

Chương 6

CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

§1. CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC

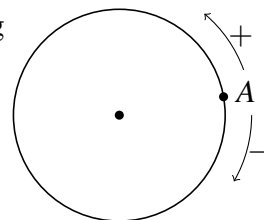
I. Tóm tắt lí thuyết

1. Khái niệm cung và góc lượng giác

Định nghĩa 1.

Đường tròn định hướng là một đường tròn trên đó ta đã chọn một chiều chuyển động gọi là chiều dương, chiều ngược lại gọi là chiều âm.

Quy ước: chiều dương là chiều ngược với chiều quay của kim đồng hồ.



Định nghĩa 2. Trên đường tròn định hướng, cho hai điểm A và B . Một điểm M di chuyển trên đường tròn luôn theo một chiều (dương hoặc âm) từ A đến B tạo nên một *cung lượng giác* có điểm đầu là A , điểm cuối là B .

⚠ Với hai điểm A, B đã cho trên đường tròn định hướng, ta có vô số cung lượng giác điểm đầu A , điểm cuối B . Mỗi cung như vậy đều được kí hiệu là $\widehat{AB}$.

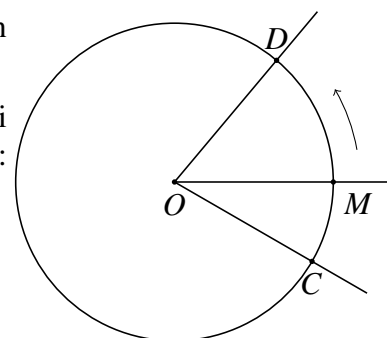
⚠ Trên một đường tròn định hướng, lấy hai điểm A và B thì

- Kí hiệu $\widehat{AB}$ chỉ một cung hình học (cung lớn hoặc cung bé) hoàn toàn xác định.
- Kí hiệu $\widehat{AB}$ chỉ một cung lượng giác điểm đầu A , điểm cuối B .

Định nghĩa 3.

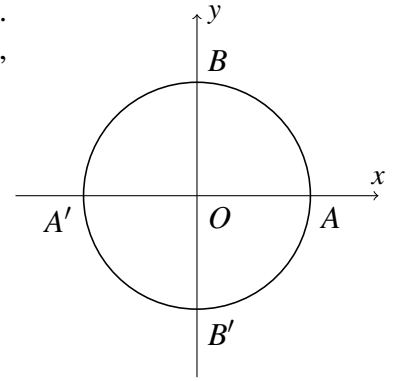
Trên đường tròn định hướng, cho cung lượng giác $\widehat{CD}$. Một điểm M chuyển động trên đường tròn từ C đến D tạo nên cung lượng giác $\widehat{CD}$ nói trên.

Khi đó, tia OM quay xung quanh gốc O từ vị trí OC đến vị trí OD . Ta nói tia OM tạo ra một *góc lượng giác* có tia đầu là OC , tia cuối là OD . Kí hiệu: (OC, OD) .



Định nghĩa 4.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , vẽ đường tròn định hướng tâm O bán kính $R = 1$. Đường tròn này cắt hai trục tọa độ tại bốn điểm $A(1;0)$, $A'(-1;0)$, $B(0;1)$, $B'(0;-1)$. Ta lấy A làm điểm gốc của đường tròn đó. Đường tròn xác định như trên gọi là *đường tròn lượng giác* (gốc A).

**2. Số đo của cung và góc lượng giác**

Định nghĩa 5. Trên đường tròn tùy ý, cung có độ dài bằng bán kính được gọi là *cung co số đo 1 rad*.

Liên hệ giữa độ và rad: $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$ và $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$.

 Khi viết số đo của một góc (hay cung) theo đơn vị radian, người ta thường không viết chữ rad sau số đo. Chẳng hạn cung $\frac{\pi}{2}$ được hiểu là cung $\frac{\pi}{2} \text{ rad}$.

Bảng chuyển đổi thông dụng:

Độ	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Radian	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Định nghĩa 6. Số đo của một cung lượng giác $\widehat{AM}$ ($A \neq M$) là một số thực, âm hay dương.

Kí hiệu số đo của cung là $\widehat{AM}$ là số $\widehat{AM}$.

Ghi nhớ:

$$\text{sđ } \widehat{AM} = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{sđ } \widehat{AM} = a^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

Định nghĩa 7. Số đo của góc lượng giác (OA, OC) là số đo của cung lượng giác $\widehat{AC}$ tương ứng.

Số đo của một cung lượng giác

Số đo của một cung lượng giác $\widehat{AM}$ ($A \neq M$) là một số thực, âm hay dương. Kí hiệu số đo của cung là $\widehat{AM}$ là số $\widehat{AM}$.

Ghi nhớ

$$\text{sđ } \widehat{AM} = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

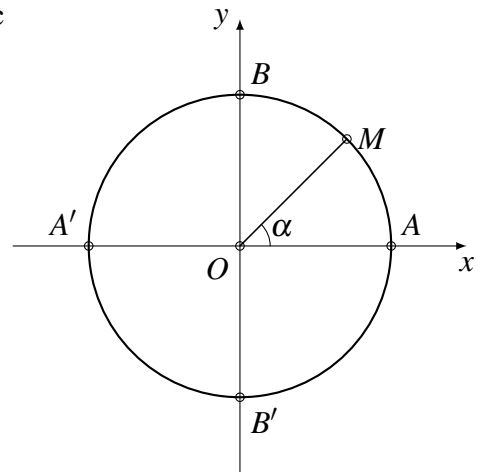
$$\text{sđ } \widehat{AM} = a^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

Số đo của một góc lượng giác

Số đo của góc lượng giác (OA, OC) là số đo của cung lượng giác $\widehat{AC}$ tương ứng.

Biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác

Điểm M trên đường tròn lượng giác sao cho góc lượng giác $(OA, OM) = \alpha$ là điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo α .



II. Các dạng toán

Dạng 1. Liên hệ giữa độ và radian

Sử dụng công thức chuyển đổi giữa số đo độ và số đo radian: $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$ và $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$.

Ví dụ 1. Đổi số đo của các góc sau ra radian: $72^\circ; 600^\circ; -37^\circ 45' 30''$.

Lời giải. Vì $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$ nên

$$72^\circ = 72 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{5};$$

$$600^\circ = 600 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{10\pi}{3};$$

$$-37^\circ 45' 30'' = -37^\circ - \left(\frac{45}{60}\right)^\circ - \left(\frac{30}{60 \cdot 60}\right)^\circ = \left(\frac{4531}{120}\right)^\circ = \frac{4531}{120} \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0,6587.$$

Ví dụ 2. Đổi số đo của các góc sau ra độ: $\frac{5\pi}{18}; \frac{3\pi}{5}; -4$.

Lời giải. Vì $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$ nên

$$\frac{5\pi}{18} = \left(\frac{5\pi}{18} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 50^\circ;$$

$$\frac{3\pi}{5} = \left(\frac{3\pi}{5} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 108^\circ;$$

$$-4 = -\left(4 \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx -2260^\circ 48'.$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Đổi số đo của các góc sau ra radian: $54^\circ; 30^\circ 45'; -60^\circ; -210^\circ$.

Lời giải. $54^\circ = 54 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{10};$

$$30^\circ 45' = 30^\circ + \left(\frac{45}{60}\right)^\circ = \left(\frac{123}{4}\right)^\circ = \frac{123}{4} \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{41\pi}{240} \approx 0,5367;$$

$$-60^\circ = -60 \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{\pi}{3};$$

$$-210^\circ = -210 \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{7\pi}{6}.$$

Bài 2. Đổi số đo của các góc sau ra độ: $\frac{\pi}{5}; -\frac{5\pi}{6}; \frac{4\pi}{3}; 3,56\pi$.

Lời giải. $\frac{\pi}{5} = \left(\frac{\pi}{5} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 36^\circ;$

$-\frac{5\pi}{6} = -\left(\frac{5\pi}{6} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = -150^\circ;$

$\frac{4\pi}{3} = \left(\frac{4\pi}{3} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 240^\circ;$

$3,56\pi = \left(3,56\pi \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 640^\circ 48'.$

Dạng 2. Độ dài cung lượng giác

Cung tròn bán kính R có số đo α ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$), có số đo a° ($0 \leq a \leq 360$) và có độ dài là l thì:

$$l = R\alpha = \frac{\pi a}{180} \cdot R \text{ do đó } \frac{\alpha}{\pi} = \frac{a}{180}$$

Đặc biệt: $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ, 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}.$

Ví dụ 3. Một đường tròn có bán kính 36 m. Tìm độ dài của cung trên đường tròn đó có số đo là

- a) $\frac{3\pi}{4}$ b) 51° c) $\frac{1}{3}$

Lời giải. Theo công thức tính độ dài cung tròn ta có $l = R\alpha = \frac{\pi a}{180} \cdot R$ nên

a) Ta có $l = R\alpha = 36 \cdot \frac{3\pi}{4} = 27\pi \approx 84,8m$

b) Ta có $l = \frac{\pi a}{180} \cdot R = \frac{\pi 51}{180} \cdot 36 = \frac{51\pi}{5} \approx 32,04 \text{ m}.$

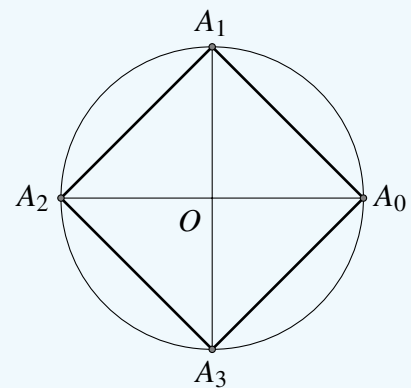
c) Ta có $l = R\alpha = 36 \cdot \frac{1}{3} = 12 \text{ m}.$

Ví dụ 4. Một hải lí là độ dài cung tròn xích đạo có số đo $\left(\frac{1}{60}\right)^\circ = 1'$. Biết độ dài xích đạo là 40.000 km, hỏi một hải lí dài bao nhiêu km?

Lời giải. Một hải lí dài $\frac{40000}{360} \cdot \frac{1}{60} \approx 1,852 \text{ km}.$

Ví dụ 5.

Cho hình vuông $A_0A_1A_2A_3$ nội tiếp đường tròn tâm O (các đỉnh được sắp xếp theo chiều ngược chiều quay của kim đồng hồ). Tính số đo của các cung lượng giác $\widehat{A_0A_i}, \widehat{A_iA_j}$ ($i, j = 0, 1, 2, 3, i \neq j$).



Lời giải. Ta có $\widehat{A_0OA_0} = 0$ nên $\text{sđ}\widehat{A_0A_0} = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$
 $\widehat{A_0OA_1} = \frac{\pi}{2}$ nên $\text{sđ}\widehat{A_0A_1} = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\widehat{A_0OA_2} = \pi \text{ nên } \widehat{sđA_0A_1} = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\widehat{A_0OA_3} = \frac{\pi}{2} \text{ nên } \widehat{sđA_0A_3} = 2\pi - \frac{\pi}{2} + k2\pi = \frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Như vậy } \widehat{sđA_0A_i} = \frac{i\pi}{2} + k2\pi, i = 0, 1, 2, 3, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Theo hệ thức salơ ta có } \widehat{sđA_iA_j} = \widehat{sđA_0A_j} - \widehat{sđA_0A_i} + k2\pi = (j-i) \cdot \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 3. Tính độ dài cung tròn trong các trường hợp sau:

a) Bán kính $R = 5$, có số đo 72° .

b) Bán kính $R = 18$, có số đo 150° .

Lời giải. a) $l = \frac{\pi \cdot 72}{180} \cdot 5 = 2\pi$.

b) $l = \frac{\pi \cdot 150}{180} \cdot 18 = 15\pi$.

Bài 4. Cho đường tròn có đường kính $R = 20$ cm. Hãy tính độ dài cung tròn có số đo: $\frac{\pi}{15}; 1,5; 37^\circ$

Lời giải.

- $l = \frac{\pi}{15} \cdot 20 \approx 4,19$ cm.

- $l = 1,5 \cdot 20 \approx 30$ cm.

- $l = \frac{37 \cdot \pi}{180} \cdot 20 \approx 12,91$ cm.

Bài 5. Bánh xe của người đi xe đạp quay được 11 vòng trong 5 giây.

a) Tính góc (theo độ và radian) mà bánh xe quay được trong 1 giây.

b) Tính quãng đường mà người đi xe đã đi được trong 1 phút, biết rằng đường kính bánh xe đạp là 680 mm.

Lời giải. a) Trong 1 giây, bánh xe quay được $\frac{11}{5}$ vòng, tức là quay được một góc $\frac{22\pi}{5}$ (rad) hay 792° .

b) Trong 1 phút, bánh xe lăn được $l = 340 \cdot \frac{22\pi}{5} \cdot 60 \approx 281,990$ (mm) ≈ 282 m.

Bài 6. Cho lục giác đều $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ nội tiếp đường tròn tâm O (các đỉnh được sắp xếp theo chiều ngược chiều quay của kim đồng hồ). Tính số đo của các cung lượng giác $\widehat{A_0A_i}, \widehat{A_iA_j}$ ($i, j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, i \neq j$).

Lời giải. $\widehat{sđA_0A_i} = \frac{i\pi}{3} + k2\pi, i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, k \in \mathbb{Z}$.

$$\widehat{sđA_iA_j} = \widehat{sđA_0A_j} - \widehat{sđA_0A_i} + k2\pi = (j-i) \cdot \frac{\pi}{3} + k2\pi, i, j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, i \neq j, k \in \mathbb{Z}.$$

Bài 7. Trên đường tròn lượng giác gốc A . Cho điểm M, N sao cho $\widehat{sđAM} = \frac{\pi}{5}, \widehat{sđAN} = -\frac{\pi}{5}$. Các điểm

M', N' lần lượt là các điểm đối xứng của M, N qua tâm đường tròn. Tìm số đo của cung $\widehat{AM'}, \widehat{AN'}$ và $\widehat{M'N'}$.

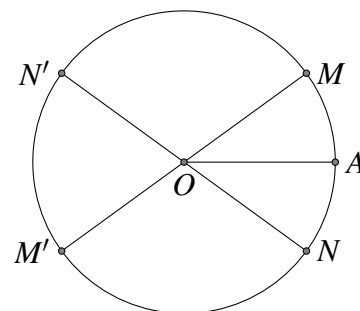
Lời giải.

$$\widehat{sđAM'} = \frac{\pi}{5} + \pi + k2\pi = \frac{6\pi}{5} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\widehat{sđAN'} = -\frac{\pi}{5} + \pi + k2\pi = \frac{4\pi}{5} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Theo hệ thức Sacơ ta có

$$\widehat{sđM'N'} = \widehat{sđAN'} - \widehat{sđAM'} + k2\pi = -\frac{2\pi}{5} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$



Dạng 3. Biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác

Để biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác, ta thường sử dụng các kết quả sau:

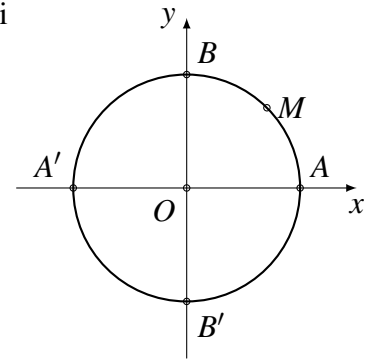
- Cung có số đo α (a°) và cung có số đo $\alpha + k2\pi$ ($a^\circ + k360^\circ$) có cùng điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác.
- Số điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn cung lượng giác có số đo dạng $\alpha + \frac{k2\pi}{m}$ (hay $a^\circ + \frac{k360^\circ}{m}$) (với k là số nguyên và m là số nguyên dương) là m điểm. Từ đó để biểu diễn các cung lượng giác đó, ta cho k chạy từ 0 đến $m - 1$ rồi biểu diễn các cung đó.

Ví dụ 6. Biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác có số đo $\frac{9\pi}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\frac{9\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2 \cdot 2\pi$. Do đó điểm biểu diễn cung lượng giác $\frac{9\pi}{4}$ trùng với điểm biểu diễn cung lượng giác $\frac{\pi}{4}$.

Vậy điểm cuối của cung $\frac{9\pi}{4}$ là điểm chính giữa M của cung nhỏ $\widehat{AB}$.

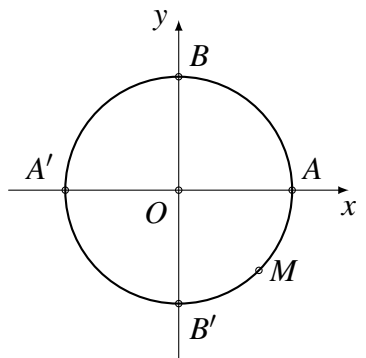


Ví dụ 7. Biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác có số đo -765° .

Lời giải.

Ta có $-765^\circ = -45^\circ - 2 \cdot 360^\circ$. Do đó điểm biểu diễn cung lượng giác -765° trùng với điểm biểu diễn cung lượng giác -45° . Lại có $\frac{45}{360} = \frac{1}{8}$. Ta chia đường tròn thành 8 phần bằng nhau.

Khi đó điểm M biểu diễn góc có số đo -765° .

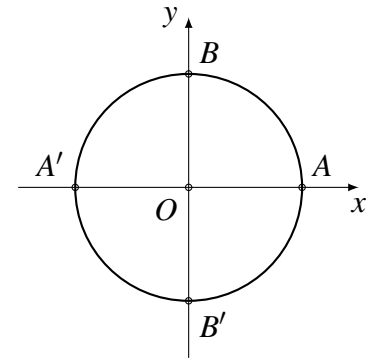


Ví dụ 8. Biểu diễn các cung lượng giác có số đo $x = k\pi$ với k là số nguyên tùy ý.

Lời giải.

Ta có $x = k\pi = \frac{k2\pi}{2}$. Vậy có 2 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo $k\pi$.

- Với $k = 0, x = 0$, được biểu diễn bởi điểm A .
- Với $k = 1, x = \pi$, được biểu diễn bởi điểm A' .



Ví dụ 9. Cho cung lượng giác có số đo $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ với k là số nguyên tùy ý. Có bao nhiêu giá trị k thỏa mãn $x \in [2\pi; 5\pi]$?

Lời giải. Giải hệ bất phương trình
$$\begin{cases} \frac{\pi}{4} + k\pi > 2\pi \\ \frac{\pi}{4} + k\pi < 5\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > \frac{7}{4} \\ k < \frac{19}{4} \end{cases}.$$

Từ đó, để $x \in [2\pi; 5\pi]$ thì $\frac{7}{4} < k < \frac{19}{4}$. Vì k là số nguyên nên có 3 giá trị của k , là 2, 3, 4, thỏa mãn ycbt.

Ví dụ 10. Cho cung lượng giác có số đo $x = -\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{4}$ với k là số nguyên tùy ý. Có bao nhiêu giá trị của k thỏa mãn $x \in \left(-\frac{3\pi}{5}; 4\pi\right]$?

Lời giải. Giải hệ bất phương trình
$$\begin{cases} -\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{4} > -\frac{3\pi}{5} \\ -\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{4} \leq 4\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > -\frac{16}{15} \\ k \leq \frac{52}{3} \end{cases}.$$

Từ đó, để $x \in \left(-\frac{3\pi}{5}; 4\pi\right]$ thì $-\frac{16}{15} < k \leq \frac{52}{3}$. Vì k là số nguyên nên có 19 giá trị của k ($-1, 0, \dots, 16, 17$) thỏa ycbt.

Ví dụ 11. Cho cung lượng giác có số đo $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{6}$ với số k tùy ý. Có bao nhiêu giá trị của k thỏa mãn $x \in \left(-\frac{\pi}{3}; 2\pi\right]$?

Lời giải. Giải hệ bất phương trình
$$\begin{cases} -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{6} > -\frac{\pi}{3} \\ -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{6} \leq 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > -\frac{1}{2} \\ k \leq \frac{27}{2} \end{cases}.$$

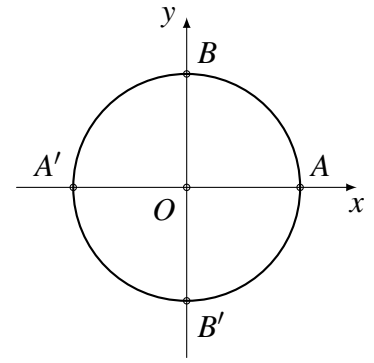
Từ đó, để $x \in \left(-\frac{\pi}{3}; 2\pi\right]$ thì $-\frac{1}{2} < k \leq \frac{27}{2}$. Vì k là số nguyên nên có 14 giá trị của k ($0, 1, \dots, 12, 13$) thỏa ycbt.

Ví dụ 12. Biểu diễn các cung lượng giác có số đo $x = \frac{k\pi}{2}$ với k là số nguyên tùy ý.

Lời giải.

Ta có $x = \frac{k\pi}{2} = \frac{k2\pi}{4}$. Vậy có 2 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo $k\frac{\pi}{2}$.

- Với $k = 0, x_1 = 0$, được biểu diễn bởi điểm A .
- Với $k = 1, x_2 = \frac{\pi}{2}$, được biểu diễn bởi điểm B .
- Với $k = 2, x_3 = \pi$, được biểu diễn bởi điểm A' .
- Với $k = 3, x_4 = \frac{3\pi}{2}$, được biểu diễn bởi điểm B' .



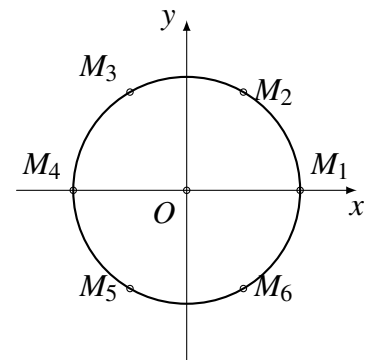
BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 8. Biểu diễn cung lượng giác có số đo $x = \frac{k\pi}{3}$ với k là số nguyên tùy ý.

Lời giải.

Ta có $x = \frac{k\pi}{3} = \frac{k2\pi}{6}$. Vậy có 6 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo $\frac{k\pi}{3}$.

- Với $k = 0, x_1 = 0$, được biểu diễn bởi điểm M_1 .
- Với $k = 1, x_2 = \frac{\pi}{3}$, được biểu diễn bởi điểm M_2 .
- Với $k = 2, x_3 = \frac{2\pi}{3}$, được biểu diễn bởi điểm M_3 .
- Với $k = 3, x_4 = \pi$, được biểu diễn bởi điểm M_4 .
- Với $k = 4, x_5 = \frac{4\pi}{3}$, được biểu diễn bởi điểm M_5 .
- Với $k = 5, x_6 = \frac{5\pi}{3}$, được biểu diễn bởi điểm M_6 .



Bài 9. Biểu diễn cung lượng giác có số đo $x = -750^\circ$.

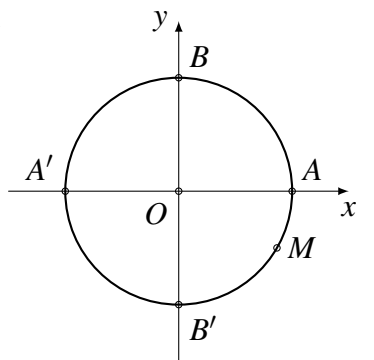
Lời giải.

Ta có $x = -750^\circ = -30 - 2 \cdot 360^\circ$. Vậy điểm diễn góc -750° trùng với điểm biểu diễn cung lượng giác -30° .

Lại có $\frac{30}{360} = \frac{1}{12}$. Ta chia đường tròn thành 12 phần bằng nhau.

Chú ý góc -30° nằm dưới trục Ox .

Khi đó điểm M biểu diễn cung lượng giác -750° .

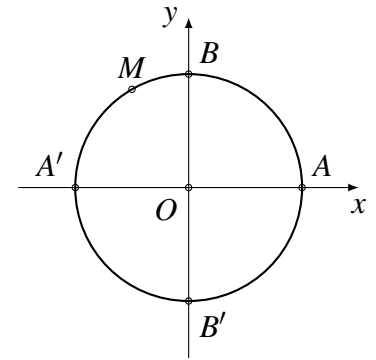


Bài 10. Biểu diễn cung lượng giác có số đo $x = -\frac{2\pi}{3}$.

Lời giải.

Ta có: $\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{3}$. Ta chia đường tròn thành 3 phần bằng nhau.

Khi đó điểm M biểu diễn cung lượng giác $x = -\frac{2\pi}{3}$.

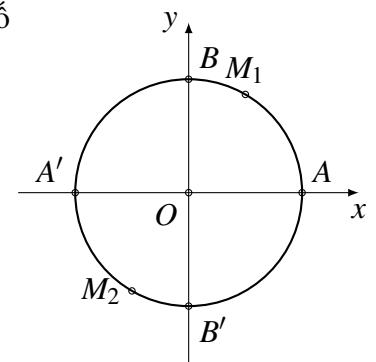


Bài 11. Biểu diễn các cung lượng giác có số đo $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ với k là số nguyên tùy ý.

Lời giải.

Ta có $x = \frac{\pi}{3} + k\pi = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{2}$. Vậy có 2 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$.

- Với $k = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{3}$, được biểu diễn bởi điểm M_1 .
- Với $k = 1$, $x_2 = \frac{4\pi}{3}$, được biểu diễn bởi điểm M_2 .

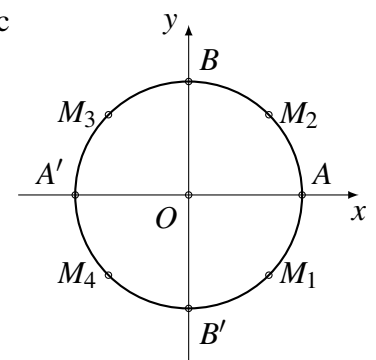


Bài 12. Biểu diễn các cung lượng giác có số đo $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ với k là số nguyên tùy ý.

Lời giải.

Ta có $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} = -\frac{\pi}{4} + \frac{k2\pi}{4}$. Vậy có 4 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo x .

- Với $k = 0$, $x_1 = -\frac{\pi}{4}$, được biểu diễn bởi điểm M_1 .
- Với $k = 1$, $x_2 = \frac{\pi}{4}$, được biểu diễn bởi điểm M_2 .
- Với $k = 2$, $x_3 = \frac{3\pi}{4}$, được biểu diễn bởi điểm M_3 .
- Với $k = 3$, $x_4 = \frac{5\pi}{4}$, được biểu diễn bởi điểm M_4 .

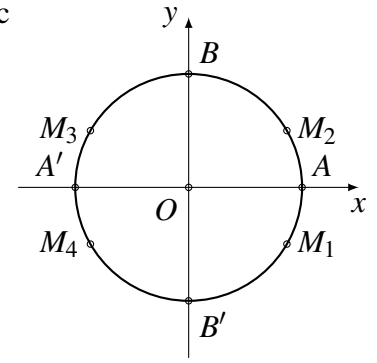


Bài 13. Biểu diễn cung lượng giác có số đo $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$ với k là số nguyên tùy ý.

Lời giải.

Ta có $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{4} = -\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{6}$. Vậy có 6 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo x .

- Với $k = 0, x_1 = -\frac{\pi}{6}$, được biểu diễn bởi điểm M_1 .
- Với $k = 1, x_2 = \frac{\pi}{6}$, được biểu diễn bởi điểm M_2 .
- Với $k = 2, x_3 = \frac{\pi}{2}$, được biểu diễn bởi điểm B .
- Với $k = 3, x_4 = \frac{5\pi}{6}$, được biểu diễn bởi điểm M_3 .
- Với $k = 4, x_5 = \frac{7\pi}{6}$, được biểu diễn bởi điểm M_4 .
- Với $k = 5, x_6 = \frac{3\pi}{2}$, được biểu diễn bởi điểm B' .



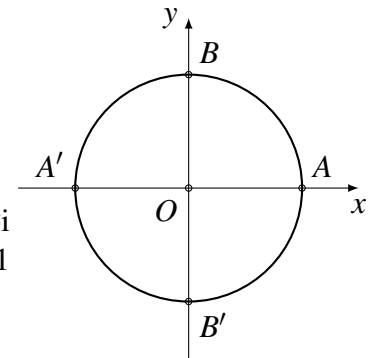
Bài 14. Khi biểu diễn các cung lượng giác có số đo $x = k\pi$ và $y = k2\pi$ lên đường tròn lượng giác, số điểm chung nhận được là bao nhiêu?

Lời giải.

Ta có $x = k\pi = \frac{k2\pi}{2}$. Vậy có 2 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo x .

- Với $k = 0, x_1 = 0$, được biểu diễn bởi điểm A .
- Với $k = 1, x_2 = \pi$ được biểu diễn bởi điểm A' .

Ta có $y = k2\pi$. Vậy có 1 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo y . Với $k = 0, y = 0$, được biểu diễn bởi điểm A . Vậy số điểm chung nhận được là 1 điểm chung.



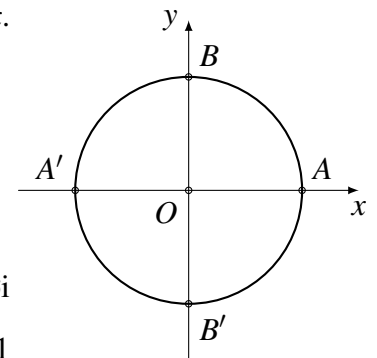
Bài 15. Khi biểu diễn các cung lượng giác có số đo $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ và $y = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ lên đường tròn lượng giác, số điểm chung nhận được là bao nhiêu?

Lời giải.

Ta có $x = k\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{k2\pi}{2}$. Vậy có 2 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo x .

- Với $k = 0, x_1 = \frac{\pi}{2}$, được biểu diễn bởi điểm B .
- Với $k = 1, x_2 = \frac{3\pi}{2}$ được biểu diễn bởi điểm B' .

Ta có $y = \frac{\pi}{2} + k2\pi$. Vậy có 1 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo y . Với $k = 0, y = \frac{\pi}{2}$, được biểu diễn bởi điểm B . Vậy số điểm chung nhận được là 1 điểm chung.

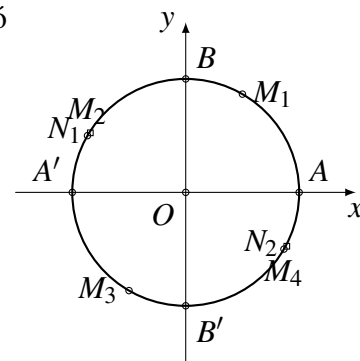


Bài 16. Khi biểu diễn các cung lượng giác có số đo $x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}$ và $y = \frac{5\pi}{6} + k\pi$ lên đường tròn lượng giác, số điểm chung nhận được là bao nhiêu?

Lời giải.

Ta có $x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{4}$. Vậy có 4 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo x .

- Với $k = 0, x_1 = \frac{\pi}{3}$, được biểu diễn bởi điểm M_1 .
- Với $k = 1, x_2 = \frac{5\pi}{6}$ được biểu diễn bởi điểm M_2 .
- Với $k = 2, x_3 = \frac{4\pi}{3}$ được biểu diễn bởi điểm M_3 .
- Với $k = 3, x_4 = \frac{11\pi}{6}$ được biểu diễn bởi điểm M_4 .



Ta có $y = \frac{5\pi}{6} + k\pi = \frac{5\pi}{6} + \frac{k2\pi}{2}$. Vậy có 2 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo y .

Với $k = 0, y_1 = \frac{5\pi}{6}$, được biểu diễn bởi điểm N_1 .

Với $k = 1, y_2 = \frac{11\pi}{6}$ được biểu diễn bởi điểm N_2 .

Vậy số điểm chung nhận được là 2 điểm chung.

Bài 17. Tìm tất cả các điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn cung lượng giác có số đo $x = \frac{k\pi}{4}$ không trùng với điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo $y = k\pi$.

Lời giải. Ta có $x = \frac{k\pi}{4} = \frac{k2\pi}{8}$. Vậy có 8 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo x , lần lượt biểu diễn các cung lượng giác có số đo $0, \frac{2\pi}{8}, \frac{4\pi}{8}, \frac{6\pi}{8}, \frac{8\pi}{8}, \frac{10\pi}{8}, \frac{12\pi}{8}, \frac{14\pi}{8}$.

Ta có $y = k\pi = \frac{2\pi}{2}$. Vậy có 2 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo y , lần lượt biểu diễn các cung lượng giác có số đo $0, \frac{2\pi}{2}$.

Vậy có 6 điểm thỏa mãn ycbt.

Bài 18. Tìm tất cả các điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn cung lượng giác có số đo $x = \frac{2\pi}{3} + \frac{k\pi}{3}$ không trùng với điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo $y = \frac{k2\pi}{3}$.

Lời giải. Ta có $x = \frac{2\pi}{3} + \frac{k\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + \frac{k2\pi}{6}$. Vậy có 6 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo x , lần lượt biểu diễn các cung lượng giác có số đo $\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{6\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}$.

Ta có $y = \frac{k2\pi}{3}$. Vậy có 3 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo y , lần lượt biểu diễn các cung lượng giác có số đo $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$.

Vậy có 4 điểm thỏa mãn ycbt.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 19. Chứng minh:

- Hai góc lượng giác có cùng tia đầu và có số đo lần lượt là $\frac{10\pi}{3}$ và $\frac{22\pi}{3}$ thì có cùng tia cuối.
- Hai góc lượng giác có cùng tia đầu và có số đo 645° và -435° thì có cùng tia cuối.

Lời giải.

a) Ta có : $\frac{22\pi}{3} = \frac{10\pi}{3} + \frac{12\pi}{3} = \frac{10\pi}{3} + 4\pi$.

Vậy hai góc đã cho có cùng tia cuối.

b) Ta có : $645^\circ = -75^\circ + 2 \cdot 360^\circ$ và $-435^\circ = -75^\circ - 360^\circ$.

Vậy 645° và -435° có cùng tia cuối.

Bài 20. Coi kim giờ đồng hồ là tia Ou , kim phút đồng hồ là tia Ov . Hãy tìm số đo của góc lượng giác (Ou, Ov) khi đồng hồ chỉ 3 giờ, 4 giờ, 9 giờ, 11 giờ.

Lời giải.

- Khi đồng hồ chỉ 3 giờ, ta có $\text{sđ}(Ou, Ov) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$
- Khi đồng hồ chỉ 4 giờ, ta có $\text{sđ}(Ou, Ov) = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$
- Khi đồng hồ chỉ 9 giờ, ta có $\text{sđ}(Ou, Ov) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$
- Khi đồng hồ chỉ 11 giờ, ta có $\text{sđ}(Ou, Ov) = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$

Bài 21. Cho góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo α . Tìm số đo góc hình học $\widehat{uOv}$ trong các trường hợp sau:

a) $\alpha = -1955^\circ$

b) $\alpha = \frac{1088\pi}{3}$

Lời giải. Trước hết ta cần nhớ $0^\circ \leq \widehat{uOv} \leq 180^\circ$ và $(Ou, Ov) = \widehat{uOv} + k360^\circ$.

a) Ta có $\alpha = -1955^\circ = 165^\circ - 6 \cdot 360^\circ$. Nên $\widehat{uOv} = 165^\circ$.

b) $\alpha = \frac{1088\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 181 \cdot 2\pi$. Vậy $\widehat{uOv} = \frac{2\pi}{3}$.

Bài 22. Cho đường tròn đường kính 20 cm. Tìm số đo bằng độ và rad các cung có độ dài lần lượt là 9 cm, 37 cm.

Lời giải. Gọi R là bán kính đường tròn, khi đó suy ra $R = 10$ cm.

- Với cung có độ dài 9 cm, ta có : $l = R \cdot \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{l}{R} = \frac{9}{10} \text{ rad} = \frac{\frac{9}{10} \cdot 180}{\pi} = \left(\frac{162}{\pi}\right)^\circ$.
- Với cung có độ dài 37 cm, ta có : $l = R \cdot \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{l}{R} = \frac{37}{10} \text{ rad} = \frac{\frac{37}{10} \cdot 180}{\pi} = \left(\frac{296}{\pi}\right)^\circ$.

Bài 23. Trên đường tròn lượng giác cho các cung có số đo theo thứ tự là $-60^\circ, -315^\circ, -1130^\circ, -\frac{180\pi}{7}, \frac{11\pi}{3}$. Hỏi trong các cung trên những cung nào có cùng điểm cuối?

Lời giải. Trước hết ta thấy hai cung có số đo α và β gọi là có chung gốc và chung ngọn khi và chỉ khi $\alpha = \beta + k2\pi \Leftrightarrow \alpha - \beta = 2k\pi$. Tức là hai cung lượng giác có chung điểm gốc và điểm ngọn khi và chỉ khi chúng hơn kém nhau bội của 2π (bội của 360°).

Ta có:

$$\begin{aligned}
 -60^\circ - (-315^\circ) &= 255^\circ \neq k360^\circ, k \in \mathbb{Z} \\
 -60^\circ - (1130^\circ) &= -3 \cdot 360^\circ - 110^\circ \neq k360^\circ \\
 -60^\circ - \left(-\frac{180\pi}{7}\right) &= -\frac{\pi}{3} + \frac{180\pi}{7} \neq k2\pi \\
 -60^\circ - \left(\frac{11\pi}{3}\right) &= -\frac{\pi}{3} - \frac{11\pi}{3} = -4\pi = -2 \cdot 2\pi \\
 -315^\circ - 1130^\circ &= -4 \cdot 360^\circ - 45^\circ \neq k360^\circ \\
 -1130^\circ - \left(-\frac{180\pi}{7}\right) &= -3 \cdot 2\pi + \frac{5\pi}{18} + 13,2\pi - \frac{2\pi}{7} \neq k2\pi.
 \end{aligned}$$

Như vậy bằng cách tính hiệu số của từng cặp ta thấy chỉ có cung -60° và cung $\frac{11\pi}{3}$ là có chung điểm đầu và điểm cuối.

Bài 24. Cho góc lượng giác $(OC; OD) = 405^\circ + k360^\circ$. Tìm tất cả các góc có cùng tia đầu và tia cuối với góc đã cho và có số đo với giá trị tuyệt đối không quá 1200° .

Lời giải. Gọi α là góc cần tìm.

Theo bài ra $\alpha \leq |1200^\circ| \Leftrightarrow -1200^\circ \leq 405^\circ + k360^\circ \leq 1200^\circ \Rightarrow -\frac{107}{24} \leq k \leq \frac{53}{24} \Rightarrow k \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}$.
 Vậy các góc cần tìm theo thứ tự là : $-1035^\circ; -675^\circ; -315^\circ; 45^\circ; 405^\circ; 765^\circ; 1125^\circ$.

Bài 25. Xác định điểm cuối của cung lượng giác $\widehat{AM}$ nằm trong góc phần tư nào của mặt phẳng tọa độ trong các trường hợp sau:

a) $\text{sđ}\widehat{AM} = 1975^\circ + k360^\circ$

b) $\text{sđ}\widehat{AM} = \frac{2006\pi}{19} + k2\pi$

Lời giải.

a) Ta có $\text{sđ}\widehat{AM} = 1975^\circ + k360^\circ = 175^\circ + 5 \cdot 360^\circ$ và $90^\circ < 175^\circ < 180^\circ$.
 Vậy điểm M nằm trong cung phần tư thứ II

b) $\text{sđ}\widehat{AM} = \frac{2006\pi}{19} + k2\pi = \frac{30\pi}{19} + 52 \cdot 2\pi$ và $\frac{3\pi}{2} < \frac{30\pi}{19} < 2\pi$.
 Vậy điểm M nằm tại góc phần tư thứ IV.

Bài 26. Hiện tại đồng hồ chỉ 8 giờ đúng. Nếu đồng hồ chạy bình thường thì sau bao nhiêu lần lần đầu tiên kim giờ OG và kim phút OP tạo thành góc lượng giác $(OG; OP) = 180^\circ$?

Lời giải. Một giờ kim phút quét nên góc 360° , kim giờ quét nên góc $\frac{360}{12} = 30^\circ$. Như vậy một giờ kim phút OP vạch một góc lớn hơn kim giờ 330° . Hiện tại 8 giờ đúng tức là $(OG; OP) = 120^\circ$.
 Gọi t là thời gian (giờ) để hai kim tạo thành một góc 180° lần đầu tiên. khi đó

$$t = \frac{180 - 120}{330} = \frac{2}{11} \text{ giờ.}$$

Bài 27. Kim giờ và kim phút của một đồng hồ lớn có độ dài lần lượt là 165 cm và 225 cm. Hỏi trong 40 phút đầu kim giờ vạch cung tròn có độ dài bao nhiêu mét, đầu kim phút vạch cung tròn có độ dài bao nhiêu mét ?

Lời giải. Một giờ (60 phút) kim phút quét nên góc 360° , kim giờ quét nên góc $\frac{360}{12} = 30^\circ$.

Như vậy trong 40 phút đầu kim phút vạch một góc $\frac{40 \cdot 360}{60} = 240^\circ = \frac{4\pi}{3}$ rad, kim giờ vạch nên một góc $\frac{40 \cdot 30}{60} = 20^\circ = \frac{\pi}{9}$ rad.

Từ đó suy ra độ dài cung tròn mà kim phút và kim giờ đã vạch trong 40 phút đầu lần lượt là:

$$l_p = 225 \cdot \frac{4\pi}{3} = 300\pi \simeq 942,48 \text{ cm} = 9,4248 \text{ m} \text{ và } l_g = 165 \cdot \frac{\pi}{9} \simeq 57,6 \text{ cm} = 0,576 \text{ m}.$$

Bài 28. Một bánh xe có bán kính $R = 2,4 \text{ m}$ quay một góc bằng 30° . Tính độ dài đường đi của một điểm trên vành bánh xe.

Lời giải. Coi bánh xe là một đường tròn có bán kính $R = 2,4 \text{ m}$. Độ dài đường đi của một điểm trên vành bánh xe là độ dài của cung tròn có số đo $30^\circ = \frac{\pi}{6}$. Vậy độ dài cần tìm là $l = 2,4 \cdot \frac{\pi}{6} = 0,4\pi \text{ cm}$.

§2. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT CUNG

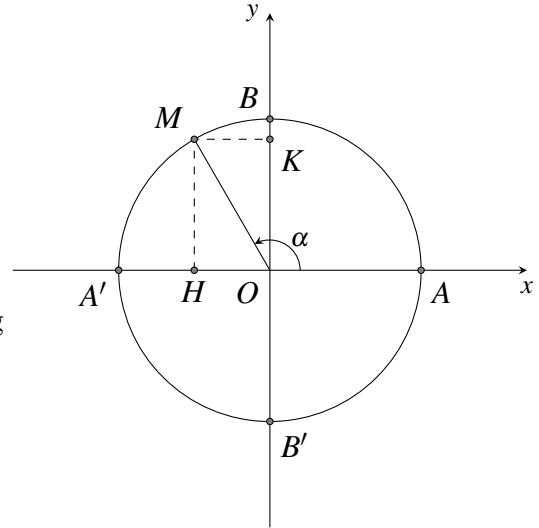
I. Tóm tắt lí thuyết

1. Định nghĩa

- $\sin \alpha = \overline{OK}$.
- $\cos \alpha = \overline{OH}$.
- $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ nếu $\cos \alpha \neq 0$.
- $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ nếu $\sin \alpha \neq 0$.

Các giá trị $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$ được gọi là các giá trị lượng giác của cung α .

Ta cũng gọi trục tung là **trục sin**, còn trục hoành là **trục cosin**.



Chú ý

- Các định nghĩa trên cũng áp dụng cho các góc lượng giác.
- Nếu $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ thì các giá trị lượng giác của góc α chính là các giá trị lượng giác của góc đó đã nêu trong SGK Hình học 10.

2. Hệ quả

a) $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$ xác định với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$, hơn nữa

- $\sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha, \forall k \in \mathbb{Z}$.
- $\cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha, \forall k \in \mathbb{Z}$.

b) $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ và $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$.

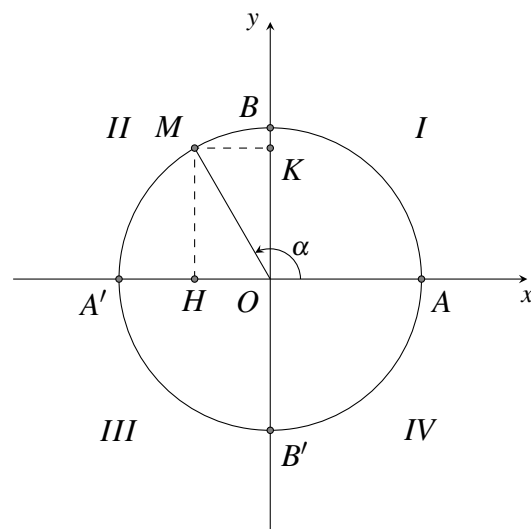
c) Với mọi $m \in \mathbb{R}$ mà $-1 \leq m \leq 1$ đều tồn tại α, β sao cho $\sin \alpha = m$ và $\cos \beta = m$.

d) $\tan \alpha$ xác định với mọi $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

e) $\cot \alpha$ xác định với mọi $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

f) Dấu của các giá trị lượng giác phụ thuộc vào vị trí điểm cuối của cung $\widehat{AM} = \alpha$ trên đường tròn lượng giác.

Giá trị lượng giác	Góc phần tư			
	I	II	III	IV
$\sin \alpha$	+	+	–	–
$\cos \alpha$	+	–	–	+
$\tan \alpha$	+	–	+	–
$\cot \alpha$	+	–	+	–



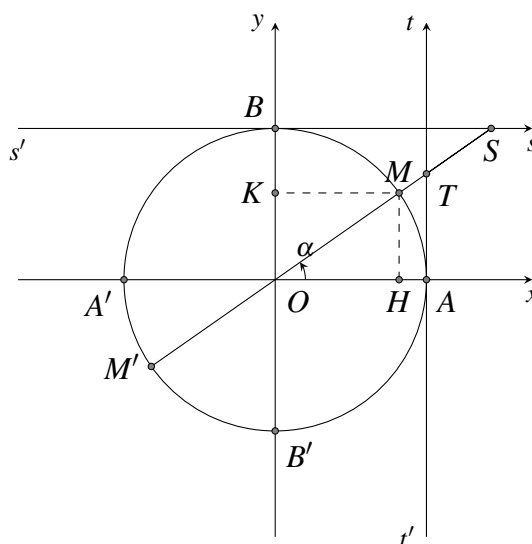
3. Ý nghĩa hình học của tang và cotang

- $\tan \alpha$ được biểu diễn bởi độ dài đại số của vectơ $\overrightarrow{AT}$ trên trục $t'At$. Trục $t'At$ được gọi là **trục tang**.

Do đó $\tan \alpha = \overline{AT}$.

- $\cot \alpha$ được biểu diễn bởi độ dài đại số của vectơ $\overrightarrow{BS}$ trên trục $s'Bs$. Trục $s'Bs$ được gọi là **trục cotang**.

Do đó $\cot \alpha = \overline{BS}$.



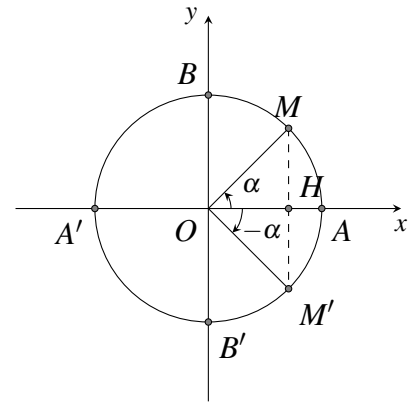
4. Công thức lượng giác cơ bản

- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.
- $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1, \quad \alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

5. Giá trị lượng giác của các cung có liên quan đặc biệt

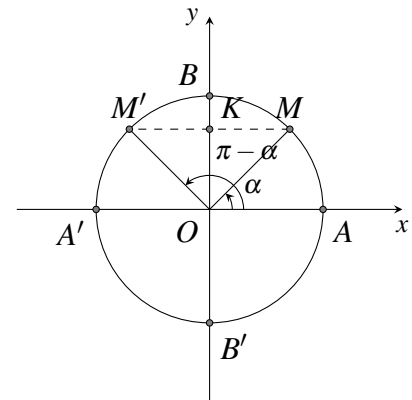
- Cung đối nhau.

- $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$.
- $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$.
- $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$.
- $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$.



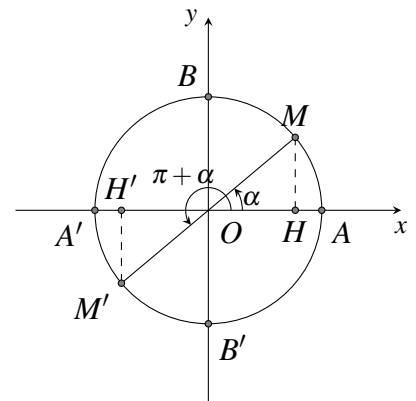
b) Cung bù nhau.

- $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$.
- $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$.
- $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$.
- $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$.



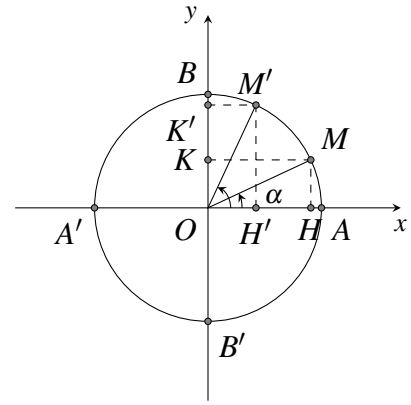
c) Cung hơn kém π .

- $\cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$.
- $\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha$.
- $\tan(\alpha + \pi) = \tan \alpha$.
- $\cot(\alpha + \pi) = \cot \alpha$.



d) Cung phụ nhau.

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha.$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha.$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha.$
- $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha.$

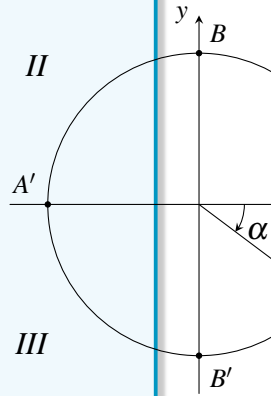


II. Các dạng toán

Dạng 1. Dấu của các giá trị lượng giác

Để xác định dấu của các giá trị lượng giác của một góc α ta xác định vị trí điểm cuối của cung $\widehat{AM} = \alpha$ trên đường tròn lượng giác. Điểm M thuộc góc phần tư nào thì ta áp dụng bảng xác định dấu của các giá trị lượng giác.

Giá trị lượng giác	Góc phần tư			
	I	II	III	IV
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-



Ví dụ 1. Xác định dấu các biểu thức:

a) $A = \sin 50^\circ \cdot \cos(-100^\circ).$

b) $B = \sin 195^\circ \cdot \tan \frac{20\pi}{7}.$

Lời giải.

a) $A = \sin 50^\circ \cdot \cos(-100^\circ).$

Ta có: điểm cuối của cung 50° thuộc góc phần tư thứ I nên $\sin 50^\circ > 0.$

Điểm cuối của cung -100° thuộc góc phần tư thứ III nên $\cos(-100^\circ) < 0.$

Do đó, $A < 0.$

b) $B = \sin 195^\circ \cdot \tan \frac{20\pi}{7}.$

Ta có: điểm cuối của cung 195° thuộc góc phần tư thứ III nên $\sin 195^\circ < 0.$

Điểm cuối của cung $\frac{20\pi}{7} = \frac{6\pi}{7} + 2\pi$ thuộc góc phần tư thứ II nên $\tan \frac{20\pi}{7} < 0.$

Do đó, $B > 0.$

Ví dụ 2. Xác định dấu các biểu thức:

a) $A = \cot \frac{2\pi}{5} \cdot \sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right).$

b) $B = \cos \frac{4\pi}{5} \cdot \sin \frac{\pi}{3} \cdot \tan \frac{4\pi}{3} \cdot \cot \frac{9\pi}{5}.$

Lời giải.

a) $A = \cot \frac{2\pi}{5} \cdot \sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right).$

Ta có: điểm cuối của cung $\frac{2\pi}{5}$ thuộc góc phần tư thứ I nên $\cot \frac{2\pi}{5} > 0$.

Điểm cuối của cung $-\frac{2\pi}{3}$ thuộc góc phần tư thứ III nên $\sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right) < 0$.

Do đó, $A < 0$.

b) $B = \cos \frac{4\pi}{5} \cdot \sin \frac{\pi}{3} \cdot \tan \frac{4\pi}{3} \cdot \cot \frac{9\pi}{5}.$

Ta có: điểm cuối của cung $\frac{4\pi}{5}$ thuộc góc phần tư thứ II nên $\cos \frac{4\pi}{5} < 0$.

Điểm cuối của cung $\frac{\pi}{3}$ thuộc góc phần tư thứ I nên $\sin \frac{\pi}{3} > 0$.

Điểm cuối của cung $\frac{4\pi}{3}$ thuộc góc phần tư thứ III nên $\tan \frac{4\pi}{3} > 0$.

Điểm cuối của cung $\frac{9\pi}{5} = -\frac{\pi}{5} + 2\pi$ thuộc góc phần tư thứ IV nên $\cot \frac{9\pi}{5} < 0$.

Do đó, $B > 0$.

Ví dụ 3. Cho $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Xét dấu các biểu thức sau:

a) $A = \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right).$

b) $B = \tan \left(\frac{2019\pi}{2} - \alpha \right).$

Lời giải.

a) $A = \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \sin \alpha < 0.$

b) $B = \tan \left(\frac{2019\pi}{2} - \alpha \right) = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \alpha + 1009\pi \right) = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cot \alpha > 0.$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Xác định dấu của $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$, biết:

a) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < \frac{7\pi}{4}.$

b) $3\pi < \alpha < \frac{10\pi}{3}.$

c) $\frac{5\pi}{2} < \alpha < \frac{11\pi}{4}.$

Lời giải.

$$a) \frac{3\pi}{2} < \alpha < \frac{7\pi}{4}.$$

Ta có: điểm cuối của cung α thuộc góc phần tư thứ *IV* nên $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha > 0$, $\tan \alpha < 0$.

$$b) 3\pi < \alpha < \frac{10\pi}{3}.$$

Ta có: điểm cuối của cung α thuộc góc phần tư thứ *III* nên $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha < 0$, $\tan \alpha > 0$.

$$c) \frac{5\pi}{2} < \alpha < \frac{11\pi}{4}.$$

Ta có: điểm cuối của cung α thuộc góc phần tư thứ *II* nên $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha < 0$, $\tan \alpha < 0$.

Bài 2. Cho $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Xét dấu các biểu thức sau:

$$a) A = \cos(\alpha + 90^\circ).$$

$$b) B = \sin(\alpha + 80^\circ).$$

Lời giải.

$$a) A = \cos(\alpha + 90^\circ) = \cos(90^\circ - (-\alpha)) = \sin(-\alpha) = -\sin \alpha.$$

Vì $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ nên $\sin \alpha > 0$.

Do đó $A < 0$.

$$b) B = \sin(\alpha + 80^\circ).$$

Vì $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ nên $80^\circ < \alpha + 80^\circ < 170^\circ$.

Do đó, điểm cuối của cung $\alpha + 80^\circ$ thuộc góc phần tư thứ *I* hoặc thứ *II* nên $B > 0$.

Bài 3. Cho $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Xét dấu các biểu thức sau:

$$a) A = \sin(270^\circ - \alpha).$$

$$b) B = \cos(2\alpha + 90^\circ).$$

Lời giải.

$$a) A = \sin(270^\circ - \alpha).$$

Vì $-180^\circ < -\alpha < -90^\circ$ nên $90^\circ < 270^\circ - \alpha < 180^\circ$.

Do đó, điểm cuối của cung $270^\circ - \alpha$ thuộc góc phần tư thứ *II* nên $A > 0$.

$$b) B = \cos(2\alpha + 90^\circ).$$

Ta có $B = \cos(2\alpha + 90^\circ) = \cos(90^\circ - (-2\alpha)) = \sin(-2\alpha) = -\sin(2\alpha)$.

Vì $180^\circ < 2\alpha < 360^\circ$ nên $\sin(2\alpha) < 0$.

Do đó, $B > 0$.

Bài 4. Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Xét dấu các biểu thức sau:

$$a) A = \cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{5}\right).$$

$$b) B = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{8}\right).$$

Lời giải.

$$a) A = \cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{5}\right).$$

$$\text{Vì } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ nên } \frac{3\pi}{5} < \alpha + \frac{3\pi}{5} < \frac{11\pi}{10}.$$

Do đó, điểm cuối của cung $\alpha + \frac{3\pi}{5}$ thuộc góc phần tư thứ II hoặc thứ III.

Vậy $A < 0$.

$$b) B = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{8}\right).$$

$$\text{Vì } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ nên } -\frac{\pi}{8} < \alpha - \frac{\pi}{8} < \frac{3\pi}{8}.$$

Do đó, điểm cuối của cung $\alpha - \frac{\pi}{8}$ thuộc góc phần tư thứ IV hoặc thứ I.

Vậy $B > 0$.

Bài 5. Cho $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Xét dấu các biểu thức sau:

$$a) A = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right).$$

$$b) B = \sin\left(\alpha + \frac{1119\pi}{2}\right).$$

Lời giải.

$$a) A = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (-\alpha)\right) = \cos(-\alpha) = \cos \alpha < 0.$$

$$\begin{aligned} b) B &= \sin\left(\alpha + \frac{1119\pi}{2}\right) = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2} + 280 \cdot 2\pi\right) \\ &= \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha > 0. \end{aligned}$$

Bài 6. Cho tam giác ABC . Xét dấu của biểu thức $P = \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$ trong các trường hợp:

a) Tam giác ABC là tam giác nhọn.

b) Tam giác ABC là tam giác tù.

Lời giải.

a) Tam giác ABC là tam giác nhọn.

Vì tam giác ABC nhọn nên $A < 90^\circ, B < 90^\circ, C < 90^\circ$ hay $\cos A > 0, \cos B > 0, \cos C > 0$.

Vậy $P = \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C > 0$.

b) Tam giác ABC là tam giác tù.

Vì tam giác ABC là tam giác tù nên $\triangle ABC$ có duy nhất một góc tù. Giả sử góc tù góc $A \Rightarrow \cos A < 0$ và $\cos B > 0, \cos C > 0$.

Vậy $P = \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C < 0$.

Dạng 2. Tính giá trị lượng giác của một cung

Để tính giá trị lượng giác của 1 cung ta dựa vào các hằng đẳng thức lượng giác:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

Ngoài ra, cần phải xác định dấu của các hàm số lượng giác của cung đó.

Ví dụ 1. Biết $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ và $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Tính giá trị của $\cos \alpha$ và $\tan \alpha$.

Lời giải. Do $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ nên $\cos \alpha < 0$. (1)

Mặt khác $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ nên $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Từ đó suy ra $\tan \alpha = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Ví dụ 2. Cho $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$ ở đó $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính giá trị của $\sin \alpha$.

Lời giải. Ta có $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25}$.

Từ đó suy ra $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{3}{5}$.

Do $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\sin \alpha > 0$, do đó $\sin \alpha = \frac{3}{5}$.

Ví dụ 3. Cho $\tan \alpha = 2$, tính giá trị biểu thức $M = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$.

Lời giải. Ta có $M = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}$.

Chia cả tử và mẫu cho $\cos^2 \alpha$ ta được $M = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \Rightarrow M = \frac{1 - 4}{1 + 4} = -\frac{3}{5}$.

Ví dụ 4. Cho $\cot \alpha = 3$. Tính giá trị biểu thức $M = \frac{2 \sin \alpha - 3 \cos \alpha}{5 \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}$.

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} M &= \frac{2 \sin \alpha - 3 \cos \alpha}{5 \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha} \\ &= \frac{2 \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} \right) - 3 \cot \alpha \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} \right)}{5 + \cot^3 \alpha} \\ &= \frac{-3 \cot^3 \alpha + 2 \cot^2 \alpha - 3 \cot \alpha + 2}{5 + \cot^3 \alpha} \\ &= -\frac{35}{16}. \end{aligned}$$

Ví dụ 5. Cho $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ và $\cos 2\alpha = -\frac{1}{9}$. Biết $A = \sin 2\alpha + \cos 2\alpha = a + b\sqrt{5}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$ và $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ là phân số tối giản. Tính $M = p - q$.

Lời giải. Do $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\pi < 2\alpha < 2\pi \Rightarrow \sin 2\alpha < 0$.

$\cos 2\alpha = -\frac{1}{9} \Rightarrow \sin^2 2\alpha = 1 - \cos^2 2\alpha = 1 - \frac{1}{81} = \frac{80}{81} \Rightarrow \sin 2\alpha = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$.

$$\text{Suy ra } A = -\frac{1}{9} - \frac{4\sqrt{5}}{9} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{9} \\ b = -\frac{4}{9} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{4} \Rightarrow p = 1, q = 4 \Rightarrow p - q = -3.$$

Vậy $M = -3$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Biết $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{5}{4}$ và $\sin \alpha > \cos \alpha$. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

b) $B = \sin \alpha - \cos \alpha$.

Lời giải.

a) Ta có $\frac{25}{16} = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

Từ đó suy ra $2A = \frac{9}{16} \Rightarrow A = \frac{9}{32}$.

b) Theo giả thiết ta có $B > 0$ và $B^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$.

Từ đó suy ra $B = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Bài 2. Cho $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\sin \alpha$ và $\tan \alpha$.

Lời giải. Ta có $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \frac{5}{13} \\ \sin \alpha = -\frac{5}{13} \end{cases}$.

Do $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\sin \alpha > 0$, do đó $\sin \alpha = \frac{5}{13}$.

Từ đó ta có $\tan \alpha = -\frac{5}{12}$.

Bài 3. Cho $\tan \alpha + \cot \alpha = 2$. Tính giá trị biểu thức $P = \cot^3 \alpha + \tan^3 \alpha$.

Lời giải. $\cot^3 \alpha + \tan^3 \alpha = (\cot \alpha + \tan \alpha)^3 - 3 \cot \alpha \cdot \tan \alpha$. $(\cot \alpha + \tan \alpha) = 2^3 - 3 \cdot 2 = 2$.

Bài 4. Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \cos \left(\frac{9\pi}{2} - \alpha \right) + 2 \tan \left(\alpha + \frac{3\pi}{2} \right).$$

Lời giải. Ta có $P = \sin \alpha - 2 \cot \alpha$.

$\sin \alpha = \frac{3}{5}$ với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5} \Rightarrow \cot \alpha = -\frac{4}{3}$.

Do đó $P = \frac{49}{15}$.

Bài 5. Cho $\tan \alpha = \frac{1}{2}$, tính giá trị của biểu thức $M = \frac{2 \sin^2 \alpha + 3 \sin \alpha \cos \alpha - 4 \cos^2 \alpha}{5 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$.

Lời giải. Dễ thấy $\cos \alpha \neq 0$, chia cả tử và mẫu của biểu thức M cho $\cos^2 \alpha$ ta được:

$$M = \frac{2 \tan^2 \alpha + 3 \tan \alpha - 4}{5 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} - 4}{5 - \frac{1}{4}} = -\frac{8}{19}.$$

Dạng 3. Sử dụng cung liên kết để tính giá trị lượng giác

Sử dụng công thức các cung có liên quan đặc biệt.

Ví dụ 1. Tính các giá trị lượng giác của góc $\alpha = \frac{2017\pi}{3}$.**Lời giải.** Ta có: $\frac{2017\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 672\pi$.

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{2017\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + 672\pi\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow \sin\frac{2017\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan\frac{2017\pi}{3} = \sqrt{3} \text{ và } \cot\frac{2017\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ví dụ 2. Cho $\cos\alpha = \frac{1}{3}$. Tính $\sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$.**Lời giải.** Ta có $\sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(\alpha - 2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha = \frac{1}{3}$.**Ví dụ 3.** Rút gọn biểu thức $A = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(2\pi - x) + \cos(3\pi + x)$.

Lời giải. Ta có
$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \\ \cos(2\pi - x) = \cos x \\ \cos(3\pi + x) = -\cos x \end{cases} \Rightarrow A = -\sin x + \cos x - \cos x = -\sin x.$$

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC , chứng minh rằng $\sin(A + B + 2C) = -\sin C$.**Lời giải.** Ta có $A + B + C = 180^\circ \Rightarrow A + B + 2C = 180^\circ + C$.

$$\Rightarrow \sin(A + B + 2C) = \sin(180^\circ + C) = -\sin C.$$

Ví dụ 5. Tính giá trị của biểu thức $B = \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ + \dots + \cos 180^\circ$.**Lời giải.** Ta có $\cos(180^\circ - x) = -\cos x \Rightarrow \cos x + \cos(180^\circ - x) = 0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 20^\circ + \cos 160^\circ = 0 \\ \cos 40^\circ + \cos 140^\circ = 0 \\ \cos 60^\circ + \cos 120^\circ = 0 \\ \cos 80^\circ + \cos 100^\circ = 0 \end{cases} \Rightarrow B = \cos 90^\circ + \cos 180^\circ = -1.$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN**Bài 1.** Cho $\tan(\pi + x) = 1 - \sqrt{2}$ với $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Tính $\cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.**Lời giải.** Ta có $\tan(\pi + x) = \tan x \Rightarrow \tan x = 1 - \sqrt{2}$.

$$\Rightarrow \cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\tan x = \sqrt{2} - 1.$$

Bài 2. Tính giá trị của biểu thức $A = \sin\frac{7\pi}{6} + \cos 9\pi + \tan\left(-\frac{5\pi}{4}\right) + \cot\frac{7\pi}{2}$.

Lời giải. Ta có $A = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + \cos(\pi + 4.2\pi) - \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \cot\left(\frac{\pi}{2} + 3\pi\right)$
 $= -\sin\frac{\pi}{6} + \cos\pi - \tan\frac{\pi}{4} + \cot\frac{\pi}{2} = -\frac{1}{2} - 1 - 1 + 0 = -\frac{5}{2}.$

Bài 3. Rút gọn biểu thức $D = \cos(5\pi - x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(3\pi - x)$.

Lời giải. Ta có $\cos(5\pi - x) = \cos(4\pi + \pi - x) = \cos(\pi - x) = -\cos x$;

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x;$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x;$$

$$\cot(3\pi - x) = \cot(-x) = -\cot x;$$

$$\Rightarrow D = -\cos x - \sin x.$$

Bài 4. Rút gọn biểu thức $A = \cos(5\pi - x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(3\pi - x)$.

Lời giải. Ta có $\cos(5\pi - x) = \cos(\pi - x + 2.2\pi) = \cos(\pi - x) = -\cos x$;

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos x;$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x;$$

$$\cot(3\pi - x) = \cot(-x) = -\cot x;$$

$$\text{Suy ra } A = -\cos x - (-\cos x) + \cot x + (-\cot x) = 0.$$

Bài 5. Với điều kiện có nghĩa, hãy rút gọn biểu thức sau

$$B = \sqrt{2} - \frac{1}{\sin(x + 2013\pi)} \cdot \sqrt{\frac{1}{1 + \cos x} + \frac{1}{1 - \cos x}} \text{ với } \pi < x < 2\pi.$$

Lời giải. Ta có $\sin(x + 2013\pi) = \sin(x + \pi + 1006.2\pi) = \sin(x + \pi) = -\sin x$.

Do đó

$$B = \sqrt{2} + \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos x + 1 + \cos x}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}}$$

$$= \sqrt{2} + \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{2}{1 - \cos^2 x}}$$

$$= \sqrt{2} + \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{2}{\sin^2 x}}$$

$$= \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{\sin x |\sin x|} \right).$$

$$\text{Vì } \pi < x < 2\pi \Rightarrow \sin x < 0 \text{ nên } B = \sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{\sin^2 x} \right) = -\sqrt{2} \cot^2 x.$$

Dạng 4. Rút gọn biểu thức và chứng minh đẳng thức

Một số hệ thức hay dùng trong bài toán rút gọn biểu thức hoặc chứng minh đẳng thức:

- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.
- $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1, \quad \alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 1. Rút gọn biểu thức $A = \sin^2 x + \sin^2 x \tan^2 x$.

Lời giải. Ta có: $A = \sin^2 x + \sin^2 x \tan^2 x = \sin^2 x (1 + \tan^2 x) = \sin^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \tan^2 x$.

Ví dụ 2. Rút gọn biểu thức $B = \frac{2\sin^2 x - 1}{\sin^2 x - \sin x \cos x}$.

Lời giải. Ta có:

$$B = \frac{2\sin^2 x - 1}{\sin^2 x - \sin x \cos x} = \frac{2\sin^2 x - (\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin x (\sin x - \cos x)} = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x} = 1 + \cot x.$$

Ví dụ 3. Rút gọn biểu thức: $A = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha$.

Lời giải. Ta có $A = \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + \cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha = \sin^2 \alpha - \sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha = 1$.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng: $\frac{2 + \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = 3 \tan^2 \alpha + 2$.

Lời giải. Ta có: $\frac{2 + \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{2 + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{2}{\cos^2 \alpha} + \tan^2 \alpha = 2 + 2 \tan^2 \alpha + \tan^2 \alpha = 3 \tan^2 \alpha + 2$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Rút gọn biểu thức $M = \frac{4\cos^2 x - 2}{\sin x + \cos x}$.

Lời giải. Ta có $B = \frac{4\cos^2 x - 2(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin x + \cos x} = 2\sin x - 2\cos x$.

Bài 2. Rút gọn biểu thức $N = \sqrt{\sin^2 x (4 + \cot x) + \cos^2 x (1 + 3 \tan x)}$.

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} N &= \sqrt{4\sin^2 x + \sin^2 \cot x + \cos^2 x + 3\cos^2 x \tan x} \\ &= \sqrt{4\sin^2 x + \sin^2 x \frac{\cos x}{\sin x} + \cos^2 x + 3\cos^2 x \frac{\sin x}{\cos x}} \\ &= \sqrt{4\sin^2 x + 4\sin x \cos x + \cos^2 x} \\ &= \sqrt{(2\sin x + \cos x)^2} \\ &= |2\sin x + \cos x|. \end{aligned}$$

Bài 3. Rút gọn biểu thức $C = (\tan x - \cot x)^2 - (\tan x + \cot x)^2$.

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} C &= \tan^2 x - 2\tan x \cot x + \cot^2 x - \tan^2 x - 2\tan x \cot x - \cot^2 x \\ &= -4\tan x \cot x = -4. \end{aligned}$$

Bài 4. Rút gọn biểu thức $B = 3[(\sin^4 x)^2 - (\cos^4 x)^2] + 4[(\cos^2 x)^3 - 2(\sin^2 x)^3] + 6\sin^4 x$.

Lời giải. Đặt $t = \sin^2 x$ thì ta có $\cos^2 x = 1 - t$.

$$\begin{aligned} B &= 3(\sin^4 x + \cos^4 x)(\sin^4 x - \cos^4 x) + 4[(\cos^2 x)^3 - 2(\sin^2 x)^3] + 6\sin^4 x \\ &= 3[t^2 + (1-t)^2][t^2 - (1-t)^2] + 4[(1-t)^3 - 2t^3] + 6t^2 = 1. \end{aligned}$$

Bài 5. Chứng minh rằng $\frac{\cot^2 \alpha}{1 + \cot^2 \alpha} \cdot \frac{1 + \tan^2 \alpha}{\tan^2 \alpha} = \frac{\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha}{1 + \tan^4 \alpha}$.

Lời giải. HƯỚNG DẪN.

Xét hiệu

$$\begin{aligned} &\frac{\cot^2 \alpha}{1 + \cot^2 \alpha} \cdot \frac{1 + \tan^2 \alpha}{\tan^2 \alpha} - \frac{\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha}{1 + \tan^4 \alpha} = \frac{\cot^2 \alpha}{1 + \cot^2 \alpha} \cdot \frac{\cot^2 \alpha + 1}{\cot^2 \alpha \tan^2 \alpha} - \frac{\tan^4 \alpha + 1}{\tan^2 \alpha (1 + \tan^4 \alpha)} \\ &= \cot^2 \alpha - \cot^2 \alpha = 0. \text{ Suy ra điều phải chứng minh.} \end{aligned}$$

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 1. Cho $\sin \alpha + \cos \alpha = m$. Tính các giá trị của $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$.

Lời giải. HƯỚNG DẪN.

$$\text{Có } \sin \alpha + \cos \alpha = m \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{m^2 - 1}{2}.$$

$$\text{Khi đó } \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = \frac{1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{4}{(m^2 - 1)^2} - 2.$$

Bài 2. Chứng minh rằng biểu thức sau độc lập với $x; y$.

$$B = \frac{\sin^2 x - \cos^2 y}{\sin^2 x \sin^2 y} + \cot^2 x \cot^2 y.$$

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sin^2 x - \cos^2 y}{\sin^2 x \sin^2 y} + \frac{\cos^2 x \cos^2 y}{\sin^2 x \sin^2 y} \\ &= \frac{\sin^2 x - (1 - \cos^2 x) \cos^2 y}{\sin^2 x \sin^2 y} \\ &= \frac{\sin^2 x - \sin^2 x \cos^2 y}{\sin^2 x \sin^2 y} \\ &= \frac{\sin^2 x (1 - \cos^2 y)}{\sin^2 x \sin^2 y} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Như vậy, giá trị của biểu thức B không phụ thuộc vào giá trị của $x; y$.

Bài 3. Chứng minh biểu thức sau độc lập với đối với x .

$$P = \frac{\tan^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\cot^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

Lời giải. $P = \frac{\tan^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\cot^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\tan^2 x}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\cot^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$
 $= \tan^2 x (1 + \cot^2 x) + \cot^2 x (1 + \tan^2 x) - \tan^2 x - \cot^2 x = \tan^2 x + 1 + \cot^2 x + 1 - \tan^2 x - \cot^2 x = 2.$
 Vậy P không phụ thuộc vào x .

Bài 4. Cho $\sin a \cos a = -\frac{5}{18}$ và $\frac{\pi}{2} < a < \pi$. Tính $\sin a$ và $\cos a$.

Lời giải. Ta có $(\sin a + \cos a)^2 = 1 + 2 \sin a \cos a = 1 + 2 \cdot \left(-\frac{5}{18}\right) = \frac{4}{9}$.

Suy ra, $\sin a + \cos a = \frac{2}{3}$ hoặc $\sin a + \cos a = -\frac{2}{3}$.

Xét hai trường hợp:

a) $\sin a + \cos a = \frac{2}{3}$ và $\sin a \cos a = -\frac{5}{18}$.

$$\text{Giá trị } \sin a, \cos a \text{ là nghiệm của phương trình } X^2 - \frac{2}{3}X - \frac{5}{18} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{2 + \sqrt{14}}{6} \\ X = \frac{2 - \sqrt{14}}{6} \end{cases}$$

$$\text{Vì } \frac{\pi}{2} < a < \pi \text{ nên } \sin a > 0 \text{ và } \cos a < 0. \text{ Vậy } \sin a = \frac{2 + \sqrt{14}}{6} \text{ và } \cos a = \frac{2 - \sqrt{14}}{6}.$$

b) $\sin a + \cos a = -\frac{2}{3}$ và $\sin a \cos a = -\frac{5}{18}$.

Giá trị $\sin a$, $\cos a$ là nghiệm của phương trình $X^2 + \frac{2}{3}X - \frac{5}{18} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{-2 + \sqrt{14}}{6} \\ X = \frac{-2 - \sqrt{14}}{6} \end{cases}$.

Vì $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ nên $\sin a > 0$ và $\cos a < 0$. Vậy $\sin a = \frac{-2 + \sqrt{14}}{6}$ và $\cos a = \frac{-2 - \sqrt{14}}{6}$.

Vậy $\sin a = \frac{2 + \sqrt{14}}{6}$ và $\cos a = \frac{2 - \sqrt{14}}{6}$ hoặc $\sin a = \frac{-2 + \sqrt{14}}{6}$ và $\cos a = \frac{-2 - \sqrt{14}}{6}$.

Bài 5. Cho $\tan\left(\frac{11\pi}{2} + x\right) = 2$. Tính $\sin\left(x + \frac{7\pi}{2}\right)$ với $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Lời giải. Ta có $\tan\left(\frac{11\pi}{2} + x\right) = \tan\left(5\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x = 2 \Rightarrow \cot x = -2 \Rightarrow \tan x = -\frac{1}{2}$.

$\sin\left(x + \frac{7\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 4\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$.

Lại có $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = \frac{5}{4} \Rightarrow \cos x = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ (do với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thì $\cos x < 0$).

$\sin\left(x + \frac{7\pi}{2}\right) = -\cos x = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Bài 6. Cho $\cot\left(\frac{2017\pi}{2} + x\right) = \frac{1}{2}$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \frac{2\sin^2 x + 3\sin x \cos x - \cos^2 x}{\cos^2 x - 3\sin^2 x}.$$

Lời giải. Ta có $\cot\left(\frac{2017\pi}{2} + x\right) = \cot\left(1008\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\tan x$

$\Rightarrow \tan x = -\frac{1}{2}$.

$\Rightarrow P = \frac{2\tan^2 x + 3\tan x - 1}{1 - 3\tan^2 x} = -8$.

Bài 7. Cho $6\cos^2 \alpha + \cos \alpha - 2 = 0$. Biết $A = \frac{2\sin \alpha \cos \alpha - \sin \alpha}{2\cos \alpha - 1} = a + b\tan \alpha$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính giá trị của biểu thức $a + b$.

Lời giải. Điều kiện $2\cos \alpha - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \cos \alpha \neq \frac{1}{2}$.

Ta có $6\cos^2 \alpha + \cos \alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{1}{2} \\ \cos \alpha = -\frac{2}{3} \end{cases}$.

Do $\cos \alpha \neq \frac{1}{2}$ nên $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$.

Mặt khác $A = \frac{2\sin \alpha \cos \alpha - \sin \alpha}{2\cos \alpha - 1} = \sin \alpha = \cos \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{2}{3}\tan \alpha$.

Từ đó suy ra $\begin{cases} a = 0 \\ b = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow a + b = -\frac{2}{3}$.

Bài 8. Cho $\tan \alpha = \sqrt[4]{2}$, biết $A = \frac{2\cos^2 \alpha - 1004}{\sin^2 \alpha} = a + b\sqrt{2}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $\sin \frac{\pi(a-b)}{3}$.

Lời giải. Ta có $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{cases} \cos^2 \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} \\ \sin^2 \alpha = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \end{cases}$.

Từ đó suy ra $A = -1004 - 1002\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} a = -1004 \\ b = -1002 \end{cases} \Rightarrow a - b = -2 \Rightarrow \sin \frac{\pi(a-b)}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Bài 9. Cho $\sin \alpha + 3 \cos \alpha = 2$, ở đó $0 < \alpha < \pi$. Tính $\tan \alpha$.

Lời giải. Do $0 < \alpha < \pi$ nên $\begin{cases} -1 < \cos \alpha < 1 \\ 0 < \sin \alpha < 1. \end{cases}$

Từ giả thiết ta có $\sin \alpha = 2 - 3 \cos \alpha$.

Mà $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ nên $(2 - 3 \cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 1$.

Từ đó suy ra $10 \cos^2 \alpha - 12 \cos \alpha + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{6 + \sqrt{6}}{10} \\ \cos \alpha = \frac{6 - \sqrt{6}}{10} \end{cases}$.

Nếu $\cos \alpha = \frac{6 + \sqrt{6}}{10}$ thì $\sin \alpha = 2 - 3 \cos \alpha = \frac{2 - 3\sqrt{6}}{10} < 0$ (loại).

Nếu $\cos \alpha = \frac{6 - \sqrt{6}}{10}$ thì $\sin \alpha = 2 - 3 \cos \alpha = \frac{2 + 3\sqrt{6}}{10} \in (0; 1)$ (thỏa mãn).

Từ đó suy ra $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3 + 2\sqrt{6}}{3}$.

§3. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

I. Công thức cộng

Dạng 1. Công thức cộng

Để giải các bài toán liên quan đến các công thức cộng, ta thường sử dụng các công thức sau:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin(a \pm b) &= \sin a \cos b \pm \sin b \cos a. & \text{c) } \tan(a \pm b) &= \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}. \\ \text{b) } \cos(a \pm b) &= \cos a \cos b \mp \sin a \sin b. \end{aligned}$$

Ví dụ 1. Tính giá trị của biểu thức $P = \cos 10^\circ + \cos 11^\circ \cos 21^\circ + \cos 69^\circ \cos 79^\circ$.

Lời giải. Ta có $P = \cos 10^\circ + \cos 11^\circ \cos 21^\circ + \sin 11^\circ \cos 21^\circ = \cos 10^\circ + \cos(11^\circ - 21^\circ) = 2 \cos 10^\circ$.

Ví dụ 2. Rút gọn các biểu thức:

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \frac{\sqrt{2} \cos a - 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + a\right)}{-\sqrt{2} \sin a + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + a\right)}. \\ \text{b) } B &= (\tan a - \tan b) \cot(a - b) - \tan a \tan b. \end{aligned}$$

Lời giải.

$$\text{a) Ta có } A = \frac{\sqrt{2} \cos a - 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos a - \sin \frac{\pi}{4} \sin a \right)}{-\sqrt{2} \sin a + 2 \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos a + \cos \frac{\pi}{4} \sin a \right)} = \frac{\sqrt{2} \sin a}{\sqrt{2} \cos a} = \tan a.$$

$$\text{b) Ta có } B = \tan(a - b) (1 + \tan a \tan b) \cot(a - b) - \tan a \tan b = 1.$$

Ví dụ 3. Chứng minh các đẳng thức sau:

$$\begin{aligned} \text{a) } \cos a + \sin a &= \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + a\right). \\ \text{b) } \cos a - \sin a &= \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + a\right) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - a\right). \end{aligned}$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có } \cos a + \sin a &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos a + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin a \right) = \sqrt{2} \left(\cos a \cos \frac{\pi}{4} + \sin a \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right). \\ \text{Mặt khác ta cũng có } \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos a + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin a \right) &= \sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos a + \cos \frac{\pi}{4} \sin a \right) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + a\right). \end{aligned}$$

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC , chứng minh rằng $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$.

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned}
 \tan A + \tan B + \tan C &= \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B} + \frac{\sin C}{\cos C} \\
 &= \frac{\sin A \cos B + \sin B \cos A}{\cos A \cos B} + \frac{\sin C}{\cos C} \\
 &= \frac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B} + \frac{\sin C}{\cos C} \\
 &= \frac{\sin C}{\cos A \cos B} + \frac{\sin C}{\cos C} \\
 &= \sin C \left(\frac{1}{\cos A \cos B} + \frac{1}{\cos C} \right) \\
 &= \sin C \cdot \frac{\cos A \cos B + \cos C}{\cos A \cos B \cos C} \\
 &= \tan C \cdot \frac{\cos A \cos B - \cos(A+B)}{\cos A \cos B} \\
 &= \tan C \cdot \frac{\cos A \cos B - \cos A \cos B + \sin A \sin B}{\cos A \cos B \cos C} \\
 &= \tan A \tan B \tan C.
 \end{aligned}$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Không sử dụng MTCT, hãy tính giá trị $\sin 15^\circ$, $\cos 15^\circ$, $\sin 75^\circ$ và $\cos 75^\circ$.

Lời giải. $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

$$\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Bài 2. Rút gọn biểu thức $P = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - a\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - a\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right)}$.

Lời giải. $P = \frac{\sin \frac{\pi}{4} \cos a - \cos \frac{\pi}{4} \sin a + \cos \frac{\pi}{4} \cos a + \sin \frac{\pi}{4} \sin a}{\sin \frac{\pi}{4} \cos a - \cos \frac{\pi}{4} \sin a - \cos \frac{\pi}{4} \cos a - \sin \frac{\pi}{4} \sin a} = \frac{\sqrt{2} \cos a}{-\sqrt{2} \sin a} = -\cot a$.

Bài 3. Tính $\alpha + \beta$ biết $\tan \alpha = \frac{2}{5}$, $\tan \beta = \frac{3}{7}$ với $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$.

Lời giải. Ta có $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = 1$.

Do $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ nên $0 < \alpha + \beta < \pi$. Vậy $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$.

Bài 4. Tính

a) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$, biết $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

b) $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$, biết $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

c) $\cos(a+b)$, $\sin(a-b)$, biết $\sin a = \frac{4}{5}$, $0^\circ < a < 90^\circ$ và $\sin b = \frac{2}{3}$, $90^\circ < b < 180^\circ$.

Lời giải.

a) Do $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\cos \alpha > 0$. Do đó $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Ta có $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \cos \alpha \cos \frac{\pi}{3} - \sin \alpha \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-3 + \sqrt{6}}{6}$.

b) Do $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\sin \alpha > 0$. Do đó $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Suy ra $\tan \alpha = -2\sqrt{2}$.

Ta có $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \alpha \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\tan \alpha - 1}{\tan \alpha + 1} = \frac{-2\sqrt{2} - 1}{-2\sqrt{2} + 1} = \frac{9 + 4\sqrt{2}}{7}$.

c) Có $0^\circ < a < 90^\circ$ nên $\cos a = \frac{3}{5}$, $90^\circ < b < 180^\circ$ nên $\cos b = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b = \frac{3}{5} \cdot \frac{-\sqrt{5}}{3} - \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = -\frac{8 + 3\sqrt{5}}{15}$.

$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a = \frac{4}{5} \cdot \frac{-\sqrt{5}}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = -\frac{6 + 4\sqrt{5}}{15}$.

Bài 5. Chứng minh rằng

a) $\frac{\sin(a + b)}{\sin(a - b)} = \frac{\tan a + \tan b}{\tan a - \tan b}$.

b) $\frac{\cos(a - b)}{\cos(a + b)} = \frac{\cot a \cot b + 1}{\cot a \cot b - 1}$.

Lời giải.

a) $\frac{\sin(a + b)}{\sin(a - b)} = \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\sin a \cos b - \sin b \cos a} = \frac{\frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b}}{\frac{\sin a \cos b - \sin b \cos a}{\cos a \cos b}} = \frac{\tan a + \tan b}{\tan a - \tan b}$.

b) $\frac{\cos(a - b)}{\cos(a + b)} = \frac{\cos a \cos b + \sin a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b} = \frac{\frac{\cos a \cos b + \sin a \sin b}{\sin a \sin b}}{\frac{\cos a \cos b - \sin a \sin b}{\sin a \sin b}} = \frac{\cot a \cot b + 1}{\cot a \cot b - 1}$.

Bài 6. Rút gọn các biểu thức

a) $A = \sin(a + b) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin(-b)$.

b) $B = \cos\left(\frac{\pi}{4} + a\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right) + \frac{1}{2} \sin^2 a$.

c) $C = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right) - \sin(a - b)$.

Lời giải.

a) $A = \sin a \cos b + \sin b \cos a - \cos a \sin b = \sin a \cos b$.

b) Ta có

$$\begin{aligned} B &= \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos a - \sin \frac{\pi}{4} \sin a\right) \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos a + \sin \frac{\pi}{4} \sin a\right) + \frac{1}{2} \sin^2 a \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos a - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin a\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos a + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin a\right) + \frac{1}{2} \sin^2 a \\ &= \frac{1}{2} (\cos a - \sin a) (\cos a + \sin a) + \frac{1}{2} \sin^2 a \\ &= \frac{1}{2} (\cos^2 a - \sin^2 a) + \frac{1}{2} \sin^2 a = \frac{1}{2} \cos^2 a. \end{aligned}$$

c) Ta có

$$\begin{aligned} C &= \left(\cos \frac{\pi}{2} \cos a + \sin \frac{\pi}{2} \sin a \right) \left(\sin \frac{\pi}{2} \cos b - \sin b \cos \frac{\pi}{2} \right) - (\sin a \cos b - \sin b \cos a) \\ &= \sin a \cos b - \sin a \cos b + \sin b \cos a = \sin b \cos a. \end{aligned}$$

Bài 7. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \cos^2 a.$

b) $\cos(a+b)\cos(a-b) = \cos^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \sin^2 a.$

Lời giải.

a) $\begin{aligned} \sin(a+b)\sin(a-b) &= (\sin a \cos b + \sin b \cos a)(\sin a \cos b - \sin b \cos a) \\ &= \sin^2 a \cos^2 b - \sin^2 b \cos^2 a = \sin^2 a (1 - \sin^2 b) - \sin^2 b (1 - \sin^2 a) = \sin^2 a - \sin^2 b. \end{aligned}$
 Tương tự: $\sin^2 a \cos^2 b - \sin^2 b \cos^2 a = (1 - \cos^2 a) \cos^2 b - (1 - \cos^2 b) \cos^2 a = \cos^2 b - \cos^2 a.$

b) $\begin{aligned} \cos(a+b)\cos(a-b) &= (\cos a \cos b - \sin a \sin b)(\cos a \cos b + \sin a \sin b) \\ &= \cos^2 a \cos^2 b - \sin^2 a \sin^2 b = \cos^2 a (1 - \sin^2 b) - (1 - \cos^2 a) \sin^2 b = \cos^2 a - \sin^2 b. \end{aligned}$
 Tương tự: $\cos^2 a \cos^2 b - \sin^2 a \sin^2 b = (1 - \sin^2 a) \cos^2 b - \sin^2 a (1 - \cos^2 b) = \cos^2 b - \sin^2 a.$

Bài 8. Cho $a - b = \frac{\pi}{4}$, chứng minh rằng $\frac{1 + \tan b}{1 - \tan b} = \tan a.$

Lời giải. Ta có $a - b = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow a = \frac{\pi}{4} + b.$

Do đó $\tan a = \tan \left(\frac{\pi}{4} + b \right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan b}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan b} = \frac{1 + \tan b}{1 - \tan b}.$

Bài 9. Cho $a + b = \frac{\pi}{4}$, chứng minh rằng $(1 + \tan a)(1 + \tan b) = 2.$

Lời giải. Ta có $(1 + \tan a)(1 + \tan b) = (1 + \tan a) \left(1 + \tan \left(\frac{\pi}{4} - a \right) \right) = (1 + \tan a) \left(1 + \frac{1 - \tan a}{1 + \tan a} \right)$
 $= (1 + \tan a) \frac{2}{1 + \tan a} = 2.$

Bài 10. Cho tam giác ABC , chứng minh rằng $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1.$

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} &= \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} \right) \\ &= \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} \right) \left(1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \right) \\ &= \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \cot \frac{C}{2} \left(1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \right) \\ &= \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + 1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} = 1. \end{aligned}$$

II. Công thức nhân đôi

Định lý 1 (Công thức góc nhân đôi). Với mọi giá trị của góc lượng giác α cho trước, ta có

- $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$

$$\bullet \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha.$$

$$\bullet \tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}, \begin{cases} \alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Hệ quả 1 (Công thức hạ bậc). Với mọi giá trị của góc lượng giác α cho trước, ta có

$$\bullet \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$$

$$\bullet \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.$$

$$\bullet \tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Hệ quả 2 (Công thức nhân ba). Với mọi giá trị của góc lượng giác α cho trước, ta có

$$\bullet \sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha.$$

$$\bullet \cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha.$$

(Chứng minh lại khi sử dụng trong bài tập tự luận)

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin 3\alpha &= \sin(\alpha + 2\alpha) = \sin \alpha \cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cos \alpha = \sin \alpha(1 - 2\sin^2 \alpha) + 2\sin \alpha \cos^2 \alpha \\ &= \sin \alpha - 2\sin^3 \alpha + 2\sin \alpha(1 - \sin^2 \alpha) = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \cos 3\alpha &= \cos(\alpha + 2\alpha) = \cos \alpha \cos 2\alpha - \sin \alpha \sin 2\alpha = \cos \alpha(2\cos^2 \alpha - 1) - 2\sin^2 \alpha \cos \alpha \\ &= 2\cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2(1 - \cos^2 \alpha)\cos \alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha. \end{aligned}$$

III. Các dạng toán

Dạng 2. Tính các giá trị lượng giác của các góc cho trước

Sử dụng công thức nhân đôi hoặc hạ bậc để tính giá trị lượng giác theo yêu cầu.

Ví dụ 5. Tính các giá trị lượng giác của góc $\alpha = 22^\circ 30'$.

Lời giải. Có $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 \Leftrightarrow 2\cos^2 \alpha - 1 = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \text{ vì } 0^\circ < \alpha < 90^\circ.$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2\cos \alpha} = \frac{\sin 45^\circ}{2\cos \alpha} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}.$$

$$\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = 1 + \sqrt{2}, \cot 2\alpha = \frac{1}{\tan 2\alpha} = \sqrt{2} - 1.$$

Ví dụ 6. Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, với $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Tính giá trị của $\sin 2\alpha$ và $\tan 2\alpha$.

Lời giải. Ta có $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{16}{25}$

Do $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ nên $\cos \alpha < 0 \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5}$.

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}.$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{3}{4} \Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{24}{7}.$$

Dạng 3. Rút gọn biểu thức cho trước

Sử dụng công thức nhân đôi hoặc hạ bậc kết hợp việc đánh giá quan hệ bội lẫn giữa các cung và các bậc.

Ví dụ 7. Rút gọn các biểu thức sau

a) $A = \sin 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ.$

b) $B = \cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \sin 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \Rightarrow A \cdot \cos 10^\circ = \sin 10^\circ \cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \\ &= \frac{1}{2} \sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ = \frac{1}{4} \sin 40^\circ \cos 40^\circ = \frac{1}{8} \sin 80^\circ = \frac{1}{8} \cos 10^\circ \\ \text{Vậy } A &= \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

$$\text{b) } B = \cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x = \cos x \sin x (\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{4} \sin 4x.$$

Dạng 4. Chứng minh đẳng thức lượng giác

Sử dụng công thức nhân đôi hoặc hạ bậc kết hợp việc đánh giá quan hệ bội lẫn giữa các cung và các bậc.

Ví dụ 8. Chứng minh các đẳng thức sau trong điều kiện có nghĩa của biểu thức

a) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\alpha$

b) $\frac{1 - \cos \alpha + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin \alpha} = \cot \alpha$

c) $\frac{\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha}{2(1 - \cos \alpha)} = \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{a) VT} &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha \\ &= 1 - \frac{1 - \cos 4\alpha}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\alpha = \text{VP}. \end{aligned}$$

$$\text{b) VT} = \frac{1 - \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1}{2 \sin \alpha \cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha (2 \cos \alpha - 1)}{\sin \alpha (2 \cos \alpha - 1)} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cot \alpha = \text{VP}.$$

$$\begin{aligned} \text{c) VT} &= \frac{\sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{2(1 - \cos \alpha)} = \frac{\sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha}{2(1 - \cos \alpha)} = \frac{\sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{2(1 - \cos \alpha)} \\ &= \frac{1 - \cos^2 \alpha}{2(1 - \cos \alpha)} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} = \frac{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \text{VP}. \end{aligned}$$

Ví dụ 9. Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến x

$$P = \frac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x} \cdot \cot x.$$

Lời giải. $P = \frac{2\sin^2 x + 2\sin x \cos x}{2\cos^2 x + 2\sin x \cos x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{2\sin x(\sin x + \cos x)}{2\cos x(\sin x + \cos x)} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 1.$

Vậy giá trị của biểu thức P không phụ thuộc vào giá trị của biến x .

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 11. Cho biết $\tan \frac{a}{2} = 2$. Hãy tính giá trị biểu thức: $P = \frac{\tan a + \cot a}{2\tan a - 4\cot a}.$

Lời giải. Ta có $\tan a = \frac{2\tan \frac{a}{2}}{1 - \tan^2 \frac{a}{2}} = -\frac{4}{3}, \cot a = \frac{1}{\tan a} = -\frac{3}{4}.$

$$P = \frac{-\frac{4}{3} - \frac{3}{4}}{2 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - 4 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)} = -\frac{25}{4}.$$

Bài 12. Cho $\tan x = \frac{\sqrt{1+y} + \sqrt{1-y}}{\sqrt{1+y} - \sqrt{1-y}}$. Chứng minh rằng $y = \sin 2x$.

Lời giải. $\tan x = \frac{\sqrt{1+y} + \sqrt{1-y}}{\sqrt{1+y} - \sqrt{1-y}} = \frac{(\sqrt{1+y} + \sqrt{1-y})^2}{1+y-1-y} = \frac{2+2\sqrt{1-y^2}}{2y} = \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}$

$$y = \sin 2x = 2\sin x \cos x \Leftrightarrow \frac{y}{\cos^2 x} = \frac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x} \Leftrightarrow y(1 + \tan^2 x) = 2\tan x$$

$$\Leftrightarrow y \left(1 + \frac{(1 + \sqrt{1-y^2})^2}{y^2} \right) = 2 \cdot \frac{1 + \sqrt{1-y^2}}{y} \Leftrightarrow y^2 + 2 - y^2 + 2\sqrt{1-y^2} = 2 + 2\sqrt{1-y^2} \text{ (đúng).}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 13. Rút gọn $A = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$.

Lời giải. $A = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2\cos \frac{\pi}{4}}}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2\cos \frac{\pi}{8}}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + 2\cos \frac{\pi}{16}} = \frac{1}{2} \cdot 2\cos \frac{\pi}{32} = \cos \frac{\pi}{32}$

Bài 14. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \sin 6^\circ \cos 12^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ.$

b) $B = \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9} \cos \frac{8\pi}{9}.$

Lời giải.

a) $A \cdot \cos 6^\circ = \sin 6^\circ \cos 6^\circ \cos 12^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ = \frac{1}{2} \sin 12^\circ \cos 12^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ$
 $= \frac{1}{4} \sin 24^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ = \frac{1}{8} \sin 48^\circ \cos 48^\circ = \frac{1}{16} \sin 96^\circ = \frac{1}{16} \cos 6^\circ$
 $\Rightarrow A = \frac{1}{16}.$

b) $B \cdot \sin \frac{2\pi}{9} = \sin \frac{2\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9} \cos \frac{8\pi}{9} = \frac{1}{2} \sin \frac{4\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9} \cos \frac{8\pi}{9} = \frac{1}{4} \sin \frac{8\pi}{9} \cos \frac{8\pi}{9} = \frac{1}{8} \sin \frac{16\pi}{9} =$
 $\frac{1}{8} \sin \left(2\pi - \frac{2\pi}{9} \right) = -\frac{1}{8} \sin \frac{2\pi}{9}$
 $\Rightarrow B = -\frac{1}{8}$

Bài 15. Tính giá trị của $\sin 18^\circ$ và $\cos 18^\circ$.

Lời giải. Đặt $x = 18^\circ$, có $5x = 90^\circ \Leftrightarrow 3x = 90^\circ - 2x \Rightarrow \cos 2x = \sin 3x$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x = 3\sin x - 4\sin^3 x \Leftrightarrow 4\sin^3 x - 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - 1)(4\sin^2 x + 2\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 & (\text{loại}) \\ \sin x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} & (\text{nhận}) \\ \sin x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} & (\text{loại}) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \sin 18^\circ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \text{ và } \cos 18^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}.$$

Bài 16. Chứng minh các đẳng thức sau đây (trong điều kiện có nghĩa của biểu thức):

$$\text{a) } \tan x = \frac{\sin x + \sin 2x}{1 + \cos x + \cos 2x}.$$

$$\text{b) } \tan^2 x = \frac{2\sin 2x - \sin 4x}{2\sin 2x + \sin 4x}.$$

$$\text{c) } \sin^4 x + \cos^4 x - 6\sin^2 x \cos^2 x = \cos 4x.$$

Lời giải.

$$\text{a) } VP = \frac{\sin x + 2\sin x \cos x}{1 + \cos x + 2\cos^2 x - 1} = \frac{\sin x(1 + 2\cos x)}{\cos x(1 + 2\cos x)} = \tan x = VT$$

$$\text{b) } VP = \frac{2\sin 2x - 2\sin 2x \cos 2x}{2\sin 2x + 2\sin 2x \cos 2x} = \frac{2\sin 2x(1 - \cos 2x)}{2\sin 2x(1 + \cos 2x)} = \frac{2\sin^2 x}{2\cos^2 x} = \tan^2 x = VT$$

$$\text{c) } VT = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x - 6\sin^2 x \cos^2 x \\ = 1 - 8\sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2\sin^2 2x = \cos 4x = VP$$

Bài 17. Cho góc α thỏa $\cos 4\alpha = \frac{2}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \sin^6 \alpha \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^6 \alpha$.

Lời giải. $P = \sin^6 \alpha \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^6 \alpha = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha)$
 $= \frac{1}{4} \sin^2 2\alpha (1 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha) = \frac{1}{4} \sin^2 2\alpha \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha\right).$

$$\text{Mà } \cos 4\alpha = 1 - 2\sin^2 2\alpha = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \sin^2 2\alpha = \frac{1}{6}.$$

$$\text{Vậy nên } P = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}\right) = \frac{11}{288}.$$

Bài 18. Rút gọn biểu thức $A = \sin^5 \alpha \cos \alpha - \cos^5 \alpha \sin \alpha$.

Lời giải. $A = \sin \alpha \cos \alpha (\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha) = \frac{1}{2} \sin 2\alpha (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$
 $= \frac{1}{2} \sin 2\alpha (-\cos 2\alpha) = -\frac{1}{4} \sin 4\alpha$

Bài 19. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào biến số x .

$$\text{a) } A = 8\sin^4 x + 4\cos 2x - \cos 4x - 3.$$

$$\text{b) } B = \frac{\tan 2x}{\tan x} - \frac{1}{\cos 2x}.$$

Lời giải.

$$\text{a) } A = 8(\sin^2 x)^2 + 4\cos 2x - \cos 4x - 3 = 8\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 + 4\cos 2x - \cos 4x - 3 \\ = 2(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) + 4\cos 2x - \cos 4x - 3 = 2\cos^2 2x - \cos 4x - 1 = \cos 4x - \cos 4x = 0.$$

Vậy A không phụ thuộc vào giá trị của x .

$$\text{b) } B = \frac{\sin 2x \cos x}{\cos 2x \sin x} - \frac{1}{\cos 2x} = \frac{\sin 2x \cos x - \sin x}{\sin x \cos 2x} = \frac{2\sin x \cos^2 x - \sin x}{\sin x \cos 2x} \\ = \frac{\sin x(2\cos^2 x - 1)}{\sin x \cos 2x} = \frac{\sin x \cos 2x}{\sin x \cos 2x} = 1.$$

Vậy B không phụ thuộc vào giá trị của x .

IV. Công thức biến đổi

Dạng 5. Biến đổi một biểu thức thành một tổng hoặc thành một tích

Đây là dạng toán cơ bản chủ yếu để tập cho học sinh áp dụng được đối với các công thức biến đổi (tổng thành tích, tích thành tổng) đã học. Dưới đây là các công thức biến đổi đó.

1. Công thức biến đổi tích thành tổng

$$\begin{aligned} \bullet \cos a \cos b &= \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)] & \bullet \sin a \cos b &= \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)] \\ \bullet \sin a \sin b &= \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)] & \bullet \cos a \sin b &= \frac{1}{2} [\sin(a+b) - \sin(a-b)] \end{aligned}$$

2. Công thức biến đổi tổng thành tích

$$\begin{aligned} \bullet \sin a + \sin b &= 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} & \bullet \cos a - \cos b &= -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2} \\ \bullet \sin a - \sin b &= 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2} & \bullet \tan a + \tan b &= \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b} \\ \bullet \cos a + \cos b &= 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} & \bullet \tan a - \tan b &= \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b} \end{aligned}$$

Ví dụ 10. Biến đổi mỗi biểu thức sau đây thành một tổng:

a) $A = 2 \sin(a+b) \sin(a-b)$

c) $C = 8 \cos x \sin 2x \sin 3x$

b) $B = \sin x \sin 2x \sin 3x$

d) $D = \cos x \cos(x+60^\circ) \cos(x-60^\circ)$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= 2 \sin(a+b) \sin(a-b) = 2 \cdot \frac{1}{2} [\cos(a+b-a+b) - \cos(a+b+a-b)] = \cos 2b - \cos 2a. \\ \text{Vậy } A &= 2 \sin(a+b) \sin(a-b) = \cos 2b - \cos 2a. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } B &= \sin x \sin 2x \sin 3x = \sin 3x (\sin 2x \sin x) = \frac{1}{2} \sin 3x [\cos x - \cos 3x] \\ &= \frac{1}{2} \sin 3x \cos x - \frac{1}{2} \sin 3x \cos 3x = \frac{1}{4} [\sin 2x + \sin 4x] - \frac{1}{4} \sin 6x. \\ \text{Vậy } B &= \sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{4} \sin 4x - \frac{1}{4} \sin 6x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } C &= 8 \cos x \sin 2x \sin 3x = 8 \sin 3x \sin 2x \cos x = 4 [\cos x - \cos 5x] \cos x \\ &= 4 \cos^2 x - 4 \cos 5x \cos x = 2(1 + \cos 2x) - 2(\cos 4x + \cos 6x) \\ \text{Vậy } C &= 8 \cos x \sin 2x \sin 3x = 2 + 2 \cos 2x - 2 \cos 4x - 2 \cos 6x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } D &= \cos x \cos(x+60^\circ) \cos(x-60^\circ) = \cos x \cdot \frac{1}{2} [\cos 120^\circ + \cos 2x] \\ &= \frac{1}{2} \cos x \left[-\frac{1}{2} + \cos 2x \right] = -\frac{1}{4} \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x \cos x = -\frac{1}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{4} \cos 4x. \\ \text{Vậy } D &= \cos x \cos(x+60^\circ) \cos(x-60^\circ) = -\frac{1}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{4} \cos 4x. \end{aligned}$$

Ví dụ 11. Biến đổi các biểu thức sau đây thành một tích:

a) $A = \sin a + \sin 3a + \sin 5a$

b) $B = 1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x$

Lời giải.

- a) $\sin a + \sin 3a + \sin 5a = \sin 5a + \sin a + \sin 3a = 2 \sin 3a \cos 2a + \sin 3a = \sin 3a(2 \cos 2a + 1)$.
 Vậy $A = \sin a + \sin 3a + \sin 5a = \sin 3a(2 \cos 2a + 1)$.
- b) $B = 1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = (\cos 3x + \cos x) + (\cos 2x + 1)$
 $= 2 \cos 2x \cos x + 2 \cos^2 x - 1 + 1 = 2 \cos x (\cos 2x + \cos x) = 2 \cos x \cdot 2 \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2}$
 Vậy $B = 1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 4 \cos x \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2}$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 20. Biến đổi các biểu thức sau đây thành một tổng:

- | | |
|-------------------------------|--|
| a) $\cos 5a \sin 3a$ | e) $\sin(a-b) \cos(b-a)$ |
| b) $\cos(a+b) \cos a$ | f) $\cos a \cos b \cos c$ |
| c) $2 \cos(a+b) \cos(a-b)$ | g) $4 \sin 2a \sin 4a \sin 6a$ |
| d) $4 \cos x \cos 2x \cos 3x$ | h) $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \cos 2x$ |

Lời giải.

- a) Ta có $\cos 5a \sin 3a = \sin 3a \cos 5a = \frac{1}{2} [\sin(3a - 5a) + \sin(3a + 5a)] = \frac{1}{2} [\sin(-2a) + \sin 8a]$
 Vậy $\cos 5a \sin 3a = \frac{1}{2} \sin 8a - \frac{1}{2} \sin 2a$.
- b) Ta có $\cos(a+b) \cos a = \frac{1}{2} [\cos b + \cos(2a+b)] = \frac{1}{2} \cos b + \frac{1}{2} \cos(2a+b)$.
- c) $2 \cos(a+b) \cos(a-b) = 2 \cdot \frac{1}{2} [\cos(a+b-a+b) + \cos(a+b+a-b)] = \cos 2b + \cos 2a$.
- d) Ta có $4 \cos x \cos 2x \cos 3x = 4 (\cos 4x \cos 2x) \cos x = 4 \cdot \frac{1}{2} [\cos 2x + \cos 6x] \cos x$
 $= 2 \cos 2x \cos x + 2 \cos 6x \cos x = \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x$.
- e) Ta có $\sin(a-b) \cos(b-a) = \frac{1}{2} [\sin(a-b-b+a) + \sin(a-b+b-a)] = \frac{1}{2} \sin(2a-2b)$.
- f) $\cos a \cos b \cos c = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)] \cos c$
 $= \frac{1}{2} \cos(a-b) \cos c + \frac{1}{2} \cos(a+b) \cos c$
 $= \frac{1}{4} \cos(a-b-c) + \frac{1}{4} \cos(a-b+c) + \frac{1}{4} \cos(a+b-c) + \frac{1}{4} \cos(a+b+c)$.
- g) Ta có $4 \sin 2a \sin 4a \sin 6a = \sin 4a + \sin 8a - \sin 12a$.
- h) Ta có $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \cos 2x = \frac{1}{2} \left[\cos \frac{\pi}{3} - \cos 2x\right] \cos 2x$
 $= \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \cos^2 2x = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \cos 4x}{2} = -\frac{\cos 4x}{4}$.

Bài 21. Biến đổi mỗi biểu thức dưới đây thành một tích:

- | | |
|---|--|
| a) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x$ | c) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x$ |
| b) $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x$ | d) $\frac{\cos x + \cos y}{\cos x - \cos y}$ |

e) $\frac{\sin 7x + \sin 5x}{\sin 7x - \sin 5x}$

k) $1 - \cos a + \sin a$

f) $\sin x \cos 3x + \sin 4x \cos 2x$

l) $1 - 2 \cos x + \cos 2x$

g) $\sin a + \sin b + \sin(a + b)$

m) $1 + \sin x - \cos 2x$

h) $\cos a + \cos b + \cos(a + b) + 1$

n) $\sin^2 x - \sin^2 2x + \sin^2 3x$

i) $\sin^2 a - \sin^2 b$

o) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x - 1$

j) $1 + \sin a + \cos a$

Lời giải.

a) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = (\sin 3x + \sin x) + \sin 2x$
 $= 2 \sin 2x \cos x + \sin 2x = \sin 2x (2 \cos x + 1).$

b) $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = (\sin 7x + \sin x) + (\sin 5x + \sin 3x)$
 $= 2 \sin 4x \cos 3x + 2 \sin 4x \cos x = 2 \sin 4x (\cos 3x + \cos x)$
 $= 4 \sin 4x \cos 2x \cos x.$

c) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = (\cos 4x + \cos x) + (\cos 3x + \cos 2x)$
 $= 2 \cos \frac{5x}{2} \cos \frac{3x}{2} + 2 \cos \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \cos \frac{5x}{2} \left(\cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)$
 $= 4 \cos \frac{5x}{2} \cos x \cos \frac{x}{2} = 4 \cos x \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2}.$

d) $\frac{\cos x + \cos y}{\cos x - \cos y} = \frac{2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}}{-2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}} = -\cot \frac{x+y}{2} \cot \frac{x-y}{2}.$

e) $\frac{\sin 7x + \sin 5x}{\sin 7x - \sin 5x} = \frac{2 \sin 6x \cos x}{2 \cos 6x \sin x} = \tan 6x \cot x.$

f) $\sin x \cos 3x + \sin 4x \cos 2x = \frac{1}{2} [\sin(-2x) + \sin 4x] + \frac{1}{2} [\sin 2x + \sin 6x]$
 $= \frac{1}{2} [\sin 6x + \sin 4x] = \sin 5x \cos x.$

g) $\sin a + \sin b + \sin(a + b) = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} + 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a+b}{2}$
 $= 2 \sin \frac{a+b}{2} \left(\cos \frac{a-b}{2} + \cos \frac{a+b}{2} \right) = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot 2 \cos \frac{a}{2} \cos \left(-\frac{b}{2} \right)$
 $= 4 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2}.$

h) $\cos a + \cos b + \cos(a + b) + 1 = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} + 2 \cos^2 \frac{a+b}{2}$
 $= 2 \cos \frac{a+b}{2} \left(\cos \frac{a-b}{2} + \cos \frac{a+b}{2} \right) = 4 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2}.$

i) $\sin^2 a - \sin^2 b = \frac{1 - \cos 2a}{2} - \frac{1 - \cos 2b}{2} = \frac{1}{2} (\cos 2b - \cos 2a)$
 $= \frac{1}{2} \cdot (-2) \sin(b + a) \sin(b - a) = \sin(a + b) \sin(a - b).$

j) $1 + \sin a + \cos a = 1 + \sin \left(2 \cdot \frac{a}{2} \right) + \cos \left(2 \cdot \frac{a}{2} \right) = 1 + 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} + 2 \cos^2 \frac{a}{2} - 1$
 $= 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} + 2 \cos^2 \frac{a}{2} = 2 \cos \frac{a}{2} \left(\sin \frac{a}{2} + \cos \frac{a}{2} \right).$

$$\begin{aligned} \text{k) } 1 - \cos a + \sin a &= 1 - \cos\left(2 \cdot \frac{a}{2}\right) + \sin\left(2 \cdot \frac{a}{2}\right) \\ &= 2 \sin^2 \frac{a}{2} + 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} = 2 \sin \frac{a}{2} \left(\sin \frac{a}{2} + \cos \frac{a}{2}\right). \end{aligned}$$

$$\text{l) } 1 - 2 \cos x + \cos 2x = 1 - 2 \cos x + 2 \cos^2 x - 1 = 2 \cos x (\cos x - 1).$$

$$\text{m) } 1 + \sin x - \cos 2x = 1 + \sin x - (1 - 2 \sin^2 x) = \sin x (1 + 2 \sin x).$$

$$\begin{aligned} \text{n) } \sin^2 x - \sin^2 2x + \sin^2 3x &= \frac{1 - \cos 2x}{2} - \sin^2 2x + \frac{1 - \cos 6x}{2} \\ &= 1 - \sin^2 2x - \frac{1}{2} (\cos 6x + \cos 2x) = \cos^2 2x - \cos 4x \cos 2x \\ &= \cos 2x (\cos 2x - \cos 4x) = 2 \cos 2x \sin x \sin 3x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{o) } \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x - 1 &= \frac{1 + \cos 2x}{2} + \cos^2 2x + \frac{1 + \cos 6x}{2} - 1 \\ &= \frac{1}{2} (\cos 6x + \cos 2x) + \cos^2 2x = \cos 4x \cos 2x + \cos^2 2x \\ &= \cos 2x (\cos 4x + \cos 2x) = 2 \cos 2x \cos 3x \cos x. \end{aligned}$$

Dạng 6. Chứng minh một đẳng thức lượng giác có sử dụng nhóm công thức biến đổi

- Với dạng toán này chúng ta thường xuất phát từ một vế của đẳng thức cần chứng minh, áp dụng các công thức, kết hợp rút gọn, nhóm số hạng,... một cách hợp lý biến đổi biểu thức đó đồng nhất được với biểu thức ở vế kia.
- Tùy vào bài toán cụ thể, đôi khi phương pháp biến đổi tương đương, hoặc chứng minh cả hai vế của đẳng thức cùng bằng với biểu thức trung gian,... cũng có thể được sử dụng.

Ví dụ 12. Chứng minh rằng $4 \cos x \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \cos 3x$, với mọi $x \in \mathbb{R}$

Lời giải. Ta có $4 \cos x \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 4 \cos x \cdot \frac{1}{2} \left[\cos(-2x) + \cos \frac{2\pi}{3} \right]$

$$= 2 \cos x \cos 2x - \cos x = \cos 3x + \cos(-x) - \cos x = \cos 3x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy $4 \cos x \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \cos 3x$, với mọi $x \in \mathbb{R}$

Ví dụ 13. Chứng minh rằng $\cos^3 a \cos 3a - \sin^3 a \sin 3a = \frac{3}{4} \cos 4a + \frac{1}{4}$, với mọi $x \in \mathbb{R}$

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} \cos^3 a \cos 3a - \sin^3 a \sin 3a &= (\cos 3a \cos a) \cos^2 a - (\sin 3a \sin a) \sin^2 a \\ &= \frac{1}{2} [\cos 2a + \cos 4a] \cos^2 a - \frac{1}{2} [\cos 2a - \cos 4a] \sin^2 a \\ &= \frac{1}{2} \cos 2a \cos^2 a + \frac{1}{2} \cos 4a \cos^2 a - \frac{1}{2} \cos 2a \sin^2 a + \frac{1}{2} \cos 4a \sin^2 a \\ &= \frac{1}{2} \cos 2a (\cos^2 a - \sin^2 a) + \frac{1}{2} \cos 4a (\cos^2 a + \sin^2 a) \\ &= \frac{1}{2} \cos 2a \cos 2a + \frac{1}{2} \cos 4a = \frac{1}{4} (\cos 4a + \cos 0) + \frac{1}{2} \cos 4a = \frac{3}{4} \cos 4a + \frac{1}{4}, \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Vậy $\cos^3 a \cos 3a - \sin^3 a \sin 3a = \frac{3}{4} \cos 4a + \frac{1}{4}$, với mọi $x \in \mathbb{R}$

Ví dụ 14. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức say đây không phụ thuộc vào biến số x :

$$S = \cos^2 x + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} + x \right) + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} - x \right)$$

Lời giải. Ta có $S = \cos^2 x + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} + x \right) + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} - x \right)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos \left(\frac{4\pi}{3} + 2x \right)}{2} + \frac{1 + \cos \left(\frac{4\pi}{3} - 2x \right)}{2} \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{4\pi}{3} + 2x \right) + \cos \left(\frac{4\pi}{3} - 2x \right) \right] \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \cdot 2 \cos \frac{4\pi}{3} \cos 2x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cos 2x = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Vậy $S = \frac{3}{2}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ (không phụ thuộc vào biến số x).

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 22. Chứng minh các đẳng thức sau đây:

a) $\cos 5x \cos 3x + \sin 7x \sin x = \cos 2x \cos 4x$

b) $\sin 5x - 2 \sin x (\cos 2x + \cos 4x) = \sin x$

c) $\cos 5x \cos x + \sin 3x \sin x = \cos 2x \cos 4x$

d) $2(\sin a \cos 2a - \sin 2a \cos 3a) + \sin 5a = \sin 3a$

e) $\sin 2\alpha - \sin 4\alpha + \sin 6\alpha = 4 \sin \alpha \cos 2\alpha \cos 3\alpha$

f) $1 + \sin a + \cos a = 2\sqrt{2} \cos \frac{a}{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2} \right)$

g) $\frac{\sin a + \sin 3a}{\cos a + \cos 3a} = \tan 2a$

h) $\frac{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1} = 2 \cos \alpha$

i) $\frac{\sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \sin 6\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = 2 \sin 2\alpha$

j) $\frac{2 \sin 2a + \sin 4a}{2(\cos a + \cos 3a)} = \tan 2a \cos a$

k) $\frac{\sin 2a - \sin 3a + \sin 4a}{\cos 2a - \cos 3a + \cos 4a} = \tan 3a$

l) $\frac{\cos 5a - \cos a}{\sin 4a + \sin 2a} = -2 \sin a$

m) $\frac{1 + \sin 2a + \cos 2a}{1 + \sin 2a - \cos 2a} = \cot a$

n) $\cos 3x \sin^3 x + \sin 3x \cos^3 x = \frac{3}{4} \sin 4x$

o) $\frac{\sin a + \sin b}{\cos a + \cos b} = \tan \frac{a+b}{2}$

p) $\sin^2 x + \sin^2 \left(\frac{\pi}{3} - x \right) + \sin x \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right) = \frac{3}{4}$

q) $4 \sin x \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \sin \left(\frac{\pi}{3} + x \right) = \sin 3x$

r) $\tan a + \cot a + \tan 3a + \cot 3a = \frac{8 \cos^2 2a}{\sin 6a}$

s) $\sin(a-b) \sin(a+b) = \sin^2 a - \sin^2 b$

t) $\cos(a+b) \cos(a-b) = \cos^2 a - \sin^2 b$

Lời giải.

a) Chứng minh $\cos 5x \cos 3x + \sin 7x \sin x = \cos 2x \cos 4x$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \cos 5x \cos 3x + \sin 7x \sin x &= \frac{1}{2} (\cos 2x + \cos 8x) + \frac{1}{2} (\cos 6x - \cos 8x) \\ &= \frac{1}{2} (\cos 6x + \cos 2x) = \cos 4x \cos 2x. \end{aligned}$$

b) Chứng minh $\sin 5x - 2 \sin x (\cos 2x + \cos 4x) = \sin x$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sin 5x - 2 \sin x (\cos 2x + \cos 4x) &= \sin 5x - 2 \sin x \cos 2x - 2 \sin x \cos 4x \\ &= \sin 5x - [\sin(-x) + \sin 3x] - [\sin(-3x) + \sin 5x] = \sin x. \end{aligned}$$

c) Chứng minh $\cos 5x \cos x + \sin 3x \sin x = \cos 2x \cos 4x$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \cos 5x \cos x + \sin 3x \sin x &= \frac{1}{2} [\cos 4x + \cos 6x] + \frac{1}{2} [\cos 2x - \cos 4x] \\ &= \frac{1}{2} [\cos 6x + \cos 2x] = \cos 2x \cos 4x. \end{aligned}$$

d) Chứng minh $2(\sin a \cos 2a - \sin 2a \cos 3a) + \sin 5a = \sin 3a$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } 2(\sin a \cos 2a - \sin 2a \cos 3a) + \sin 5a &= 2 \sin a \cos 2a - 2 \sin 2a \cos 3a + \sin 5a \\ &= \sin(-a) + \sin 3a - [\sin(-a) + \sin 5a] + \sin 5a = \sin 3a. \end{aligned}$$

e) Chứng minh $\sin 2\alpha - \sin 4\alpha + \sin 6\alpha = 4 \sin \alpha \cos 2\alpha \cos 3\alpha$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sin 2\alpha - \sin 4\alpha + \sin 6\alpha &= \sin 6\alpha + \sin 2\alpha - \sin 2(2\alpha) \\ &= 2 \sin 4\alpha \cos 2\alpha - 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha = 2 \cos 2\alpha (\sin 4\alpha - \sin 2\alpha) \\ &= 2 \cos 2\alpha (2 \cos 3\alpha \sin \alpha) = 4 \sin \alpha \cos 2\alpha \cos 3\alpha. \end{aligned}$$

f) Chứng minh $1 + \sin a + \cos a = 2\sqrt{2} \cos \frac{a}{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } 2\sqrt{2} \cos \frac{a}{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right) &= 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \left[\cos \left(a - \frac{\pi}{4}\right) + \cos \frac{\pi}{4} \right] = \sqrt{2} \cos \left(a - \frac{\pi}{4}\right) + 1 \\ &= \sqrt{2} \left(\cos a \cos \frac{\pi}{4} + \sin a \sin \frac{\pi}{4} \right) + 1 = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos a + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin a \right) + 1 = \cos a + \sin a + 1. \end{aligned}$$

g) Chứng minh $\frac{\sin a + \sin 3a}{\cos a + \cos 3a} = \tan 2a$.

$$\text{Ta có } \frac{\sin a + \sin 3a}{\cos a + \cos 3a} = \frac{\sin 3a + \sin a}{\cos 3a + \cos a} = \frac{2 \sin 2a \cos a}{2 \cos 2a \cos a} = \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = \tan 2a$$

h) Chứng minh $\frac{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1} = 2 \cos \alpha$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1} &= \frac{(\cos 3\alpha + \cos \alpha) + (\cos 2\alpha + 1)}{(2 \cos^2 \alpha - 1) + \cos \alpha} \\ &= \frac{2 \cos 2\alpha \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha}{\cos 2\alpha + \cos \alpha} = \frac{2 \cos \alpha (\cos 2\alpha + \cos \alpha)}{\cos 2\alpha + \cos \alpha} = 2 \cos \alpha \end{aligned}$$

i) Chứng minh $\frac{\sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \sin 6\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = 2 \sin 2\alpha$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{\sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \sin 6\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos 4\alpha} &= \frac{(\sin 6\alpha + \sin 2\alpha) + \sin 4\alpha}{(1 + \cos 4\alpha) + \cos 2\alpha} \\ &= \frac{2 \sin 4\alpha \cos 2\alpha + \sin 4\alpha}{2 \cos^2 2\alpha + \cos 2\alpha} = \frac{\sin 4\alpha (2 \cos 2\alpha + 1)}{\cos 2\alpha (2 \cos 2\alpha + 1)} = 2 \sin 2\alpha \end{aligned}$$

j) Chứng minh $\frac{2 \sin 2a + \sin 4a}{2(\cos a + \cos 3a)} = \tan 2a \cos a$.

$$\text{Ta có } \frac{2 \sin 2a + \sin 4a}{2(\cos a + \cos 3a)} = \frac{2 \sin 2a + 2 \sin 2a \cos 2a}{4 \cos 2a \cos a}$$

k) Chứng minh $\frac{\sin 2a - \sin 3a + \sin 4a}{\cos 2a - \cos 3a + \cos 4a} = \tan 3a$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{\sin 2a - \sin 3a + \sin 4a}{\cos 2a - \cos 3a + \cos 4a} &= \frac{\sin 4a + \sin 2a - \sin 3a}{\cos 4a + \cos 2a - \cos 3a} = \frac{2 \sin 3a \cos a - \sin 3a}{2 \cos 3a \cos a - \cos 3a} \\ &= \frac{\sin 3a (2 \cos a - 1)}{\cos 3a (2 \cos a - 1)} = \frac{\sin 3a}{\cos 3a} = \tan 3a \end{aligned}$$

l) Chứng minh $\frac{\cos 5a - \cos a}{\sin 4a + \sin 2a} = -2 \sin a$.

$$\text{Ta có } \frac{\cos 5a - \cos a}{\sin 4a + \sin 2a} = \frac{-2 \sin 3a \sin 2a}{2 \sin 3a \cos a} = \frac{-\sin 2a}{\cos a} = \frac{-2 \sin a \cos a}{\cos a} = -2 \sin a.$$

m) Chứng minh $\frac{1 + \sin 2a + \cos 2a}{1 + \sin 2a - \cos 2a} = \cot a$.

Ta có $\frac{1 + \sin 2a + \cos 2a}{1 + \sin 2a - \cos 2a} = \frac{1 + 2 \sin a \cos a + 2 \cos^2 a - 1}{1 + 2 \sin a \cos a - (1 - 2 \sin^2 a)} = \frac{2 \sin a \cos a + 2 \cos^2 a}{2 \sin a \cos a + 2 \sin^2 a}$
 $= \frac{2 \cos a (\sin a + \cos a)}{2 \sin a (\cos a + \sin a)} = \frac{\cos a}{\sin a} = \cot a$

n) Chứng minh $\cos 3x \sin^3 x + \sin 3x \cos^3 x = \frac{3}{4} \sin 4x$.

Ta có $\cos 3x \sin^3 x + \sin 3x \cos^3 x = (\cos 3x \sin x) \sin^2 x + (\sin 3x \cos x) \cos^2 x$
 $= \frac{1}{2} (\sin 4x - \sin 2x) \sin^2 x + \frac{1}{2} (\sin 4x + \sin 2x) \cos^2 x$
 $= \frac{1}{2} \sin 4x \sin^2 x - \frac{1}{2} \sin 2x \sin^2 x + \frac{1}{2} \sin 4x \cos^2 x + \frac{1}{2} \sin 2x \cos^2 x$
 $= \frac{1}{2} \sin 4x (\sin^2 x + \cos^2 x) + \frac{1}{2} \sin 2x (\cos^2 x - \sin^2 x)$
 $= \frac{1}{2} \sin 4x + \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{2} \sin 4x + \frac{1}{4} \sin 4x = \frac{3}{4} \sin 4x$.

o) Chứng minh $\frac{\sin a + \sin b}{\cos a + \cos b} = \tan \frac{a+b}{2}$.

Ta có $\frac{\sin a + \sin b}{\cos a + \cos b} = \frac{2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}}{2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}} = \frac{\sin \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}} = \tan \frac{a+b}{2}$.

p) Chứng minh $\sin^2 x + \sin^2 \left(\frac{\pi}{3} - x \right) + \sin x \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right) = \frac{3}{4}$.

Ta có $\sin^2 x + \sin^2 \left(\frac{\pi}{3} - x \right) + \sin x \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right)$
 $= \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos \left(\frac{2\pi}{3} - 2x \right)}{2} + \sin x \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right)$
 $= 1 - \frac{1}{2} \left[\cos 2x + \cos \left(\frac{2\pi}{3} - 2x \right) \right] + \frac{1}{2} \left[\cos \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) - \cos \frac{\pi}{3} \right]$
 $= 1 - \cos \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) \cos \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \cos \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

q) Chứng minh $4 \sin x \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \sin \left(\frac{\pi}{3} + x \right) = \sin 3x$.

Ta có $4 \sin x \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \sin \left(\frac{\pi}{3} + x \right) = 4 \sin x \cdot \frac{1}{2} \left[\cos(-2x) - \cos \frac{2\pi}{3} \right]$
 $= 2 \sin x \cos 2x + \sin x = \sin 3x + \sin(-x) + \sin x = \sin 3x$.

r) Chứng minh $\tan a + \cot a + \tan 3a + \cot 3a = \frac{8 \cos^2 2a}{\sin 6a}$.

Ta có $\tan a + \cot a + \tan 3a + \cot 3a = \frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\cos a}{\sin a} + \frac{\sin 3a}{\cos 3a} + \frac{\cos 3a}{\sin 3a}$
 $= \frac{\sin^2 a + \cos^2 a}{\sin a \cos a} + \frac{\sin^2 3a + \cos^2 3a}{\sin 3a \cos 3a} = \frac{1}{\sin a \cos a} + \frac{1}{\sin 3a \cos 3a} = \frac{2}{\sin 2a} + \frac{2}{\sin 6a}$
 $= \frac{2 (\sin 6a + \sin 2a)}{\sin 2a \sin 6a} = \frac{4 \sin 4a \cos 2a}{\sin 2a \sin 6a} = \frac{4 \cdot 2 \sin 2a \cos 2a \cos 2a}{\sin 2a \sin 6a} = \frac{8 \cos^2 2a}{\sin 6a}$.

s) Chứng minh $\sin(a-b) \sin(a+b) = \sin^2 a - \sin^2 b$.

Ta có $\sin(a-b) \sin(a+b) = \frac{1}{2} [\cos(-2b) - \cos 2a] = \frac{1}{2} [\cos 2b - \cos 2a]$
 $= \frac{1}{2} [(1 - 2 \sin^2 b) - (1 - 2 \sin^2 a)] = \frac{1}{2} [2 \sin^2 a - 2 \sin^2 b] = \sin^2 a - \sin^2 b$.

t) Chứng minh $\cos(a+b)\cos(a-b) = \cos^2 a - \sin^2 b$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \cos(a+b)\cos(a-b) &= \frac{1}{2} [\cos 2b + \cos 2a] = \frac{1}{2} [2\cos^2 b - 1 + 1 - 2\sin^2 a] \\ &= \frac{1}{2} [2\cos^2 b - 2\sin^2 a] = \cos^2 a - \sin^2 b. \end{aligned}$$

Bài 23. Chứng minh các đẳng thức sau đây:

a) $\cos a + \cos b + \sin(a+b) = 4\cos \frac{a+b}{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right) \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{b}{2}\right)$

b) $\sin^2 a + \sin^2 b + 2\sin a \sin b \cos(a+b) = \sin^2(a+b)$

c) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = \cos x$

Lời giải.

a) Chứng minh $\cos a + \cos b + \sin(a+b) = 4\cos \frac{a+b}{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right) \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{b}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \cos a + \cos b + \sin(a+b) &= 2\cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} + 2\sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a+b}{2} \\ &= 2\cos \frac{a+b}{2} \left(\cos \frac{a-b}{2} + \sin \frac{a+b}{2} \right) = 2\cos \frac{a+b}{2} \left(\sin \frac{\pi - a + b}{2} + \sin \frac{a+b}{2} \right) \\ &= 2\cos \frac{a+b}{2} \cdot 2\sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{b}{2}\right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right). \end{aligned}$$

b) Chứng minh $\sin^2 a + \sin^2 b + 2\sin a \sin b \cos(a+b) = \sin^2(a+b)$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sin^2 a + \sin^2 b + 2\sin a \sin b \cos(a+b) &= \left[\frac{1 - \cos 2a}{2} + \frac{1 - \cos 2b}{2} \right] + 2\sin a \sin b \cos(a+b) \\ &= \left[1 - \frac{1}{2} (\cos 2a + \cos 2b) \right] + [\cos(a-b) - \cos(a+b)] \cos(a+b) \\ &= [1 - \cos(a+b)\cos(a-b)] + [\cos(a-b)\cos(a+b) - \cos^2(a+b)] \\ &= 1 - \cos^2(a+b) = \sin^2(a+b). \end{aligned}$$

c) Chứng minh $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = \cos x$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) &= \frac{1}{2} \left[\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \right] - \frac{1}{2} \left[\cos\left(x + \pi\right) + \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(x + \pi\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) + \cos x - (-\cos x) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + 2\cos x \right] = \cos x. \end{aligned}$$

Bài 24. Chứng minh giá trị của biểu thức $A = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) \cos\left(\frac{3\pi}{4} + x\right)$ không phụ thuộc vào biến số x :

Lời giải. $A = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) \cos\left(\frac{3\pi}{4} + x\right)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{12} - 2x\right) + \cos \frac{7\pi}{12} \right] + \frac{1}{2} \left[\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + \cos\left(\frac{11\pi}{12} + 2x\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{11\pi}{12} + 2x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{12} - 2x\right) + \cos \frac{7\pi}{12} + \cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[0 + 2\cos \frac{7\pi}{12} \right] = \cos \frac{7\pi}{12} \quad \left(\text{do } \frac{11\pi}{12} + 2x + \frac{\pi}{12} - 2x = \pi \right) \end{aligned}$$

Vậy $A = \cos \frac{7\pi}{12}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ (không phụ thuộc vào biến số x).

Bài 25. Chứng minh rằng các biểu thức dưới đây không phụ thuộc vào giá trị của biến số x .

a) $A = \sin^2 x + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$

b) $B = \frac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x} \cdot \cot x$

Lời giải.

a) $A = \sin^2 x + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1}{2} \left[\cos 2x + \cos \frac{2\pi}{3} \right]$
 $= \frac{1}{2} \left(1 - \cos 2x + \cos 2x - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4}$ (không phụ thuộc vào x).

b) $B = \frac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x} \cdot \cot x = \frac{2 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x}{2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x} \cdot \cot x$
 $= \frac{2 \sin x (\sin x + \cos x)}{2 \cos x (\cos x + \sin x)} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 1$ (không phụ thuộc vào x).

Dạng 7. Dùng công thức biến đổi để tính giá trị (rút gọn) của một biểu thức lượng giác

Ví dụ 15. Rút gọn biểu thức $A = 2 \sin x (\cos x + \cos 3x + \cos 5x)$.

Từ đó tính giá trị biểu thức $T = \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7}$

Lời giải. Ta có $A = 2 \sin x (\cos x + \cos 3x + \cos 5x) = 2 \sin x \cos x + 2 \sin x \cos 3x + 2 \sin x \cos 5x$
 $= \sin 2x + \sin 4x + \sin(-2x) + \sin 6x + \sin(-4x) = \sin 2x + \sin 4x - \sin 2x + \sin 6x - \sin 4x$
 Như vậy, $A = 2 \sin x (\cos x + \cos 3x + \cos 5x) = \sin 6x$.

Áp dụng kết quả trên, ta có

$$T = \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} \Rightarrow T \cdot 2 \sin \frac{\pi}{7} = 2 \sin \frac{\pi}{7} \left(\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} \right) = \sin \frac{6\pi}{7}$$

$$\text{Do } \sin \frac{6\pi}{7} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{7} \right) = \sin \frac{\pi}{7} \text{ nên } T \cdot 2 \sin \frac{\pi}{7} = \sin \frac{\pi}{7} \Rightarrow T = \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 16. Tính giá trị biểu thức $A = \sin^2 10^\circ + \cos 70^\circ \cos 50^\circ$

Lời giải. Ta có $A = \sin^2 10^\circ + \cos 70^\circ \cos 50^\circ = \frac{1 - \cos 20^\circ}{2} + \frac{1}{2} [\cos 120^\circ + \cos 20^\circ]$
 $= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 20^\circ + \frac{1}{2} \cos 120^\circ + \frac{1}{2} \cos 20^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 120^\circ = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$$\text{Vậy } A = \sin^2 10^\circ + \cos 70^\circ \cos 50^\circ = \frac{1}{4}.$$

Ví dụ 17. Rút gọn các biểu thức sau đây:

a) $A = \frac{\cos 4a - \cos 2a}{\sin 4a - \sin 2a}$

b) $B = \frac{\sin a - 2 \sin 2a + \sin 3a}{\cos a - 2 \cos 2a + \cos 3a}$

Lời giải.

a) Ta có $A = \frac{\cos 4a - \cos 2a}{\sin 4a - \sin 2a} = \frac{-2 \sin 3a \sin a}{2 \cos 3a \sin a} = -\frac{\sin 3a}{\cos 3a} = -\tan 3a.$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có } B &= \frac{\sin a - 2\sin 2a + \sin 3a}{\cos a - 2\cos 2a + \cos 3a} = \frac{(\sin 3a + \sin a) - 2\sin 2a}{(\cos 3a + \cos a) - 2\cos 2a} \\ &= \frac{2\sin 2a \cos a - 2\sin 2a}{2\sin 2a(\cos a - 1)} = \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = \tan 2a. \end{aligned}$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 26. Tính giá trị các biểu thức sau đây:

$$\text{a) } A = \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12}$$

$$\text{h) } H = \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$$

$$\text{b) } B = \cos \frac{11\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12}$$

$$\text{i) } I = \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7}$$

$$\text{c) } C = \cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5}$$

$$\text{j) } J = \cos 36^\circ \cos 72^\circ$$

$$\text{d) } D = \cos 35^\circ + \cos 85^\circ - \cos 25^\circ$$

$$\text{k) } K = \cos 36^\circ - \sin 18^\circ$$

$$\text{e) } E = \cos 130^\circ + \cos 110^\circ + \sin 100^\circ$$

$$\text{l) } L = \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5}$$

$$\text{f) } F = \tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ$$

$$\text{g) } G = \cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9} + \cos \frac{7\pi}{9}$$

$$\text{m) } M = \frac{1}{\sin 10^\circ} - 4 \sin 70^\circ$$

Lời giải.

$$\text{a) } A = \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2} \left[\cos \left(-\frac{4\pi}{12} \right) - \cos \frac{6\pi}{12} \right] = \frac{1}{2} \left[\cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{2} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 0 \right) = \frac{1}{4}.$$

$$\text{b) } B = \cos \frac{11\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{6\pi}{12} + \cos \frac{16\pi}{12} \right) = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{4\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} \left(0 - \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{4}.$$

$$\begin{aligned} \text{c) } C &= \cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} \Rightarrow 2 \sin \frac{\pi}{5} \cdot C = 2 \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5} - 2 \sin \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{2\pi}{5} \\ &\Rightarrow 2 \sin \frac{\pi}{5} \cdot C = \sin \frac{2\pi}{5} - \left[\sin \frac{3\pi}{5} + \sin \left(-\frac{\pi}{5} \right) \right] = \sin \frac{2\pi}{5} - \sin \frac{3\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{5} \\ &\Rightarrow 2 \sin \frac{\pi}{5} \cdot C = \sin \frac{\pi}{5} \Rightarrow C = \frac{1}{2} \left(\text{do } \frac{2\pi}{5} + \frac{3\pi}{5} = \pi \Rightarrow \sin \frac{2\pi}{5} = \sin \frac{3\pi}{5} \right) \end{aligned}$$

$$\text{d) } D = \cos 35^\circ + \cos 85^\circ - \cos 25^\circ = 2 \cos 60^\circ \cos (-25^\circ) - \cos 25^\circ = \cos 25^\circ - \cos 25^\circ = 0$$

$$\text{e) } E = \cos 130^\circ + \cos 110^\circ + \sin 100^\circ = 2 \cos 120^\circ \cos 10^\circ + \cos 10^\circ = -\cos 10^\circ + \cos 10^\circ = 0$$

$$\begin{aligned} \text{f) } F &= \tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ = \tan 9^\circ + \tan 81^\circ - (\tan 27^\circ + \tan 63^\circ) \\ &= \frac{\sin 9^\circ}{\cos 9^\circ} + \frac{\sin 81^\circ}{\cos 81^\circ} - \left(\frac{\sin 27^\circ}{\cos 27^\circ} + \frac{\sin 63^\circ}{\cos 63^\circ} \right) \\ &= \frac{\sin 9^\circ \cos 81^\circ + \cos 9^\circ \sin 81^\circ}{\sin 90^\circ} - \frac{\sin 27^\circ \cos 63^\circ + \cos 27^\circ \sin 63^\circ}{\sin 90^\circ} \\ &= \frac{\sin 90^\circ}{\sin 90^\circ} - \frac{\sin 90^\circ}{\sin 90^\circ} = \frac{2}{\sin 18^\circ} - \frac{2}{\sin 54^\circ} = \frac{2(\sin 54^\circ - \sin 18^\circ)}{\sin 54^\circ \sin 18^\circ} \\ &= \frac{4 \cos 36^\circ \sin 18^\circ}{\sin 54^\circ \sin 18^\circ} = 4 \left(\text{do } \cos 36^\circ = \sin 54^\circ \right). \end{aligned}$$

$$\text{g) } G = \cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9} + \cos \frac{7\pi}{9} = \cos \frac{\pi}{9} + 2 \cos \frac{6\pi}{9} \cos \frac{\pi}{9} = \cos \frac{\pi}{9} + 2 \left(-\frac{1}{2} \right) \cos \frac{\pi}{9} = 0$$

$$\begin{aligned}
 \text{h) } H &= \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} \\
 \Rightarrow H \cdot \sin \frac{\pi}{7} &= \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} \\
 &= \frac{1}{2} \left[\sin \frac{3\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{5\pi}{7} - \sin \frac{3\pi}{7} + \sin \frac{7\pi}{7} - \sin \frac{5\pi}{7} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left(-\sin \frac{\pi}{7} \right) = -\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{7} \\
 \Rightarrow H &= -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{i) } I &= \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = -\cos \frac{6\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} - \cos \frac{4\pi}{7} \\
 \Rightarrow I \cdot \left(-\sin \frac{\pi}{7} \right) &= \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} + \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \\
 &= \frac{1}{2} \left[\sin \frac{7\pi}{7} - \sin \frac{5\pi}{7} + \sin \frac{3\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{5\pi}{7} - \sin \frac{3\pi}{7} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left(-\sin \frac{\pi}{7} \right) \\
 \Rightarrow I &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\text{j) Ta có } J = \cos 36^\circ \cos 72^\circ \Rightarrow J \cdot \sin 36^\circ = \sin 36^\circ \cos 36^\circ \cos 72^\circ$$

$$\Rightarrow J \cdot \sin 36^\circ = \frac{1}{2} \sin 72^\circ \cos 72^\circ = \frac{1}{4} \sin 144^\circ = \frac{1}{4} \sin 36^\circ$$

$$\text{Vậy } J = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned}
 \text{k) } K &= \cos 36^\circ - \sin 18^\circ = -\cos 144^\circ - \cos 72^\circ \\
 \Rightarrow K \cdot (-\sin 36^\circ) &= \sin 36^\circ \cos 144^\circ + \sin 36^\circ \cos 72^\circ \\
 &= \frac{1}{2} [\sin 180^\circ - \sin 108^\circ + \sin 108^\circ - \sin 36^\circ] = \frac{1}{2} (-\sin 36^\circ) \\
 \Rightarrow K &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{l) } L &= \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5} \\
 \Rightarrow L \cdot \sin \frac{\pi}{5} &= \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{4\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{6\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{8\pi}{5} \\
 \Rightarrow L \cdot \sin \frac{\pi}{5} &= \frac{1}{2} \left[\sin \frac{3\pi}{5} - \sin \frac{\pi}{5} + \sin \frac{5\pi}{5} - \sin \frac{3\pi}{5} + \sin \frac{7\pi}{5} - \sin \frac{5\pi}{5} + \sin \frac{9\pi}{5} - \sin \frac{7\pi}{5} \right] \\
 \Rightarrow L \cdot \sin \frac{\pi}{5} &= \frac{1}{2} \left[\sin \frac{9\pi}{5} - \sin \frac{\pi}{5} \right] = \frac{1}{2} \left[-\sin \frac{\pi}{5} - \sin \frac{\pi}{5} \right] = -\sin \frac{\pi}{5} \\
 \Rightarrow L &= -1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{m) } M &= \frac{1}{\sin 10^\circ} - 4 \sin 70^\circ \Rightarrow M \cdot \sin 10^\circ = 1 - 4 \sin 70^\circ \sin 10^\circ \\
 \Rightarrow M \cdot \sin 10^\circ &= 1 - 2(\cos 60^\circ - \cos 80^\circ) = 1 - 1 + \sin 10^\circ = \sin 10^\circ \\
 \Rightarrow M &= 1
 \end{aligned}$$

Bài 27. Cho $a = \frac{\pi}{11}$. Hãy tính giá trị của các biểu thức sau đây

$$\text{a) } A = \sin a + \sin 2a + \sin 3a + \sin 4a + \sin 5a$$

$$\text{b) } B = \cos 2a + \cos 4a + \cos 6a + \cos 8a + \cos 10a$$

$$\text{c) } C = \cos a + \cos \left(a + \frac{2\pi}{5} \right) + \cos \left(a + \frac{4\pi}{5} \right) + \cos \left(a + \frac{6\pi}{5} \right) + \cos \left(a + \frac{8\pi}{5} \right)$$

Lời giải.

- a) Ta có $A = \sin a + \sin 2a + \sin 3a + \sin 4a + \sin 5a$
 $\Rightarrow 2 \sin \frac{a}{2} \cdot A = 2 \sin a \sin \frac{a}{2} + 2 \sin 2a \sin \frac{a}{2} + 2 \sin 3a \sin \frac{a}{2} + 2 \sin 4a \sin \frac{a}{2} + 2 \sin 5a \sin \frac{a}{2}$
 $\Rightarrow 2 \sin \frac{a}{2} \cdot A = \cos \frac{a}{2} - \cos \frac{3a}{2} + \cos \frac{3a}{2} - \cos \frac{5a}{2} + \dots - \cos \frac{9a}{2} + \cos \frac{9a}{2} - \cos \frac{11a}{2}$
 $\Rightarrow 2 \sin \frac{a}{2} \cdot A = \cos \frac{a}{2} - \cos \frac{11a}{2}$
 Với $a = \frac{\pi}{11}$ ta có $2 \sin \frac{\pi}{22} \cdot A = \cos \frac{\pi}{22} - \cos \frac{\pi}{2} = \cos \frac{\pi}{22} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \cot \frac{\pi}{22}$.
- b) Ta có $B = \cos 2a + \cos 4a + \cos 6a + \cos 8a + \cos 10a$
 $\Rightarrow 2B \cdot \sin a = 2 \sin a \cos 2a + 2 \sin a \cos 4a + 2 \sin a \cos 6a + 2 \sin a \cos 8a + 2 \sin a \cos 10a$
 $\Rightarrow 2B \cdot \sin a = -\sin a + \sin 3a - \sin 3a + \sin 5a + \dots - \sin 9a + \sin 11a$
 $\Rightarrow 2B \cdot \sin a = -\sin a + \sin 11a$
 Với $a = \frac{\pi}{11}$ ta có $2 \sin \frac{\pi}{11} \cdot B = -\sin \frac{\pi}{11} + \sin \pi \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$.
- c) Ta có $C = \cos a + \cos \left(a + \frac{2\pi}{5}\right) + \cos \left(a + \frac{4\pi}{5}\right) + \cos \left(a + \frac{6\pi}{5}\right) + \cos \left(a + \frac{8\pi}{5}\right)$
 $\Rightarrow 2C \cdot \sin \frac{\pi}{5} = 2 \sin \frac{\pi}{5} \cos a + 2 \sin \frac{\pi}{5} \cos \left(a + \frac{2\pi}{5}\right)$
 $\quad + 2 \sin \frac{\pi}{5} \cos \left(a + \frac{4\pi}{5}\right) + 2 \sin \frac{\pi}{5} \cos \left(a + \frac{6\pi}{5}\right) + 2 \sin \frac{\pi}{5} \cos \left(a + \frac{8\pi}{5}\right)$
 $= -\sin \left(a - \frac{\pi}{5}\right) + \sin \left(a + \frac{\pi}{5}\right) - \sin \left(a + \frac{\pi}{5}\right) + \sin \left(a + \frac{3\pi}{5}\right) - \sin \left(a + \frac{3\pi}{5}\right)$
 $\quad + \sin \left(a + \frac{5\pi}{5}\right) - \sin \left(a + \frac{5\pi}{5}\right) + \sin \left(a + \frac{7\pi}{5}\right) - \sin \left(a + \frac{7\pi}{5}\right) + \sin \left(a + \frac{9\pi}{5}\right)$
 $\Rightarrow 2C \cdot \sin \frac{\pi}{5} = \sin \left(a + \frac{9\pi}{5}\right) - \sin \left(a - \frac{\pi}{5}\right) = 2 \cos \left(a + \frac{4\pi}{5}\right) \sin \pi = 0 \Rightarrow C = 0$.

Bài 28. Rút gọn các biểu thức dưới đây:

- a) $A = 4 \sin \frac{x}{3} \sin \frac{x+\pi}{3} \sin \frac{x-\pi}{3}$
 b) $B = 4 \cos \frac{x}{3} \cos \frac{x+\pi}{3} \cos \frac{x-\pi}{3}$
 c) $C = \sin^2 \left(\frac{\pi}{8} + \frac{x}{2}\right) - \sin^2 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{2}\right)$
 d) $D = \frac{\sin x + \sin 4x + \sin 7x}{\cos x + \cos 4x + \cos 7x}$
 e) $E = \frac{\cos x - \cos 2x + \cos 3x}{\sin x - \sin 2x + \sin 3x}$
 f) $F = \frac{\sin^2 4x - \sin^2 2x}{\cos^2 x - \cos^2 2x}$
 g) $G = \frac{\sin(a+b) \sin(a-b)}{\cos a + \cos b}$
 h) $H = \frac{\cos^2 a - \cos^2 b}{\sin(a-b)}$
 i) $I = \sin x (1 + 2 \cos 2x + 2 \cos 4x + 2 \cos 6x)$

Lời giải.

- a) $A = 4 \sin \frac{x}{3} \sin \frac{x+\pi}{3} \sin \frac{x-\pi}{3} = 4 \sin \frac{x}{3} \cdot \frac{1}{2} \left[\cos \frac{2\pi}{3} - \cos \frac{2x}{3} \right] = -\sin \frac{x}{3} + 2 \sin \frac{x}{3} \cos \frac{2x}{3} \Rightarrow A = -\sin \frac{x}{3} + \sin x - \sin \frac{x}{3} \Rightarrow A = \sin x$
- b) $B = 4 \cos \frac{x}{3} \cos \frac{x+\pi}{3} \cos \frac{x-\pi}{3} = 4 \cos \frac{x}{3} \cdot \frac{1}{2} \left[\cos \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{2x}{3} \right] = -\cos \frac{x}{3} + 2 \cos \frac{x}{3} \cos \frac{2x}{3} \Rightarrow B = -\cos \frac{x}{3} + \cos x + \cos \frac{x}{3} \Rightarrow B = \cos x$

$$\begin{aligned}
\text{c) } C &= \sin^2\left(\frac{\pi}{8} + \frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}{2} - \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{2} \\
&\Rightarrow C = 1 - \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \right] = 1 - \cos\frac{\pi}{4} \cos x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \\
\text{d) } D &= \frac{\sin x + \sin 4x + \sin 7x}{\cos x + \cos 4x + \cos 7x} = \frac{\sin 7x + \sin x + \sin 4x}{\cos 7x + \cos x + \cos 4x} = \frac{2 \sin 4x \cos 3x + \sin 4x}{2 \cos 4x \cos 3x + \cos 4x} \\
&\Rightarrow D = \frac{\sin 4x (2 \cos 3x + 1)}{\cos 4x (2 \cos 3x + 1)} = \frac{\sin 4x}{\cos 4x} = \tan 4x \\
\text{e) } E &= \frac{\cos x - \cos 2x + \cos 3x}{\sin x - \sin 2x + \sin 3x} = \frac{\cos 3x + \cos x - \cos 2x}{\sin 3x + \sin x - \sin 2x} = \frac{2 \cos 2x \cos x - \cos 2x}{2 \sin 2x \cos x - \sin 2x} \\
&\Rightarrow E = \frac{\cos 2x (\cos x - 1)}{\sin 2x (\cos x - 1)} = \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \cot 2x \\
\text{f) } F &= \frac{\sin^2 4x - \sin^2 2x}{\cos^2 x - \cos^2 2x} = \frac{2 \sin^2 4x - 2 \sin^2 2x}{2 \cos^2 x - 2 \cos^2 2x} = \frac{(1 - \cos 8x) - (1 - \cos 4x)}{(1 + \cos 2x) - (1 + \cos 4x)} = \frac{\cos 4x - \cos 8x}{\cos 2x - \cos 4x} \Rightarrow F = \\
&\frac{-2 \sin 6x \sin(-x)}{-2 \sin 3x \sin(-x)} = \frac{\sin 6x}{\sin 3x} = \frac{2 \sin 3x \cos 3x}{\sin 3x} = 2 \cos 3x \\
\text{g) } G &= \frac{\sin(a+b) \sin(a-b)}{\cos a + \cos b} = \frac{2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a+b}{2} \cdot 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a-b}{2}}{2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}} \\
&\Rightarrow G = 2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2} = \cos b - \cos a \\
\text{h) } H &= \frac{\cos^2 a - \cos^2 b}{\sin(a-b)} = \frac{(1 + \cos 2a) - (1 + \cos 2b)}{2 \sin(a-b)} = \frac{\cos 2a - \cos 2b}{2 \sin(a-b)} \\
&= \frac{-2 \sin(a+b) \sin(a-b)}{2 \sin(a-b)} = -\sin(a+b) \\
\text{i) } I &= \sin x (1 + 2 \cos 2x + 2 \cos 4x + 2 \cos 6x) \\
&= \sin x + 2 \sin x \cos 2x + 2 \sin x \cos 4x + 2 \sin x \cos 6x \\
&= \sin x - \sin x + \sin 3x - \sin 3x + \sin 5x - \sin 5x + \sin 7x = \sin 7x
\end{aligned}$$

Dạng 8. Nhận dạng tam giác. Một số hệ thức trong tam giác

- Biến đổi, dẫn đến $\sin A = 1$ hoặc $\cos A = 0$ sẽ có $A = 90^\circ$.
- Nếu $a^2 + b^2 = c^2$ thì $C = 90^\circ$.
- Nếu $\sin(A - B) = 0$ hoặc $\cos(A - B) = 1$ thì $A = B$, suy ra tam giác cân.
- Tam giác cân mà có một góc bằng 60° là tam giác đều.

Một số lưu ý khi giả thiết cho A, B, C là ba góc của một tam giác

- $A + B + C = 180^\circ \Rightarrow (A + B)$ và C bù nhau, tương tự với $(B + C)$ và $A, \dots$
- $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90^\circ \Rightarrow \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right)$ và $\frac{C}{2}$ phụ nhau, tương tự với $\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right)$ và $\frac{A}{2}, \dots$
- Các góc A, B, C đều có số đo trong khoảng $(0^\circ; 180^\circ)$
- Các góc $\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2}$ đều là các góc nhọn nên có các giá trị lượng giác đều dương.

Ví dụ 18. Chứng minh rằng ΔABC vuông khi $\sin A \sin C = \cos A \cos C$.

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned}\sin A \sin C &= \cos A \cos C \Leftrightarrow \cos A \cos C - \sin A \sin C = 0 \\ \Leftrightarrow \cos(A + C) &= 0 \Leftrightarrow -\cos B = 0 \Leftrightarrow \cos B = 0 \Leftrightarrow B = 90^\circ\end{aligned}$$

Vậy tam giác ABC vuông tại B .

Ví dụ 19. Chứng minh rằng ΔABC cân khi $2 \sin A \sin B = 1 + \cos C$.

(1)

Lời giải. Ta có (1) tương đương với

$$\begin{aligned}\cos(A - B) - \cos(A + B) &= 1 + \cos C \\ \Leftrightarrow \cos(A - B) + \cos C &= 1 + \cos C \\ \Leftrightarrow \cos(A - B) &= 1 \Leftrightarrow A - B = 0 \Leftrightarrow A = B.\end{aligned}$$

Vậy tam giác ABC cân tại C .

Ví dụ 20 (ĐH Ngoại ngữ Hà Nội-1995). Cho ΔABC với diện tích S và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Chứng minh rằng:

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = \frac{2S}{R^2}.$$

Lời giải. Đặt $Q = \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$. Khi đó

$$\begin{aligned}Q &= 2 \sin(A + B) \cos(A - B) + 2 \sin C \cos C \\ &= 2 \sin C \cos(A - B) + 2 \sin C \cos C \\ &= 2 \sin C [\cos(A - B) + \cos C] \\ &= 2 \sin C [\cos(A - B) - \cos(A + B)] = 4 \sin A \sin B \sin C \\ &= 4 \frac{a}{2R} \cdot \frac{b}{2R} \cdot \frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R} \cdot \frac{2}{R^2} = \frac{2S}{R^2}.\end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 21. Cho ΔABC . Chứng minh rằng

$$a \sin(B - C) + b \sin(C - A) + c \sin(A - B) = 0.$$

Lời giải. Đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$2R[\sin A \sin(B - C) + \sin B \sin(C - A) + \sin C \sin(A - B)] = 0.$$

Mà ta có

$$\begin{aligned}\sin A \sin(B - C) &= \sin(B + C) \sin(B - C) = -(\cos 2B - \cos 2C) \\ \sin B \sin(C - A) &= \sin(C + A) \sin(C - A) = -(\cos 2C - \cos 2A) \\ \sin C \sin(A - B) &= \sin(A + B) \sin(A - B) = -(\cos 2A - \cos 2B).\end{aligned}$$

Cộng lại ta được:

$$\sin A \sin(B - C) + \sin B \sin(C - A) + \sin C \sin(A - B) = 0.$$

Từ đây ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 22. Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng:

$$\frac{a+b}{a-b} \cdot \tan \frac{A-B}{2} = \tan \frac{A+B}{2}.$$

Lời giải. Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{a-b} \cdot \tan \frac{A-B}{2} &= \frac{2R(\sin A + \sin B)}{2R(\sin A - \sin B)} \cdot \tan \frac{A-B}{2} \\ &= \frac{2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}}{2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{A-B}{2}} = \tan \frac{A+B}{2}. \end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 23 (ĐH Ngoại ngữ Hà Nội-1998). Cho A, B, C và a, b, c là các góc và các cạnh của ΔABC . Chứng minh rằng:

$$\frac{2 \sin(A-B)}{\sin C} = \frac{a^2 - b^2}{c^2}.$$

Lời giải. Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a^2 - b^2}{c^2} &= \frac{4R^2(\sin^2 A - \sin^2 B)}{4R^2 \sin^2 C} = \frac{1 - \cos 2A - (1 - \cos 2B)}{\sin^2 C} \\ &= \frac{\cos 2B - \cos 2A}{\sin^2 C} = \frac{-2 \sin(B+A) \sin(B-A)}{\sin^2 C} \\ &= \frac{2 \sin C \sin(A-B)}{\sin^2 C} = \frac{2 \sin(A-B)}{\sin C}. \end{aligned}$$

Từ đây ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 24. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có

$$\sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

Lời giải.

$$\text{Ta có } \sin A + \sin B - \sin C = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} - \sin \left(2 \cdot \frac{C}{2} \right)$$

$$\text{Vì } \frac{A+B}{2} + \frac{C}{2} = 90^\circ \text{ nên } \sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2} \text{ và } \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A+B}{2}.$$

$$\text{Từ đó } \sin A + \sin B - \sin C = 2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} - 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$= 2 \cos \frac{C}{2} \left[\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} \right]$$

$$= 2 \cos \frac{C}{2} \cdot (-2) \sin \frac{A}{2} \sin \left(-\frac{B}{2} \right) = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$\text{Vậy } \sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

Ví dụ 25. Chứng minh rằng với mọi tam giác nhọn ABC ta luôn có

$$\frac{\sin A + \sin B - \sin C}{\cos A + \cos B - \cos C + 1} = \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{\sin A + \sin B - \sin C}{\cos A + \cos B - \cos C + 1} &= \frac{2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} - \sin \left(2 \cdot \frac{C}{2} \right)}{2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 1 - \cos \left(2 \cdot \frac{C}{2} \right)} \\ &= \frac{2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} - 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}{2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin^2 \frac{C}{2}} = \frac{2 \cos \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} \right)}{2 \sin \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \right)} \\ &= \cot \frac{C}{2} \frac{-2 \sin \frac{A}{2} \sin \left(-\frac{B}{2} \right)}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \left(-\frac{B}{2} \right)} = \cot \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} = \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} \\ \text{Vậy } \frac{\sin A + \sin B - \sin C}{\cos A + \cos B - \cos C + 1} &= \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

Ví dụ 26. Tam giác ABC là tam giác gì nếu $\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$?

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sin A &= \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C} \Leftrightarrow \sin A = \frac{2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}}{2 \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}} \Leftrightarrow \sin A = \tan \frac{B+C}{2} \\ &\Leftrightarrow \sin \left(2 \cdot \frac{A}{2} \right) = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \right) \Leftrightarrow 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = \cot \frac{A}{2} \Leftrightarrow 2 \sin^2 \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = \cos \frac{A}{2} \\ \text{Do } 0^\circ < \frac{A}{2} < 90^\circ &\text{ nên } \cos \frac{A}{2} \neq 0 \text{ và } \sin \frac{A}{2} > 0. \\ \text{Từ đó } 2 \sin^2 \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} &= \cos \frac{A}{2} \Leftrightarrow 2 \sin^2 \frac{A}{2} = 1 \Leftrightarrow \sin \frac{A}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{A}{2} = 45^\circ \Leftrightarrow A = 90^\circ \\ \text{Vậy } ABC &\text{ là tam giác vuông tại } A. \end{aligned}$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 29. Cho A, B, C là 3 đỉnh của một tam giác. Chứng minh rằng

- $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$
- $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$
- $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$
- $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 1 = -4 \cos A \cos B \cos C$
- $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2 \cos A \cos B \cos C$
- $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C$
- $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

$$h) \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1$$

Lời giải.

$$a) \text{ Chứng minh rằng } \sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sin A + \sin B + \sin C &= 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + \sin \left(2 \cdot \frac{C}{2} \right) \\ &= 2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} \left(\text{do } \frac{A+B}{2} + \frac{C}{2} = 90^\circ \right) \\ &= 2 \cos \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \right) \left(\text{do } \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A+B}{2} \right) \\ &= 2 \cos \frac{C}{2} \cdot 2 \cos \frac{A}{2} \cos \left(-\frac{B}{2} \right) = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

$$b) \text{ Chứng minh rằng } \cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \cos A + \cos B + \cos C &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + \cos \left(2 \cdot \frac{C}{2} \right) \\ &= 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{C}{2} \left(\text{do } \frac{A+B}{2} + \frac{C}{2} = 90^\circ \right) \\ &= 1 + 2 \sin \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} \right) \left(\text{do } \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A+B}{2} \right) \\ &= 1 + 2 \sin \frac{C}{2} (-2) \sin \frac{A}{2} \sin \left(-\frac{B}{2} \right) = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

$$c) \text{ Chứng minh rằng } \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C &= 2 \sin(A+B) \cos(A-B) + 2 \sin C \cos C \\ &= 2 \sin C \cos(A-B) - 2 \sin C \cos(A+B) \quad (\text{do } A+B+C = 180^\circ) \\ &= 2 \sin C [\cos(A-B) - \cos(A+B)] \\ &= 2 \sin C \cdot (-2) \sin A \sin(-B) = 4 \sin A \sin B \sin C. \end{aligned}$$

$$d) \text{ Chứng minh rằng } \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 1 = -4 \cos A \cos B \cos C.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 1 &= 2 \cos(A+B) \cos(A-B) + 2 \cos^2 C - 1 + 1 \\ &= -2 \cos C \cos(A-B) - 2 \cos C \cos(A+B) \quad (\text{do } A+B+C = 180^\circ) \\ &= -2 \cos C [\cos(A-B) + \cos(A+B)] \\ &= -2 \cos C \cdot 2 \cos A \cos(-B) = -4 \cos A \cos B \cos C. \end{aligned}$$

$$e) \text{ Chứng minh rằng } \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2 \cos A \cos B \cos C$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C &= \frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 - \cos 2B}{2} + \frac{1 - \cos 2C}{2} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} (\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} [2 \cos(A+B) \cos(A-B) + 2 \cos^2 C - 1] \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} [-2 \cos C \cos(A-B) - 2 \cos C \cos(A+B) - 1] \\ &= 2 + \cos C [\cos(A-B) + \cos(A+B)] \\ &= 2 + \cos C \cdot 2 \cos A \cos(-B) = 2 + 2 \cos A \cos B \cos C \end{aligned}$$

$$f) \text{ Chứng minh rằng } \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C &= \frac{1 + \cos 2A}{2} + \frac{1 + \cos 2B}{2} + \cos^2 C \\ &= 1 + \frac{1}{2} (\cos 2A + \cos 2B) + \cos^2 C = 1 + \cos(A+B) \cos(A-B) + \cos^2 C \\ &= 1 - \cos C \cos(A-B) - \cos C \cos(A+B) \quad (\text{do } A+B+C = 180^\circ) \\ &= 1 - \cos C [\cos(A-B) + \cos(A+B)] \\ &= 1 - \cos C \cdot 2 \cos A \cos(-B) = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C \end{aligned}$$

g) Chứng minh rằng $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

Ta có Ta có $A + B + C = 180^\circ \Rightarrow A + B = 180^\circ - C \Rightarrow \tan(A + B) = \tan(180^\circ - C)$

$$\Rightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C \Rightarrow \tan A + \tan B = -\tan C(1 - \tan A \tan B)$$

$$\Rightarrow \tan A + \tan B = -\tan C + \tan A \tan B \tan C$$

$$\Rightarrow \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C.$$

h) Chứng minh rằng $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1$

$$\text{Ta có } A + B + C = 180^\circ \Rightarrow \frac{A}{2} + \frac{B}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2} \Rightarrow \tan\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \tan\left(90^\circ - \frac{C}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2}}{1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2}} = \cot \frac{C}{2} = \frac{1}{\tan \frac{C}{2}} \Rightarrow \tan \frac{C}{2} \left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} \right) = 1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2}$$

$$\Rightarrow \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{B}{2} = 1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2}$$

$$\Rightarrow \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1.$$

Bài 30. Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng

$$\sin \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{a} \cdot \cos \frac{A}{2}.$$

Lời giải. Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{b-c}{a} \cdot \cos \frac{A}{2} &= \frac{\sin B - \sin C}{\sin A} \cdot \cos \frac{A}{2} \\ &= \frac{2 \cos \frac{B+C}{2} \sin \frac{B-C}{2}}{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}} \cdot \cos \frac{A}{2} = \sin \frac{B-C}{2}. \end{aligned}$$

Điều phải chứng minh.

Bài 31 (ĐH Đà Nẵng 1997). Chứng minh rằng ΔABC vuông khi

$$\frac{b}{\cos B} + \frac{c}{\cos C} = \frac{a}{\sin B \sin C}. \quad (1)$$

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \frac{2R \sin B}{\cos B} + \frac{2R \sin C}{\cos C} = \frac{2R \sin A}{\sin B \sin C} \\ &\Leftrightarrow \frac{\sin B}{\cos B} + \frac{\sin C}{\cos C} = \frac{\sin A}{\sin B \sin C} \\ &\Leftrightarrow \frac{\sin B \cos C + \cos B \sin C}{\cos B \cos C} = \frac{\sin A}{\sin B \sin C} \\ &\Leftrightarrow \frac{\sin(B+C)}{\cos B \cos C} = \frac{\sin A}{\sin B \sin C} \Leftrightarrow \frac{\sin A}{\cos B \cos C} = \frac{\sin A}{\sin B \sin C} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\cos B \cos C} = \frac{1}{\sin B \sin C} \Leftrightarrow \sin B \sin C = \cos B \cos C \\ &\Leftrightarrow \cos B \cos C - \sin B \sin C = 0 \Leftrightarrow \cos(B+C) = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos(\pi - A) = 0 \Leftrightarrow -\cos A = 0 \Leftrightarrow \cos A = 0 \Leftrightarrow A = 90^\circ. \end{aligned}$$

Vậy tam giác ABC vuông tại A .

Bài 32. Cho a, b, A, B khác không và $aB + bA \neq 0$ sao cho

$$\frac{\sin(x - \alpha)}{\sin(x - \beta)} = \frac{a}{b}, \quad \frac{\cos(x - \alpha)}{\cos(x - \beta)} = \frac{A}{B}.$$

Chứng minh rằng: $\cos(\alpha - \beta) = \frac{aA + bB}{aB + bA}$.

Lời giải. Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{aA + bB}{aB + bA} &= \frac{aB \left(\frac{A}{B} + \frac{b}{a} \right)}{aB \left(1 + \frac{b}{a} \cdot \frac{A}{B} \right)} = \frac{\frac{\cos(x - \alpha)}{\cos(x - \beta)} + \frac{\sin(x - \beta)}{\sin(x - \alpha)}}{1 + \frac{\sin(x - \beta)}{\sin(x - \alpha)} \cdot \frac{\cos(x - \alpha)}{\cos(x - \beta)}} \\ &= \frac{\frac{1}{2} [\sin(2x - 2\alpha) + \sin(2x - 2\beta)]}{\sin(x - \alpha) \cos(x - \beta) + \cos(x - \alpha) \sin(x - \beta)} \\ &= \frac{\sin(2x - \alpha - \beta) \cos(\alpha - \beta)}{\sin(x - \alpha + x - \beta)} = \cos(\alpha - \beta). \end{aligned}$$

Như vậy: $\cos(\alpha - \beta) = \frac{aA + bB}{aB + bA}$, điều phải chứng minh.

Bài 33 (ĐH-2004A). Cho ΔABC không tù, thỏa mãn điều kiện

$$\cos 2A + 2\sqrt{2} \cos B + 2\sqrt{2} \cos C = 3.$$

Tính ba góc của tam giác ABC .

Lời giải. Gọi $M = \cos 2A + 2\sqrt{2} \cos B + 2\sqrt{2} \cos C - 3$. Khi đó

$$\begin{aligned} M &= 2\cos^2 A - 1 + 4\sqrt{2} \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} - 3 \\ &= 2\cos^2 A + 4\sqrt{2} \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} - 4. \end{aligned}$$

Do $\sin \frac{A}{2} > 0$, $0 < \cos \frac{B-C}{2} \leq 1$ nên

$$M \leq 2\cos^2 A + 4\sqrt{2} \sin \frac{A}{2} - 4.$$

Mặt khác, do tam giác ABC không tù nên $\cos A \geq 0$, $\cos^2 A \leq \cos A$. Suy ra

$$\begin{aligned} M &\leq 2\cos A + 4\sqrt{2} \sin \frac{A}{2} - 4 = 2 \left(1 - 2\sin^2 \frac{A}{2} \right) + 4\sqrt{2} \sin \frac{A}{2} - 4 \\ &= -4\sin^2 \frac{A}{2} + 4\sqrt{2} \sin \frac{A}{2} - 2 = -2 \left(\sqrt{2} \sin \frac{A}{2} - 1 \right)^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Vậy $M \geq 0$, hay $\cos 2A + 2\sqrt{2} \cos B + 2\sqrt{2} \cos C \leq 3$. Theo giả thiết

$$M = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 A = \cos A \\ \cos \frac{B-C}{2} = 1 \\ \sin \frac{A}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 90^\circ \\ B = C = 45^\circ. \end{cases}$$

Bài 34. Chứng minh $\frac{\sin^4 a + \cos^4 a - 1}{\sin^6 a + \cos^6 a - 1} = \frac{2}{3}$

Lời giải. Ta có:

$$\sin^4 a + \cos^4 a - 1 = (\sin^2 a + \cos^2)^2 - 2\sin^2 a \cos^2 a - 1 = -2\sin^2 a \cos^2 a$$

$$\sin^6 a + \cos^6 a - 1$$

$$= (\sin^2 a + \cos^2 a)(\sin^4 a + \cos^4 a - \sin^2 a \cos^2 a) - 1$$

$$= (1 - 2\sin^2 a \cos^2 a) - \sin^2 a \cos^2 a - 1$$

$$= -3\sin^2 a \cos^2 a$$

$$\text{Do đó: } \frac{\sin^4 a + \cos^4 a - 1}{\sin^6 a + \cos^6 a - 1} = \frac{-2\sin^2 a \cos^2 a}{-3\sin^2 a \cos^2 a} = \frac{2}{3}$$

Bài 35. Rút gọn biểu thức $A = \frac{1 + \cos x}{\sin x} \left[1 + \frac{(1 - \cos x)^2}{\sin^2 x} \right]$.

Tính giá trị A nếu $\cos x = -\frac{1}{2}$ và $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

Lời giải. Ta có:

$$A = \frac{1 + \cos x}{\sin x} \left(\frac{\sin^2 x + 1 - 2\cos x + \cos^2 x}{\sin^2 x} \right)$$

$$= \frac{1 + \cos x}{\sin x} \cdot \frac{2(1 - \cos x)}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{2(1 - \cos^2 x)}{\sin^3 x} = \frac{2\sin^2 x}{\sin^3 x} = \frac{2}{\sin x}$$

$$\text{Ta có: } \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\text{Do: } \frac{\pi}{2} < x < \pi \text{ nên } \sin x > 0$$

$$\text{Vậy } \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Do đó: } A = \frac{2}{\sin x} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Bài 36. Chứng minh các biểu thức sau đây không phụ thuộc x :

a) $A = 2\cos^4 x - \sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + 3\sin^2 x$

b) $B = \frac{2}{\tan x - 1} + \frac{\cot x + 1}{\cot x - 1}$

Lời giải.

a) Ta có:

$$\begin{aligned} A &= 2\cos^4 x - (1 - \cos^2 x)^2 + (1 - \cos^2 x) \cos^2 x + 3(1 - \cos^2 x) \\ &= 2\cos^4 x - (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) + \cos^2 x - \cos^4 x + 3 - 3\cos^2 x \\ &= 2 \text{ (không phụ thuộc } x). \end{aligned}$$

b) Điều kiện $\sin x \cdot \cos x \neq 0, \tan x \neq 1$

$$\begin{aligned} B &= \frac{2}{\tan x - 1} + \frac{\frac{1}{\tan x} + 1}{\frac{1}{\tan x} - 1} \\ &= \frac{2}{\tan x - 1} + \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} \\ &= \frac{2 - (1 + \tan x)}{\tan x - 1} = \frac{1 - \tan x}{\tan x - 1} = -1. \end{aligned}$$

Bài 37. Chứng minh $A = \sin^4 \frac{\pi}{16} + \sin^4 \frac{3\pi}{16} + \sin^4 \frac{5\pi}{16} + \sin^4 \frac{7\pi}{16} = \frac{3}{2}$

Lời giải. Ta có:

$$\sin \frac{7\pi}{16} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{16} \right) = \cos \frac{\pi}{16}$$

$$\sin \frac{5\pi}{16} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{16} \right) = \cos \frac{3\pi}{16}$$

Mặt khác: $\sin^4 a + \cos^4 a = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2a$.

Do đó:

$$\begin{aligned} A &= \sin^4 \frac{\pi}{16} + \sin^4 \frac{7\pi}{16} + \sin^4 \frac{3\pi}{16} + \sin^4 \frac{5\pi}{16} \\ &= \left(\sin^4 \frac{\pi}{16} + \cos^4 \frac{\pi}{16} \right) + \left(\sin^4 \frac{3\pi}{16} + \cos^4 \frac{3\pi}{16} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{8} \right) + \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{3\pi}{8} \right) \\ &= 2 - \frac{1}{2} \left(\sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} \right) \\ &= 2 - \frac{1}{2} \left(\sin^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{\pi}{8} \right) \left(\sin \frac{3\pi}{8} = \cos \frac{\pi}{8} \right) \\ &= 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Bài 38. Chứng minh: $16 \sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ = 1$

Lời giải. Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\cos 10^\circ} (16 \sin 10^\circ \cos 10^\circ) \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ \\ &= \frac{1}{\cos 10^\circ} (8 \sin 20^\circ) \left(\frac{1}{2} \right) \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 20^\circ \\ &= \frac{1}{\cos 10^\circ} (4 \sin 20^\circ \cos 20^\circ) \cdot \cos 40^\circ \\ &= \frac{1}{\cos 10^\circ} \cdot 2 \sin 40^\circ \cos 40^\circ \\ &= \frac{1}{\cos 10^\circ} \sin 80^\circ = \frac{\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ} = 1 \end{aligned}$$

Bài 39. Chứng minh: $\cos^2 x + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} + x \right) + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} - x \right) = \frac{3}{2}$.

Lời giải. Ta có:

$$\begin{aligned} &\cos^2 x + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} + x \right) + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} - x \right) \\ &= \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) + \frac{1}{2} \left[1 + \cos \left(2x + \frac{4\pi}{3} \right) \right] + \frac{1}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{4\pi}{3} - 2x \right) \right] \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left[\cos 2x + \cos \left(2x + \frac{4\pi}{3} \right) + \cos \left(\frac{4\pi}{3} - 2x \right) \right] \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left(\cos 2x + 2 \cos 2x \cdot \cos \frac{4\pi}{3} \right) \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} (\cos 2x - \cos 2x) \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Bài 40. Chứng minh: $\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \frac{1}{\sin 8x} + \frac{1}{\sin 16x} = \cot x - \cot 16x$.

Lời giải. Ta có: $\cot a - \cot b = \frac{\cos a}{\sin a} - \frac{\cos b}{\sin b} = \frac{\sin b \cos a - \sin a \cos b}{\sin a \sin b} = \frac{\sin(b-a)}{\sin a \sin b}$

Do đó: $\cot x - \cot 2x = \frac{\sin(2x-x)}{\sin x \sin 2x} = \frac{1}{\sin 2x}$

Tương tự:

$$\cot 2x - \cot 4x = \frac{1}{\sin 4x}$$

$$\cot 4x - \cot 8x = \frac{1}{\sin 8x}$$

$$\cot 8x - \cot 16x = \frac{1}{\sin 16x}$$

Cộng về theo về các đẳng thức trên ta được:

$$\cot x - \cot 16x = \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \frac{1}{\sin 8x} + \frac{1}{\sin 16x}.$$

Bài 41. Chứng minh: $8 \sin^3 18^\circ + 8 \sin^2 18^\circ = 1$

Lời giải. Ta có: $\sin 18^\circ = \cos 72^\circ$

$$\Leftrightarrow \sin 18^\circ = 2 \cos^2 36^\circ - 1$$

$$\Leftrightarrow \sin 18^\circ = 2(1 - 2 \sin^2 18^\circ)^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow \sin 18^\circ = 2(1 - 4 \sin^2 18^\circ + 4 \sin^4 18^\circ) - 1$$

$$\Leftrightarrow 8 \sin^4 18^\circ - 8 \sin^2 18^\circ - \sin 18^\circ + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin 18^\circ - 1)(8 \sin^3 18^\circ + 8 \sin^2 18^\circ - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 8 \sin^3 18^\circ + 8 \sin^2 18^\circ - 1 = 0 \text{ (do } 0 < \sin 18^\circ < 1).$$

Bài 42. Chứng minh: $\sin 3x \cdot \sin^3 x + \cos 3x \cdot \cos^3 x = \cos^3 2x$.

Lời giải. Ta có:

$$\begin{aligned} & \sin 3x \cdot \sin^3 x + \cos 3x \cdot \cos^3 x \\ &= \sin 3x \left(\frac{3 \sin x - \sin 3x}{4} \right) + \cos 3x \left(\frac{3 \cos x + \cos 3x}{4} \right) \\ &= \frac{3}{4} (\sin 3x \sin x + \cos 3x \cos x) + \frac{1}{4} (\cos^2 3x - \sin^2 3x) \\ &= \frac{3}{4} \cos(3x - x) + \frac{1}{4} \cos 6x \\ &= \frac{1}{4} (3 \cos 2x + \cos(3 \cdot 2x)) \\ &= \frac{1}{4} (3 \cos 2x + 4 \cos^3 2x - 3 \cos 2x) \\ &= \cos^3 2x. \end{aligned}$$

Bài 43. Tính $P = \sin^2 50^\circ + \sin^2 70^\circ - \cos 50^\circ \cos 70^\circ$.

Lời giải. Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} (1 - \cos 100^\circ) + \frac{1}{2} (1 - \cos 140^\circ) - \frac{1}{2} (\cos 120^\circ + \cos 20^\circ) \\ &= 1 - \frac{1}{2} (\cos 100^\circ + \cos 140^\circ) - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + \cos 20^\circ \right) \\ &= 1 - (\cos 120^\circ \cos 20^\circ) + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 20^\circ \\ &= \frac{5}{4} + \frac{1}{2} \cos 20^\circ - \frac{1}{2} \cos 20^\circ = \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Bài 44. Tính: $P = \cos 12^\circ + \cos 18^\circ - 4 \cos 15^\circ \cdot \cos 21^\circ \cdot \cos 24^\circ$

Lời giải. Ta có:

$$\begin{aligned} & \cos 12^\circ + \cos 18^\circ - 4 \cos 15^\circ (\cos 21^\circ \cos 24^\circ) \\ &= 2 \cos 15^\circ \cos 3^\circ - 2 \cos 15^\circ (\cos 45^\circ + \cos 3^\circ) \\ &= 2 \cos 15^\circ \cos 3^\circ - 2 \cos 15^\circ \cos 45^\circ - 2 \cos 15^\circ \cos 3^\circ \\ &= -2 \cos 15^\circ \cos 45^\circ \\ &= -(\cos 60^\circ + \cos 30^\circ) \\ &= -\frac{\sqrt{3} + 1}{2} \end{aligned}$$

Bài 45. Cho $\triangle ABC$ tùy ý với ba góc đều là nhọn. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$.

Lời giải. Ta có: $A + B = \pi - C$

Nên: $\tan(A + B) = -\tan C$

$$\Leftrightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B} = -\tan C$$

$$\Leftrightarrow \tan A + \tan B = -\tan C + \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$$

Vậy $P = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C = \tan A + \tan B + \tan C$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương $\tan A, \tan B, \tan C$ ta được:

$$\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt[3]{\tan A \cdot \tan B \cdot \tan C}$$

$$\Leftrightarrow P \geq 3\sqrt[3]{P}$$

$$\Leftrightarrow P \geq 3\sqrt{3}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow A = B = C = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Do đó: } \min P = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow A = B = C = \frac{\pi}{3}.$$

Bài 46. Chứng minh: $8 + 4\tan \frac{\pi}{8} + 2\tan \frac{\pi}{16} + \tan \frac{\pi}{32} = \cot \frac{\pi}{32}$.

Lời giải. Ta có:

$$\cot a - \tan a = \frac{\cos a}{\sin a} - \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\cos^2 a - \sin^2 a}{\sin a \cos a} = \frac{\cos 2a}{\frac{1}{2} \sin 2a} = 2 \cot 2a.$$

Do đó:

$$\begin{aligned} & \cot \frac{\pi}{32} - \tan \frac{\pi}{32} - 2 \tan \frac{\pi}{16} - 4 \tan \frac{\pi}{8} \\ &= 2 \cot \frac{\pi}{16} - 2 \tan \frac{\pi}{16} - 4 \tan \frac{\pi}{8} \\ &= 4 \cot \frac{\pi}{8} - 4 \tan \frac{\pi}{8} \\ &= 8 \cot \frac{\pi}{4} = 8 \Rightarrow \text{đpcm.} \end{aligned}$$

Bài 47. Cho $\cos x = \frac{3}{4}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$; $\sin y = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < y < \pi$. Hãy tính

$$\cos 2x, \sin 2x, \sin 2y, \cos 2y, \cos(x+y), \sin(x-y).$$

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} 0 < x < \frac{\pi}{2} &\Rightarrow \sin x > 0 \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{7}}{4} \\ \frac{\pi}{2} < y < \pi &\Rightarrow \cos y < 0 \Rightarrow \cos y = -\frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Vậy

$$\begin{aligned} \cos 2x &= 2\cos^2 x - 1 = 2 \cdot \frac{9}{16} - 1 = \frac{1}{8} \\ \sin 2x &= 2\sin x \cos x = 2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{8} \\ \cos 2y &= 2\cos^2 y - 1 = 2 \cdot \frac{16}{25} - 1 = \frac{7}{25} \\ \sin 2y &= 2\sin y \cos y = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25} \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y = \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) - \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{3}{5} = -\frac{12+3\sqrt{7}}{20} \\ \sin(x-y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y = \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) - \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} = -\frac{4\sqrt{7}+9}{20}. \end{aligned}$$

Bài 48. Chứng minh rằng

$$a) \quad \sin 3x = \sin x (4\cos^2 x - 1); \quad b) \quad \sin 4x = \sin x (8\cos^3 x - 4\cos x).$$

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned}\sin 3x &= \sin(2x + x) = \sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x \\ &= \sin x (2\cos^2 x - 1) + 2\sin x \cos^2 x = \sin x (4\cos^2 x - 1).\end{aligned}$$

b) Ta có

$$\sin 4x = 2\sin 2x \cos 2x = \sin x \cdot 4\cos x (2\cos^2 x - 1) = \sin x (8\cos^3 x - 4\cos x).$$

Bài 49. Cho α là góc lượng giác tùy ý, $\alpha \neq \frac{3k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Chứng minh

$$\left(\cot \frac{\alpha}{3} - \tan \frac{\alpha}{3}\right) \tan \frac{2\alpha}{3} = 2.$$

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned}\left(\cot \frac{\alpha}{3} - \tan \frac{\alpha}{3}\right) \tan \frac{2\alpha}{3} &= \left(\frac{\cos \frac{\alpha}{3}}{\sin \frac{\alpha}{3}} - \frac{\sin \frac{\alpha}{3}}{\cos \frac{\alpha}{3}}\right) \cdot \tan \frac{2\alpha}{3} \\ &= \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{3} - \sin^2 \frac{\alpha}{3}}{\sin \frac{\alpha}{3} \cos \frac{\alpha}{3}} \tan \frac{2\alpha}{3} = \frac{\cos \frac{2\alpha}{3}}{\frac{1}{2} \sin \frac{2\alpha}{3}} \tan \frac{2\alpha}{3} = 2 \cot \frac{2\alpha}{3} \tan \frac{2\alpha}{3} = 2.\end{aligned}$$

Bài 50 (ĐHQG Hà Nội-1996). Chứng minh rằng $\frac{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x - 1} = \frac{2}{3}$.

Lời giải. Ta có

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x, \quad \sin^6 x + \cos^6 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x.$$

Do đó

$$\frac{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x - 1} = \frac{-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x}{-\frac{3}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x} = \frac{\frac{1}{4}(-1 + \cos 4x)}{\frac{3}{8}(-1 + \cos 4x)} = \frac{2}{3}.$$

Bài 51. Chứng minh rằng với mọi x, y, z ta có

$$\cos^2 x + \cos^2 y - \cos^2 z - \cos^2(x + y + z) = 2\cos(x + y) \sin(y + z) \sin(z + x).$$

Lời giải. Kí hiệu Q là vế trái. Ta có

$$\begin{aligned}Q &= \frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 2y}{2} - \frac{1 + \cos 2z}{2} - \frac{1 + \cos 2(x + y + z)}{2} \\ &= \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 2y) - \frac{1}{2}[\cos 2(x + y + z) + \cos 2z] \\ &= \cos(x + y) \cos(x - y) - \cos(x + y + 2z) \cos(x + y) \\ &= -\cos(x + y) [\cos(x + y + 2z) - \cos(x - y)] \\ &= 2\cos(x + y) \sin(x + z) \sin(y + z) = \text{Vế phải}.\end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 52 (ĐH Đà Nẵng-1998). Chứng minh rằng

$$\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

Lời giải. Kí hiệu T là vế trái. Nhân vế trái với $2 \sin \frac{\pi}{7} \neq 0$ ta được

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{\pi}{7} \cdot T &= 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} - 2 \cos \frac{2\pi}{7} \sin \frac{\pi}{7} + 2 \cos \frac{3\pi}{7} \sin \frac{\pi}{7} \\ &= \sin \frac{2\pi}{7} - \left(\sin \frac{3\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} \right) + \left(\sin \frac{4\pi}{7} - \sin \frac{2\pi}{7} \right) \\ &= \sin \frac{\pi}{7} - \sin \frac{3\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} = \sin \frac{\pi}{7}. \end{aligned}$$

Như thế $2 \sin \frac{\pi}{7} \cdot T = \sin \frac{\pi}{7} \Rightarrow T = \frac{1}{2}$.

Bài 53 (ĐHQG Hà Nội-1995). Chứng minh rằng:

$$\tan 30^\circ + \tan 40^\circ + \tan 50^\circ + \tan 60^\circ = \frac{8\sqrt{3}}{3} \cos 20^\circ.$$

Lời giải. Kí hiệu T là vế trái của đẳng thức cần chứng minh. Ta có:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} + \tan 40^\circ + \tan 50^\circ = \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{\sin 40^\circ}{\cos 40^\circ} + \frac{\sin 50^\circ}{\cos 50^\circ} \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{\sin 40^\circ \cos 50^\circ + \cos 40^\circ \sin 50^\circ}{\cos 40^\circ \cos 50^\circ} \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{\sin(40^\circ + 50^\circ)}{\cos 40^\circ \cos 50^\circ} = \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{\cos 40^\circ \cos 50^\circ} \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{\cos 40^\circ \sin 40^\circ} = \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{2}{\sin 80^\circ} \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{2}{\cos 10^\circ} = \frac{4\sqrt{3} \cos 10^\circ + 6}{3 \cos 10^\circ} = \frac{4\sqrt{3} \left(\cos 10^\circ + \frac{6}{4\sqrt{3}} \right)}{3 \cos 10^\circ} \\ &= \frac{4\sqrt{3} \left(\cos 10^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{3 \cos 10^\circ} = \frac{4\sqrt{3} (\cos 10^\circ + \cos 30^\circ)}{3 \cos 10^\circ} \\ &= \frac{4\sqrt{3} \cdot 2 \cos 20^\circ \cos 10^\circ}{3 \cos 10^\circ} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \cos 20^\circ. \end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh.

§4. ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG VI

I. Đề số 1a

Câu 1 (1,0 điểm). Một đường tròn có bán kính 30 cm. Tìm độ dài của các cung có số đo lần lượt là $\frac{\pi}{15}$ và 36° .

Lời giải. Độ dài của cung có số đo $\frac{\pi}{15}$ là $l_1 = \frac{\pi}{15} \cdot 30 = 2\pi$ (cm).

Độ dài của cung có số đo 36° là $l_3 = \frac{\pi}{180} \cdot 36 \cdot 30 = 6\pi$ (cm).

Câu 2 (2,0 điểm). Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Xác định dấu của các giá trị lượng giác sau:

a) $\sin(\alpha - \pi)$;

b) $\cos\left(\frac{17\pi}{2} + \alpha\right)$.

Lời giải.

a) $\sin(\alpha - \pi) = -\sin \alpha < 0$ (vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\sin \alpha > 0$);

b) $\sin\left(\frac{17\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha + 8\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(-\alpha) = \cos \alpha > 0$ (vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\cos \alpha > 0$).

Câu 3 (3,0 điểm). Tìm $\sin x, \cos x, \cot x, \sin 2x, \cos 2x$ và $\tan 2x$ biết $\tan x = \frac{4\sqrt{11}}{7}$ và $-\pi < x < -\frac{\pi}{2}$.

Lời giải. $\tan x = \frac{4\sqrt{11}}{7} \Rightarrow \cot x = \frac{7\sqrt{11}}{44}$.

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = \frac{225}{49} \Rightarrow \cos x = -\frac{7}{15} \text{ (vì } -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \text{)}.$$

$$\sin x = \tan x \cdot \cos x = -\frac{4\sqrt{11}}{15}.$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = \frac{56\sqrt{11}}{225}.$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = -\frac{127}{225}.$$

$$\tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{56\sqrt{11}}{127}.$$

Câu 4 (3,0 điểm). Rút gọn các biểu thức sau

a) $A = \sqrt{\sin^2 x(1 + \cot x) + \cos^2 x(1 + \tan x)}$;

b) $B = \frac{2 \sin(a+b)}{\cos(a+b) + \cos(a-b)}$.

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\sin^2 x(1 + \cot x) + \cos^2 x(1 + \tan x)} = \sqrt{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x} \\ &= \sqrt{(\sin x + \cos x)^2} = |\sin x + \cos x|. \end{aligned}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned} B &= \frac{2 \sin a \cos b + 2 \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b + \cos a \cos b + \sin a \sin b} \\ &= \frac{2 \sin a \cos b + 2 \sin b \cos a}{2 \cos a \cos b} \\ &= \tan a + \tan b. \end{aligned}$$

Câu 5 (1,0 điểm). Chứng minh rằng nếu tam giác ABC có ba góc A, B, C thỏa mãn $\sin A = \cos B + \cos C$ thì tam giác ABC vuông.

Lời giải. Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} \sin A &= \cos B + \cos C \\ \Leftrightarrow \sin A &= 2 \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} \\ \Leftrightarrow 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} &= 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} \\ \Leftrightarrow \cos \frac{A}{2} &= \cos \frac{B-C}{2} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{A}{2} = \frac{B-C}{2} \\ \frac{A}{2} = \frac{B+C}{2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=C \\ A+C=B. \end{cases} \end{aligned}$$

Do đó, tam giác ABC vuông tại B hoặc vuông tại C .

II. Đề số 1b

Câu 1 (1,0 điểm). a) Đổi số đo của góc 18° sang đơn vị radian.

b) Đổi số đo của cung $\frac{3\pi}{20}$ sang độ, phút, giây.

c) Cho đường tròn có bán kính 15cm. Tìm độ dài của cung có số đo $\frac{\pi}{6}$.

Lời giải.

a) $18^\circ = \frac{\pi}{10}$.

b) $\frac{3\pi}{20} = 27^\circ$.

c) Độ dài của cung có số đo $\frac{\pi}{6}$ là $l = \frac{\pi}{6} \cdot 15 = \frac{5\pi}{2}$ (cm).

Câu 2 (2,0 điểm). Cho $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$. Xác định dấu của các giá trị lượng giác sau:

a) $\sin(\alpha - 12\pi)$;

b) $\tan\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right)$.

Lời giải.

a) $\sin(\alpha - 12\pi) = \sin \alpha < 0$;

b) $\tan\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha + 2\pi\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha < 0$.

Câu 3 (3,0 điểm). a) Cho $\tan x = -3$. Tính $A = \frac{5 \sin x + 4 \cos x}{6 \sin x - 7 \cos x}$.

b) Tính $\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$ biết $\cos x = -\frac{4}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

Lời giải.

$$\text{a) } A = \frac{5 \tan x + 4}{6 \tan x - 7} = \frac{5(-3) + 4}{6(-3) - 7} = \frac{11}{25}.$$

b) Ta có $\cos x = -\frac{4}{5} \Rightarrow \sin x = \frac{3}{5}$ (do $\frac{\pi}{2} < x < \pi$).

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \sin \frac{\pi}{6} \cos x - \sin x \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{-4 - 3\sqrt{3}}{10}.$$

Câu 4 (3,0 điểm). Rút gọn các biểu thức sau:

$$\text{a) } B = \cos\left(\frac{2017\pi}{2} - a\right) \sin\left(\frac{2017\pi}{2} - b\right) - \sin(a - b).$$

$$\text{b) } C = \frac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x} \cdot \cot x.$$

Lời giải.

$$\text{a) } B = \sin a \cos b - \sin a \cos b + \sin b \cos a = \sin b \cos a.$$

b) Ta có

$$\begin{aligned} C &= \frac{2 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x}{2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \\ &= \frac{2 \sin x (\sin x + \cos x)}{2 \cos x (\cos x + \sin x)} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 1. \end{aligned}$$

Câu 5 (1,0 điểm). Cho tam giác ABC có ba góc A, B, C thỏa mãn $2 \sin A \sin B = 1 + \cos C$. Hỏi tam giác ABC là tam giác gì?

Lời giải. Ta có

$$2 \sin A \sin B = 1 + \cos C$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin A \sin B = 1 - \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$\Leftrightarrow \cos A \cos B + \sin A \sin B = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos(A - B) = 1$$

$$\Leftrightarrow A - B = 0$$

$$\Leftrightarrow A = B.$$

Vậy tam giác ABC cân tại C .

III. Đề số 2a

Bài 1 (2,0 điểm). Cho $\tan a = \frac{4}{3}$ ($\pi < a < \frac{3\pi}{2}$). Tính $\sin 2a$; $\tan\left(2a - \frac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải. Ta có

$$\bullet \frac{1}{\cos^2 a} = 1 + \tan^2 a = 1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{25}{9} \Rightarrow \cos a = \frac{3}{5} \left(\text{do } \pi < a < \frac{3\pi}{2} \right) \dots\dots\dots (0.5đ)$$

$$\bullet \sin a = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin 2a = \frac{24}{25} \dots\dots\dots (0.5đ)$$

$$\bullet \cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = \frac{7}{25} \Rightarrow \tan 2a = \frac{24}{7} \dots\dots\dots (0.5đ)$$

$$\bullet \tan\left(2a - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{31}{17} \dots\dots\dots (0.5đ)$$

Bài 2 (2,0 điểm). Chứng minh đẳng thức: $\frac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} + \frac{\sin x + \cos x}{1 - \tan^2 x} = \sin x + \cos x$.

Lời giải. VT = $\frac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} + \frac{(\sin x + \cos x) \cos^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} \dots\dots\dots (0.5đ)$

$$= \frac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} + \frac{\cos^2 x}{\cos x - \sin x} \dots\dots\dots (0.5đ)$$

$$= \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x - \cos^2 x} \dots\dots\dots (0.5đ)$$

$$= \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = VP \dots\dots\dots (0.5đ)$$

Bài 3 (2,0 điểm). Chứng minh biểu thức: $A = \sin^2 x + \sin^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ không phụ thuộc vào x .

Lời giải. $A = \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2x\right)}{2} + \frac{1 - \cos\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right)}{2} \dots\dots\dots (0.5đ)$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left[\cos 2x + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2x\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right) \right] \dots\dots\dots (0.5đ)$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\cos 2x + 2 \cos \frac{2\pi}{3} \cos 2x \right) \dots\dots\dots (0.5đ)$$

$$= \frac{3}{2} \text{ (không phụ thuộc vào } x) \dots\dots\dots (0.5đ)$$

Bài 4 (2,0 điểm). Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sin 3x + \sin 2x + \sin x}{2 + \cos x - 2\sin^2 x}$.

Lời giải. $A = \frac{\sin 3x + \sin 2x + \sin x}{2 + \cos x - 2\sin^2 x}$
 $= \frac{2\sin 2x \cdot \cos x + \sin 2x}{2(1 - \sin^2 x) + \cos x} \dots\dots\dots (0.75đ)$

$$= \frac{4\sin x \cdot \cos^2 x + 2\sin x \cdot \cos x}{2\cos^2 x + \cos x} \dots\dots\dots (0.75đ)$$

$$= \frac{2\sin x \cdot \cos x(2\cos x + 1)}{\cos x(2\cos x + 1)} = 2\sin x \dots\dots\dots (0.5đ)$$

Bài 5 (2,0 điểm). Trong tam giác ABC , chứng minh rằng :
 $\sin^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 2 - 2\cos A \sin B \sin C$.

Lời giải. VT = $\sin^2 A + 1 + \frac{1}{2}(\cos 2B + \cos 2C) \dots\dots\dots (0.5đ)$

$$= 2 - \cos^2 A - \cos A \cos(B - C) \dots\dots\dots (0.5đ)$$

$$= 2 - \cos A [\cos A + \cos(B - C)]$$

$$= 2 - 2\cos A \cos \frac{A+B-C}{2} \cos \frac{A-B+C}{2} \dots\dots\dots (0.5đ)$$

$$= 2 - 2\cos A \sin B \sin C = VP \text{ (do } A+B+C = \pi) \dots\dots\dots (0.5đ)$$

IV. Đề số 2b

Bài 1 (2,0 điểm). Cho $\tan a = \frac{3}{4}$; $\left(\pi < a < \frac{3\pi}{2}\right)$. Tính $\sin 2a$; $\tan\left(2a + \frac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải. Ta có

- $\frac{1}{\cos^2 a} = 1 + \tan^2 a = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} \Rightarrow \cos a = \frac{4}{5} \left(\text{do } \pi < a < \frac{3\pi}{2} \right) \dots\dots\dots (0.5đ)$
- $\sin a = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin 2a = \frac{24}{25} \dots\dots\dots (0.5đ)$
- $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = \frac{7}{25} \Rightarrow \tan 2a = \frac{24}{7} \dots\dots\dots (0.5đ)$
- $\tan \left(2a + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{31}{17} \dots\dots\dots (0.5đ)$

Bài 2 (2,0 điểm). Chứng minh đẳng thức: $\frac{\cos^2 x}{\cos x - \sin x} + \frac{\sin x + \cos x}{1 - \cot^2 x} = \sin x + \cos x$.

Lời giải. $VT = \frac{\cos^2 x}{\cos x - \sin x} + \frac{(\sin x + \cos x) \sin^2 x}{\sin^2 x - \cos^2 x} \dots\dots\dots (0.5đ)$

$$= \frac{\cos^2 x}{\cos x - \sin x} + \frac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} \dots\dots\dots (0.5đ)$$

$$= \frac{\cos^2 x \sin^2 x}{\cos x - \sin x} \dots\dots\dots (0.5đ)$$

$$= \sin x + \cos x = VP \dots\dots\dots (0.5đ)$$

Bài 3 (2,0 điểm). Chứng minh biểu thức: $A = \cos^2 x + \cos^2 \left(\frac{\pi}{3} + x \right) + \cos^2 \left(\frac{\pi}{3} - x \right)$ không phụ thuộc vào x .

Lời giải. $A = \frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos \left(\frac{2\pi}{3} + 2x \right)}{2} + \frac{1 + \cos \left(\frac{2\pi}{3} - 2x \right)}{2} \dots\dots\dots (0.5đ)$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left[\cos 2x + \cos \left(\frac{2\pi}{3} + 2x \right) + \cos \left(\frac{2\pi}{3} - 2x \right) \right] \dots\dots\dots (0.5đ)$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left(\cos 2x + 2 \cos \frac{2\pi}{3} \cos 2x \right) \dots\dots\dots (0.5đ)$$

$$= \frac{3}{2} \text{ (không phụ thuộc vào biến } x) \dots\dots\dots (0.5đ)$$

Bài 4 (2,0 điểm). Rút gọn biểu thức : $B = \frac{\sin 3a - \sin 2a + \sin a}{2 - \cos a - 2\sin^2 a}$

Lời giải. $B = \frac{\sin 3a - \sin 2a + \sin a}{2 - \cos a - 2\sin^2 a} \dots\dots\dots (0.75đ)$

$$= \frac{2 \sin 2a \cdot \cos a - \sin 2a}{2(1 - \sin^2 a) - \cos a} \dots\dots\dots (0.75đ)$$

$$= \frac{4 \sin a \cdot \cos^2 a - 2 \sin a \cdot \cos a}{2 \cos^2 a - \cos a} \dots\dots\dots (0.75đ)$$

$$= \frac{2 \sin a \cdot \cos a (2 \cos a - 1)}{\cos a (2 \cos a - 1)} = 2 \sin a \dots\dots\dots (0.5đ)$$

Bài 5 (2,0 điểm). Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng: $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$.

Lời giải. $VT = 2 \sin(A+B) \sin(A-B) + 2 \sin C \cos C \dots\dots\dots (0.5đ)$

$$= 2 \sin C \cos(A-B) - 2 \sin C \cos(A+B) \text{ (do } A+B+C = \pi) \dots\dots\dots (0.5đ)$$

$$= 2 \sin C [\cos(A-B) - \cos(A+B)] \dots\dots\dots (0.5đ)$$

$$= 4 \sin A \sin B \sin C = VP \dots\dots\dots (0.5đ)$$

Bài 6. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 9}{x}$

Lời giải. Ta có: $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 9}{x} = \frac{x^2}{x} + \frac{3x}{x} + \frac{9}{x} = x + 3 + \frac{9}{x}$
 Áp dụng Bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương x và $\frac{9}{x}$

$$x + \frac{9}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{9}{x}}$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{9}{x} \geq 2\sqrt{9}$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{9}{x} + 3 \geq 2 \cdot 3 + 3$$

$$\Leftrightarrow y \geq 9$$

Vậy $\min y = 9$. Dấu “=” xảy ra khi $x = \frac{9}{x} \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3(n) \\ x = -3(l) \end{cases}$

V. Đề số 3a

Bài 1 (1,0 điểm). Thực hiện đổi đơn vị đo góc.

a) Đổi số đo góc 50° sang radian.

b) Đổi số đo góc $\frac{\pi}{36}$ radian sang độ.

Lời giải.

a) Ta có $50^\circ = 50 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{18}$ rad.

b) Ta có $\frac{\pi}{36}$ rad $= \frac{\pi}{36} \cdot \frac{180}{\pi} = 5^\circ$

Bài 2 (3,0 điểm). Cho $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

a) Tính các giá trị lượng giác của góc α .

b) Tính $\cos(25\pi - \alpha)$ và $\cot\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right)$

Lời giải.

a) Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\cos \alpha < 0$, do đó: $\cos \alpha = -\sqrt{1 - (\sin \alpha)^2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$;

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{3} : \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4};$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = -2\sqrt{2}.$$

b) Ta có:

$$\cos(25\pi - \alpha) = \cos(24\pi + \pi - \alpha) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\cot\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right) = \cot\left(2\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Bài 3 (3,0 điểm). Không sử dụng máy tính, hãy tính:

a) $\sin 2025^\circ$.

b) $\cos \frac{11\pi}{24} \cdot \cos \frac{5\pi}{24}.$

Lời giải.

a) Ta có $\sin 2025^\circ = \sin(5 \cdot 360^\circ + 180^\circ + 45^\circ) = \sin(180^\circ + 45^\circ) = -\sin(45^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$

b) Ta có $\cos \frac{11\pi}{24} \cdot \cos \frac{5\pi}{24} = \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{11\pi}{24} + \frac{5\pi}{24} \right) + \cos \left(\frac{11\pi}{24} - \frac{5\pi}{24} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) \right] =$
 $\frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right] = \frac{\sqrt{2}-1}{4}$

Bài 4 (2,0 điểm). Tính giá trị các biểu thức $P = \frac{3 \sin a - 5 \cos a}{\sin^3 a + \sin a \cos^2 a + 3 \cos^3 a}$, biết $\cos a = \frac{2}{3}$ và $-\frac{\pi}{2} < a < 0$.

Lời giải. Ta có: $1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a} = \frac{9}{4} \Rightarrow \tan^2 a = \frac{5}{4}.$

Vì $-\frac{\pi}{2} < a < 0$ nên $\tan a < 0$, do đó $\tan a = -\frac{\sqrt{5}}{2}.$

Từ đó:

$$P = \frac{3 \sin a - 5 \cos a}{\sin^3 a + \sin a \cos^2 a + 3 \cos^3 a} = \frac{\cos a (3 \tan a - 5)}{\cos^3 a (\tan^3 a + \tan a + 3)}$$

$$= \frac{(1 + \tan^2 a) (3 \tan a - 5)}{(\tan^3 a + \tan a + 3)}$$

$$= \frac{\left(1 + \left(-\frac{\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right) \left(3 \left(-\frac{\sqrt{5}}{2} \right) - 5 \right)}{\left(-\frac{\sqrt{5}}{2} \right)^3 + \left(-\frac{\sqrt{5}}{2} \right) + 3} = \frac{125 + 54\sqrt{5}}{19}$$

Bài 5 (1,0 điểm). Cho tam giác ABC bất kì với ba góc ở đỉnh là A, B, C . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{3} \cos B + 3 (\cos A + \cos C)$$

Lời giải. Ta có:

$$P = \sqrt{3} \cos B + 3 (\cos A + \cos C) = \sqrt{3} \cos B + 3 \cdot 2 \cos \left(\frac{A+C}{2} \right) \cos \left(\frac{A-C}{2} \right)$$

$$= \sqrt{3} \cos B + 6 \sin \left(\frac{B}{2} \right) \cos \left(\frac{A-C}{2} \right)$$

Suy ra:

$$P \leq \sqrt{3} \cos B + 6 \sin \frac{B}{2} = \sqrt{3} \left(1 - 2 \sin^2 \frac{B}{2} \right) + 6 \sin \frac{B}{2}$$

$$= -2\sqrt{3} \sin^2 \frac{B}{2} + 6 \sin \frac{B}{2} + \sqrt{3}$$

$$= -2\sqrt{3} \left(\sin \frac{B}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \frac{5\sqrt{3}}{2} \leq \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \cos \frac{A-C}{2} = 1 \\ \sin \frac{B}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = C \\ \frac{B}{2} = 60^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = C = 30^\circ \\ B = 120^\circ \end{cases}.$$

Như vậy, giá trị lớn nhất của P là $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ khi tam giác ABC cân tại B và góc $B = 120^\circ$.

VI. Đề số 3b**Bài 1 (1,0 điểm).** Thực hiện đổi đơn vị đo góc.

- a) Đổi số đo góc 80° sang radian.
- b) Đổi số đo góc $\frac{\pi}{18}$ radian sang độ.

Lời giải.

a) Ta có $80^\circ = 80 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{4\pi}{9}$ rad.

b) Ta có $\frac{\pi}{18}$ rad $= \frac{\pi}{18} \cdot \frac{180}{\pi} = 10^\circ$

Bài 2 (3,0 điểm). Cho $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

- a) Tính các giá trị lượng giác của góc α .
- b) Tính $\cos\left(\frac{25\pi}{2} - \alpha\right)$ và $\tan(37\pi + \alpha)$

Lời giải.

a) Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\sin \alpha > 0$, do đó: $\sin \alpha = \sqrt{1 - (\cos \alpha)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$;

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{5}}{3} : \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{\sqrt{5}}{2};$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

b) Ta có:

$$\cos\left(\frac{25\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left(12\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$$\tan(37\pi + \alpha) = \tan(36\pi + \pi + \alpha) = \tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Bài 3 (3,0 điểm). Không sử dụng máy tính, hãy tính:

a) $\cos 2025^\circ$.

b) $\sin \frac{11\pi}{24} \cdot \sin \frac{5\pi}{24}$.

Lời giải.

a) Ta có $\cos 2025^\circ = \cos(5 \cdot 360^\circ + 180^\circ + 45^\circ) = \cos(180^\circ + 45^\circ) = -\cos(45^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Ta có $\sin \frac{11\pi}{24} \cdot \sin \frac{5\pi}{24} = -\frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{11\pi}{24} + \frac{5\pi}{24}\right) + \cos\left(\frac{11\pi}{24} - \frac{5\pi}{24}\right) \right] = -\frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \right] =$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right] = \frac{1 + \sqrt{2}}{4}.$$

Bài 4 (2,0 điểm). Cho góc α thỏa mãn: $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ và $\sin \alpha - 2 \cos \alpha = 1$. Tính $P = 2 \tan \alpha - \cot \alpha$.

Lời giải. Ta có: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, nên ta có hệ:
$$\begin{cases} \sin \alpha - 2 \cos \alpha = 1 \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases}$$

Đặt $a = \sin \alpha$, $b = \cos \alpha$, vì $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên $-1 < a < 0$, $-1 < b < 0$. Ta có hệ:

$$\begin{cases} a - 2b = 1 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b + 1 \\ (2b + 1)^2 + b^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b + 1 \\ 5b^2 + 4b = 0 \end{cases}$$

Suy ra $a = -\frac{3}{5}$, $b = -\frac{4}{5}$, hay $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$, $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$.

Từ đó: $\tan \alpha = \frac{3}{4}$, $\cot \alpha = \frac{4}{3}$. Do đó: $P = 2 \cdot \frac{3}{4} - \frac{4}{3} = \frac{1}{6}$.

Bài 5 (1,0 điểm). Cho tam giác ABC có các góc A, B, C thỏa mãn hệ thức:

$$2 \cos A \sin B \sin C + \sqrt{3} (\sin A + \cos B + \cos C) = \frac{17}{4}$$

Hỏi tam giác ABC có đặc điểm gì?

Lời giải. Ta có: $2 \cos A \sin B \sin C = \cos A (\cos (B - C) - \cos (B + C))$
 $= -\cos (B + C) \cos (B - C) + \cos^2 A = -\frac{1}{2} (\cos 2B + \cos 2C) + \cos^2 A$
 $= -\frac{1}{2} (1 - 2 \sin^2 B + 1 - 2 \sin^2 C) + 1 - \sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A$.

Do đó: $2 \cos A \sin B \sin C + \sqrt{3} (\sin A + \cos B + \cos C) = \frac{17}{4}$

$$\Leftrightarrow \sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A + \sqrt{3} (\sin A + \cos B + \cos C) = \frac{17}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2 - (\cos^2 B - \sqrt{3} \cos B) - (\cos^2 C - \sqrt{3} \cos C) - (\sin^2 B - \sqrt{3} \sin B) = \frac{17}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos B - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(\cos C - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(\sin A - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos B = \cos C = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 120^\circ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B = C = 30^\circ \\ A = 120^\circ \end{cases}$$

Vậy, tam giác ABC cân đỉnh A và góc $A = 120^\circ$.

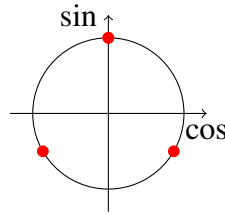
VII. Đề số 4a

Câu 1 (1,0 điểm). a) Trên đường tròn lượng giác có gốc A , hãy biểu diễn các điểm M thỏa mãn cung AM có số đo $\frac{\pi}{2} + k \frac{2\pi}{3}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

b) Xác định dấu của biểu thức $P = \cos \frac{4\pi}{5} \sin \left(-\frac{\pi}{5} \right) \tan \frac{4\pi}{3} \cot \frac{9\pi}{5}$.

Lời giải.

a) Các điểm M được biểu diễn trên đường tròn lượng giác như sau:



$$\text{b) Vì } \begin{cases} \frac{\pi}{2} < \frac{4\pi}{5} < \pi \\ -\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{5} < 0 \\ \pi < \frac{4\pi}{3} < \frac{3\pi}{2} \\ \frac{3\pi}{2} < \frac{9\pi}{5} < 2\pi \end{cases} \text{ nên } \begin{cases} \cos \frac{4\pi}{5} < 0 \\ \sin\left(-\frac{\pi}{5}\right) < 0 \\ \tan \frac{4\pi}{3} > 0 \\ \cot \frac{9\pi}{5} < 0 \end{cases} \Rightarrow P < 0$$

Câu 2 (4,0 điểm). a) Tính giá trị $\cot 135^\circ$ (không sử dụng máy tính).

b) Tính các giá trị lượng giác khác của α biết $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$ ($180^\circ < \alpha < 270^\circ$).

c) Cho $\tan \alpha = -2$, tính giá trị của biểu thức $A = \frac{2 \sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha - 3 \sin \alpha}$.

Lời giải.

a) $\cot 135^\circ = \cot(180^\circ - 45^\circ) = -\cot 45^\circ = -1$.

b) Vì $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ nên $\sin \alpha < 0$, $\tan \alpha > 0$.

$$\text{Ta có } 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{13^2}{5^2} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{12}{5} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{5}{12}, \sin \alpha = \cos \alpha \cdot \tan \alpha = -\frac{12}{13}.$$

$$\text{c) } A = \frac{2 \sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha - 3 \sin \alpha} = \frac{2 \tan \alpha + 1}{1 - 3 \tan \alpha} = -\frac{3}{7}.$$

Câu 3 (4,0 điểm). a) Chứng minh các biểu thức $A = \frac{(1 - \tan^2 x)^2}{4 \tan^2 x} - \frac{1}{4 \sin^2 x \cos^2 x}$ độc lập với x .

b) Rút gọn biểu thức $B = \sin(x + y) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin(-y)$.

c) Chứng minh rằng $\cos^4 x + \sin^4 x - 6 \sin^2 x \cos^2 x = \cos 4x$.

Lời giải.

$$\text{a) } A = \frac{(1 - \tan^2 x)^2}{4 \tan^2 x} - \frac{1}{4 \sin^2 x \cos^2 x} = \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)^2}{4 \sin^2 x \cos^2 x} - \frac{1}{4 \sin^2 x \cos^2 x} = \frac{\cos^2 2x - 1}{\sin^2 2x} = -1.$$

$$\text{b) } B = \sin(x + y) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin(-y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x - \cos x \sin y = \sin x \cos y.$$

$$\text{c) Ta có } \cos^4 x + \sin^4 x - 6 \sin^2 x \cos^2 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)^2 - 4 \sin^2 x \cos^2 x = \cos^2 2x - \sin^2 2x = \cos 4x.$$

Câu 4 (1,0 điểm). Rút gọn biểu thức $A = 3(\sin^8 x - \cos^8 x) + 4(\cos^6 x - 2 \sin^6 x) + 6 \sin^4 x$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} A &= 3(\sin^8 x - \cos^8 x) + 4(\cos^6 x - 2 \sin^6 x) + 6 \sin^4 x \\ &= 3 \sin^6 x (\sin^2 x - 1) - 3 \cos^6 x (\cos^2 x - 1) + (\cos^6 x + \sin^6 x) + 6 \sin^4 x (1 - \sin^2 x) \\ &= -3 \sin^6 x \cos^2 x + 3 \cos^6 x \sin^2 x + (\cos^4 x + \sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x) + 6 \sin^4 x \cos^2 x \\ &= 3 \sin^4 x \cos^2 x (1 - \sin^2 x) + 3 \cos^6 x \sin^2 x + 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x + 3 \sin^4 x \cos^2 x \\ &= 3 \sin^4 x \cos^4 x + 3 \cos^6 x \sin^2 x + 1 - 3 \sin^2 x \cos^4 x \\ &= -3 \sin^2 x \cos^4 x (1 - \sin^2 x) + 3 \cos^6 x \sin^2 x + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

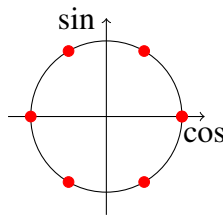
VIII. Đề số 4b

Câu 1 (1,0 điểm). a) Trên đường tròn lượng giác có gốc A , hãy biểu diễn điểm M thỏa mãn cung AM có số đo $k\frac{\pi}{3}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

b) Xác định dấu của biểu thức $P = \cot \frac{3\pi}{5} \sin \left(-\frac{2\pi}{3}\right)$.

Lời giải.

a) Các điểm M được biểu diễn trên đường tròn lượng giác như sau:



$$\text{b) Vì } \begin{cases} \frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{5} < \pi \\ -\pi < -\frac{2\pi}{3} < -\frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ nên } \begin{cases} \cot \frac{3\pi}{5} < 0 \\ \sin \left(-\frac{2\pi}{3}\right) < 0 \end{cases} \Rightarrow P > 0$$

Câu 2 (4,0 điểm). a) Tính giá trị $\tan 150^\circ$ (không sử dụng máy tính).

b) Tính các giá trị lượng giác khác của góc 15° biết $\cot 15^\circ = 2 + \sqrt{3}$.

c) Cho $\sin \alpha + \cos \alpha = m$. Tính giá trị của $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$ theo m .

Lời giải.

$$\text{a) } \tan 150^\circ = \tan(180^\circ - 30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{b) } \tan 15^\circ = \frac{1}{\cot 15^\circ} = 2 - \sqrt{3}. \text{ Vì } 0^\circ < 15^\circ < 90^\circ \text{ nên } \sin 15^\circ > 0, \cos 15^\circ > 0.$$

$$\cos 15^\circ = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 15^\circ}} = \frac{1}{2\sqrt{2 - \sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} \Rightarrow \sin 15^\circ = \cos 15^\circ \cdot \tan 15^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}.$$

$$\text{c) } \sin \alpha + \cos \alpha = m \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{m^2 - 1}{2}.$$

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2 \left(\frac{m^2 - 1}{2} \right)^2 = \frac{1 + 2m^2 - m^4}{2}.$$

Câu 3 (4,0 điểm). a) Chứng minh các biểu thức $A = 2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x)$ độc lập với x .

b) Rút gọn biểu thức $B = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin \left(\frac{\pi}{2} - y\right) - \sin(x - y)$.

c) Chứng minh rằng $\cos 4x = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$.

Lời giải.

$$\text{a) } A = 2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x) = 2[(\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x] - 3[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x] = -1.$$

$$b) B = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) - \sin(x - y) = \sin x \cos y - (\sin x \cos y - \sin y \cos x) = \sin y \cos x.$$

$$c) \cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 = 2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1 = 2(4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1) - 1 = VP.$$

Câu 4 (1,0 điểm). Chứng minh biểu thức $A = \sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin^4\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$ không phụ thuộc vào x .

Lời giải.

$$\begin{aligned} A &= \sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin^4\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) \\ &= \sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin^4\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) + \sin^4\left(\frac{\pi}{2} - \left(-x - \frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos^4 x + \cos^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x + 1 - 2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= 2 - \frac{\sin^2 2x}{2} - \frac{\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)}{2} = 2 - \frac{\sin^2 2x + \cos^2 2x}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

IX. Đề số 5a

Bài 1 (1,0 điểm).

- a) Trên đường tròn có bán kính bằng 21cm. Tìm độ dài của cung có số đo bằng 15° .
- b) Xác định dấu của biểu thức sau $A = \sin 50^\circ \cdot \cos(-89^\circ)$

Lời giải.

a) Số đo bằng cung 15° chuyển sang rad bằng $15 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{12}$.

Vậy độ dài của cung là: $l = R \cdot \alpha = 21 \cdot \frac{\pi}{12} = \frac{7\pi}{4}$ cm.

b) Ta có $A = \sin 50^\circ \cdot \cos(-89^\circ) = \sin 50^\circ \cdot \cos 89^\circ > 0$.

Bài 2 (2,0 điểm). Cho $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ với $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Tìm các giá trị lượng giác còn lại.

Lời giải. Do $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \Rightarrow \sin \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha < 0$.

Ta có: $\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\frac{3}{5} \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{3}{4}, \cot \alpha = -\frac{4}{3}$.

Bài 3 (2,0 điểm). Tính $A = \frac{\cot \alpha + \tan \alpha}{\cot \alpha - \tan \alpha}$ khi $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Lời giải. Do $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha > 0$.

Ta có: $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{4}{5} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{3}{4}, \cot \alpha = \frac{4}{3}$.

Vậy $A = \frac{\frac{3}{4} + \frac{4}{3}}{\frac{3}{4} - \frac{4}{3}} = -\frac{25}{7}$.

Bài 4 (2,0 điểm). Tính giá trị đúng của biểu thức $A = \frac{5 \sin^4 \alpha - 3 \sin^2 \alpha - 2}{1 + \sin^2 \alpha}$ khi $\tan \alpha = \sqrt{2013}$.

Lời giải. Với $\tan \alpha = \sqrt{2013} \Rightarrow \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{2014} = \cos^2 \alpha$.

Ta có $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$.

$$\text{Vậy } A = \frac{5 \sin^4 \alpha - 3 \sin^2 \alpha - 2}{1 + \sin^2 \alpha} = \frac{5(1 - \cos^2 \alpha)^2 - 3(1 - \cos^2 \alpha) - 2}{2 - \cos^2 \alpha} = -\frac{14093}{8110378}.$$

Bài 5 (3,0 điểm). Cho ΔABC thỏa mãn $\sin \frac{A}{2} \cdot \cos^3 \frac{B}{2} = \sin \frac{B}{2} \cdot \cos^3 \frac{A}{2}$.

Chứng minh rằng ΔABC cân.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \sin \frac{A}{2} \cdot \cos^3 \frac{B}{2} = \sin \frac{B}{2} \cdot \cos^3 \frac{A}{2} \Leftrightarrow \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos^3 \frac{A}{2}} = \frac{\sin \frac{B}{2}}{\cos^3 \frac{B}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \tan \frac{A}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{A}{2} \right) = \tan \frac{B}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{B}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \tan \left(\frac{A}{2} - \frac{B}{2} \right) \left(1 + \tan^2 \frac{A}{2} + \tan^2 \frac{B}{2} + \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan \frac{A}{2} = \tan \frac{B}{2} \Leftrightarrow A = B \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ cân tại } C.$$

X. Đề số 5b

Bài 1 (1,0 điểm).

a) Trên đường tròn có bán kính bằng 20cm. Tìm độ dài của cung có số đo bằng 15° .

b) Xác định dấu của biểu thức sau $A = \sin 50^\circ \cdot \cos(-30^\circ)$

Lời giải.

a) Số đo bằng cung 15° chuyển sang rad bằng $15 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{12}$.

$$\text{Vậy độ dài của cung là: } l = R \cdot \alpha = 20 \cdot \frac{\pi}{12} = \frac{5\pi}{3} \text{ cm.}$$

b) Ta có $A = \sin 50^\circ \cdot \cos(-30^\circ) = \sin 50^\circ \cdot \cos 30^\circ > 0$.

Bài 2 (2,0 điểm). Chứng minh rằng $3(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) - 2(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) = 1$ với mọi góc α .

Lời giải. Ta có : $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$.

$$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = (\sin^2 \alpha)^3 + (\cos^2 \alpha)^3 = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha) = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$$

Bài 3 (2,0 điểm). Đưa tổng sau về dạng tích $S = \sin^2 x - \sin^2 2x + \sin^2 3x$.

Lời giải. Ta có: $S = \sin^2 x - \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{1 - \cos 2x}{2} - \frac{1 - \cos 4x}{2} + \frac{1 - \cos 6x}{2}$

$$= \frac{1 + \cos 4x}{2} - \frac{\cos 6x + \cos 2x}{2}$$

$$= \cos^2 2x - \cos 4x \cdot \cos 2x = \cos 2x (\cos 2x - \cos 4x) = 2 \cdot \cos 2x \cdot \sin 3x \cdot \sin x.$$

Bài 4 (2,0 điểm). Rút gọn $A = \sin^2(45^\circ + \alpha) - \sin^2(30^\circ + \alpha) - \sin 15^\circ \cdot \cos(15^\circ + 2\alpha)$?

Lời giải. Ta có: $\sin^2 a - \sin^2 b = \sin^2 a - \sin^2 a \cdot \sin^2 b - \sin^2 b + \sin^2 a \cdot \sin^2 b$

$$= \sin^2 a (1 - \sin^2 b) - \sin^2 b (1 - \sin^2 a) = \sin^2 a \cos^2 b - \sin^2 b \cos^2 a$$

$$= (\sin a \cos b + \sin b \cos a)(\sin a \cos b - \sin b \cos a) = \sin(a+b) \cdot \sin(a-b).$$

$$\text{Tức là } \sin^2 a - \sin^2 b = \sin(a+b) \cdot \sin(a-b).$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } \sin^2(45^\circ + \alpha) - \sin^2(30^\circ + \alpha) &= \sin[(45^\circ + \alpha) + (30^\circ + \alpha)] \cdot \sin[(45^\circ + \alpha) - (30^\circ + \alpha)] \\ &= \sin 75^\circ \cdot \sin(15^\circ + 2\alpha) = \cos 15^\circ \cdot \sin(15^\circ + 2\alpha). \end{aligned}$$

$$\text{Từ đó ta có } A = \cos 15^\circ \cdot \sin(15^\circ + 2\alpha) - \sin 15^\circ \cdot \cos(15^\circ + 2\alpha) = \sin(15^\circ + 2\alpha - 15^\circ) = \sin 2\alpha.$$

Bài 5 (3,0 điểm). Chứng minh rằng $\triangle ABC$ vuông $\Leftrightarrow \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1$.

Lời giải. Ta có:

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1$$

$$\Leftrightarrow 2\cos(A+B) \cdot \cos(A-B) + 2\cos^2 C = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos C[-\cos(A-B) + \cos C] = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos C[\cos(A-B) + \cos(A+B)] = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos A = 0 \\ \cos B = 0 \\ \cos C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{\pi}{2} \\ B = \frac{\pi}{2} \\ C = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \triangle ABC \text{ vuông.}$$