{7}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

(GHK2, THPT Yên Định 2 - Thanh Hóa, 2019)

Câu 70. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông $BA = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$, M là trung điểm của BC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$ là

- A. $\frac{a\sqrt{7}}{7}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

(Thi thử, Hải Hậu A, 2019, lần 1)

Câu 71. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$. Biết các mặt bên của hình chóp cùng tạo với đáy các góc bằng nhau và thể tích của khối chóp bằng $\frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CD .

- A. $\sqrt{5}a$. B. $3\sqrt{2}a$. C. $\sqrt{2}a$. D. $\sqrt{3}a$.

(Thi thử L1, Hai Bà Trưng, Huế, 2019)

Câu 72. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường AC và SB bằng.

- A. $\frac{a}{2}$. B. $\frac{\sqrt{6}a}{2}$. C. $\frac{a}{3}$. D. $\frac{2a}{3}$.

(Đề thi thử THPT Gia Định - HCM, 2019)

Câu 73. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Mặt bên (SAB) là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC bằng

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. C. $\frac{a\sqrt{7}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{21}}{3}$.

(THPT Quảng Xương 1 - Thanh Hóa - 2019)

Câu 74. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình vuông với đường chéo $AC = 2a$, $SA \perp (ABCD)$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD là

- A. $\frac{a}{\sqrt{3}}$. B. $\frac{a}{\sqrt{2}}$. C. $a\sqrt{2}$. D. $a\sqrt{3}$.

(Thi thử, THPT Bạch Đằng - Quảng Ninh, 2019)

Câu 75. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và SD là

- A. a . B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

(Thi thử L1, THPT Chuyên ĐHSPT Hà Nội, 2019)

Câu 76. [Trương Quan Kía, 12EX10] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a , $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm SD . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CM .

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{3a}{4}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

(Thi thử, Trường THPT Yên Dũng 2, Bắc Giang-Lần 2-2019)

Câu 77. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh $2a$, cạnh bên $SA = a\sqrt{5}$. Khoảng cách giữa BD và SC là

- A. $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. B. $\frac{a\sqrt{30}}{5}$. C. $\frac{a\sqrt{15}}{6}$. D. $\frac{a\sqrt{30}}{6}$.

(Hàm Rồng, Thanh Hóa, năm 2019)

Câu 78. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau, $OA = a, OB = OC = 2a$. Gọi M là trung điểm của BC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng OM và AB bằng

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. C. a . D. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

(Thi thử, Triệu Quang Phục - Hưng Yên Lần 2, 2019)

Câu 79. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AC = a, BC = 2a, \widehat{ACB} = 120^\circ$. Gọi M là trung điểm của BB' . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và CC' theo a .

- A. $a\frac{\sqrt{3}}{7}$. B. $a\sqrt{3}$. C. $a\frac{\sqrt{7}}{7}$. D. $a\sqrt{\frac{3}{7}}$.

(Thi thử lần 1, Chuyên Lê Thánh Tông Quảng Nam, 2019)

Câu 80. Cho hình chóp $S.ABC$ đáy ABC là tam giác đều cạnh a , SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và CA . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và SN bằng

- A. $\frac{a}{4}$. B. $\frac{a}{\sqrt{17}}$. C. $\frac{a}{17}$. D. $\frac{a}{3}$.

(Thi thử, Toán học tuổi trẻ, 2019-2)

Câu 81. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AB = 6, BC = 8, AC = 10$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SA và BC .

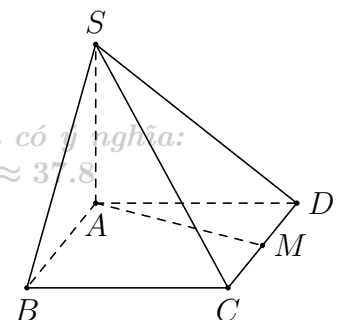
- A. $d = 0$. B. $d = 8$. C. $d = 10$. D. $d = 6$.

(Đề tập huấn Sở Ninh Bình, 2019)

Câu 82.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 2; cạnh $SA = 1$ và vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của CD . Tính $\cos \alpha$ với α là góc tạo bởi hai đường thẳng SB và AM .

- A. $\frac{2}{5}$. B. $-\frac{2}{5}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{4}{5}$.

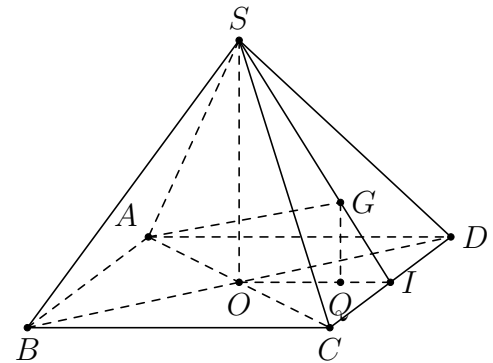


(Thi thử, Lý Thường Kiệt - Bắc Ninh, 2019)

Câu 83.

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ với tất cả các cạnh bằng a . Gọi G là trọng tâm tam giác SCD (tham khảo hình vẽ bên). Giá trị tan góc giữa AG và $(ABCD)$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{17}}{17}$. B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$. C. $\sqrt{17}$. D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.



(Đề tập huấn, Sở GD và ĐT - Quảng Ninh, 2019)

Câu 84. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a , $SA = SB = SD = a$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SCD) bằng

- A. 30° . B. 90° . C. 45° . D. 60° .

(GHK1, THPT Đội Cấn, Vĩnh Phúc, 2018-2019)

Câu 85. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân ($AD \parallel BC$), $BC = 2a$, $AB = AD = DC = a$ với $a > 0$. Gọi O là giao điểm của AC và BD . Biết SD vuông góc AC . M là một điểm thuộc đoạn OD ; $MD = x$ với $x > 0$. M khác O và D . Mặt phẳng (α) qua M và song song với hai đường thẳng SD và AC cắt khối chóp $S.ABCD$ theo một thiết diện. Tìm x để diện tích thiết diện là lớn nhất?

- A. $a\frac{\sqrt{3}}{4}$. B. $a\sqrt{3}$. C. $a\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. a .

(Thi thử lần 1, Chuyên Lê Thánh Tông Quảng Nam, 2019)

Câu 86. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SAB là tam giác đều và (SAB) vuông góc với $(ABCD)$. Tính $\cos \varphi$ với φ là góc tạo bởi (SAC) và (SCD) .

- A. $\frac{5}{7}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{7}$. C. $\frac{\sqrt{6}}{7}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{7}$.

(Thi thử lần 1, THPT Lương Thế Vinh - Hà Nội, 2019)

Câu 87. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SC \perp (ABC)$ và tam giác ABC vuông tại B . Biết $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, $SC = 2a\sqrt{6}$. Tính $\sin$ của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) .

- A. $\sqrt{\frac{2}{3}}$. B. $\frac{2}{\sqrt{13}}$. C. 1. D. $\sqrt{\frac{5}{7}}$.

(Đề tập huấn, Sở GD&ĐT Điện Biên, 2019)

Câu 88. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2\sqrt{3}$ và $AA' = 2$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $A'B'$, $A'C'$ và BC . Cô-sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (MNP) bằng

- A. $\frac{6\sqrt{13}}{65}$. B. $\frac{\sqrt{13}}{65}$. C. $\frac{17\sqrt{13}}{65}$. D. $\frac{18\sqrt{13}}{65}$.

(Đề tập huấn, Sở GD và ĐT - Vĩnh Phúc, 2019)

Câu 89. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, $AB = 3$, $AD = 4$, $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Cạnh bên $SA = 2\sqrt{3}$ vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh SA, AD và BC và α là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (MNP) . Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau đây.

- A. $\alpha \in (60^\circ; 90^\circ)$. B. $\alpha \in (0^\circ; 30^\circ)$. C. $\alpha \in (30^\circ; 45^\circ)$. D. $\alpha \in (45^\circ; 60^\circ)$.

(Thi thử L1, Quảng Xương I, 2019)

Câu 90. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 3a$, $AC = a\sqrt{15}$, $BD = a\sqrt{10}$, $CD = 4a$. Biết rằng góc giữa đường thẳng AD và mặt phẳng (BCD) bằng 45° , khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và BC bằng $\frac{5a}{4}$ và hình chiếu của A lên mặt phẳng (BCD) nằm trong tam giác BCD . Tính độ dài đoạn thẳng AD biết rằng $AD > a$.

- A. $\frac{5a\sqrt{2}}{4}$. B. $2a$. C. $2\sqrt{2}a$. D. $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

(KSCL, Sở GD và ĐT - Thanh Hóa, 2018)

Câu 91. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = 1$, $AC = 2$, $AA' = 3$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Gọi M, N lần lượt là các điểm trên cạnh BB', CC' sao cho $BM = 3B'M$, $CN = 2C'N$. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(A'BN)$.

- A. $\frac{9\sqrt{138}}{184}$. B. $\frac{3\sqrt{138}}{46}$. C. $\frac{9\sqrt{3}}{16\sqrt{46}}$. D. $\frac{9\sqrt{138}}{46}$.

(Đề tập huấn số 2, Sở GD và ĐT Quảng Ninh, 2019)

Câu 92. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, $AC = 2a$, $AA' = 2a\sqrt{5}$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Gọi K, I lần lượt là trung điểm của các cạnh CC', BB' . Khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng $(A'BK)$ bằng

- A. $a\sqrt{15}$. B. $\frac{a\sqrt{5}}{6}$. C. $\frac{a\sqrt{15}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{5}}{3}$.

(Thi thử Lần 1, THPT Tứ Kỳ, Hải Dương, 2019)

Câu 93. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và $B'C'$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và $B'D'$ bằng

- A. $a\sqrt{5}$. B. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. C. $3a$. D. $\frac{a}{3}$.

(Thi thử, Sở GD và ĐT - Lạng Sơn, 2019)

Câu 94. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{6}$, khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng $\frac{3a}{2}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

- A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{8}$. C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

(Đề tập huấn Sở Ninh Bình, 2019)

Câu 95. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$, SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết rằng diện tích mặt cầu ngoại tiếp của khối chóp $S.ABCD$ là 4π . Khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và AC gần với giá trị nào sau đây nhất?

- A. $\frac{2}{7}$. B. $\frac{3}{7}$. C. $\frac{6}{7}$. D. $\frac{4}{7}$.

(Hải Phòng, 2018)

Câu 96. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và DD' . Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và BD .

- A. $\sqrt{3}a$. B. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}a}{3}$. D. $\frac{\sqrt{3}a}{6}$.

(THPT Nguyễn Huệ, Vĩnh Phúc, 2019)

Câu 97. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết rằng diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ là 4π . Khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và AC gần với giá trị nào nhất sau đây?

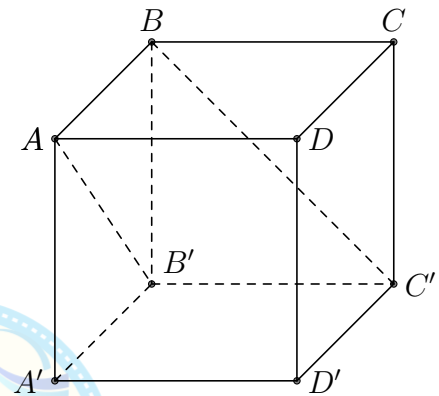
- A. $\frac{2}{7}$ dm. B. $\frac{3}{7}$ dm. C. $\frac{4}{7}$ dm. D. $\frac{6}{7}$ dm.

(Đề Tập Huấn -4, Sở GD và ĐT - Hải Phòng, 2019)

Câu 98.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $a\sqrt{3}$. D. $a\sqrt{2}$.

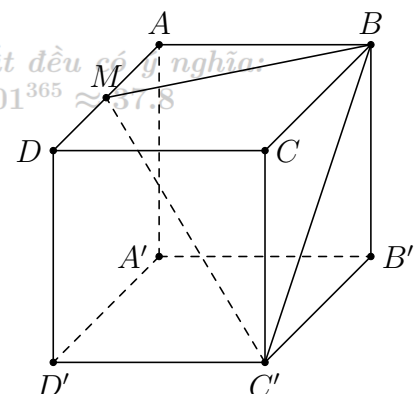


(KSCL Lần 1 Trường THPT Cộng Hiền - Hải Phòng - 2019)

Câu 99. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm của AD , ϕ là góc giữa hai mặt phẳng (BMC') và $(ABB'A')$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $\cos \phi = \frac{3}{4}$.
B. $\cos \phi = \frac{5}{4}$.
C. $\cos \phi = \frac{1}{3}$.
D. $\cos \phi = \frac{2}{3}$.

Mọi sự nỗ lực dù là nhỏ nhất đều có ý nghĩa:
 $0.99^{365} \approx 0.03$ nhưng $1.01^{365} \approx 37.8$



(THPT Nghèn - Hà Tĩnh, 2019)

DÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. B	2. B	3. C	4. B	5. B	6. C	7. D	8. B	9. C	10. C
11. A	12. B	13. A	14. D	15. C	16. A	17. D	18. D	19. C	20. B
21. C	22. D	23. A	24. C	25. B	26. A	27. D	28. A	29. B	30. A
31. A	32. C	33. C	34. C	35. A	36. A	37. C	38. D	39. B	40. B
41. A	42. A	43. D	44. C	45. B	46. B	47. C	48. D	49. A	50. C
51. D	52. D	53. D	54. D	55. C	56. C	57. A	58. A	59. B	60. B
61. D	62. C	63. D	64. A	65. D	66. B	67. B	68. B	69. C	70. A
71. D	72. D	73. B	74. C	75. B	76. D	77. B	78. D	79. D	80. B
81. D	82. A	83. A	84. C	85. A	86. A	87. B	88. B	89. A	90. B
91. A	92. B	93. D	94. A	95. C	96. D	97. D	98. A	99. D	



Mọi sự nỗ lực dù là nhỏ nhất đều có ý nghĩa:
 $0.99^{365} \approx 0.03$ nhưng $1.01^{365} \approx 37.8$