

LỚP TOÁN THẦY CƯ- TP HUẾ

CS 1: Trung Tâm MASTER EDUCATION- 25 THẠCH HẪN

CS 2: Trung Tâm BDKT 168 Mai Thúc Loan

CS 3: Trung Tâm BDKT Thuận Hóa – 32 Lê Lợi



KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

LÀM CHỦ KIẾN THỨC TOÁN 11-KẾT NỐI TRI THỨC (TẬP 2)

NỘI DUNG

- ✓ TÓM TẮT KIẾN THỨC CẦN NẮM
- ✓ BÀI TẬP MẪU
- ✓ GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA
- ✓ GIẢI BÀI TẬP SÁCH BÀI TẬP

CHƯƠNG VI: HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

BÀI 18. LUYỆN THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC

A- KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Cho n là một số nguyên dương. Ta định nghĩa:

□ Với a là số thực tùy ý: $a^n = a.a...a$ (n thừa số).

□ Với a là số thực khác 0: $a^0 = 1; a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Trong biểu thức a^m , a gọi là cơ số, m gọi là số mũ.

2. Cho số thực a dương và số hữu tỉ $r = \frac{m}{n}$, trong đó m là một số nguyên và n là số nguyên dương.

Lũy thừa của a với số mũ r , kí hiệu là a^r , xác định bởi $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

3. Cho a là số thực dương và α là một số vô tỉ. Xét dãy số vô tỉ (r_n) mà $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \alpha$. Khi đó, dãy số (a^{r_n}) có giới hạn xác định và không phụ thuộc vào dãy số hữu tỉ (r_n) đã chọn. Giới hạn đó gọi là lũy thừa của a với số mũ α , kí hiệu là a^α .

$$a^\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{r_n}$$

Chú ý: Lũy thừa với số mũ thực (của một số dương) có đầy đủ các tính chất như lũy thừa với số mũ nguyên,

B- VÍ DỤ

Ví dụ 1. (Tính toán biểu thức số) Thực hiện phép tính sau: $A = 27^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} - 36^{0,5} + (\sqrt{2})^0$.

Lời giải

Ta tính lần lượt các lũy thừa như sau:

$$27^{\frac{2}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^2 = 9 \quad \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} = (2^{-4})^{-0,75} = 2^3 = 8$$

$$36^{0,5} = (6^2)^{0,5} = 6; (\sqrt{2})^0 = 1$$

Do đó $A = 9 + 8 - 6 + 1 = 12$.

Ví dụ 2. (Rút gọn biểu thức) Cho a và b là hai số dương. Rút gọn biểu thức sau: $A = \left(\frac{a^{\sqrt{2}}}{b^{\sqrt{2}-1}}\right)^{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{a^{-1-\sqrt{2}}}{b^{-1}}$.

Lời giải

Ta có: $\left(\frac{a^{\sqrt{2}}}{b^{\sqrt{2}-1}}\right)^{\sqrt{2}+1} = \frac{(a^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}+1}}{(b^{\sqrt{2}-1})^{\sqrt{2}+1}} = \frac{a^{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}}{b^{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}}$. Thay vào biểu thức A , ta được:

$$A = \frac{a^{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}}{b^{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}} \cdot \frac{a^{-1-\sqrt{2}}}{b^{-1}} = a^{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)-1-\sqrt{2}} \cdot a^{-1-\sqrt{2}} = a^{(2+\sqrt{2})+(-1-\sqrt{2})} = a^1 = a.$$

Ví dụ 3. (Vận dụng thực tiễn) Giả sử cường độ ánh sáng I dưới mặt biển giảm dần theo độ sâu theo công thức $I = I_0 \cdot a^d$, trong đó: I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt nước biển, a là một hằng số dương, d là độ sâu tính từ mặt nước biển (tính bằng mét).

a) Ở một vùng biển cường độ ánh sáng tại độ sâu $1m$ bằng 95% cường độ ánh sáng tại mặt nước biển. Tính giá trị của hằng số a .

b) Tại độ sâu $15m$ ở vùng biển đó, cường độ ánh sáng bằng bao nhiêu phần trăm so với cường độ ánh sáng tại mặt nước biển? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

a) Từ giả thiết, ta có $d = 1$ và $I = \frac{95}{100} I_0$. Thay vào biểu thức $I = I_0 \cdot a^d$, ta được: $a^d = \frac{I}{I_0} = \frac{95}{100}$.

Mà $d = 1$ nên $a = \frac{95}{100} = \frac{19}{20}$. Vậy $a = \frac{19}{20}$.

b) Từ giả thiết, ta có $d = 15$. Thay $d = 15$ và $a = \frac{19}{20}$ vào công thức $I = I_0 \cdot a^d$, ta được:.

$$\frac{I}{I_0} = a^d = \left(\frac{19}{20}\right)^{15} \approx 0,46$$

Như vậy, tại độ sâu $15m$ ở vùng biển đó, cường độ ánh sáng bằng 46% cường độ ánh sáng tại mặt nước biển.

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 6.1. Tính:

a) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$; b) $4^{\frac{3}{2}}$; c) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$; d) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75}$.

Lời giải

a) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{25}} = 25$.

b) $4^{\frac{3}{2}} = 4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$.

c) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{8}{1}\right)^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$.

d) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} = \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} = \left(\frac{16}{1}\right)^{0,75} = (\sqrt[4]{16})^3 = 2^3 = 8$.

Bài 6.2. Thực hiện phép tính:

a) $27^{\frac{2}{3}} + 81^{-0,75} - 25^{0,5}$; b) $4^{2-3\sqrt{7}} \cdot 8^{2\sqrt{7}}$.

Lời giải

a) $27^{\frac{2}{3}} + 81^{-0,75} - 25^{0,5} = (\sqrt[3]{27})^2 + \frac{1}{(81^{0,75})} - \sqrt{25} = 9 + \frac{1}{\sqrt[4]{81}} - 5 = 9 + \frac{1}{3} - 5 = \frac{19}{3}$.

b) $4^{2-3\sqrt{7}} \cdot 8^{2\sqrt{7}} = 4^{2-3\sqrt{7}} \cdot (2^3)^{2\sqrt{7}} = 4^{2-3\sqrt{7}} \cdot 2^{6\sqrt{7}} = (2^2)^{2-3\sqrt{7}} \cdot 2^{6\sqrt{7}} = 2^{4-6\sqrt{7}+6\sqrt{7}} = 16$.

Bài 6.3. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \frac{x^5 y^{-2}}{x^3 y} (x, y \neq 0);$

b) $B = \frac{x^2 y^{-3}}{(x^{-1} y^4)^{-3}} (x, y \neq 0).$

Lời giải

a) $A = \frac{x^5 y^{-2}}{x^3 y} = \frac{x^5}{x^3} \cdot \frac{1}{y^{2-1}} = x^{5-3} y^{-1} = x^2 y^{-1}$

b) $B = \frac{x^2 y^{-3}}{(x^{-1} y^4)^{-3}} = \frac{x^2 y^{-3}}{x^3 y^{-12}} = x^{2-3} y^{-3-(-12)} = \frac{1}{xy^9}$

Bài 6.4. Cho x, y là các số thực dương. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \frac{x^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{y} + y^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x} + \sqrt[6]{y}};$

b) $B = \left(\frac{x^{\sqrt{3}}}{y^{\sqrt{3}-1}} \right)^{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{x^{-\sqrt{3}-1}}{y^{-2}}.$

Lời giải

a) $A = \frac{\left(x^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{y} + y^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{x} \right) (\sqrt[6]{x} - \sqrt[6]{y})}{(\sqrt[6]{x} + \sqrt[6]{y}) (\sqrt[6]{x} - \sqrt[6]{y})}$

$$= \frac{x^{\frac{2}{6}} y^{\frac{1}{6}} - x^{\frac{1}{6}} y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} \sqrt[6]{x} - y^{\frac{1}{6}} \sqrt[6]{y}}{x^{\frac{1}{6}} + y^{\frac{1}{6}}}$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{6}} y^{\frac{1}{6}} - x^{\frac{1}{6}} y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} \sqrt[6]{x} - y^{\frac{1}{6}} \sqrt[6]{y}}{1} = x^{\frac{1}{6}} y^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3} (\sqrt[6]{y} - \sqrt[6]{x})$$

b) $B = \left(\frac{x^{\sqrt{3}}}{y^{\sqrt{3}-1}} \right)^{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{x^{-\sqrt{3}-1}}{y^{-2}} = \left(\frac{x^{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}}{y^{\sqrt{3}-1}(\sqrt{3}+1)} \right) \cdot \frac{x^{-\sqrt{3}-1}}{y^{-2}} = \frac{x^3}{y^{\sqrt{3}+1}} \cdot \frac{x^{-\sqrt{3}-1}}{y^{-2}} = \frac{x^2 - \sqrt{3}}{y^{\sqrt{3}+3}}$

Bài 6.5. Chứng minh rằng: $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} = 2.$

Lời giải

Ta có sử dụng công thức: $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$. Với $a = 4, b = 3$, ta có:

$$\left(\sqrt{\frac{4 + \sqrt{4^2 - 3}}{2}} + \sqrt{\frac{4 - \sqrt{4^2 - 3}}{2}} \right) - \left(\sqrt{\frac{4 - \sqrt{4^2 - 3}}{2}} - \sqrt{\frac{4 + \sqrt{4^2 - 3}}{2}} \right) = \sqrt{3} + 1 - 1 + \sqrt{3} = 2\sqrt{3} = 2 \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} = 2$$

Bài 6.6. Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy so sánh:

a) $5^{6\sqrt{3}}$ và $5^{3\sqrt{6}};$

b) $\left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{4}{3}}$ và $\sqrt{2} \cdot 2^{\frac{2}{3}}.$

Lời giải

a) Nếu $x > y > 0$ và $a > 1$, thì $a^x > a^y$.

Áp dụng bất đẳng thức này với $x = 3\sqrt{2}$, $y = 1$, và $a = 5$, ta được: $5^{3\sqrt{2}} > 5^1 = 5$

Vậy $5^{6\sqrt{3}} > 5^{3\sqrt{6}}$.

$$b) \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{4}{3}} = (2^{-1})^{-\frac{4}{3}} = 2^{\frac{4}{3}}$$

Với $\sqrt{2} \cdot 2^{\frac{2}{3}}$, ta có thể viết lại thành $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{7}{6}} > 2^{\frac{4}{3}}$

$$\text{Vậy, } \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{4}{3}} < \sqrt{2} \cdot 2^{\frac{2}{3}}.$$

Bài 6.7. Nếu một khoản tiền gốc P được gửi ngân hàng với lãi suất hằng năm r (r được biểu thị dưới dạng số thập phân), được tính lãi n lần trong một năm, thì tổng số tiền A nhận được (cả vốn lẫn lãi) sau N kì gửi cho bởi công thức sau: $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^N$.

Hỏi nếu bác An gửi tiết kiệm số tiền 120 triệu đồng theo kì hạn 6 tháng với lãi suất không đổi là 5% một năm, thì số tiền thu được (cả vốn lẫn lãi) của bác An sau 2 năm là bao nhiêu?

Lời giải

Với số tiền gốc $P = 120$ triệu đồng, lãi suất $r = 0.05$ (vì lãi suất được biểu thị dưới dạng số thập phân), và số kỳ gửi trong một năm $n = 2$ (vì một năm có 2 kỳ gửi 6 tháng), số kỳ gửi trong 2 năm là $N = 4$.

Áp dụng công thức tính lãi suất kép: $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^N = 120\left(1 + \frac{0.05}{2}\right)^4 \approx 136.047$ triệu đồng.

Vậy sau 2 năm, bác An sẽ nhận được khoản tiền là khoảng 136.047 triệu đồng (cả vốn lẫn lãi).

Bài 6.8. Năm 2021, dân số của một quốc gia ở châu Á là 19 triệu người. Người ta ước tính rằng dân số của quốc gia này sẽ tăng gấp đôi sau 30 năm nữa. Khi đó dân số A (triệu người) của quốc gia đó sau t năm kể từ năm 2021 được ước tính bằng công thức $A = 19 \cdot 2^{\frac{t}{30}}$. Hỏi với tốc độ tăng dân số như vậy thì sau 20 năm nữa dân số của quốc gia này sẽ là bao nhiêu? (Làm tròn kết quả đến chữ số hàng triệu).

Lời giải

Sau 30 năm, dân số của quốc gia sẽ tăng gấp đôi, tức là sẽ đạt mức 38 triệu người. Ta có công thức tính tỉ số tăng trưởng dân số là: $2 = 2^{\frac{t}{30}}$

Từ đó, ta có thể tìm được số năm tương ứng với tốc độ tăng dân số như vậy là: $\frac{t}{30} = \log_2 2 = 1 \Rightarrow t = 30$.

Vậy sau 30 năm kể từ năm 2021, tức là năm 2051, dân số của quốc gia này sẽ đạt mức 38 triệu người. Để tính dân số sau 20 năm kể từ năm 2021, ta có thể tính tỉ số tăng trưởng dân số trong 20 năm như sau:

$$2^{\frac{20}{30}} = 2^{\frac{2}{3}}$$

Vậy dân số của quốc gia này sau 20 năm, tức là năm 2041, sẽ đạt mức: $19 \times 2^{\frac{2}{3}} \approx 27.076$ triệu người

D- BÀI TẬP

Bài 6.1. Tính:

a) $\sqrt[3]{-27}$; b) $25^{\frac{3}{2}}$; c) $32^{-\frac{2}{5}}$; d) $\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$.

Lời giải

a) $\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{(-3)^3} = -3$; b) $25^{\frac{3}{2}} = (5^2)^{\frac{3}{2}} = 5^3 = 125$;
c) $32^{-\frac{2}{5}} = (2^5)^{-\frac{2}{5}} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$; d) $\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{3}} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

Bài 6.2. So sánh cơ số a ($a > 0$) với 1, biết rằng:

a) $a^{\frac{3}{4}} > a^{\frac{5}{6}}$; b) $a^{\frac{11}{6}} < a^{\frac{15}{8}}$.

Lời giải

a) Do $\frac{3}{4} < \frac{5}{6}$ và $a^{\frac{3}{4}} > a^{\frac{5}{6}}$ nên $a < 1$. b) Do $\frac{11}{6} < \frac{15}{8}$ và $a^{\frac{11}{6}} < a^{\frac{15}{8}}$ nên $a > 1$.

Bài 6.3. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt[5]{32x^{15}y^{20}}$; b) $6\sqrt[3]{9x^2} \cdot 3\sqrt[3]{24x}$.

Lời giải

a) $\sqrt[5]{32x^{15}y^{20}} = \sqrt[5]{2^5 \cdot (x^3)^5 \cdot (y^4)^5} = 2x^3y^4$;
b) $6\sqrt[3]{9x^2} \cdot 3\sqrt[3]{24x} = 18\sqrt[3]{9x^2 \cdot 24x} = 18\sqrt[3]{6^3 \cdot x^3} = 18 \cdot 6 \cdot x = 108x$

Bài 6.4. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $2\sqrt{12} - 3\sqrt{27} + 2\sqrt{48}$; b) $8xy - \sqrt{25x^2y^2} + \sqrt[3]{8x^3y^3}$ ($x > 0, y > 0$)

Lời giải

a) $2\sqrt{12} - 3\sqrt{27} + 2\sqrt{48} = 2\sqrt{3 \cdot 2^2} - 3\sqrt{3 \cdot 3^2} + 2\sqrt{3 \cdot 4^2} = 4\sqrt{3} - 9\sqrt{3} + 8\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$;
b) $8xy - \sqrt{25x^2y^2} + \sqrt[3]{8x^3y^3} = 8xy - 5xy + 2xy = 5xy$ ($x > 0, y > 0$)

Bài 6.5. Cho a là số thực dương. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $(a^{\sqrt{6}})^{\sqrt{24}}$;
b) $a^{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{a}\right)^{\sqrt{2}-1}$;
c) $a^{-\sqrt{3}} : a^{(\sqrt{3}-1)^2}$; $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[12]{a^5}$.

Lời giải

a) $(a^{\sqrt{6}})^{\sqrt{24}} = a^{\sqrt{6 \cdot 24}} = a^{12}$;
b) $a^{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{a}\right)^{\sqrt{2}-1} = a^{\sqrt{2}} \cdot a^{1-\sqrt{2}} = a$;
c) $a^{-\sqrt{3}} : a^{(\sqrt{3}-1)^2} = a^{-\sqrt{3}} : a^{4-2\sqrt{3}} = a^{-4+\sqrt{3}}$; d) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[12]{a^5} = a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{5}{12}} = a$.

Bài 6.6. Cho a và b là hai số dương, $a \neq b$. Rút gọn biểu thức sau:

$$A = \left[\frac{a-b}{a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}} - \frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}} \right] : \left(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}} \right).$$

Lời giải

$$\text{Vì } \frac{a-b}{a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}} = \frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}} \left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}} \right)} \text{ nên}$$

$$B = \frac{a-b}{a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}} - \frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}} = \frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}} \left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}} \right)} - \frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}} = \frac{a-b - a^{\frac{1}{2}} \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} \right)}{a^{\frac{1}{2}} \left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}} \right)} = \frac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} - b}{a^{\frac{1}{2}} \left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}} \right)} = \frac{b^{\frac{1}{2}} \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} \right)}{a^{\frac{1}{2}} \left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}} \right)}$$

$$\text{Ta có: } a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} = \left(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}} \right) \left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}} \right) \text{ nên } B = \frac{b^{\frac{1}{2}} \left(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}} \right) \left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}} \right)}{a^{\frac{1}{2}} \left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}} \right)} = \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}} \right)$$

$$\text{Do đó } A = \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}} \right) \cdot \frac{1}{a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}} = \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Bài 6.7. Giả sử một lọ nuôi cấy có 100 con vi khuẩn lúc ban đầu và số lượng vi khuẩn tăng gấp đôi sau mỗi 2 giờ. Khi đó số vi khuẩn N sau t (giờ) sẽ là $N = 100 \cdot 2^{\frac{t}{2}}$ (con). Hỏi sau $3\frac{1}{2}$ giờ sẽ có bao nhiêu con vi khuẩn?

Lời giải

Thay $t = 3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ (giờ) vào công thức ta được số vi khuẩn sau $3\frac{1}{2}$ giờ là: $N = 100 \cdot 2^{\frac{7}{2}} = 100 \cdot 2^{\frac{7}{2}} \approx 336$ (con).

Bài 6.8. Chu kì dao động (tính bằng giây) của một con lắc có chiều dài là L (tính bằng mét) được cho bởi $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{9,8}}$. Nếu một con lắc có chiều dài $19,6m$, hãy tính chu kì T của con lắc này (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Lời giải

Thay $L = 19,6$ vào công thức ta được chu kì dao động của con lắc là: $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{9,8}} = 2\pi \sqrt{\frac{19,6}{9,8}} \approx 8,9$ (giây)

Bài 6.9. Định luật thứ ba của Kepler nói rằng bình phương chu kì quỹ đạo p (tính bằng năm Trái Đất) của một hành tinh chuyển động xung quanh Mặt Trời (theo quỹ đạo của bán trục lớn d (tính bằng đơn vị thiên văn AU)).

a) Tính p theo d .

b) Nếu Sao Thổ có chu kì quỹ đạo là 29,46 năm Trái Đất, hãy tính bán trục lớn quỹ đạo của Sao Thổ đến Mặt Trời (kết quả tính theo đơn vị thiên văn và làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

a) Theo định luật thứ ba của Kepler, ta có: $p^2 = d^3$ hay $p = \sqrt{d^3}$

b) Thay $p = 29,46$ vào công thức $p = \sqrt{d^3}$, ta được: $d \approx 9,54 AU$

Bài 6.10. Khoảng cách từ một hành tinh đến Mặt Trời có thể xấp xỉ bằng một hàm số của độ dài năm của hành tinh đó. Công thức của hàm số đó là $d = \sqrt[3]{6t^2}$ trong đó d là khoảng cách từ hành tinh đó đến Mặt Trời (tính bằng triệu dặm) và t là độ dài năm của hành tinh đó (tính bằng số ngày Trái Đất)

(Theo Algebra 2, NXB MacGraw-Hill, 2008)

a) Nếu độ dài của một năm trên Sao Hoả là 687 ngày Trái Đất thì khoảng cách từ Sao Hoả đến Mặt Trời là bao nhiêu?

b) Tính khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời (coi một năm trên Trái Đất có 365 ngày).

(Kết quả của câu a và câu b tính theo đơn vị triệu dặm và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

a) Thay $t = 687$ vào công thức ta được khoảng cách từ Sao Hoả đến Mặt Trời là:

$$d = \sqrt[3]{6t^2} = \sqrt[3]{6.687^2} \approx 141,48 \text{ (triệu dặm)}$$

b) Thay $t = 365$ vào công thức ta được khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời là:

$$d = \sqrt[3]{6t^2} = \sqrt[3]{6.365^2} \approx 92,81 \text{ (triệu dặm)}$$

BÀI 19. LÔGARIT

A- KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Cho a là một số thực dương khác 1 và M là một số thực dương. Số thực α để $a^\alpha = M$ được gọi là lôgarit cơ số a của M và kí hiệu là $\log_a M$.

$$\alpha = \log_a M \Leftrightarrow a^\alpha = M$$

Chú ý. Không có lôgarit của số âm và số 0. Cơ số của lôgarit phải dương và khác 1.

2. Tính chất của lôgarit

Với $0 < a \neq 1, M > 0$ và α là số thực tùy ý, ta có: $\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$; $a^{\log_a M} = M$; $\log_a a^\alpha = \alpha$.

Giả sử a là số thực dương khác 1, M và N là các số thực dương, α là số thực tùy ý. Khi đó:

$$\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N; \log_a \left(\frac{M}{N} \right) = \log_a M - \log_a N;$$

$$\log_a M^\alpha = \alpha \log_a M.$$

Với các cơ số lôgarit a và b bất kì ($0 < a \neq 1, 0 < b \neq 1$) và M là số thực dương tùy ý, ta luôn có:

$$\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}.$$

3. Lôgarit cơ số 10 của một số dương M gọi là lôgarit tự nhiên của M , kí hiệu là $\log M$ hoặc $\lg M$.

Lôgarit cơ số e của một số dương M gọi là lôgarit tự nhiên của M , kí hiệu là $\ln M$.

B- VÍ DỤ

Ví dụ 1. (Rút gọn biểu thức) Cho a là một số thực dương. Rút gọn biểu thức sau:

$$A = \log_{\frac{1}{3}} a - \log_{\sqrt{3}} a^2 + \log_9 \frac{1}{a}.$$

Lời giải

Áp dụng công thức đổi cơ số, ta đưa các biểu thức lôgarit về lôgarit cơ số 3 như sau:

$$\log_{\frac{1}{3}} a = \frac{\log_3 a}{\log_3 \frac{1}{3}} = \frac{\log_3 a}{\log_3 3^{-1}} = \frac{\log_3 a}{-1} = -\log_3 a$$

$$\log_{\sqrt{3}} a^2 = 2 \log_{\sqrt{3}} a = 2 \cdot \frac{\log_3 a}{\log_3 \sqrt{3}} = 2 \cdot \frac{\log_3 a}{\log_3 3^{\frac{1}{2}}} = 2 \cdot \frac{\log_3 a}{\frac{1}{2}} = 4 \log_3 a$$

$$\log_9 \frac{1}{a} = \frac{\log_3 \frac{1}{a}}{\log_3 9} = \frac{\log_3 \frac{1}{a}}{\log_3 3^2} = -\frac{\log_3 a}{2}$$

Thay các kết quả trên vào biểu thức A , ta được: $A = -\log_3 a - 4 \log_3 a - \frac{\log_3 a}{2} = -\frac{11}{2} \log_3 a$.

Vậy $A = -\frac{11}{2} \log_3 a$.

Ví dụ 2. (Tính toán biểu thức số) Tính $\log_{25} 32$ theo $a = \log_2 5$.

Lời giải

Ta thực hiện biến đổi sau: $\log_{25} 32 = \log_{25} 2^5 = 5 \cdot \log_{25} 2 = 5 \cdot \frac{\log_5 2}{\log_5 25} = 5 \cdot \frac{\log_5 2}{2} = \frac{5}{2} \log_5 2$.

Mặt khác ta lại có: $\log_5 2 = \frac{1}{\log_2 5}$, do đó $\log_{25} 32 = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\log_2 5} = \frac{5}{2a}$. Vậy $\log_{25} 32 = \frac{5}{2a}$.

Ví dụ 3. (Vận dụng thực tiễn) Trong Hoá học, độ pH của một dung dịch được tính theo công thức $pH = -\log[H^+]$, trong đó $[H^+]$ là nồng độ ion hydrogen tính bằng mol/lít. Nếu $pH < 7$ thì dung dịch có tính acid, nếu $pH > 7$ thì dung dịch có tính base và nếu $pH = 7$ thì dung dịch là trung tính.

- Tính độ Ph của dung dịch có nồng độ ion hydrogen bằng 0,001 mol/l.
- Xác định nồng độ ion hydrogen của một dung dịch có độ $pH = 8$.
- Khi pH tăng 1 đơn vị thì nồng độ ion hydrogen của dung dịch thay đổi thế nào?

Lời giải

- Thay $[H^+] = 0,001$ vào công thức, ta được $pH = -\log[H^+] = -\log 0,001 = 3$. Vậy độ pH của dung dịch bằng 3.
- Thay $pH = 8$ vào công thức, ta được $8 = -\log[H^+]$, do đó $[H^+] = 10^{-8} \text{ mol/l}$. Vậy nồng độ ion hydrogen trong dung dịch là $[H^+] = 10^{-8}$.
- Thay vào công thức ta thấy khi pH tăng 1 đơn vị thì nồng độ ion hydrogen của dung dịch giảm đi 10 lần.

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 6.9. Tính:

- $\log_2 2^{-13}$;
- $\ln e^{\sqrt{2}}$;
- $\log_8 16 - \log_8 2$;
- $\log_2 6 \cdot \log_6 8$.

Lời giải

- $\log_2 2^{-12} = -12 \log_2 2 = -12$.
- $\ln e^{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \ln(e) = \sqrt{2} \times 1 = \sqrt{2}$.
- $\log_8 16 - \log_8 2 = \log_8 \frac{16}{2} = \log_8 8 = 1$.
- $\log_2 6 \cdot \log_6 8 = \frac{\log_2 6}{\log_2 6} \cdot \frac{\log_6 8}{\log_6 2} = \frac{\log_2 2 \cdot \log_2 4}{\log_2 2 \cdot \log_2 3} = \frac{\log_2 4}{\log_2 3} = \log_3 4 \approx 1,26186$

Bài 6.10. Viết mỗi biểu thức sau thành lôgarit của một biểu thức (giả thiết các biểu thức đều có nghĩa):

- $A = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \ln(x^2 - 1)$;
- $B = 21 \log_3 \sqrt[3]{x} + \log_3(9x^2) - \log_3 9$.

Lời giải

$$a) A = \ln\left(\frac{x(x+1)}{(x-1)(x^2-1)}\right) = \ln(x(x+1)) - \ln((x-1)(x^2-1))$$

$$b) B = 21 \log_3 \sqrt[3]{x} + \log_3 (9x^2) - \log_3 9 = \log_3 (x^7) + \log_3 (9x^2) - \log_3 9 = \log_3 \left(\frac{9x^9}{9} \right) = \log_3 (x^9)$$

Bài 6.11. Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) A = \log_{\frac{1}{3}} 5 + 2\log_9 25 - \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{5};$$

$$b) B = \log_a M^2 + \log_{a^2} M^4.$$

Lời giải

$$\begin{aligned} a) A &= \frac{\log_{3^{-1}} 5}{1} + \frac{\log_{3^2} 25}{2} - \frac{\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{5}}{1} \\ &= -\log_3 5 + 2\log_3 25 - \frac{\log_5 \frac{1}{5}}{2} = -\log_3 5 + 2\log_3 5 - \log_3 5 \\ &= -\log_3 5 + 2\log_3 5 - \log_3 5 = \log_3 5 \end{aligned}$$

$$b) B = \log_a (M^2) + \log_{a^2} (M^4) = 2\log_a M + 4\log_a M = 6\log_a M$$

Bài 6.12. Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$a) A = \log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8;$$

$$b) B = \log_2 2 \cdot \log_2 4 \dots \log_2 2^n.$$

Lời giải

$$a) A = \frac{\log_2 3}{\log_2 2} \cdot \frac{\log_3 4}{\log_3 3} \cdot \frac{\log_4 5}{\log_4 4} \cdot \frac{\log_5 6}{\log_5 5} \cdot \frac{\log_6 7}{\log_6 6} \cdot \frac{\log_7 8}{\log_7 7} = \frac{\log_2 8}{\log_2 2} = 3$$

$$b) B = \log_2 2 \cdot \log_2 4 \dots \log_2 2^n = \frac{1}{\log_2 2} \cdot \frac{1}{\log_2 4} \dots \frac{1}{\log_2 2^n} = \frac{1}{1+2+\dots+n} = \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

Bài 6.13. Biết rằng khi độ cao tăng lên, áp suất không khí sẽ giảm và công thức tính áp suất dựa trên độ cao là

$$a = 15500(5 - \log p)$$

trong đó a là độ cao so với mực nước biển (tính bằng mét) và p là áp suất không khí (tính bằng pascal). Tính áp suất không khí ở đỉnh Everest có độ cao 8850 m so với mực nước biển.

Lời giải

Để tính áp suất không khí ở độ cao 8.850m, ta thay $a = 8.850$ vào công thức và giải phương trình để tìm giá trị của p .

$$\text{Ta có: } a = 15.500(5 - \log p) \cdot 8.850 = 15.500(5 - \log p)$$

$$5 - \log p = \frac{8.850}{15.500}$$

$$\log p = 5 - \frac{8.850}{15.500}$$

$$\log p = 3.407$$

$$p = 10^3 \cdot 407 \approx 245,37 Pa$$

Vậy áp suất không khí ở độ cao 8.850m so với mực nước biển là khoảng 245,37 Pa.

Bài 6.14. Mức cường độ âm L đo bằng decibel (dB) của âm thanh có cường độ I (đo bằng oát trên mét vuông, kí hiệu là W / m^2) được định nghĩa như sau: $L(I) = 10 \log \frac{I}{I_0}$

trong đó $I_0 = 10^{-12} W / m^2$ là cường độ âm thanh nhỏ nhất mà tai người có thể phát hiện được (gọi là ngưỡng nghe).

Xác định mức cường độ âm của mỗi âm sau:

- a) Cuộc trò chuyện bình thường có cường độ $I = 10^{-7} W / m^2$.
b) Giao thông thành phố đông đúc có cường độ $I = 10^{-3} W / m^2$.

Lời giải

a) Áp dụng công thức: $L(I) = 10 \log \frac{I}{I_0}$

$$L(10^{-7}) = 10 \log \frac{10^{-7}}{10^{-12}} = 10 \log 10^5 = 10 \times 5 = 50dB$$

b) Thay các giá trị ta có: $L(10^{-3}) = 10 \log \frac{10^{-3}}{10^{-12}} = 10 \log 10^9 = 10 \times 9 = 90dB$

D- BÀI TẬP

Bài 6.11. Tính

- a) $\log_2 \frac{1}{64}$; b) $\log 1000$; c) $\log_5 1250 - \log_5 10$; d) $4^{\log_2 3}$.

Lời giải

a) $\log_2 \frac{1}{64} = \log_2 2^{-6} = -6$; b) $\log 1000 = \log 10^3 = 3$;

c) $\log_5 1250 - \log_5 10 = \log_5 \frac{1250}{10} = \log_5 125 = \log_5 5^3 = 3$

d) $4^{\log_2 3} = (2^{\log_2 3})^2 = 3^2 = 9$

Bài 6.12. Chứng minh rằng:

a) $\log_3 (x + \sqrt{x^2 - 1}) + \log_a (x - \sqrt{x^2 - 1}) = 0$; b) $\ln(1 + e^{2x}) = 2x + \ln(1 + e^{-2x})$.

Lời giải

a) $\log_3 (x + \sqrt{x^2 - 1}) + \log_a (x - \sqrt{x^2 - 1}) = \log a \left[(x + \sqrt{x^2 - 1})(x - \sqrt{x^2 - 1}) \right] = \log_a 1 = 0$

b) $\ln(1 + e^{2x}) = \ln[e^{2x}(1 + e^{-2x})] = \ln e^{2x} + \ln(1 + e^{-2x}) = 2x + \ln(1 + e^{-2x})$

Bài 6.13. Biết $\log_2 3 \approx 1,585$. Hãy tính:

- a) $\log_2 48$; b) $\log_4 27$.

Lời giải

a) $\log_2 48 = \log_2 (3 \cdot 2^4) = \log_2 3 + \log_2 2^4 \approx 1,585 + 4 = 5,585$;

b) $\log_4 27 = \frac{\log_2 27}{\log_2 4} = \frac{\log_2 3^3}{\log_2 2^2} = \frac{3 \log_2 3}{2} \approx \frac{3}{2} \cdot 1,585 = 2,3775$.

Bài 6.14. Đặt $a = \log_3 5, b = \log_4 5$. Hãy biểu diễn $\log_{15} 10$ theo a và b .

Lời giải

$$\text{Ta có } \log_{15} 10 = \frac{\log_5 10}{\log_5 15} = \frac{\log_5 (2.5)}{\log_5 (3.5)} = \frac{\log_5 2 + 1}{\log_5 3 + 1}.$$

$$\text{Mà } \log_5 3 = \frac{1}{\log_3 5} = \frac{1}{a} \text{ và } \log_5 2 = \frac{1}{\log_2 5} = \frac{1}{2b} \text{ nên } \log_{15} 10 = \frac{\frac{1}{2b} + 1}{\frac{1}{a} + 1} = \frac{(1+2b)a}{2b(a+1)}$$

Bài 6.15. Tìm $\log_{49} 32$, biết $\log_2 14 = a$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \log_{49} 32 = \log_{49} 2^5 = 5 \log_{49} 2 = \frac{5}{\log_2 7^2} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\log_2 7}. \text{ Do } \log_2 14 = a \text{ nên } a = \log_2 (7.2) = 1 + \log_2 7.$$

$$\text{Suy ra } \log_{49} 32 = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{a-1}.$$

Bài 6.16. So sánh các số sau:

$$\text{a) } \log_3 4 \text{ và } \log_4 \frac{1}{3}; \text{ b) } 2^{\log_6 3} \text{ và } 3^{\log_6 \frac{1}{2}}.$$

Lời giải

$$\text{a) } \log_3 4 > \log_4 \frac{1}{3}; \text{ b) } 2^{\log_6 3} > 3^{\log_6 \frac{1}{2}}$$

Bài 6.17. Biết rằng số chữ số của một số nguyên dương N viết trong hệ thập phân được cho bởi công thức $[\log N] + 1$, ở đó $[\log N]$ là phần nguyên của số thực dương $\log N$. Tìm số các chữ số của 2^{2023} khi viết trong hệ thập phân.

Lời giải

$$\text{Số các chữ số của } 2^{2023} \text{ là: } [\log 2^{2023}] + 1 = [2023 \cdot \log 2] + 1 = 609$$

Bài 6.18. Khi gửi tiết kiệm P (đồng) theo thể thức trả lại kép định kì với lãi suất mỗi kì là r (r cho dưới dạng số thập phân) thì số tiền A (cả vốn lẫn lãi) nhận được sau t kì gửi là $A = P(1+r)^t$ (đồng). Tính thời gian gửi tiết kiệm cần thiết để số tiền ban đầu tăng gấp đôi.

Lời giải

Để số tiền ban đầu tăng gấp đôi thì $A = 2P$. Thay $A = 2P$ vào công thức lãi kép ta có:

$$2P = P(1+r)^t \Rightarrow (1+r)^t = 2 \Rightarrow t = \log_{1+r} 2 \text{ (năm)}$$

Bài 6.19. Một người gửi tiết kiệm 100 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn 6 tháng với lãi suất 8% một năm. Giả sử lãi suất không thay đổi. Hỏi sau bao lâu người đó nhận được ít nhất 120 triệu đồng?

Lời giải

Lãi suất năm là 8% nên lãi suất kì hạn 6 tháng sẽ là $r = 4\% = 0,04$. Thay $P = 100; r = 0,04; A = 120$ vào công thức $A = P(1+r)^t$, ta được: $120 = 100(1+0,04)^t \Rightarrow 1,2 = 1,04^t \Rightarrow t = \log_{1,04} 1,2 \approx 4,65$.

Vậy sau 5 kì gửi tiết kiệm kì hạn 6 tháng, tức sau 30 tháng, người đó sẽ nhận được ít nhất 120 triệu đồng.

Bài 6.20. Nồng độ cồn trong máu (BAC) là chỉ sử dụng để đo lượng cồn trong máu của một người. Chẳng hạn, BAC 0,02% hay 0,2 mg/ml, nghĩa là có 0.02 g cồn trong 100 ml máu. Nếu một người với BAC bằng 0,02% có nguy cơ bị tai nạn ô tô cao gấp 14 lần so với một người không uống rượu, thì nguy cơ tương đối của tai nạn với BAC 0,02%. Nghiên cứu y tế gần đây cho thấy rằng nguy cơ tương đối của việc gặp tai nạn khi đang lái ô tô có thể được mô hình hóa bằng một phương trình có dạng $R = e^{kx}$, trong đó $x(\%)$ là nồng độ cồn trong máu và k là một hằng số,

- Nghiên cứu chỉ ra rằng nguy cơ tương đối của một người bị tai nạn với BAC bằng 0,02% là 1,4. Tìm hằng số k trong phương trình.
- Nguy cơ tương đối là bao nhiêu nếu nồng độ cồn trong máu là 0,17%?
- Tìm BAC tương ứng với nguy cơ tương đối là 100.
- Giả sử nếu một người lái xe có nguy cơ tương đối từ 5 trở lên sẽ không được phép lái xe, thì một người có nồng độ cồn trong máu từ bao nhiêu trở lên sẽ không được phép lái xe?

Lời giải

a) Thay $R = 1,4; x = 0,02\%$ vào công thức ta được $1,4 = e^{k \cdot \frac{0,02}{100}} \Rightarrow k \approx 1682,36$

b) $R = e^{1682,36 \cdot \frac{0,17}{100}} \approx 17,46$

c) Thay $R = 100$ vào công thức, ta được $100 = e^{1682,36x} \Rightarrow x \approx 0,27\%$

d) Với $R \geq 5$ thì $x \geq 0,096\%$, tức là một người có nồng độ cồn trong máu từ khoảng 0,096% trở lên thì không được lái xe.

BÀI 20: HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

A - KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Cho a là số thực dương khác 1. Hàm số $y = a^x$ được gọi là hàm số mũ cơ số a .

2. Hàm số mũ $y = a^x$:

- ☐ Có tập xác định là $\mathbb{R}$ và tập giá trị là $(0; +\infty)$;
- ☐ Đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $a > 1$ và nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $0 < a < 1$;
- ☐ Liên tục trên $\mathbb{R}$;
- ☐ Có đồ thị đi qua các điểm $(0; 1), (1; a)$ và luôn nằm phía trên trục hoành.

3. Cho a là số thực dương khác 1. Hàm số $y = \log_a x$ được gọi là hàm số lôgarit cơ số a .

4. Hàm số lôgarit $y = \log_a x$:

- ☐ Có tập xác định là $(0; +\infty)$ và tập giá trị là $\mathbb{R}$;
- ☐ Đồng biến trên $(0; +\infty)$ khi $a > 1$ và nghịch biến trên $(0; +\infty)$ khi $0 < a < 1$;
- ☐ Liên tục trên $(0; +\infty)$;
- ☐ Có đồ thị đi qua các điểm $(1; 0), (a; 1)$ và luôn nằm bên phải trục tung.

B - VÍ DỤ

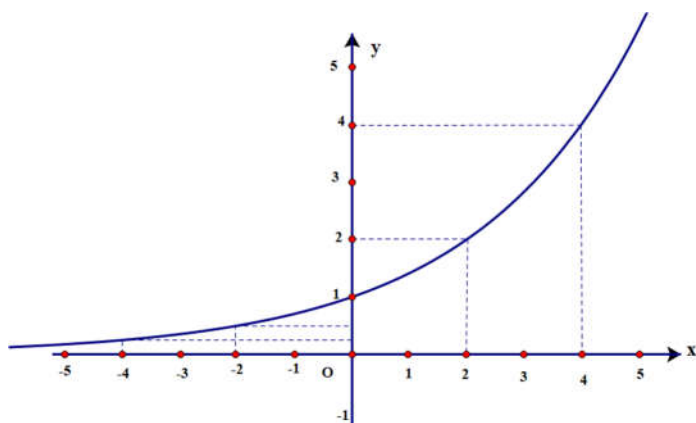
Ví dụ 1. (Vẽ đồ thị hàm số mũ) Vẽ đồ thị của hàm số mũ $y = (\sqrt{2})^x$.

Lời giải

Lập bảng giá trị của hàm số tại một số điểm như sau:

x	-4	-2	0	2	4
$y = (\sqrt{2})^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

Từ đó, ta vẽ được đồ thị của hàm số $y = (\sqrt{2})^x$ như hình sau:



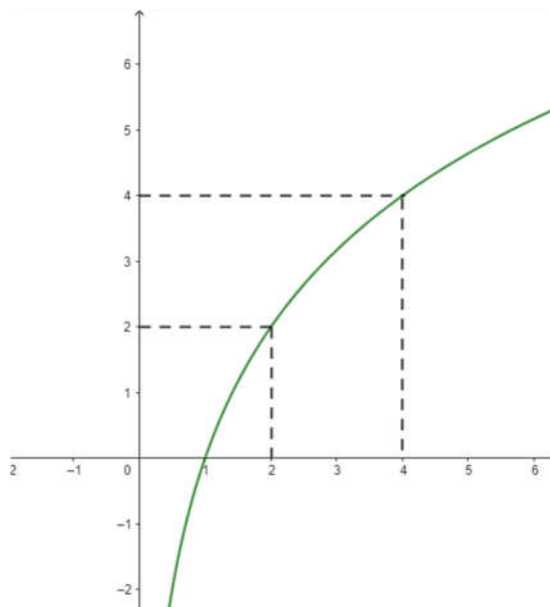
Ví dụ 2. (Vẽ đồ thị hàm số lôgarit) Vẽ đồ thị của hàm số lôgarit $y = \log_{\sqrt{2}} x$.

Lời giải

Lập bảng giá trị của hàm số tại một số điểm như sau:

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$y = \log_{\sqrt{2}} x$	-4	-2	0	2	4

Từ đó, ta vẽ được đồ thị của hàm số $y = \log_{\sqrt{2}} x$ như hình dưới đây.



Ví dụ 3. (Vận dụng thực tiễn) Trong Vật lí, sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn bằng công

thức: $m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}$, trong đó m_0 là khối lượng của chất phóng xạ tại thời điểm ban đầu $t = 0$, $m(t)$ là

khối lượng của chất phóng xạ tại thời điểm t , T là chu kì bán rã (là thời gian để một nửa số nguyên tử của chất phóng xạ bị biến thành chất khác). Biết rằng đồng vị plutonium-234 có chu kì bán rã khoảng 9 giờ. Từ khối lượng plutonium-234 ban đầu là 100 g, hãy tính khối lượng plutonium-234 còn lại sau:

a) 9 giờ; b) 1 ngày.

(Kết quả tính theo gam và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

a) Thay $t = 9, T = 9, m_0 = 100$ vào công thức, ta được: $m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}} = 100 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{9}{9}} = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50$ (g).

b) Do 1 ngày = 24 giờ nên thay $t = 24, T = 9, m_0 = 100$ vào công thức, ta được:

$$m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}} = 100 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{24}{9}} \approx 15,75 \text{ (g)}.$$

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 6.15. Vẽ đồ thị của các hàm số sau: a) $y = 3^x$; b) $y = \left(\frac{1}{3} \right)^x$.

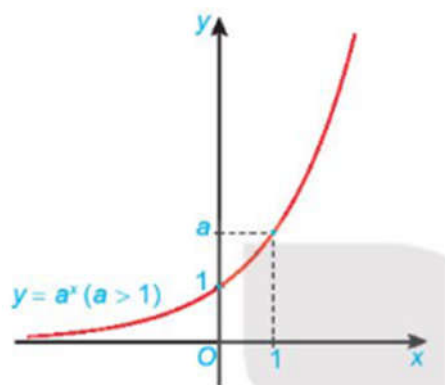
Lời giải

a) Lập bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
-----	----	----	---	---	---

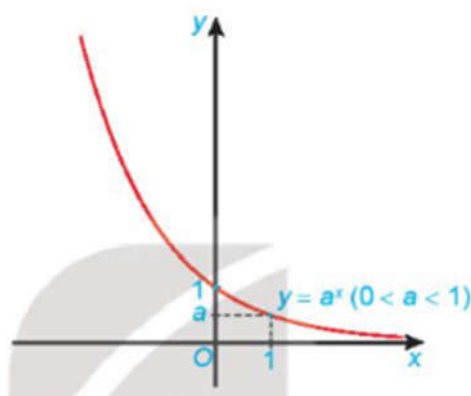
$y = 3^x$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
-----------	---------------	---------------	---	---	---

Các bạn tham khảo đồ thị có dạng dưới đây.



b) Lập bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$



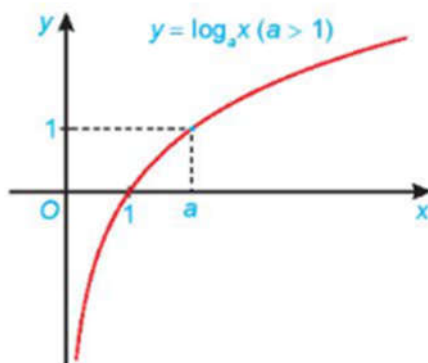
Bài 6.16. Vẽ đồ thị của các hàm số sau: a) $y = \log x$;

b) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

Lời giải

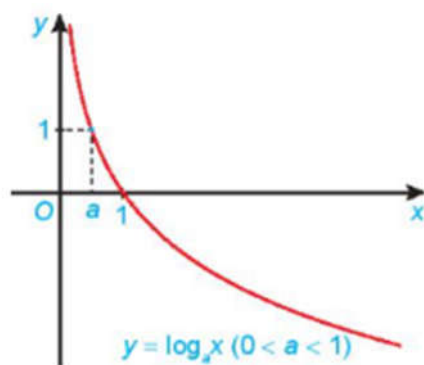
a) Lập bảng giá trị

x	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y = \log x$	-0,3	0	0,3	0,6	0,9



b) Lập bảng giá trị

x	1	3	9	27
$y = \log_{\frac{1}{3}} x$	-3	-1	1	3



Bài 6.17. Tìm tập xác định của các hàm số sau: a) $y = \log_2 |x+3|$;

b) $y = \ln(4-x^2)$.

Lời giải

$$\text{a) } \begin{cases} x+3 > 0 \\ x+3 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x+3| = x+3 \\ |x+3| = -(x+3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-3, \infty) \\ (-\infty, -3) \end{cases}$$

Vậy tập xác định của hàm số $y = \log_2 |x+3|$ là $(-\infty, -3) \cup (-3, \infty)$.

$$\text{b) } \begin{cases} 4-x^2 > 0 \\ 4-x^2 \neq 1 \end{cases}$$

Phương trình $4-x^2 = 0$ có nghiệm $x = \pm 2$. Khi $x \in (-2, 2)$, ta có $\begin{cases} 4-x^2 > 0 \\ 4-x^2 \neq 1 \end{cases}$

Vậy hàm số y được xác định trên đoạn $(-2, 2)$.

$$\text{Khi } x < -2 \text{ hoặc } x > 2, \text{ ta có } \begin{cases} 4-x^2 > 0 \\ 4-x^2 \neq 1 \end{cases}$$

Vậy hàm số y được xác định trên hai khoảng $x < -2$ hoặc $x > 2$, ta có $\begin{cases} (-\infty, -2) \\ (2, \infty) \end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số $y = \ln(4-x^2)$ là $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$.

Bài 6.18. Giả sử một chất phóng xạ bị phân rã theo cách sao cho khối lượng $m(t)$ của chất còn lại (tính

bằng kilôgam) sau t ngày được cho bởi hàm số $m(t) = 13e^{-0,015t}$.

a) Tìm khối lượng của chất đó tại thời điểm $t = 0$.

b) Sau 45 ngày khối lượng chất đó còn lại là bao nhiêu?

Lời giải

a) Khi $t = 0, m(0) = 13e^{-0,015 \times 0} = 13e^0 = 13$. Vậy khối lượng của chất phóng xạ ban đầu là 13 kg.

b) Để tìm khối lượng chất phóng xạ còn lại sau 45 ngày, ta sử dụng công thức $m(t) = 13e^{-0,015t}$ và thay $t = 45$ vào: $m(45) = 13e^{-0,015 \times 45} \approx 6,19$ kg

6.19. Trong một nghiên cứu, một nhóm học sinh được cho xem cùng một danh sách các loài động vật và được kiểm tra lại xem họ còn nhớ bao nhiêu phần trăm danh sách đó sau mỗi tháng. Giả sử sau t tháng, khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh đó được tính theo công thức

$M(t) = 75 - 20\ln(t+1), 0 \leq t \leq 12$ (đơn vị: %). Hãy tính khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh đó sau 6 tháng.

Lời giải

Áp dụng công thức $M(t) = 75 - 20\ln(t+1)$, ta có: $M(6) = 75 - 20\ln(6+1) = 75 - 20\ln 7 \approx 60,39$

Vậy khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh đó sau 6 tháng là khoảng 60,39%.

D - BÀI TẬP

Bài 6.21. Vẽ đồ thị của các hàm số mũ sau:

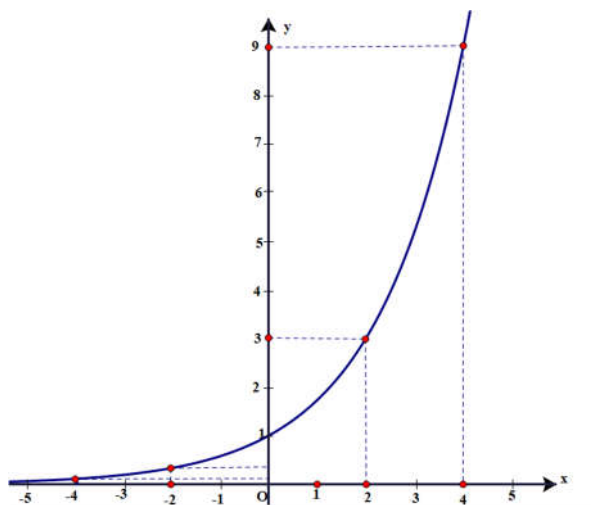
a) $y = (\sqrt{3})^x$; b) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

Lời giải

a) Lập bảng giá trị của hàm số tại một số điểm như sau:

x	-4	-2	0	2	4
$y = (\sqrt{3})^x$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

Từ đó, ta vẽ được đồ thị của hàm số $y = (\sqrt{3})^x$ như hình sau:

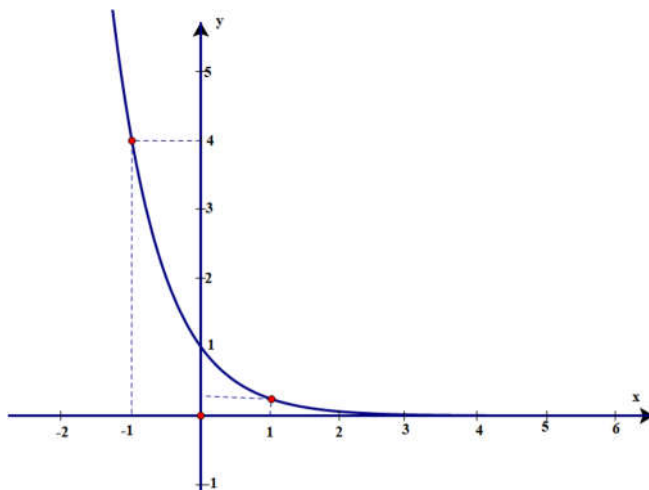


b) Lập bảng giá trị của hàm số tại một số điểm như sau:

x	-2	-1	0	1	2
-----	----	----	---	---	---

$y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$	16	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$
----------------------------------	----	---	---	---------------	----------------

Từ đó, ta vẽ được đồ thị của hàm số $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ như hình sau:



Bài 6.22. Vẽ đồ thị của các hàm số lôgarit sau:

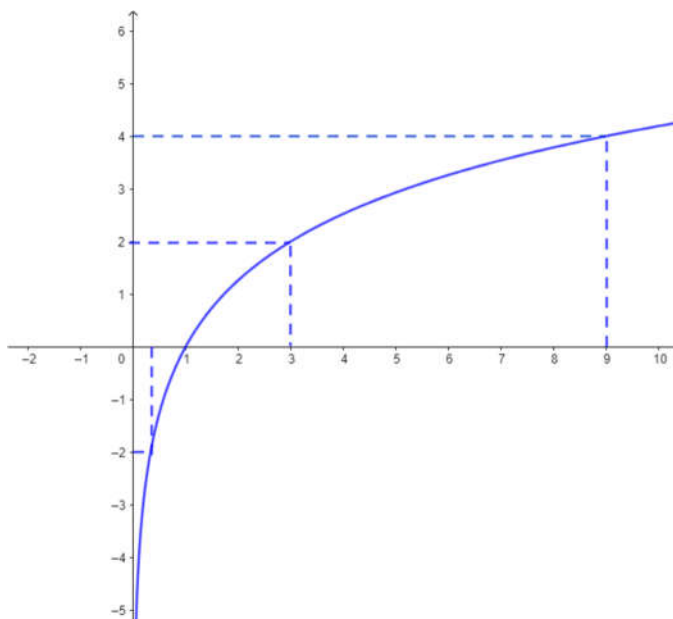
a) $\log_{\sqrt{3}} x$; b) $y = \log_{\frac{2}{3}} x$.

Lời giải

a) Lập bảng giá trị của hàm số tại một số điểm như sau:

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$y = \log_{\sqrt{3}} x$	-4	-2	0	2	4

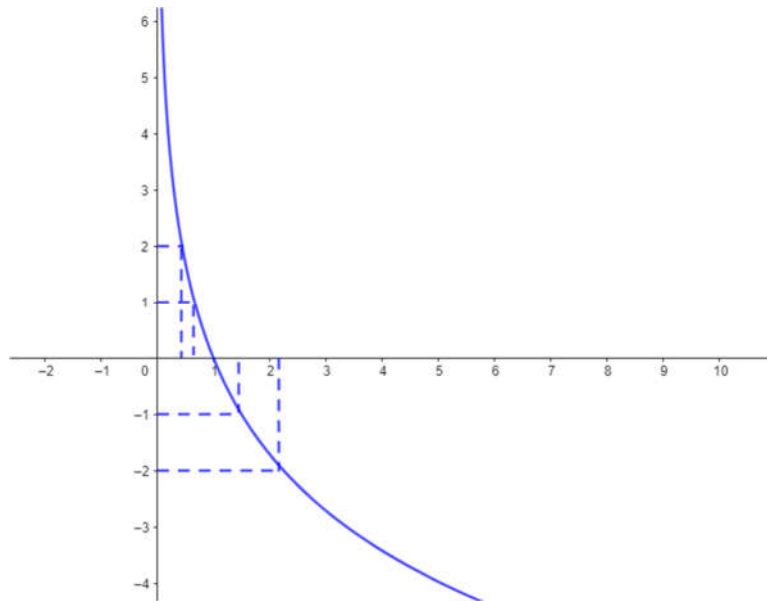
Từ đó, ta vẽ được đồ thị của hàm số $y = \log_{\sqrt{3}} x$ như hình sau:



b) Lập bảng giá trị của hàm số tại một số điểm như sau:

x	$\frac{9}{4}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$
$y = \log_{\frac{2}{3}} x$	-2	-1	0	1	2

Từ đó, ta vẽ được đồ thị của hàm số $y = \log_{\frac{2}{3}} x$ như hình sau:



Bài 6.23. Cho hàm số mũ $f(x) = a^x (a > 0)$. Chứng minh rằng:

a) $\frac{f(x+1)}{f(x)} = a$; b) $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$ c) $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$.

Lời giải

a) $\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{a^{x+1}}{a^x} = a$;

b) $f(-x) = a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \frac{1}{f(x)}$;

c) $f(x_1 + x_2) = a^{x_1 + x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2} = f(x_1) \cdot f(x_2)$.

Bài 6.24. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \log_3(x+1)$; b) $y = \log_{\frac{1}{2}}|x-1|$.

Lời giải

a) Tập xác định của hàm số là $(-1; +\infty)$.

b) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ do $|x-1| > 0 \forall x \neq 1$.

Bài 6.25. Cho hàm số lôgarit $f(x) = \log_a x (0 < a \neq 1)$. Chứng minh rằng:

a) $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$ b) $f(x^\alpha) = \alpha f(x)$.

Lời giải

a) $f\left(\frac{1}{x}\right) = \log_a \frac{1}{x} = -\log_a x = -f(x)$. b) $f(x^\alpha) = \log_a x^\alpha = \alpha \log_a x = \alpha f(x)$.

Bài 6.26. Ta định nghĩa các hàm sin hyperbolic và hàm cosin hyperbolic như sau:

$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$; $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. Chứng minh rằng:

- a) $\sinh x$ là hàm số lẻ;
b) $\cosh x$ là hàm số chẵn;
c) $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$ với mọi x .

Lời giải

a) Ta có: $f(x) = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \Rightarrow f(-x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó, $\sinh x$ là hàm số lẻ.

b) Ta có: $g(x) = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \Rightarrow g(-x) = \frac{1}{2}(e^{-x} + e^x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó, $\cosh x$ là hàm số chẵn.

c) Ta có: $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 - \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 = \frac{1}{4} \cdot 2e^{-x} \cdot 2e^x = 1$.

Bài 6.27. Nếu một ô kính ngăn khoảng 3% ánh sáng truyền qua nó thì phần trăm ánh sáng p truyền qua n ô kính liên tiếp được cho gần đúng bởi hàm số sau: $p(n) = 100 \cdot (0,97)^n$.

- a) Có bao nhiêu phần trăm ánh sáng sẽ truyền qua 10 ô kính?
b) Có bao nhiêu phần trăm ánh sáng sẽ truyền qua 25 ô kính? (Kết quả ở câu a và câu b được làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

a) $p(10) = 100 \cdot (0,97)^{10} \approx 74\%$. b) $p(25) = 100 \cdot (0,97)^{25} \approx 47\%$

Bài 6.28. Số tiền ban đầu 120 triệu đồng được gửi tiết kiệm với lãi suất năm không đổi là 6%. Tính số tiền (cả vốn lẫn lãi) thu được sau 5 năm nếu nó được tính lãi kép:

- a) hằng quý; b) hằng tháng; c) liên tục.

(Kết quả được tính theo đơn vị triệu đồng và làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba).

Lời giải

Để giải câu a và câu b, ta sử dụng công thức lãi kép theo định kì để tính tổng số tiền thu được

$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^t$, trong đó P là số tiền vốn ban đầu, r là lãi suất năm (r cho dưới dạng số thập phân), n là số kì tính lãi trong một năm và t là số kì gửi.

a) Ta có: $P = 120, r = 6\% = 0,06, n = 4, t = 20$. Thay vào công thức trên, ta được:

$A = 120\left(1 + \frac{0,06}{4}\right)^{20} = 120 \cdot 1,015^{20} \approx 161,623$ (triệu đồng)

b) Ta có: $P = 120, r = 6\% = 0,06, n = 12, t = 60$. Thay vào công thức trên, ta được:

$$A = 120 \left(1 + \frac{0,06}{12} \right)^{60} = 120 \cdot 1,005^{60} \approx 161,862 \text{ (triệu đồng)}$$

c) Ta sử dụng công thức lãi kép liên tục $A = Pe^{rt}$, ở đây r là lãi suất năm (r cho dưới dạng số thập phân) và t là số năm gửi tiết kiệm.

Ta có: $P = 120, r = 6\% = 0,06, t = 5$ nên $A = 120 \cdot e^{0,06 \cdot 5} = 120 \cdot e^{0,3} \approx 161,983$ (triệu đồng).

Bài 6.29. Chu kì bán rã của đồng vị phóng xạ Radi 226 là khoảng 1600 năm. Giả sử khối lượng m (tính bằng gam) còn lại sau t năm của một lượng Radi 226 được cho bởi công thức: $m = 25 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{1600}}$

a) Khối lượng ban đầu (khi $t = 0$) của lượng Radi 226 đó là bao nhiêu?

b) Sau 2500 năm khối lượng của lượng Radi 226 đó là bao nhiêu?

Lời giải

a) Khối lượng ban đầu (khi $t = 0$) của lượng Radi 226 đó là $m(0) = 25 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^0 = 25$ (g).

b) Sau 2500 năm khối lượng của lượng Radi 226 đó là $m(2500) = 25 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{2500}{1600}} \approx 8,46$ (g).

Bài 6.30. Trong Vật lí, mức cường độ âm (tính bằng deciben, kí hiệu là dB) được tính bởi công thức $L = 10 \log \frac{I}{I_0}$, trong đó I là cường độ âm tính theo W/m^2 và $I_0 = 10^{-12} W/m^2$ là cường độ âm chuẩn, tức là cường độ âm thấp nhất mà tai người có thể nghe được.

a) Tính mức cường độ âm của một cuộc trò chuyện bình thường có cường độ âm là $10^{-7} W/m^2$.

b) Khi cường độ âm tăng lên 1000 lần thì mức cường độ âm (đại lượng đặc trưng cho độ to nhỏ của âm) thay đổi thế nào?

Lời giải

a) Mức cường độ âm của cuộc trò chuyện bình thường có cường độ âm $10^{-7} W/m^2$ là

$$L = 10 \log \frac{10^{-7}}{10^{-12}} = 50 \text{ (dB)}.$$

b) Ta có: $10 \log \frac{1000I}{I_0} = 10 \cdot \left(\log 1000 + \log \frac{I}{I_0} \right) = 30 + 10 \log \frac{I}{I_0}$. Vậy mức cường độ âm tăng lên 30 dB.

BÀI 21: PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

A - KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương trình mũ cơ bản có dạng $a^x = b$ (với $0 < a \neq 1$).

□ Nếu $b > 0$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = \log_a b$.

□ Nếu $b \leq 0$ thì phương trình vô nghiệm.

2. Phương trình lôgarit cơ bản có dạng $\log_a x = b$ ($0 < a \neq 1$). Phương trình lôgarit cơ bản $\log_a x = b$ có nghiệm duy nhất $x = a^b$.

3. Bất phương trình mũ cơ bản có dạng $a^x > b$ (hoặc $a^x \geq b, a^x < b, a^x \leq b$) với $0 < a \neq 1$. Xét bất phương trình dạng $a^x > b$:

□ Nếu $b \leq 0$ thì tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R}$.

□ Nếu $b > 0$ thì bất phương trình tương đương với $a^x > a^{\log_a b}$.

Với $a > 1$, nghiệm của bất phương trình là $x > \log_a b$.

Với $0 < a < 1$, nghiệm của bất phương trình là $x < \log_a b$.

4. Bất phương trình lôgarit cơ bản có dạng $\log_a x > b$ (hoặc $\log_a x \geq b, \log_a x < b, \log_a x \leq b$) với $0 < a \neq 1$.

Xét bất phương trình dạng $\log_a x > b$:

□ Nếu $a > 1$ thì nghiệm của bất phương trình là $x > a^b$.

□ Nếu $0 < a < 1$ thì nghiệm của bất phương trình là $0 < x < a^b$.

B - VÍ DỤ

Ví dụ 1. (Giải phương trình mũ, lôgarit) Giải các phương trình sau:

a) $2^{2x-1} + 4^{x+1} = 3$; b) $\log_5(x+6) + \log_5(x+2) = 1$.

Lời giải

a) Ta có: $2^{2x-1} + 4^{x+1} = 3 \Leftrightarrow \frac{4^x}{2} + 4 \cdot 4^x = 3 \Leftrightarrow \frac{9}{2} \cdot 4^x = 3 \Leftrightarrow 4^x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \log_4 \frac{2}{3}$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \log_4 \frac{2}{3}$.

b) Điều kiện: $x+6 > 0$ và $x+2 > 0$, tức là $x > -2$. Ta có:

$$\log_5(x+6) + \log_5(x+2) = 1 \Leftrightarrow \log_5[(x+6)(x+2)] = 1 \Leftrightarrow x^2 + 8x + 12 = 5 \Leftrightarrow x^2 + 8x + 7 = 0$$

Giải phương trình bậc hai này ta được hai nghiệm $x = -1, x = -7$. Chỉ có nghiệm $x = -1$ thỏa mãn điều kiện. Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = -1$.

Ví dụ 2. (Giải bất phương trình mũ, lôgarit) Giải các bất phương trình sau:

a) $3^{x^2-x} \leq 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$ b) $\log_{0,5}(x-3) + \log_{0,5}(x-2) \geq -1$.

Lời giải

a) $3^{x^2-x} \leq 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Bất phương trình đã cho có thể viết ở dạng: $3^{x^2-x} \leq 3^{2-x}$.

$$c) \sqrt{3}e^{3x} = 1 \Rightarrow \ln(\sqrt{3}e^{3x}) = \ln 1$$

$$\Rightarrow \ln \sqrt{3} + 3x \ln e = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \ln 3 + 3x = 0$$

$$\Rightarrow 3x = -\frac{1}{2} \ln 3 \Rightarrow x = -\frac{1}{6} \ln 3 \quad d) 5^x = 3 \cdot (3^2)^{x-1} = 3 \cdot 3^{2x-2} \text{ và rút gọn để được } 5^x = 3^{2x}$$

$$5^x = 3^{2x} \Rightarrow \ln 5^x = \ln 3^{2x}$$

$$\Rightarrow x \ln 5 = 2x \ln 3 \Rightarrow \ln 5 = 2 \ln 3$$

$$\Rightarrow \ln \frac{5}{3^2} = 0$$

Bài 6.21. Giải các phương trình sau:

a) $\log(x+1) = 2$;

b) $2\log_4 x + \log_2(x-3) = 2$;

c) $\ln x + \ln(x-1) = \ln 4x$;

d) $\log_3(x^2 - 3x + 2) = \log_3(2x - 4)$.

Lời giải

a) $\log(x+1) = 2 \Rightarrow x+1 = 10 \Rightarrow x = 9$

b) $2\log_4 x + \log_2(x-3) = 2 \Rightarrow \log_4 x^2 + \log_2(x-3) = 2$.

$$\log_2 x^2 + \log_2(x-3)^{\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow \log_2(x^2 \sqrt{x-3}) = 2$$

Vậy $x = 4$

c) $\ln x + \ln(x-1) = \ln 4x \Rightarrow \ln(x(x-1)) = \ln(4x) \Rightarrow x(x-1) = 4x \Rightarrow x^2 - 5x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 0 \end{cases} \quad (x = 5 \text{ thỏa mãn}).$

Vậy $x = 5$

$$d) \log_3(x^2 - 3x + 2) = \log_3(2x - 4) = x^2 - x + 2 = 2x - 4 = x^2 - 3x + 6 = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(6)}}{2(1)} = \frac{3 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow x^2 - x + 2 = 2x - 4 \text{ có nghiệm } x = \frac{3+i\sqrt{3}}{2} \text{ và } x = \frac{3-i\sqrt{3}}{2}.$$

Bài 6.22. Giải các bất phương trình sau:

a) $0,1^{2-x} > 0,1^{4+2x}$;

b) $2,5^{2x+1} \leq 3$;

c) $\log_3(x+7) \geq -1$;

d) $\log_{0,5}(x+7) \geq \log_{0,5}(2x-1)$.

Lời giải

a) $2-x > 4+2x \Leftrightarrow -2 > 3x \Leftrightarrow x > -\frac{2}{3}$

b) $\frac{2,5^{2x+1}}{2,5} \leq \frac{3}{2,5} \Leftrightarrow 2,5^{2x} \leq \frac{6}{5}$

$$\ln(2,5^{2x}) \leq \ln\left(\frac{6}{5}\right) \Leftrightarrow 2x \ln(2,5) \leq \ln\left(\frac{6}{5}\right)$$

$$\Rightarrow x \leq \frac{\ln \frac{6}{5}}{2 \ln 2,5} \approx 0,317$$

$$c) \log_3(x+7) \geq -1 \Leftrightarrow 3^{-1} \leq x+7 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq x+7 \Leftrightarrow x \geq -\frac{20}{5}$$

$$d) \log_{0,5}(x+7) \geq \log_{0,5}(2x-1) \Leftrightarrow x+7 \geq 2x-1 \Leftrightarrow x \leq -8$$

Bài 6.23. Bác Minh gửi tiết kiệm 500 triệu đồng ở một ngân hàng với lãi suất không đổi 7,5% một năm theo thể thức lãi kép kì hạn 12 tháng. Tổng số tiền bác Minh thu được (cả vốn lẫn lãi) sau n năm là:

$$A = 500 \cdot (1 + 0,075)^n \text{ (triệu đồng).}$$

Tính thời gian tối thiểu gửi tiết kiệm để bác Minh thu được ít nhất 800 triệu đồng (cả vốn lẫn lãi).

Lời giải

Ta có $500(1 + 0,075)^n \geq 800$

$$\text{Chia cả hai vế của bất phương trình cho } 500 : (1 + 0,075)^n \geq \frac{800}{500} = 1,6$$

Lấy logarit tự nhiên ở cả hai vế của bất phương trình: $n \ln(1 + 0,075) \geq \ln(1,6)$

$$\text{Chia cả hai vế của bất phương trình cho } \ln(1 + 0,075) : n \geq \frac{\ln(1,6)}{\ln(1 + 0,075)} \approx 9,25$$

Vậy thời gian tối thiểu cần gửi tiết kiệm để bác Minh thu được ít nhất 800 triệu đồng là 10 năm.

Bài 6.24. Số lượng vi khuẩn ban đầu trong một mẻ nuôi cấy là 500 con. Người ta lấy một mẫu vi khuẩn trong mẻ nuôi cấy đó, đếm số lượng vi khuẩn và thấy rằng tỉ lệ tăng trưởng vi khuẩn là 40% mỗi giờ. Khi đó số lượng vi khuẩn $N(t)$ sau t giờ nuôi cấy được ước tính bằng công thức sau: $N(t) = 500e^{0,4t}$

Hỏi sau bao nhiêu giờ nuôi cấy, số lượng vi khuẩn vượt mức 80 000 con?

Lời giải

Giải phương trình: $80000 = 500e^{0,4t}$

Chia cả hai vế của phương trình cho 500 : $160 = e^{0,4t}$

$$\text{Logarit tự nhiên của cả hai vế: } \ln 160 = 0,4t \Rightarrow t = \frac{\ln 160}{0,4} \approx 5,43$$

Vậy sau khoảng 5.43 giờ nuôi cấy, số lượng vi khuẩn sẽ vượt mức 80000 con.

Bài 6.25. Giả sử nhiệt độ $T(^{\circ}\text{C})$ của một vật giảm dần theo thời gian cho bởi công thức:

$T = 25 + 70e^{-0,5t}$, trong đó thời gian t được tính bằng phút.

a) Tìm nhiệt độ ban đầu của vật.

b) Sau bao lâu nhiệt độ của vật còn lại 30°C ?

Lời giải

a) Nhiệt độ ban đầu của vật: $T = 25 + 70e^{0,5 \cdot 0} = 25 + 70e^{0,5 \cdot 0} = 25 + 70 = 95$

b) Để tìm thời gian t mà nhiệt độ của vật còn lại 30°C .

$$30 = 25 + 70e^{0,5t} \Rightarrow \ln \frac{30-25}{70} = 0,5t$$

$$\text{Giải phương trình trên ta tìm được giá trị của } t : t = 2 \ln \frac{1}{7} \approx 6,04$$

Vậy sau khoảng 6,04 phút nhiệt độ của vật sẽ giảm còn 30°C .

Bài 6.26. Tính nồng độ ion hydrogen (tính bằng mol/lít) của một dung dịch có độ pH là 8.

Lời giải

Độ pH của một dung dịch được tính bằng công thức $\text{pH} = -\log_{10} [H^+]$.

$\Rightarrow [H^+] = 10^{-pH}$. Do đó, nồng độ ion hydrogen của dung dịch có độ pH là 8 là:

$$[H^+] = 10^{-pH} = 10^{-8} \text{ (mol / lít)}.$$

Vậy, nồng độ ion hydrogen của dung dịch là 10^{-8} mol / lít.

D - BÀI TẬP

6.31. Giải các phương trình mũ sau:

a) $4^{2x-1} = 8^{x+3}$; b) $9^{2x} \cdot 27^{x^2} = \frac{1}{3}$;

c) $(e^4)^x \cdot e^{x^2} = e^{12}$; d) $5^{2x-1} = 20$.

Lời giải

a) $4^{2x-1} = 8^{x+3} \Leftrightarrow 2^{4x-2} = 2^{3x+9} \Leftrightarrow 4x-2 = 3x+9 \Leftrightarrow x = 11$.

b) $9^{2x} \cdot 27^{x^2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3^{4x} \cdot 3^{3x^2} = 3^{-1} \Leftrightarrow 3^{3x^2+4x+1} = 1 \Leftrightarrow 3x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ x = -1 \end{cases}$

c) $(e^4)^x \cdot e^{x^2} = e^{12} \Leftrightarrow e^{4x} \cdot e^{x^2} = e^{12} \Leftrightarrow e^{x^2+4x-12} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -6 \end{cases}$.

d) $5^{2x-1} = 20 \Leftrightarrow 2x-1 = \log_5 20 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(1 + \log_5 20)$.

6.32. Giải các phương trình lôgarit sau:

a) $\log_3(4x-1) = 2$; b) $\log_2(x^2-1) = \log_2(3x+3)$;

c) $\log_x 81 = 2$; d) $\log_2 8^x = -3$.

Lời giải

a) Điều kiện: $x > \frac{1}{4}$. Khi đó: $\log_3(4x-1) = 2 \Leftrightarrow 4x-1 = 9 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$ (thỏa mãn).

b) Điều kiện: $x > 1$. Khi đó: $\log_2(x^2-1) = \log_2(3x+3) \Leftrightarrow x^2-1 = 3x+3$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ (không tm)} \\ x = 4 \end{cases}$$

c) Điều kiện: $0 < x \neq 1$. Ta có: $\log_x 81 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 81 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -9 \text{ (không tm)} \\ x = 9 \end{cases}$.

d) $\log_2 8^x = -3 \Leftrightarrow 8^x = 2^{-3} \Leftrightarrow 2^{3x} = 2^{-3} \Leftrightarrow 3x = -3 \Leftrightarrow x = -1$.

6.33. Giải các bất phương trình mũ sau:

a) $2^{2x-3} > \frac{1}{4}$; b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{5x-6}$;

c) $25^x \leq 5^{4x-3}$; d) $9^x - 3^x - 6 \leq 0$.

Lời giải

a) $2^{2x-3} > \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^{2x-3} > 2^{-2} \Leftrightarrow 2x-3 > -2 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$.

$$b) \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{5x-6} \Leftrightarrow x^2 \leq 5x-6 \Leftrightarrow (x-2)(x-3) \leq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3.$$

$$c) 25^x \leq 5^{4x-3} \Leftrightarrow 5^{2x} \leq 5^{4x-3} \Leftrightarrow 2x \leq 4x-3 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}.$$

$$d) 9^x - 3^x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 - 3^x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow (3^x - 3)(3^x + 2) \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq 3^x \leq 3 \Leftrightarrow x \leq 1.$$

6.34. Giải các bất phương trình lôgarit sau:

a) $\log_3(2x+1) \geq 2$; b) $\log_2(3x-1) < \log_2(9-2x)$;

c) $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) \leq \log_{\frac{1}{2}}(4x-5)$; d) $\log_2(2x-1) \leq \log_4(x+1)^2$.

Lời giải

a) Điều kiện: $x > -\frac{1}{2}$. Ta có: $\log_3(2x+1) \geq 2 \Leftrightarrow 2x+1 \geq 3^2 \Leftrightarrow x \geq 4$ (thỏa mãn).

b) Điều kiện: $\frac{1}{3} < x < \frac{9}{2}$. Ta có: $\log_2(3x-1) < \log_2(9-2x) \Leftrightarrow 3x-1 < 9-2x \Leftrightarrow 5x < 10 \Leftrightarrow x < 2$.

Kết hợp với điều kiện, ta được: $\frac{1}{3} < x < 2$.

6.35. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \frac{1}{3^x - 9}$; b) $y = \ln(4-x^2)$;

c) $y = \log \frac{1}{5-x}$; d) $y = \frac{2}{\log_4(x-1)}$.

Lời giải

a) $y = \frac{1}{3^x - 9}$. Hàm số xác định khi $3^x \neq 9$, tức là $x \neq 2$.

b) $y = \ln(4-x^2)$. Hàm số xác định khi $4-x^2 > 0$, tức là $-2 < x < 2$.

c) $y = \log \frac{1}{5-x}$. Hàm số xác định khi $\frac{1}{5-x} > 0$, tức là $x < 5$.

d) $y = \frac{2}{\log_4(x-1)}$. Hàm số xác định khi $\begin{cases} x-1 > 0 \\ \log_4(x-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1, x \neq 2$.

6.36. Áp suất khí quyển p lên một vật giảm khi độ cao tăng dần. Giả sử áp suất này (tính bằng milimét thuỷ ngân) được biểu diễn theo độ cao h (tính bằng kilômét) so với mực nước biển bằng công thức $p(h) = 760 \cdot e^{-0,145h}$.

a) Một máy bay đang chịu áp suất khí quyển 320mmHg. Tìm độ cao của máy bay đó.

b) Một người đứng trên đỉnh của một ngọn núi và chịu áp suất khí quyển 667mmHg. Tìm chiều cao của ngọn núi này.

Lời giải

a) Giải phương trình $760e^{-0,145h} = 320$, ta tìm được $h \approx 5,965$ km. Vậy độ cao của máy bay là khoảng 5,965 km.

b) Giải phương trình $760e^{-0,145h} = 667$, ta tìm được $h \approx 0,9$ km. Vậy chiều cao của ngọn núi là khoảng 0,9 km.

6.37. Giả sử giá trị còn lại V (triệu đồng) của một chiếc ô tô nào đó sau t năm được cho bằng công thức $V(t) = 730 \cdot (0,82)^t$.

a) Theo mô hình này, khi nào chiếc xe có giá trị 500 triệu đồng?

b) Theo mô hình này, khi nào chiếc xe có giá trị 200 triệu đồng?

(Kết quả của câu a và câu b được tính tròn năm).

Lời giải

a) Giải phương trình $730 \cdot (0,82)^t = 500$, ta được $t \approx 1,91$ năm. Vậy chiếc xe có giá trị 500 triệu đồng sau khoảng 2 năm.

b) Giải phương trình $730 \cdot (0,82)^t = 200$, ta được $t \approx 6,52$ năm. Vậy chiếc xe có giá trị 200 triệu đồng sau khoảng 7 năm.

6.38. Giả sử tổng chi phí hoạt động (đơn vị tỉ đồng) trong một năm của một công ty được tính bằng công thức $C(t) = 90 - 50e^{-t}$, trong đó t là thời gian tính bằng năm kể từ khi công ty được thành lập. Tính chi phí hoạt động của công ty đó vào năm thứ 10 sau khi thành lập (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ ba).

Lời giải

Chi phí hoạt động của công ty đó vào năm thứ 10 sau khi thành lập là: $C(10) = 90 - 50e^{-10} \approx 89,998$ (tỉ đồng)

6.39. Nhắc lại rằng độ pH của một dung dịch được tính bằng công thức $\text{pH} = -\log[H^+]$, ở đó $[H^+]$ là nồng độ ion hydrogen của dung dịch tính bằng mol/lít. Biết rằng máu của người bình thường có độ pH từ 7,30 đến 7,45. Hỏi nồng độ ion hydrogen trong máu người bình thường nhận giá trị trong đoạn nào?

Lời giải

Ta có: $7,30 \leq -\log[H^+] \leq 7,45 \Leftrightarrow -7,30 \geq \log[H^+] \geq -7,45 \Leftrightarrow 10^{-7,30} \geq [H^+] \geq 10^{-7,45}$

Vậy nồng độ ion hydrogen trong máu người bình thường nhận giá trị trong đoạn $[5,01 \cdot 10^{-8}; 3,55 \cdot 10^{-8}]$.

6.40. Nhắc lại rằng mức cường độ âm (đo bằng dB) được tính bởi công thức $L = 10 \log \frac{I}{I_0}$, trong đó I là cường độ âm tính theo W/m^2 và $I_0 = 10^{-12} W/m^2$.

a) Tính cường độ âm của âm thanh tàu điện ngầm có mức cường độ âm là 100 dB.

b) Âm thanh trên một tuyến đường giao thông có mức cường độ âm thay đổi từ 70 dB đến 85 dB. Hỏi cường độ âm thay đổi trong đoạn nào?

Lời giải

a) Giải phương trình $100 = 10 \log \frac{I}{10^{-12}}$, ta tìm được $I = 0,01$.

b) Ta có: $70 \leq 10 \log \frac{I}{10^{-12}} \leq 85$. Giải bất phương trình này, ta được $10^{-5} \leq I \leq 10^{-3,5}$.

Vậy cường độ âm thay đổi trong đoạn $[10^{-5}; 10^{-3,5}]$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VI

PHẦN 1: SÁCH GIÁO KHOA

A - TRẮC NGHIỆM

Câu 6.27: Cho hai số thực dương x, y và hai số thực α, β tùy ý. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. $x^\alpha \cdot x^\beta = x^{\alpha+\beta}$. B. $x^\alpha \cdot y^\beta = (xy)^{\alpha+\beta}$. C. $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha \cdot \beta}$. D. $(xy)^\alpha = x^\alpha \cdot y^\alpha$.

Lời giải

Chọn B

Câu 6.28: Rút gọn biểu thức $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} : x^{\frac{5}{8}} (x > 0)$ ta được

- A. $\sqrt[4]{x}$ B. $\sqrt{x}$. C. $\sqrt[3]{x}$. D. $\sqrt[5]{x}$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Vì } \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} : x^{\frac{5}{8}} = \sqrt{x \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{4}}} : x^{\frac{5}{8}} = \sqrt{x \cdot x^{\frac{3}{4}}} : x^{\frac{5}{8}} = \sqrt{x^{\frac{7}{4}}} : x^{\frac{5}{8}} = x^{\frac{7}{8}} : x^{\frac{5}{8}} = x^{\frac{2}{8}} = x^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x}$$

Chia biểu thức trên cho $x^{\frac{5}{8}}$, ta có: $x^{\frac{7}{8}} : x^{\frac{5}{8}} = x^{\frac{2}{8}} = x^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x}$

Câu 6.29: Cho hai số thực dương a, b với $a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\log_a(a^3b^2) = 3 + \log_a b$. B. $\log_a(a^3b^2) = 3 + 2\log_a b$.
C. $\log_a(a^3b^2) = \frac{3}{2} + \log_a b$. D. $\log_a(a^3b^2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\log_a b$.

Lời giải

Chọn B

$$\log_a(a^3b^2) = \log_a a^3 + \log_a b^2 = 3\log_a a + 2\log_a b = 3 + 2\log_a b$$

Câu 6.30: Cho bốn số thực dương a, b, x, y với $a, b \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_b y$. B. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.
C. $\log_a \frac{1}{x} = \frac{1}{\log_a x}$. D. $\log_a b \cdot \log_b x = \log_a x$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Vì } \log_a b \cdot \log_b x = \frac{\log_b b}{\log_b a} \cdot \log_b x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Câu 6.31: Đặt $\log_2 5 = a, \log_3 5 = b$. Khi đó, $\log_6 5$ tính theo a và b bằng

- A. $\frac{ab}{a+b}$. B. $\frac{1}{a+b}$. C. $a^2 + b^2$. D. $a + b$.

Lời giải

Chọn A

Câu 6.32: Cho hàm số $y = 2^x$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.
- B. Tập giá trị của hàm số là $(0; +\infty)$.
- C. Đồ thị của hàm số cắt trục Ox tại đúng một điểm.
- D. Hàm số đồng biến trên tập xác định của nó.

Lời giải

Chọn C

Câu 6.33: Hàm số nào sau đây đồng biến trên tập xác định của nó?

- A. $y = \log_{0,5} x$.
- B. $y = e^{-x}$.
- C. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.
- D. $y = \ln x$.

Lời giải

Chọn D

Vì $y = \ln x$ đồng biến trên tập xác định $(0, +\infty)$ của nó vì đạo hàm của nó là $\frac{1}{x}$, là một hàm dương trên tập xác định của nó.

Câu 6.34: Cho đồ thị ba hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$ và $y = \log_c x$ như hình bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $a > b > c$.
- B. $b > a > c$.
- C. $a > b > c$.
- D. $b > c > a$.

Lời giải

Chọn B

Vì hàm số $y = \log_c x$ nghịch biến $\Rightarrow 0 < c < 1$, các hàm $y = \log_a x$, $y = \log_b x$ đồng biến nên $a, b > 1$.

Chọn $x = 100 \Rightarrow \log_a 100 > \log_b 100 \Rightarrow a < b \Rightarrow b > a > c$

B – TỰ LUẬN

Bài 6.35. Cho $0 < a \neq 1$. Tính giá trị của biểu thức $B = \log_a \left(\frac{a^2 \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[4]{a}} \right) + a^{2\log_a \frac{\sqrt{105}}{30}}$.

Lời giải

$$\begin{aligned}
 B &= \log_a \left(\frac{a^2 \sqrt[3]{a} \sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[4]{a}} \right) + a^{2\log_a \frac{\sqrt{105}}{30}} \\
 &= \log_a (a^2) + \log_a (\sqrt[3]{a}) + \log_a (\sqrt[5]{a^4}) + \log_a (\sqrt[4]{a}) - \log_a (\sqrt[4]{a}) + a^{2\log_a \frac{\sqrt{105}}{30}} \\
 &= 2 + \frac{1}{3} \log_a a + \frac{4}{5} \log_a a - \frac{1}{4} \log_a 5 + a^{2\log_a \frac{\sqrt{105}}{30}} \\
 &= 2 + \frac{1}{3} + \frac{4}{5} - \frac{1}{4} \log_a 5 + a^{2\log_a \frac{\sqrt{105}}{30}} \\
 &= \frac{31}{15} - \frac{1}{4} \log_a 5 + a^{2\log_a \frac{\sqrt{105}}{30}}
 \end{aligned}$$

Tính giá trị của $a^{2\log_a \frac{\sqrt{105}}{30}}$:

$$a^{2\log_a \frac{\sqrt{105}}{30}} = \left(\frac{\sqrt{105}}{30} \right)^2 = \frac{105}{900} = \frac{7}{60}. \text{ Tính giá trị của } a^{2\log_a \frac{\sqrt{105}}{30}} :$$

$$\text{Vậy ta có: } B = \frac{31}{15} - \frac{1}{4} \log_a 5 + a^{2\log_a \frac{\sqrt{105}}{30}} = \frac{31}{15} - \frac{1}{4} \log_a 5 + \frac{7}{60} = \frac{205 - 3 \log_a 5}{60}$$

Bài 6.36. Giải các phương trình sau:

a) $3^{1-2x} = 4^x$;

b) $\log_3(x+1) + \log_3(x+4) = 2$.

Lời giải

a) Ta có $3^{1-2} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$ và $4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$.

Vậy phương trình trở thành $\frac{1}{3} = 2^{2x}$ hay $\log_2 \frac{1}{3} = 2x$.

Từ đó, $x = \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{3} = \log_2 \sqrt{\frac{1}{3}} = \log_2 \frac{1}{\sqrt{3}} = \log_2 \frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) Áp dụng tính chất $\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n$, phương trình trở thành:

$$\log_3[(x+1)(x+4)] = 2$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x+4) = 3^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5x + 4 = 9 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 5 = 0 \Leftrightarrow (x+5)(x-1) = 0$$

Nghiệm $x = 1$ thỏa mãn đề bài.

Bài 6.37. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{4^x - 2^{x+1}}$;

b) $y = \ln(1 - \ln x)$.

Lời giải

a) Để y có giá trị thực, cần thỏa mãn điều kiện $4^x - 2^{x+1} \geq 0$. Ta có

$$4^x - 2^{x+1} = 2^{2x} - 2 \cdot 2^x = 2^x(2^x - 2) \geq 0 \text{ khi và chỉ khi } x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty).$$

Do đó, tập xác định của hàm số $y = \sqrt{4^x - 2^{x+1}}$ là $x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$.

b) Để y có giá trị thực, cần thỏa mãn điều kiện $1 - \ln x > 0$, hay $\ln x < 1$, tức $x > e$.

Vậy tập xác định của hàm số $y = \ln(1 - \ln x)$ là $x \in (e, +\infty)$.

Bài 6.38. Lạm phát là sự tăng mức giá chung một cách liên tục của hàng hoá và dịch vụ theo thời gian, tức là sự mất giá trị của một loại tiền tệ nào đó. Chẳng hạn, nếu lạm phát là 5% một năm thì sức mua của 1 triệu đồng sau một năm chỉ còn là 950 nghìn đồng (vì đã giảm mất 5% của 1 triệu đồng, tức là 50000 đồng). Nói chung, nếu tỉ lệ lạm phát trung bình là $r\%$ một năm thì tổng số tiền P ban đầu, sau n năm số tiền đó chỉ còn giá trị là

$$A = P \cdot \left(1 - \frac{r}{100} \right)^n.$$

a) Nếu tỉ lệ lạm phát là 8% một năm thì sức mua của 100 triệu đồng sau hai năm sẽ còn lại bao nhiêu?

b) Nếu sức mua của 100 triệu đồng sau hai năm chỉ còn là 90 triệu đồng thì tỉ lệ lạm phát trung bình của

hai năm đó là bao nhiêu?

c) Nếu tỉ lệ lạm phát là 5% một năm thì sau bao nhiêu năm sức mua của số tiền ban đầu chỉ còn lại một nửa?

Lời giải

a) Theo công thức $A = P \cdot \left(1 - \frac{r}{100}\right)^n$, ta có: $A = \left(1 - \frac{8}{100}\right)^2 \approx 73,6$ triệu đồng

Vậy sức mua của 100 triệu đồng sau hai năm với tỉ lệ lạm phát là 8% một năm chỉ còn lại khoảng 73.6 triệu đồng.

b) Thay $P = 100$ triệu đồng, $A = 90$ triệu đồng, $n = 2$ vào phương trình ta có:

$$90 = 100 \cdot \left(1 - \frac{r}{100}\right)^2 = 5,13\%$$

Vậy tỉ lệ lạm phát trung bình của hai năm đó là khoảng 5.13 %.

c) Thay $P = 1$ và $A = \frac{1}{2}$ vào phương trình ta có: $\frac{1}{2} = \left(1 - \frac{r}{100}\right)^n$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = n \ln\left(1 - \frac{r}{100}\right)$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln\left(1 - \frac{r}{100}\right)}$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln\left(1 - \frac{5}{100}\right)} \approx 14,21$$

Vậy sau khoảng 14 năm và 3 tháng, sức mua của số tiền ban đầu sẽ chỉ còn lại một nửa nếu tỉ lệ lạm phát là 5% một năm.

Bài 6.39. Giả sử quá trình nuôi cấy vi khuẩn tuân theo quy luật tăng trưởng tự do. Khi đó, nếu gọi N_0 là số lượng vi khuẩn ban đầu và $N(t)$ là số lượng vi khuẩn sau t giờ thì ta có: $N(t) = N_0 e^{rt}$

trong đó r là tỉ lệ tăng trưởng vi khuẩn mỗi giờ.

Giả sử ban đầu có 500 con vi khuẩn và sau 1 giờ tăng lên 800 con. Hỏi:

a) Sau 5 giờ thì số lượng vi khuẩn là khoảng bao nhiêu con?

b) Sau bao lâu thì số lượng vi khuẩn ban đầu sẽ tăng lên gấp đôi?

Lời giải

a) Ta có công thức tính tỉ lệ tăng trưởng r như sau: $r = \frac{\ln \frac{N(t)}{N_0}}{t}$

Áp dụng vào giá trị ban đầu ta có: $r = 0,47\%$

Sử dụng công thức tính số lượng vi khuẩn sau t giờ ta được: $N(t) = N_0 e^{rt} = 500 e^{0,47t}$

Vậy sau 5 giờ thì số lượng vi khuẩn khoảng là: $N(5) = 500 e^{0,47 \times 5} \approx 3,643$ con

b) Áp dụng công thức tính số lượng vi khuẩn sau t giờ, ta được: $N(t) = N_0 e^{rt} = N_0 \cdot e^{rt} = 2 = N_0 \cdot e^{rt} \Rightarrow rt = \ln 2$

Do đó, thời gian cần tìm là: $t = \frac{\ln 2}{r} = \frac{\ln 2}{0,47} \approx 1,47$

Vậy số lượng vi khuẩn ban đầu sẽ tăng lên gấp đôi sau khoảng 1.47 giờ.

Bài 6.40. Vào năm 1938, nhà vật lý Frank Benford đã đưa ra một phương pháp để xác định xem một bộ số đã được chọn ngẫu nhiên hay đã được chọn theo cách thủ công. Nếu bộ số này không được chọn ngẫu nhiên thì công thức Benford sau sẽ được dùng ước tính xác suất P để chữ số d là chữ số đầu tiên của bộ số đó: $P = \log \frac{d+1}{d}$. (Theo F. Benford, *The Law of Anomalous Numbers*, Proc. Am. Philos. Soc. 78 (1938), 551 -572).

Chẳng hạn, xác suất để chữ số đầu tiên là 9 bằng khoảng 4,6% (thay $d = 9$ trong công thức Benford để tính P).

- Viết công thức tìm chữ số d nếu cho trước xác suất P .
- Tìm chữ số có xác suất bằng 9,7% được chọn.
- Tính xác suất để chữ số đầu tiên là 1.

Lời giải

a) Ta có công thức tính xác suất P như sau:

$$P = \log \frac{d+1}{d}$$

$$P = \log \frac{d+1}{d} \Rightarrow \frac{d+1}{d} = e^P \Rightarrow d+1 = de^P \Rightarrow d = \frac{1}{e^P - 1}$$

b) Để tìm chữ số có xác suất bằng 9,7%, ta giải phương trình sau theo d :

$$\log \frac{d+1}{d} = \log \frac{10}{9,7} \Rightarrow \frac{d+1}{d} = \frac{10}{9,7} \Rightarrow d+1 = \frac{1}{0,97} = 1,03$$

Vậy chữ số có xác suất bằng 9,7% là 1.

c) Để tính xác suất để chữ số đầu tiên là 1, ta thay $d = 1$ vào công thức tính P : $P = \log \frac{1+1}{1} = \log 2 \approx 0,3$

PHẦN 2: SÁCH BÀI TẬP

A - TRẮC NGHIỆM

6.41. Cho a là số dương. Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[6]{a}}$, ta được kết quả là

- A.** a . **B.** a^2 . **C.** $a^{\frac{1}{3}}$. **D.** $a^{\frac{1}{2}}$.

Lời giải

Chọn A

6.42. Cho a là số dương khác 1. Giá trị của $\log_a a^2$ là

- A.** $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $-\frac{2}{3}$. **D.** $-\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

6.43. Giá trị của biểu thức $4^{\log_{\sqrt{2}} 3}$ là

A. $\frac{1}{3}$.

B. 3.

C. 81.

D. 9.

Lời giải

Chọn C

6.44. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến?

A. $y = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$.

B. $y = \left(\frac{e}{3}\right)^x$.

C. $y = \left(\frac{\pi}{2}\right)^x$.

D. $y = \left(\frac{3}{\pi}\right)^x$.

Lời giải

Chọn C

6.45. Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến?

A. $y = \log_{\sqrt{2}} x$.

B. $y = \log x$.

C. $y = \ln x$.

D. $y = \log_{\frac{e}{3}} x$.

Lời giải

Chọn D

6.46. Với giá trị nào của x thì đồ thị hàm số $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ nằm phía trên đường thẳng $y = 1$?

A. $x > 0$.

B. $x < 0$.

C. $x > 1$.

D. $x < 1$.

Lời giải

Chọn B

6.47. Với giá trị nào của x thì đồ thị hàm số $y = \log_{0,5} x$ nằm phía trên trục hoành?

A. $x > 0,5$.

B. $x < 0,5$.

C. $x > 1$.

D. $x < 1$.

Lời giải

Chọn D

6.48. Tập nghiệm của phương trình $8^{2x-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ là

A. $\left\{\frac{3}{8}\right\}$.

B. $\left\{\frac{2}{5}\right\}$.

C. $\left\{\frac{3}{4}\right\}$.

D. $\left\{\frac{2}{3}\right\}$.

Lời giải

Chọn A

6.49. Tập nghiệm của phương trình $\log_2 [x(x-1)] = 1$ là

A. $\{-1\}$.

B. $\{-2\}$.

C. $\{-1; 2\}$.

D. $\left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Lời giải

Chọn C

6.50. Nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \left(\frac{1}{4}\right)^2$ là

A. $x \geq 2$.

B. $x \leq 2$.

C. $x \geq 4$.

D. $x \leq 4$.

Lời giải

Chọn D

6.51. Nghiệm của bất phương trình $\log_2(x+1) > 1$ là

- A. $x > 4$. B. $-1 < x < 4$.
C. $x > -\frac{1}{2}$. D. $x > \frac{e}{2} - 1$.

Lời giải

Chọn: A

6.52. Hàm số $y = \ln(x^2 - 2mx + 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ khi

- A. $m = 1$. B. $m > 1$ hoặc $m < -1$.
C. $m < 1$. D. $-1 < m < 1$.

Lời giải

Chọn D

B - TỰ LUẬN

6.53. Tính giá trị của biểu thức: $A = 2\log_4 8 - 3\log_{\frac{1}{8}} 16 + 4^{\log_2 3}$.

Lời giải

Ta tính lần lượt như sau: $\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{3}{2}$; $\log_{\frac{1}{8}} 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 \frac{1}{8}} = \frac{4}{\log_2 2^{-3}} = -\frac{4}{3}$; $4^{\log_2 3} = (2^{\log_2 3})^2 = 3^2 = 9$

Thay các kết quả vào A , ta được: $A = 2 \cdot \frac{3}{2} - 3 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) + 9 = 16$. Vậy $A = 16$.

6.54. Giải các phương trình sau:

a) $32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0,25 \cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}$; b) $\log_2 x + \log_2(x-1) = 1$.

Lời giải

a) Điều kiện: $x \neq 3, x \neq 7$. Khi đó, ta có:

$$32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0,25 \cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}} \Leftrightarrow 2^{\frac{5(x+5)}{x-7}} = 2^{-2} \cdot 2^{\frac{7(x+17)}{x-3}} \Leftrightarrow 2^{\frac{5(x+5)}{x-7}} = 2^{-2 + \frac{7(x+17)}{x-3}} \Leftrightarrow \frac{5(x+5)}{x-7} = -2 + \frac{7(x+17)}{x-3}$$

$$\Leftrightarrow 5(x+5)(x-3) = -2(x-7)(x-3) + 7(x+17)(x-7) \Leftrightarrow x = 10$$

Kết hợp với điều kiện, ta được nghiệm của phương trình đã cho là $x = 10$.

b) Điều kiện: $x > 1$. Khi đó, ta có:

$$\log_2 x + \log_2(x-1) = 1 \Leftrightarrow \log_2 x(x-1) = 1 \Leftrightarrow x(x-1) = 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0.$$

Giải phương trình trên ta được hai nghiệm $x_1 = -1, x_2 = 2$. Chỉ có nghiệm $x = 2$ thỏa mãn điều kiện. Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 2$.

6.55. Giải các bất phương trình sau:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1} \geq 4 \cdot 2^x$ b) $2\log(x-1) > \log(3-x) + 1$.

Lời giải

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1} \geq 4 \cdot 2^x \Leftrightarrow 2^{1-3x} \geq 2^{2+x} \Leftrightarrow 1-3x \geq 2+x \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{4}.$

b) Điều kiện: $1 < x < 3$. Khi đó, ta có:

$$2\log(x-1) > \log(3-x)+1 \Leftrightarrow \log(x-1)^2 > \log 10(3-x) \Leftrightarrow (x-1)^2 > 10(3-x) \Leftrightarrow x^2 + 8x - 29 > 0$$

Giải bất phương trình này ta được $x > -4+3\sqrt{5}$ hoặc $x < -4-3\sqrt{5}$.

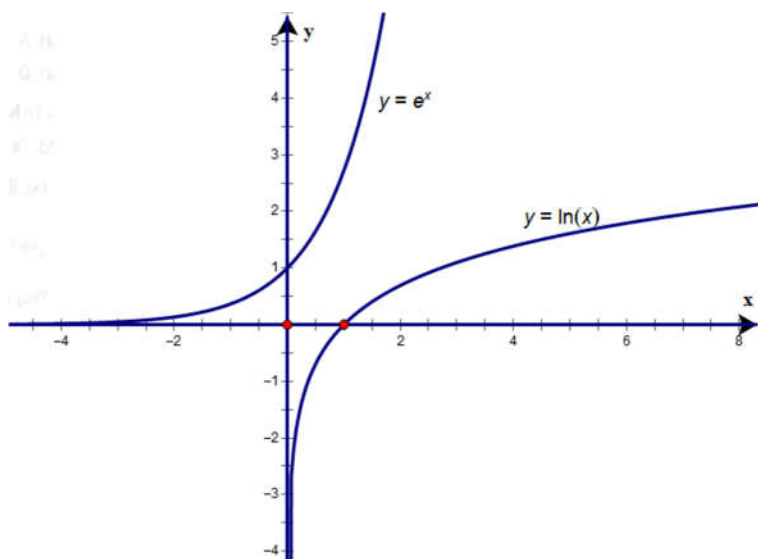
Kết hợp với điều kiện, ta được $-4+3\sqrt{5} < x < 3$.

6.56. a) Vẽ đồ thị của hai hàm số $y = e^x$ và $y = \ln x$ trên cùng một hệ trục tọa độ.

b) Chứng minh rằng hai đồ thị trên đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$, tức là nếu điểm M nằm trên một đồ thị thì điểm M' đối xứng với M qua đường thẳng $y = x$ sẽ nằm trên đồ thị còn lại.

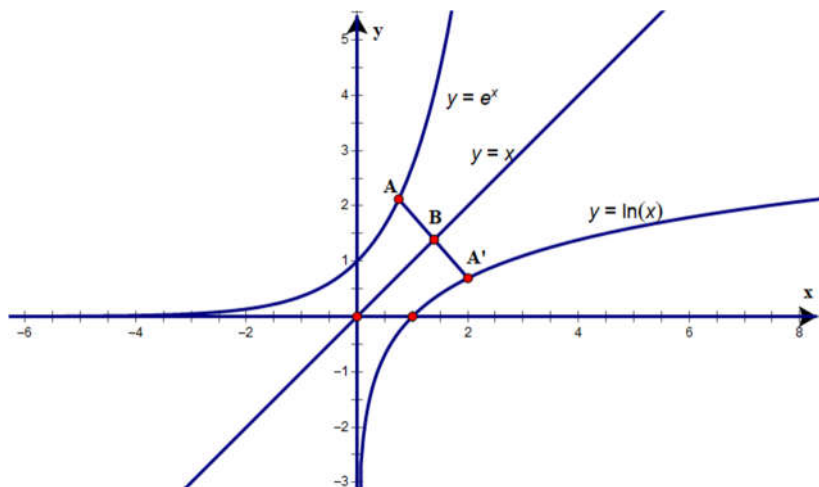
Lời giải

a) Đồ thị của hai hàm số $y = e^x$ và $y = \ln x$ trên cùng một hệ trục tọa độ như hình sau:



b) Xét điểm $A(x_0, e^{x_0})$ nằm trên đồ thị hàm số $y = e^x$.

Viết phương trình đường thẳng đi qua A vuông góc với đường thẳng $y = x$: $d: y = -x + x_0 + e^{x_0}$.



Toạ độ giao điểm của đường thẳng d và đường thẳng $y = x$ là điểm $B\left(\frac{x_0 + e^{x_0}}{2}; \frac{x_0 + e^{x_0}}{2}\right)$.

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua đường thẳng $y = x$. Ta tìm được $A'(e^{x_0}; x_0)$. Khi đó A' thuộc đồ thị hàm số $y = \ln x$.

Tương tự, nếu điểm $B(x_0; \ln x_0)$ nằm trên đồ thị hàm số $y = \ln x$ thì ta cũng có thể tìm tọa độ của điểm B' đối xứng với B qua đường thẳng $y = x$ và chứng minh B' thuộc đồ thị hàm số $y = e^x$.

Vậy hai đồ thị đã cho đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x$.

Chú ý. Tổng quát, có thể chứng minh rằng đồ thị của hai hàm số $y = a^x$ và $y = \log_a x (0 < a \neq 1)$ đối xứng với nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất (tức là đường thẳng $y = x$).

6.57. Cho hàm số $f(x) = \log_3(2x+1) - 2$.

- Tìm tập xác định của hàm số.
- Tính $f(40)$. Xác định điểm tương ứng trên đồ thị hàm số.
- Tìm x sao cho $f(x) = 3$. Xác định điểm tương ứng trên đồ thị hàm số.
- Tìm giao điểm của đồ thị với trục hoành.

Lời giải

$$f(x) = \log_3(2x+1) - 2.$$

a) Tập xác định của hàm số là $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

b) $f(40) = \log_3(2 \cdot 40 + 1) - 2 = 2$.

Điểm tương ứng trên đồ thị hàm số là $(40; 2)$.

c) $f(x) = 3 \Leftrightarrow \log_3(2x+1) - 2 = 3 \Leftrightarrow \log_3(2x+1) = 5 \Leftrightarrow 2x+1 = 3^5 \Leftrightarrow x = 121$.

Điểm tương ứng trên đồ thị hàm số là $(121; 3)$.

d) Gọi $A(x_0; 0)$ là giao điểm của đồ thị hàm số $f(x) = \log_3(2x+1) - 2$ với trục hoành.

Khi đó $\log_3(2x_0+1) - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x_0+1 = 9 \Leftrightarrow x_0 = 4$.

Vậy giao điểm cần tìm là $(4; 0)$.

6.58. Nếu tỉ lệ lạm phát trung bình hằng năm là 4% thì chi phí C cho việc mua một loại hàng hoá hoặc sử dụng một dịch vụ nào đó sẽ được mô hình hoá bằng công thức: $C(t) = P(1+0,04)^t$, trong đó t là thời gian (tính bằng năm) kể từ thời điểm hiện tại và P là chi phí hiện tại cho hàng hoá hoặc dịch vụ đó.

Giả sử hiện tại chi phí cho mỗi lần thay dầu ô tô là 800 nghìn đồng. Hãy ước tính chi phí cho mỗi lần thay dầu ô tô sau 5 năm nữa (kết quả tính theo đơn vị nghìn đồng và làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

Chi phí cho mỗi lần thay dầu ô tô sau 5 năm nữa là: $C(5) = 800(1+0,04)^5 \approx 973$ (nghìn đồng)

6.59. Công thức tính khối lượng còn lại của một chất phóng xạ từ khối lượng ban đầu m_0 được cho bán rã của chất đó. Biết rằng chất phóng xạ polonium-210 có chu kì bán rã là 138 ngày. Từ khối lượng polonium-210 ban đầu 100 g, sau bao lâu khối lượng còn lại là:

- 50 g ?
- 10 g ?

(Kết quả tính theo ngày và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

a) Giải phương trình $100\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{138}} = 50$, ta được $t = 138$.

Vậy sau 138 ngày thì khối lượng polonium-210 còn 50 g.

b) Giải phương trình $100\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{138}} = 10$, ta được $t \approx 458,43$. Vậy sau khoảng 458,43 ngày thì khối lượng polonium-210 còn 10 g.

6.60. Cent âm nhạc là một đơn vị trong thang lôgarit của cao độ hoặc khoảng tương đối. Một quãng tám bằng 1200 cent. Công thức xác định chênh lệch khoảng thời gian (tính bằng cent) giữa hai nốt nhạc có tần số a và b là $n = 1200 \cdot \log_2 \frac{a}{b}$. (Theo Algebra 2, NXB MacGraw-Hill, 2008)

a) Tìm khoảng thời gian tính bằng cent khi tần số thay đổi từ 443 Hz về 415 Hz.

b) Giả sử khoảng thời gian là 55 cent và tần số đầu là 225 Hz, hãy tìm tần số cuối cùng.

Lời giải

a) Khoảng thời gian giữa hai nốt nhạc khi tần số thay đổi từ 443 Hz về 415 Hz là $1200 \cdot \log_2 \frac{443}{415} \approx 113$ (cent).

b) Giải phương trình $55 = 1200 \cdot \log_2 \frac{225}{b}$, ta được $b \approx 218$.

Vậy tần số cuối cùng cần tìm là 218 Hz.

CHƯƠNG 7. QUAN HỆ VUÔNG GÓC

BÀI 22: HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Góc giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng a và b trong không gian, lấy điểm O tùy ý. Qua O kẻ $a' // a$ (hoặc trùng với a) và kẻ $b' // b$ (hoặc trùng với b). Khi đó, góc giữa đường thẳng a và đường thẳng b bằng góc giữa đường thẳng a' và đường thẳng b' .

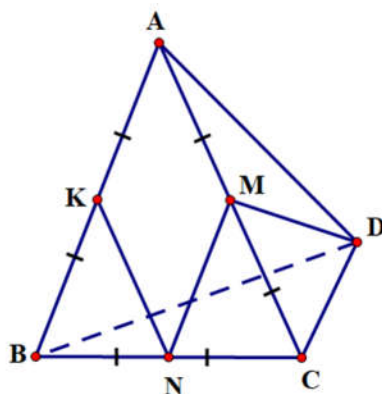
2. Hai đường thẳng vuông góc

Hai đường thẳng a và b được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa a và b bằng 90° . Kí hiệu: $a \perp b$.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, BC và AB . Tính góc giữa đường thẳng MN và BD ; góc giữa đường thẳng KN và MD .

Lời giải

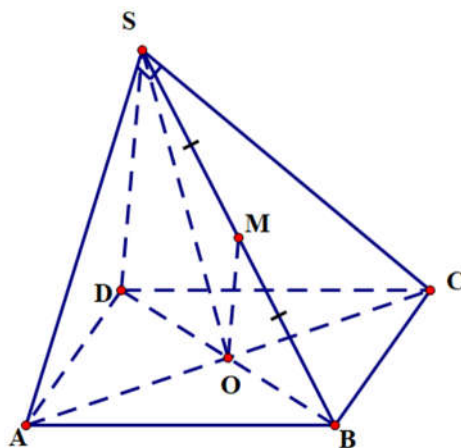


Vì $MN // AB$ nên góc giữa hai đường thẳng MN và BD bằng góc giữa hai đường thẳng AB và BD , mà tam giác ABD là tam giác đều nên góc giữa hai đường thẳng AB và BD bằng 60° . Do đó $(MN, BD) = (AB, BD) = 60^\circ$.

Vì $NK // AC$ nên góc giữa hai đường thẳng NK và MD bằng góc giữa hai đường thẳng AC và MD , mà tam giác ACD là tam giác đều nên góc giữa hai đường thẳng AC và MD bằng 90° . Do đó $(NK, MD) = (AC, MD) = 90^\circ$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O và tam giác SAC vuông tại S . Gọi M là trung điểm của cạnh SB . Chứng minh rằng đường thẳng OM vuông góc với đường thẳng SB .

Lời giải

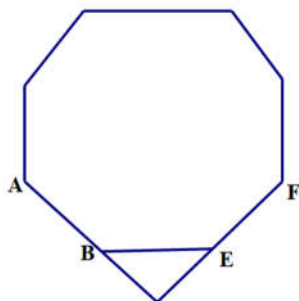


Ta có tam giác SAC vuông tại S và O là trung điểm của AC nên $SO = \frac{1}{2}AC$. Ta lại có $ABCD$ là hình chữ nhật nên $AC = BD$, suy ra $SO = \frac{1}{2}BD$, mà O là trung điểm của BD nên tam giác SBD vuông tại S hay $SD \perp SB$. Vì $OM \parallel SD$ và $SD \perp SB$ nên $OM \perp SB$.

Ví dụ 3. Tháp Phước Duyên ở Chùa Thiên Mụ (Huế) cao bảy tầng, sàn của mỗi tầng đều là hình bát giác đều. Hãy tính góc giữa hai cạnh AB và CD được thể hiện trên hình sau:



Lời giải

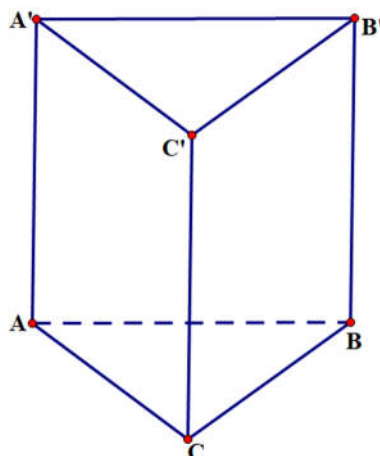


Ta có: $CD \parallel EF$ nên $(AB, CD) = (AB, EF)$, với AB , EF là hai cạnh của một hình bát giác đều. Góc ngoài của một bát giác đều bằng $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$ nên $(AB, EF) = 90^\circ$, suy ra $(AB, CD) = 90^\circ$.

C. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 7.1. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có các đáy là các tam giác đều. Tính góc $(AB, B'C')$.

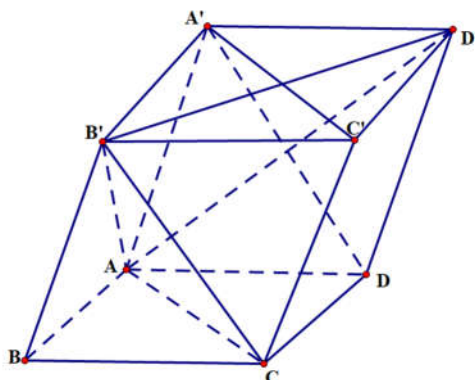
Lời giải



Vì $B'C' \parallel BC$ nên $(AB, B'C') = (AB, BC) = \widehat{ABC} = 60^\circ$ (do tam giác ABC đều)

Bài 7.2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bằng nhau. Chứng minh rằng tứ diện $ACB'D'$ có các cặp cạnh đối diện vuông góc với nhau.

Lời giải



+) Vì hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bằng nhau nên tứ giác $A'B'C'D'$; $ADD'A'$; $C'D'D$ là hình thoi.

+) $AB' \parallel C'D$ và $C'D \perp CD'$ nên $AB' \perp CD'$

+) $AC \parallel A'C'$ và $A'C' \perp B'D'$ nên $AC \perp B'D'$

+) $B'C \parallel A'D$ và $A'D \perp AD'$ nên $B'C \perp AD'$

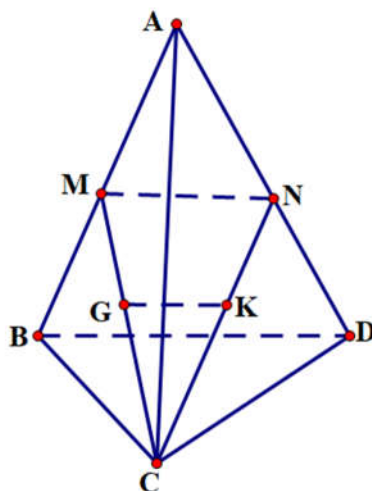
Vậy ta đã chứng minh được rằng tứ diện $ACB'D'$ có các cặp cạnh đối diện vuông góc với nhau.

Bài 7.3. Cho tứ diện $ABCD$ có $\widehat{CBD} = 90^\circ$.

a) Gọi M, N tương ứng là trung điểm của AB, AD . Chứng minh rằng MN vuông góc với BC .

b) Gọi G, K tương ứng là trọng tâm của các tam giác ABC, ACD . Chứng minh rằng GK vuông góc với BC .

Lời giải



a) Xét tam giác ABD có

M, N tương ứng là trung điểm của AB, AD

$\Rightarrow$ MN là đường trung bình của tam giác ABD

$\Rightarrow MN \parallel BD$ mà $BD \perp BC$ ($\widehat{CBD} = 90^\circ$)

$\Rightarrow MN \perp BC$.

b) Vì G, K tương ứng là trọng tâm của các tam giác ABC, ACD nên $\frac{CG}{CM} = \frac{CK}{CN} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow GK \parallel MN$ (Định lý Talet) mà $MN \perp BC$

$\Rightarrow GK \perp BC$.

Bài 7.4. Đối với nhà gỗ truyền thống, trong các cấu kiện hoành, quá giang, xà cái, rui, cột tương ứng được đánh số 1, 2, 3, 4, 5 như trong Hình 7.8, những cặp cấu kiện nào vuông góc với nhau?



Hình 7.8

Lời giải

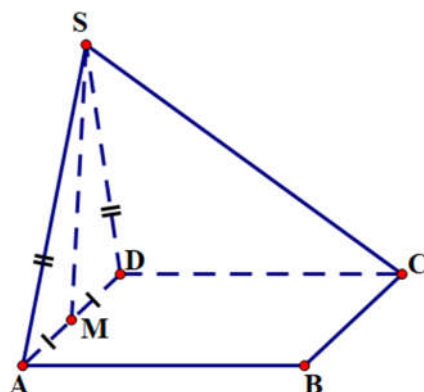
Trong nhà gỗ truyền thống, các cấu kiện thường được lắp ráp với nhau bằng các mối ghép chéo, do đó các cặp cấu kiện vuông góc với nhau là:

- Hoành (1) và quá giang (2).
- Xà cái (3) và cột (5).
- Quá giang (2) và rui (4).

D - BÀI TẬP

7.1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, tam giác SAD là tam giác đều và M là trung điểm của cạnh AD . Tính góc giữa hai đường thẳng BC và SA ; BC và SM .

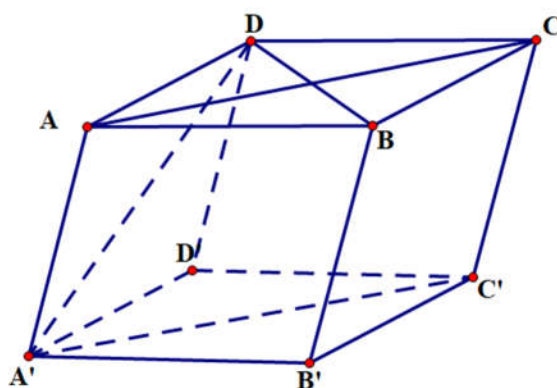
Lời giải



Vì $BC \parallel AD$ nên $(BC, SA) = (AD, SA) = \widehat{SAD} = 60^\circ$ và $(BC, SM) = (AD, SM) = 90^\circ$

7.2. Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng nhau và góc $A'AD$ bằng 120° . Tính góc giữa các cặp đường thẳng sau: $A'C'$ và BD ; AD và BB' ; $A'D$ và BB' .

Lời giải



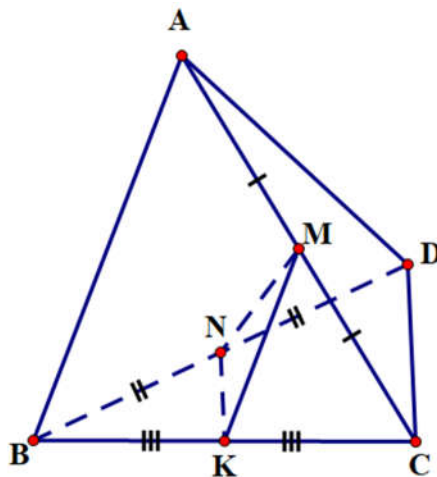
Vì $ABCD$ là hình thoi và $A'C' \parallel AC$ nên $(A'C', BD) = (AC, BD) = 90^\circ$.

Vì $BB' \parallel AA'$ nên $(AD, BB') = (AD, AA') = 180^\circ - \widehat{A'AD} = 60^\circ$ và $(A'D, BB') = (A'D, AA') = \widehat{AA'D} = 30^\circ$

7.3. Cho tứ diện $ABCD$, gọi M và N lần lượt là trung điểm của AC và BD . Biết

$MN = a\sqrt{3}$; $AB = 2\sqrt{2}a$ và $CD = 2a$. Chứng minh rằng đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng CD .

Lời giải



Lấy K là trung điểm của cạnh BC , ta có: NK và MK lần lượt là đường trung bình của tam giác BCD và tam giác ABC nên $NK = a, MK = a\sqrt{2}$.

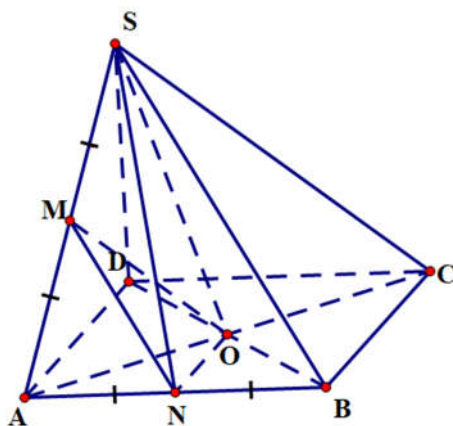
Do đó, $MN^2 = 3a^2 = NK^2 + MK^2$ suy ra tam giác MNK vuông tại K , hay $MK \perp NK$, mà $MK \parallel AB$ và $NK \parallel CD$ nên $(AB, CD) = (MK, NK) = 90^\circ$, hay $AB \perp CD$.

7.4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O và tất cả các cạnh của hình chóp đều bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh SA, AB .

a) Tính góc giữa các cặp đường thẳng sau: MN và SD ; MO và SB .

b) Tính tang của góc giữa hai đường thẳng SN và BC .

Lời giải

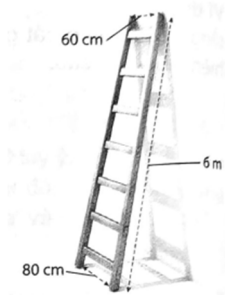


a) Ta có: $BD^2 = SB^2 + SD^2 = 2a^2$ nên $\triangle SBD$ vuông tại S , mà $MN \parallel SB$, suy ra $(MN, SD) = (SB, SD) = 90^\circ$.

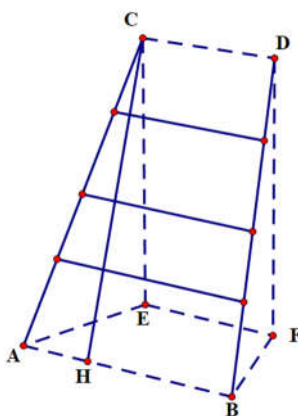
Với O là giao điểm của AC và BD thì $MO \parallel SC$. Khi đó $(MO, SB) = (SC, SB) = \widehat{BSC} = 60^\circ$.

b) Vì $ON \parallel BC$ nên $(SN, BC) = (SN, ON) = \widehat{SNO}$. Ta có $SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $ON = \frac{a}{2}$ và tam giác SNO vuông tại O nên $\tan \widehat{SNO} = \frac{SO}{ON} = \sqrt{2}$. Vậy $\tan(SN, BC) = \sqrt{2}$

7.5. Một chiếc thang có dạng hình thang cân cao 6 m, hai chân thang cách nhau 80 cm, hai ngọn thang cách nhau 60 cm. Thang được dựa vào bờ tường như hình bên. Tính góc tạo giữa đường thẳng chân tường và cạnh cột thang (tính gần đúng theo đơn vị độ, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).



Lời giải



Gọi A, B là hai điểm tại hai vị trí chân thang và C, D là hai điểm tại hai vị trí ngọn thang, EF là đường chân tường. Ta có $EF \parallel AB$ nên $(EF, AC) = (AB, AC) = \widehat{BAC}$.

Kẻ CH vuông góc với AB tại H , khi đó $AH = \frac{AB - CD}{2} = 10 \text{ (cm)} = 0,1 \text{ (m)}$.

Tam giác ACH vuông tại H nên $\cos \widehat{CAH} = \frac{AH}{AC} = \frac{0,1}{6} = \frac{1}{60}$, suy ra $\widehat{CAH} \approx 89,05^\circ$.

Vậy góc tạo giữa đường thẳng chân tường và cạnh cột thang bằng khoảng $89,05^\circ$.

BÀI 23: ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẪNG

A - KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Đường thẳng Δ được gọi là vuông góc với mặt phẳng (P) nếu Δ vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong (P) . Kí hiệu: $\Delta \perp (P)$.

2. Điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Nếu một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau thuộc cùng một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng đó.

3. Tính chất

□ Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) và mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) thì a vuông góc với (Q) .

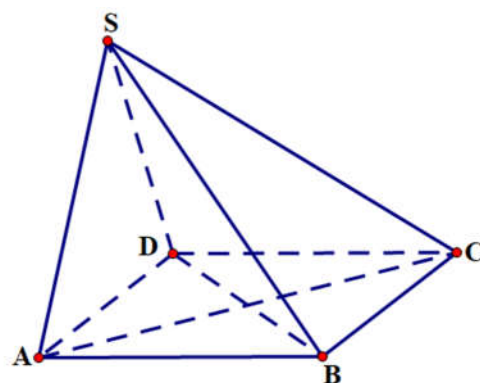
□ Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) mà đường thẳng a song song với đường thẳng b thì b vuông góc với (P) .

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng:

a) $BC \perp (SAB)$; b) $BD \perp (SAC)$.

Lời giải



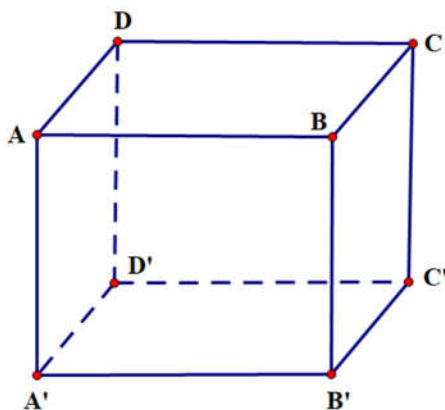
a) Vì $SA \perp (ABCD)$ và $BC \subset (ABCD)$ nên $SA \perp BC$, mà $BC \perp AB$ và đường thẳng SA cắt đường thẳng AB nên $BC \perp (SAB)$.

b) Vì $SA \perp (ABCD)$ và $BD \subset (ABCD)$ nên $SA \perp BD$, mà $BD \perp AC$ và đường thẳng SA cắt đường thẳng AC nên $BD \perp (SAC)$.

Ví dụ 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA' \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng:

a) $AA' \perp (A'B'C'D')$; b) $BB' \perp (ABCD)$.

Lời giải

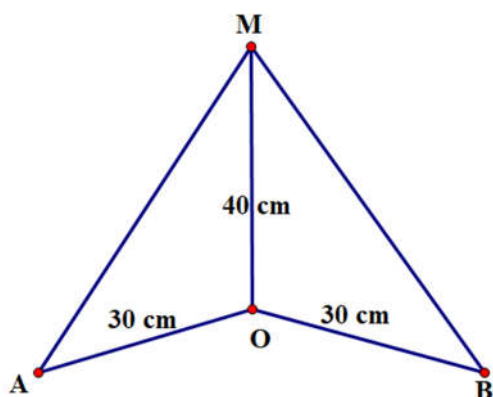


a) Vì $AA' \perp (ABCD)$ và $(ABCD) \parallel (A'B'C'D')$ nên $AA' \perp (A'B'C'D')$.

b) Vì $AA' \perp (ABCD)$ và $AA' \parallel BB'$ nên $BB' \perp (ABCD)$.

Ví dụ 3. Một chiếc cột được dựng trên nền sân phẳng. Gọi O là điểm đặt chân cột trên mặt sân và M là điểm trên cột cách chân cột 40 cm. Trên mặt sân, người ta lấy hai điểm A và B đều cách O là 30 cm (A, B, O không thẳng hàng). Người ta đo độ dài MA và MB đều bằng 50 cm. Hỏi theo các số liệu trên, chiếc cột có vuông góc với mặt sân hay không?

Lời giải



Ta có: $50^2 = 40^2 + 30^2$ nên $MA^2 = MO^2 + OA^2$ và $MB^2 = MO^2 + OB^2$. Do đó, tam giác MOA và tam giác MOB vuông tại O , hay $MO \perp OA$, $MO \perp OB$. Suy ra $MO \perp (OAB)$. Vậy chiếc cột vuông góc với mặt sân.

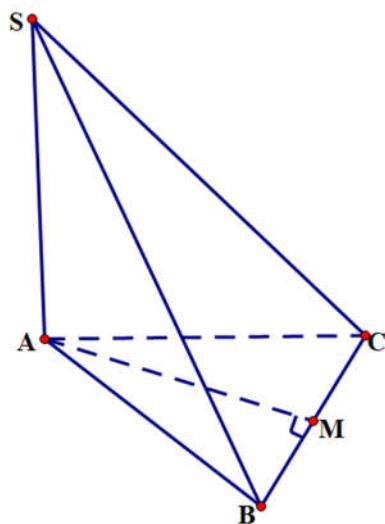
C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 7.5. Cho hình chóp $S \cdot ABC$ có đáy là tam giác cân tại A và $SA \perp (ABC)$. Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng:

a) $BC \perp (SAM)$;

b) Tam giác SBC cân tại S .

Lời giải

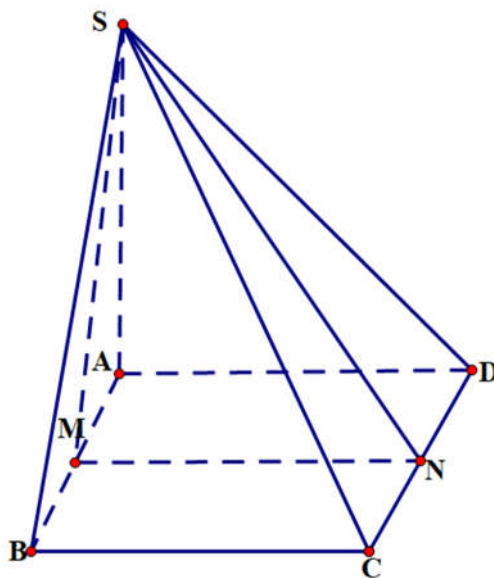


a) Ta có $SA \perp (ABC)$ và AM là đường trung bình trong tam giác đều ABC , nên $AM \perp BC$ và AM là đường cao của tam giác SBC . Khi đó, ta có $BC \perp (SAM)$ vì $BC \perp AM$.

b) Ta có $\widehat{SBC} = 180^\circ - \widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{BAC} = \widehat{SAC}$. Mặt khác, ta có $SA = SC$ vì S là đỉnh của hình chóp $S \cdot ABC$ và AC là đường bờ của đáy ABC , vì ABC là tam giác cân tại A nên AC là đường trung trực của, suy ra $SC = SA$. Vậy SBC là tam giác cân tại S .

Bài 7.6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng các mặt bên của hình chóp $S.ABCD$ là các tam giác vuông.

Lời giải



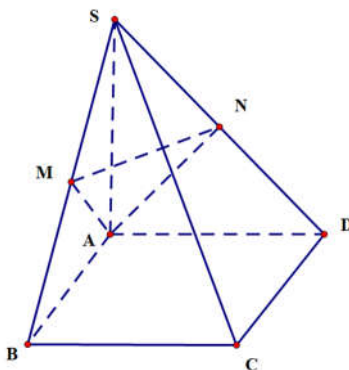
Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Khi đó, ta có $MN \parallel AD$ và $MN \parallel BC$ vì $ABCD$ là hình chữ nhật.

Do đó, SM và SN là hai đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, và do đó chúng cũng vuông góc với tất cả các đường thẳng nằm trong mặt phẳng đó, bao gồm các cạnh AB, BC, CD và AD .

Vì $SM \perp AB$ và $SN \perp CD$, nên $\triangle SMB$ và $\triangle SND$ là hai tam giác vuông. Tương tự, $\triangle SMC$ và $\triangle SNA$ cũng là hai tam giác vuông. Do đó, các mặt bên của hình chóp $S.ABCD$ đều là các tam giác vuông.

Bài 7.7. Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M, N tương ứng là hình chiếu của A trên SB, SD . Chứng minh rằng: $AM \perp (SBC), AN \perp (SCD), SC \perp (AMN)$.

Lời giải



$$\left. \begin{array}{l} +) BC \perp AB \text{ (hcn } ABCD) \\ BC \perp SA \text{ (} SA \perp (ABCD) \text{)} \\ AB \cap SA = \{A\} \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAB); AM \subset (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$$

$$\left. \begin{array}{l} +) CD \perp AD \text{ (hcn } ABCD) \\ CD \perp SA \text{ (} SA \perp (ABCD) \text{)} \\ AD \cap SA = \{A\} \end{array} \right\} \Rightarrow CD \perp (SAD); AN \subset (SAD) \Rightarrow CD \perp AN$$

$$\left. \begin{array}{l} +) AM \perp SB \\ AM \perp BC \\ SB \cap BC = \{B\} \end{array} \right\} \Rightarrow AM \perp (SBC); SC \subset (SBC) \Rightarrow SC \perp AM$$

$$\left. \begin{array}{l} +) AN \perp SD \\ AN \perp CD \\ SD \cap CD = \{D\} \end{array} \right\} \Rightarrow AN \perp (SCD); SC \subset (SCD) \Rightarrow SC \perp AN$$

$$\left. \begin{array}{l} +) AM \perp SC \\ AN \perp SC \\ AM \cap AN = \{A\} \end{array} \right\} \Rightarrow SC \perp (AMN)$$

Bài 7.8. Bạn Vinh thả quả dọi chìm vào thùng nước. Hỏi khi dây dọi căng và mặt nước yên lặng thì đường thẳng chứa dây dọi có vuông góc với mặt phẳng chứa mặt nước trong thùng hay không?

Lời giải

Khi dây dọi căng và mặt nước yên lặng, đường thẳng chứa dây dọi vuông góc với mặt phẳng chứa mặt nước trong thùng.

Bài 7.9. Một cột bóng rổ được dựng trên một sân phẳng. Bạn Hùng đo khoảng cách từ một điểm trên sân, cách chân cột 1 m đến một điểm trên cột, cách chân cột 1 m được kết quả là 1,5 m (H.7.27). Nếu phép đo của Hùng là chính xác thì cột có vuông góc với sân hay không? Có thể kết luận rằng cột không có phương thẳng đứng hay không?

Lời giải



Hình 7.27

Nếu phép đo của Hùng là chính xác ta có: $1^2 + 1^2 \neq 1,5^2$

Do đó theo định lý Pytago thì cột có không vuông góc với sân.

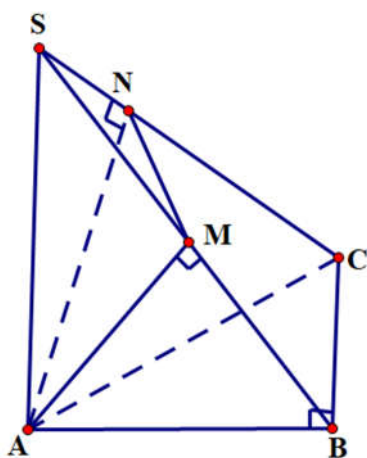
Do đó cột không có phương thẳng đứng.

D - BÀI TẬP

7.6. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và đáy là tam giác ABC vuông tại B . Kẻ AM vuông góc với SB tại M và AN vuông góc với SC tại N . Chứng minh rằng:

a) $BC \perp (SAB)$; b) $AM \perp (SBC)$; c) $SC \perp (AMN)$.

Lời giải



a) Ta có: $BC \perp AB$ và $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp BC$, suy ra $BC \perp (SAB)$.

b) Vì $BC \perp (SAB)$ nên $BC \perp AM$, mà $AM \perp SB$, suy ra $AM \perp (SBC)$.

c) Vì $AM \perp (SBC)$ nên $AM \perp SC$, mà $AN \perp SC$, suy ra $SC \perp (AMN)$.

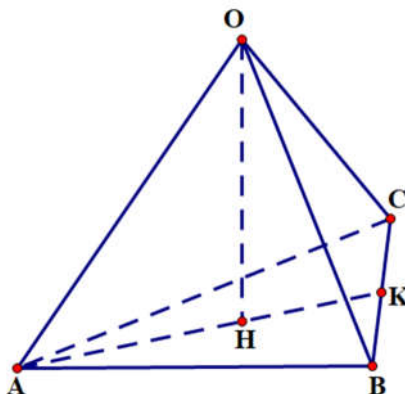
7.7. Cho tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ O đến mặt phẳng (ABC) . Chứng minh rằng:

a) $BC \perp (OAH)$;

b) H là trực tâm của tam giác ABC ;

c) $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$

Lời giải



a) Vì $OA \perp OB, OA \perp OC$ nên $OA \perp (OBC)$, suy ra $OA \perp BC$.

Vì $OH \perp (ABC)$ nên $OH \perp BC$, suy ra $BC \perp (OAH)$.

b) Vì $BC \perp (OAH)$ nên $BC \perp AH$. Tương tự, $CA \perp BH$, do đó H là trực tâm của tam giác ABC .

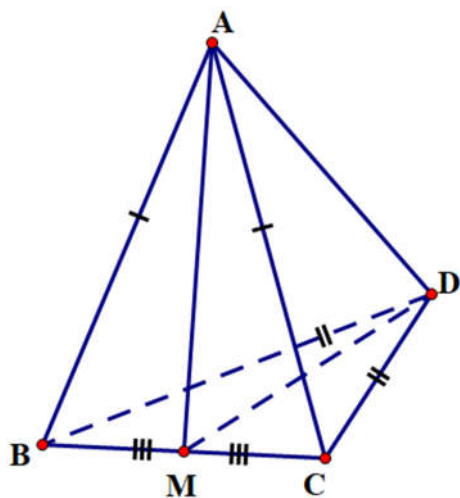
c) Gọi K là giao điểm của AH và BC , ta có: $OK \perp BC$ và $OA \perp OK$ nên OK là đường cao của tam giác vuông OBC và OH là đường cao của tam giác vuông OAK . Áp dụng hệ thức lượng trong các tam giác vuông OBC và OAK , ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OK^2} \text{ và } \frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$$

Từ đó suy ra: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$

7.8. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC$ và $DB = DC$. Chứng minh rằng $AD \perp BC$.

Lời giải

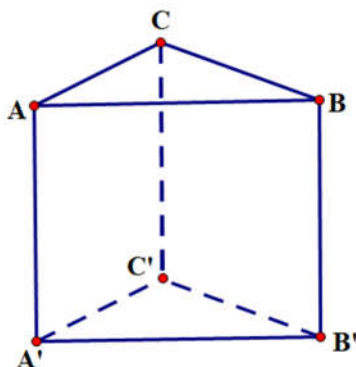


Gọi M là trung điểm của BC , ta có: $BC \perp AM, BC \perp MD$. Do đó $BC \perp (AMD)$, suy ra $BC \perp AD$.

7.9. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC \cdot A'B'C'$ có AA' vuông góc với mặt phẳng (ABC) và đáy là tam giác ABC vuông tại B . Chứng minh rằng:

a) $BB' \perp (A'B'C')$; b) $B'C' \perp (ABB'A')$.

Lời giải



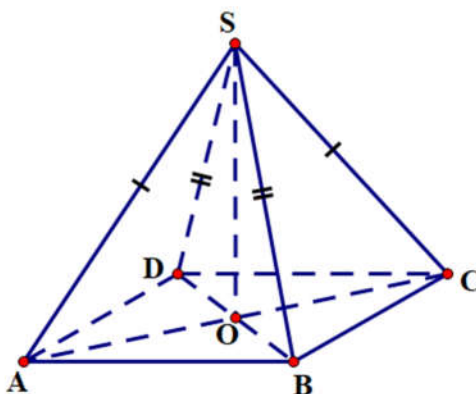
a) Vì $AA' \perp (ABC)$, $AA' \parallel BB'$ và $(ABC) \parallel (A'B'C')$ nên $BB' \perp (A'B'C')$.

b) Vì $BC \perp AB, BC \perp BB'$ nên $BC \perp (ABB'A')$, mà $BC \parallel B'C'$, suy ra $B'C' \perp (ABB'A')$.

7.10. Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O và $SA = SC$, $SB = SD$. Chứng minh rằng:

a) $SO \perp (ABCD)$; b) $AC \perp (SBD)$ và $BD \perp (SAC)$.

Lời giải



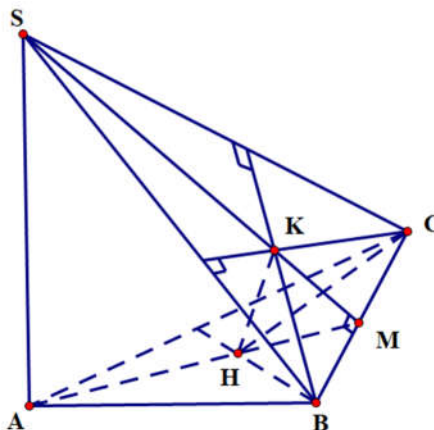
a) Vì O là giao điểm của AC và BD nên O là trung điểm của AC và BD , suy ra $SO \perp AC, SO \perp BD$. Do đó $SO \perp (ABCD)$.

b) Vì $AC \perp BD, AC \perp SO$ nên $AC \perp (SBD)$. Tương tự, ta được $BD \perp (SAC)$.

7.11. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC nhọn. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của tam giác ABC và SBC . Chứng minh rằng:

- a) $BC \perp (SAH)$ và các đường thẳng AH, BC, SK đồng quy;
b) $SB \perp (CHK)$ và $HK \perp (SBC)$.

Lời giải



- a) Vì $BC \perp SA, BC \perp AH$ nên $BC \perp (SAH)$. Gọi M là giao điểm của AH và BC , ta có: $BC \perp (SAM)$, suy ra $BC \perp SM$, mà K là trực tâm của tam giác SBC nên SM đi qua K . Do đó, SK, AH, BC đồng quy tại M .
- b) Vì $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp CH$, mà $CH \perp AB$, suy ra $CH \perp (SAB)$. Do đó $CH \perp SB$, lại có $SB \perp CK$ nên $SB \perp (CHK)$. Từ đó ta có $SB \perp HK$, tương tự, ta chứng minh được $SC \perp (BHK)$, suy ra $SC \perp HK$. Do đó $HK \perp (SBC)$.

7.12. Một cây cột được dựng trên một sàn phẳng. Người ta thả dây dọi và ngắm thấy cột song song với dây dọi. Hỏi có thể khẳng định rằng cây cột vuông góc với sàn hay không? Vì sao?

Lời giải

Vì dây dọi song song với cây cột và dây dọi vuông góc với mặt phẳng sàn nên cây cột vuông góc với mặt phẳng sàn.

BÀI 24: PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

A - KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương Δ vuông góc với (P) được gọi là phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (P) .

2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng (P)

□ Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng 90° .

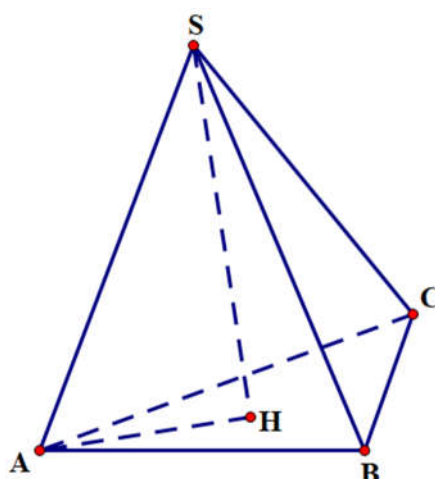
□ Nếu đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa a và hình chiếu a' của nó trên (P) là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) .

3. Gọi α là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) thì $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$.

B - VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC đều cạnh bằng $3a$, các cạnh bên SA, SB, SC bằng nhau và bằng $2a\sqrt{3}$. Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) .

Lời giải



Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) , khi đó các tam giác SHA, SHB, SHC là những tam giác vuông tại H . Theo định lý Pythagore, ta có: $HA = HB = HC$, do đó H là tâm của tam giác đều ABC . Ta tính được $AH = a\sqrt{3}$.

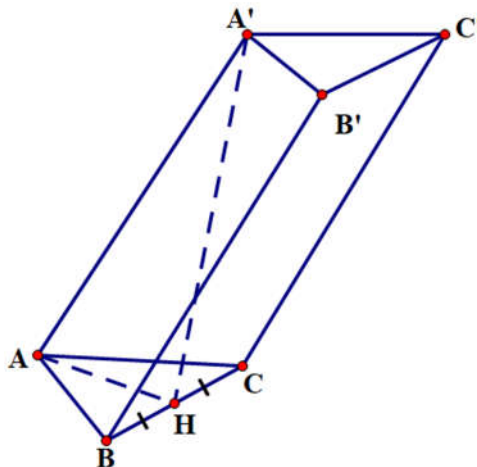
Vì AH là hình chiếu của SA trên mặt phẳng (ABC) nên góc giữa SA và mặt phẳng (ABC) bằng góc giữa đường thẳng SA và đường thẳng AH .

Xét tam giác SAH vuông tại H , ta có: $\cos \widehat{SAH} = \frac{AH}{SA} = \frac{1}{2}$, suy ra $\widehat{SAH} = 60^\circ$.

Vậy góc giữa SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60° .

Ví dụ 2. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC \cdot A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC cân tại A , góc BAC bằng 120° và $AB = 2a$. Hình chiếu của A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của BC , biết $AA' = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa đường thẳng AA' và mặt phẳng (ABC) .

Lời giải



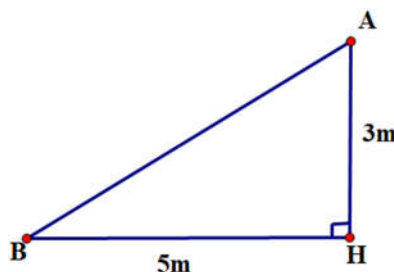
Ta có: AH là hình chiếu của AA' trên mặt phẳng (ABC) và tam giác $AA'H$ vuông tại H . Do đó, góc giữa đường thẳng AA' và mặt phẳng (ABC) bằng góc giữa hai đường thẳng AA' và AH . Xét tam giác ABH vuông tại H , ta có: $\widehat{HAB} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 60^\circ$, suy ra $AH = a$.

Xét tam giác $AA'H$ vuông tại H , có: $\cos \widehat{HAA'} = \frac{AH}{AA'} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, suy ra $\widehat{HAA'} = 45^\circ$.

Do đó $(AA', AH) = 45^\circ$, hay góc giữa đường thẳng AA' và mặt phẳng (ABC) bằng 45° .

Ví dụ 3. Một chiếc cột cao 3 m được dựng vuông góc với mặt đất phẳng. Dưới ánh nắng mặt trời, bóng của cột trên mặt đất dài 5 m. Tính góc giữa đường thẳng chứa tia nắng mặt trời và mặt đất (tính gần đúng theo đơn vị độ, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải



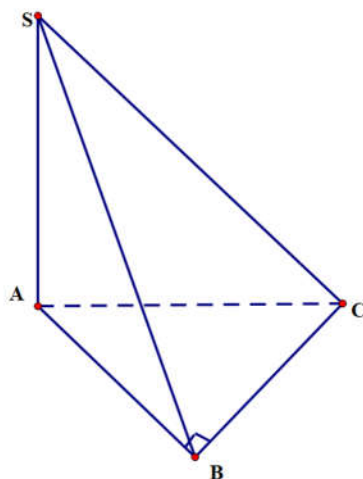
Góc giữa tia nắng mặt trời AB và mặt đất là góc ABH . Ta có: $\tan \widehat{ABH} = \frac{AH}{BH} = \frac{3}{5}$, suy ra $\widehat{ABH} \approx 30,96^\circ$.

C. GIẢI BÀI TẬP BÀI TẬP

Bài 7.10. Cho hình chóp $S \cdot ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B .

- Xác định hình chiếu của điểm S trên mặt phẳng (ABC) .
- Xác định hình chiếu của tam giác SBC trên mặt phẳng (ABC) .
- Xác định hình chiếu của tam giác SBC trên mặt phẳng (SAB) .

Lời giải

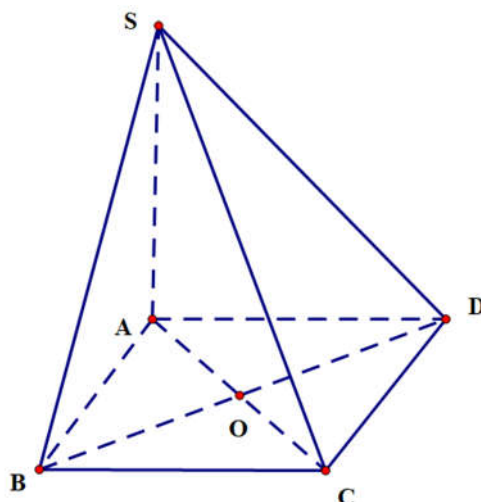


- Ta có $SA \perp (ABC)$ nên A là hình chiếu của S trên (ABC)
- A là hình chiếu của S trên (ABC)
 B là hình chiếu của B trên (ABC)
 C là hình chiếu của C trên (ABC)
 $\Rightarrow$ Tam giác ABC là hình chiếu của tam giác SBC .
- B là hình chiếu của C trên (SAB)
 S, B là hình chiếu của chính nó trên (SAB)
 $\Rightarrow SB$ là hình chiếu của tam giác SBC trên (SAB)

Bài 7.11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$.

- Tính góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$.
- Tính góc giữa BD và mặt phẳng (SAC) .
- Tìm hình chiếu của SB trên mặt phẳng (SAC) .

Lời giải



a) A là hình chiếu của S trên $(ABCD)$ ($SA \perp (ABCD)$)

C là hình chiếu của S trên $(ABCD)$

$\Rightarrow AC$ là hình chiếu của SC trên $(ABCD)$

$$\Rightarrow (SC, (ABCD)) = (SC, AC) = \widehat{SCA}$$

Xét tam giác ABC vuông tại B có

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{2}$$

Xét tam giác SAC vuông tại A có

$$\tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow \widehat{SCA} = 45^\circ$$

Vậy $(SC, (ABCD)) = 45^\circ$

$$\left. \begin{array}{l} AC \perp BD \text{ (h.v. } ABCD) \\ AC \cap SA = \{A\} \end{array} \right\} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow (BD, (SAC)) = 90^\circ$$

c) Gọi $AC \cap BD = \{O\}$ mà $BD \perp (SAC)$

$\Rightarrow O$ là hình chiếu của B trên (SAC)

S là hình chiếu của S trên (SAC)

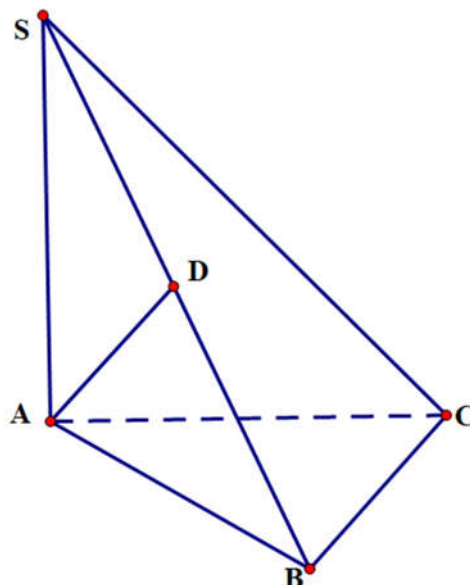
$\Rightarrow SO$ là hình chiếu của SB trên (SAC) .

Bài 7.12. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B, $SA = AB = BC = a$.

a) Xác định hình chiếu của A trên mặt phẳng (SBC) .

b) Tính góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) .

Lời giải



a) Trong (SAB) kẻ $AD \perp SB$ tại D.

$$\left. \begin{array}{l} BC \perp AD \\ SB \perp AD \\ BC \cap SB = \{B\} \end{array} \right\} \Rightarrow AD \perp (SBC) \Rightarrow D \text{ là hình chiếu của } A \text{ trên } (SBC).$$

b) A là hình chiếu của S trên (ABC) ($SA \perp (ABC)$)

C là hình chiếu của S trên (ABC)

$\Rightarrow AC$ là hình chiếu của SC trên (ABC)

$$\Rightarrow (SC, (ABC)) = (SC, AC) = \widehat{SCA}$$

Xét tam giác ABC vuông tại B có

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{2}$$

Xét tam giác SAC vuông tại A có

$$\tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{SCA} = \arctan \frac{1}{\sqrt{2}}$$

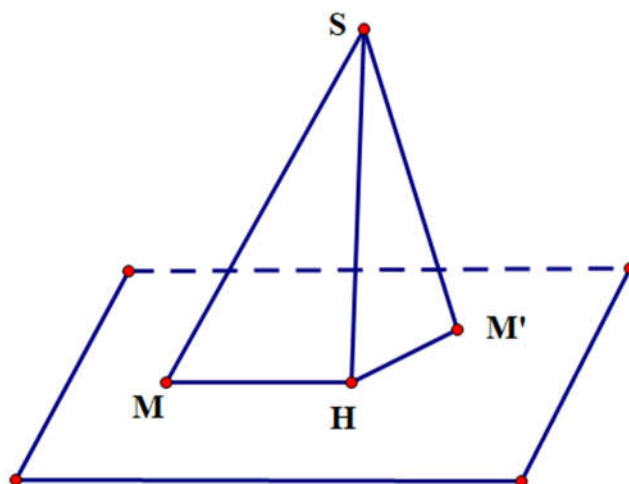
$$\text{Vậy } (SC, (ABC)) = \arctan \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Bài 7.13. Cho điểm S nằm ngoài mặt phẳng (P), có hình chiếu H trên (P). Với mỗi điểm M bất kì (không trùng H) trên mặt phẳng (P), ta gọi đoạn thẳng SM là đường xiên, đoạn thẳng HM là hình chiếu trên (P) của đường xiên đó. Chứng minh rằng:

a) Hai đường xiên SM và SM' bằng nhau khi và chỉ khi hai hình chiếu HM, HM' tương ứng của chúng bằng nhau;

b) Đường xiên SM lớn hơn đường xiên SM' nếu hình chiếu HM lớn hơn hình chiếu HM'.

Lời giải



a)

+) Giả sử $SM = SM'$

Xét tam giác SHM vuông tại H có

$$SM^2 = SH^2 + MH^2 \text{ (định lí Pytago)}$$

Xét tam giác SHM' vuông tại H có

$$SM'^2 = SH^2 + M'H^2 \text{ (định lí Pytago)}$$

Mà $SM = SM'$ nên $MH = M'H$

+) Giả sử $HM = HM'$

Xét tam giác SHM vuông tại H có

$$SM^2 = SH^2 + MH^2 \text{ (định lí Pytago)}$$

Xét tam giác SHM' vuông tại H có

$$SM'^2 = SH^2 + M'H^2 \text{ (định lí Pytago)}$$

Mà $HM = HM'$ nên $SM = SM'$

b) $MH > M'H \Leftrightarrow MH^2 > M'H^2$

$$\Leftrightarrow MH^2 + SH^2 > M'H^2 + SH^2 \Leftrightarrow SM^2 > SM'^2 \Leftrightarrow SM > SM'$$

Bài 7.14. Trong một khoảng thời gian đầu kể từ khi cất cánh, máy bay bay theo một đường thẳng. Góc cất cánh của nó là góc giữa đường thẳng đó và mặt phẳng nằm ngang nơi cất cánh. Hai máy bay cất cánh và bay thẳng với cùng độ lớn vận tốc trong 5 phút đầu, với các góc cất cánh lần lượt là $10^\circ, 15^\circ$. Hỏi sau 1 phút kể từ khi cất cánh, máy bay nào ở độ cao so với mặt đất (phẳng, nằm ngang) lớn hơn?

Chú ý. Độ cao của máy bay so với mặt đất là khoảng cách từ máy bay (coi là một điểm) đến hình chiếu của nó trên mặt đất.

Lời giải

Áp dụng công thức tính độ cao của máy bay so với mặt đất, ta tính được độ cao của hai máy bay 1 và 2 như sau:

$$\text{Độ cao của máy bay 1: } h_A = v \cdot 1 \cdot \sin(10^\circ) = 0,17365v$$

$$\text{Độ cao của máy bay 2: } h_B = v \cdot 1 \cdot \sin(15^\circ) = 0,25882v$$

Do đó, ta thấy rằng độ cao của máy bay 2 lớn hơn độ cao của máy bay 1. Vì vậy, máy bay 2 ở độ cao so với mặt đất lớn hơn sau 1 phút kể từ khi cất cánh.

Bài 7.15. Hãy nêu cách đo góc giữa đường thẳng chứa tia sáng mặt trời và mặt phẳng nằm ngang tại một vị trí và một thời điểm.

Chú ý. Góc giữa đường thẳng chứa tia sáng mặt trời lúc giữa trưa với mặt phẳng nằm ngang tại vị trí đó được gọi là góc Mặt Trời. Giữa trưa là thời điểm ban ngày mà tâm Mặt Trời thuộc mặt phẳng chứa kinh tuyến đi qua điểm đang xét. Góc Mặt Trời ảnh hưởng tới sự hấp thụ nhiệt từ Mặt Trời của Trái Đất, tạo nên các mùa trong năm trên Trái Đất.

Lời giải

Để đo góc giữa đường thẳng chứa tia sáng mặt trời và mặt phẳng nằm ngang tại một vị trí và một thời điểm cụ thể, ta cần sử dụng một thiết bị đo góc, thường được gọi là gnomon.

Cách thực hiện đo góc Mặt Trời như sau:

Chọn một vị trí cố định trên mặt đất và đặt gnomon vào vị trí đó sao cho nó đứng thẳng đứng và vuông góc với mặt đất.

Đợi cho đến khi đến thời điểm giữa trưa, khi tia sáng Mặt Trời đứng thẳng trên vị trí của bạn. Bạn có thể biết được thời điểm này thông qua các trang web hoặc ứng dụng dựa trên vị trí của bạn.

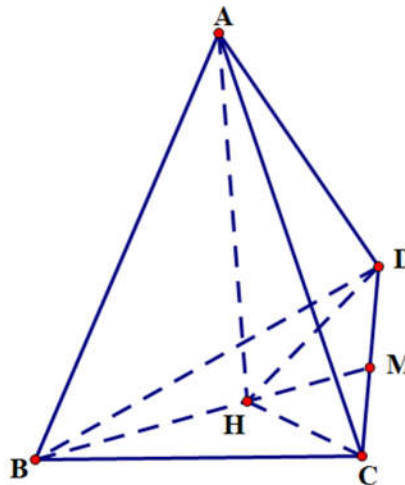
Xác định bóng của gnomon trên mặt phẳng ngang và vẽ một đường thẳng từ đỉnh của gnomon đến đỉnh của bóng.

Sử dụng thiết bị đo góc để đo góc giữa đường thẳng này và mặt phẳng ngang. Đó chính là góc Mặt Trời tại vị trí và thời điểm đó.

D - BÀI TẬP

7.13. Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau và bằng a . Tính cosin của góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD) .

Lời giải



Kẻ $AH \perp (BCD)$ tại H , ta có BH là hình chiếu vuông góc của AB trên mặt phẳng (BCD) nên góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD) bằng góc giữa hai đường thẳng AB và BH , mà $(AB, BH) = \widehat{ABH}$.

Vì $AB = AC = AD$ nên $HD = HB = HC$, hay H là tâm của tam giác BCD , suy ra $BH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

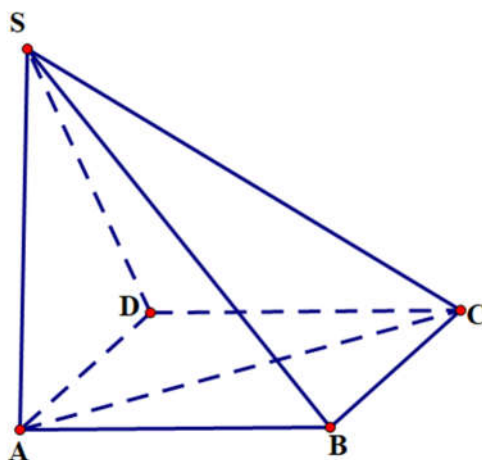
Từ đó ta tính được: $\cos \widehat{ABH} = \frac{BH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Vậy cosin của góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD) bằng $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

7.14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a , $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{2}$.

a) Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

b) Tính tang của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) .

Lời giải



a) Vì $SA \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$, do đó góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng góc giữa hai đường thẳng SC và AC , mà $(SC, AC) = \widehat{SCA}$. Vì tam giác SAC vuông cân tại A nên $\widehat{SCA} = 45^\circ$. Vậy góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° .

b) Ta có: $BC \perp AB, BC \perp SA$ nên $BC \perp (SAB)$, suy ra SB là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng (SAB) , góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng góc giữa hai đường thẳng SC và SB .

Ta có: $(SB, SC) = \widehat{BSC}$. Xét tam giác SBC vuông tại B , có: $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{3}, BC = a$.

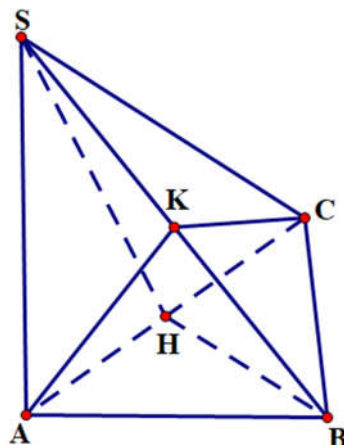
Do đó, $\tan \widehat{BSC} = \frac{BC}{SB} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Vậy tang của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

7.15. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, đáy là tam giác ABC vuông cân tại B , biết $AB = a, SA = a\sqrt{6}$.

a) Tính tang của góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) .

b) Tính sin của góc giữa đường thẳng AC và mặt phẳng (SBC) .

Lời giải



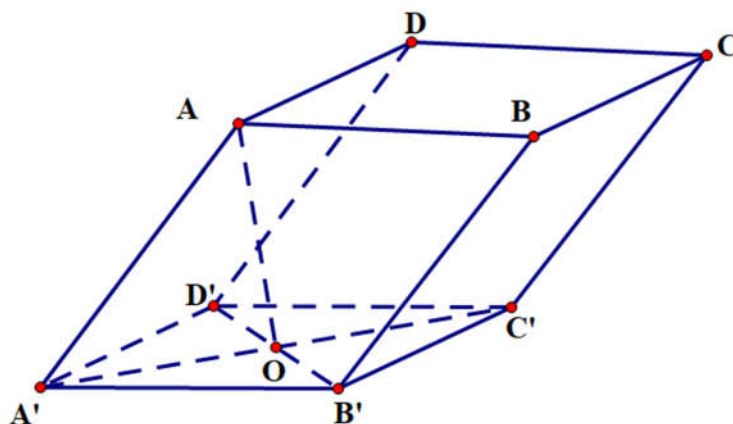
a) Kẻ $BH \perp AC$ tại H , mà $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp BH$, suy ra $BH \perp (SAC)$. Do đó, SH là hình chiếu vuông góc của SB trên mặt phẳng (SAC) nên góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng góc giữa hai đường thẳng SB và SH , mà $(SB, SH) = \widehat{BSH}$.

Ta tính được: $BH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $SH = \frac{a\sqrt{26}}{2}$, suy ra $\tan \widehat{BSH} = \frac{BH}{SH} = \frac{\sqrt{13}}{13}$.

b) Kẻ $AK \perp SB$ tại K , mà $BC \perp (SAB)$ nên $BC \perp AK$, suy ra $AK \perp (SBC)$. Do đó CK là hình chiếu vuông góc của AC trên (SBC) , suy ra góc giữa đường thẳng AC và (SBC) bằng góc giữa hai đường thẳng AC và CK , mà $(AC, CK) = \widehat{ACK}$. Ta có: $AK = \frac{SA \cdot AB}{SB} = a\sqrt{\frac{6}{7}}$, suy ra $\sin \widehat{ACK} = \frac{AK}{AC} = \sqrt{\frac{3}{7}}$.

7.16. Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và $AA' = a\sqrt{2}$, hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng $(A'B'C'D')$ trùng với trung điểm của $B'D'$. Tính góc giữa đường thẳng AA' và mặt phẳng $(A'B'C'D')$.

Lời giải



Gọi O là giao điểm của $A'C'$ và $B'D'$. Ta có: $A'O$ là hình chiếu vuông góc của AA' trên mặt phẳng $(A'B'C'D')$, góc giữa đường thẳng AA' và mặt phẳng $(A'B'C'D')$ bằng góc giữa AA' và $A'O$. Mà $(AA', A'O) = \widehat{AA'O}$, ta lại có $A'O = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Do đó $\cos \widehat{AA'O} = \frac{OA'}{AA'} = \frac{1}{2}$, suy ra $\widehat{AA'O} = 60^\circ$. Vậy góc giữa đường thẳng AA' và mặt phẳng $(A'B'C'D')$ bằng 60° .

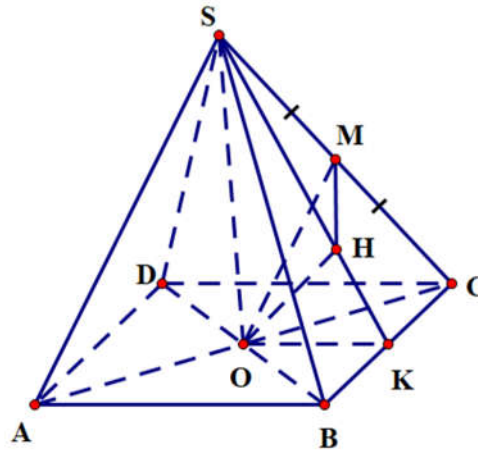
7.17. Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O và các cạnh đều bằng a .

a) Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$.

b) Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD) .

c) Gọi M là trung điểm của cạnh SC và α là góc giữa đường thẳng OM và mặt phẳng (SBC) . Tính $\sin \alpha$.

Lời giải



a) Ta có: $SO \perp AC$; $SO \perp BD$ nên $SO \perp (ABCD)$.

b) Vì $AO \perp (SBD)$ nên SO là hình chiếu vuông góc của SA trên mặt phẳng (SBD) , do đó góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD) bằng góc giữa hai đường thẳng SA và SO . Mà $(SA, SO) = \widehat{ASO}$ nên góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD) bằng góc ASO . Xét tam giác SAC có $SA^2 + SC^2 = AC^2$ và $SA = SC$ nên tam giác SAC vuông cân tại S , suy ra $\widehat{ASO} = 45^\circ$. Vậy góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD) bằng 45° .

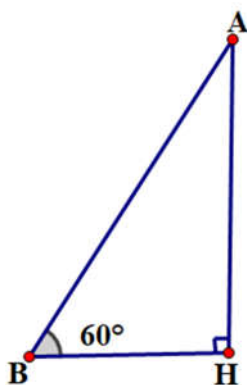
c) Kẻ $OK \perp BC$ tại K , $OH \perp SK$ tại H thì ta chứng minh được $OH \perp (SBC)$, suy ra HM là hình chiếu vuông góc của OM trên mặt phẳng (SBC) , do đó góc giữa đường thẳng OM và mặt phẳng (SBC) bằng góc giữa hai đường thẳng OM và MH , mà $(OM, MH) = \widehat{OMH}$ nên góc giữa đường thẳng OM và mặt phẳng (SBC) bằng góc OMH hay $\widehat{OMH} = \alpha$. Ta có: $OM = \frac{a}{2}$, $OK = \frac{a}{2}$, $SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác SOK vuông tại O , đường cao OH nên $OH = \frac{SO \cdot OK}{SK} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Vì tam giác OMH vuông tại H nên $\sin \alpha = \sin \widehat{OMH} = \frac{OH}{OM} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

7.18. Một con diều được thả với dây căng, tạo với mặt đất một góc 60° . Đoạn dây diều (từ đầu ở mặt đất đến đầu ở con diều) dài 10 m. Hỏi hình chiếu vuông góc của con diều cách đầu dây diều trên mặt đất bao nhiêu centimét (lấy giá trị nguyên gần đúng)?

Lời giải



Gọi A là vị trí con diều, B là vị trí đầu dây diều trên mặt đất, H là hình chiếu vuông góc của A trên mặt đất.

Tam giác ABH vuông tại H , góc ABH bằng 60° và $AB = 10 \text{ m} = 1000 \text{ cm}$.

Ta có: $AH = AB \cdot \sin 60^\circ \approx 866 \text{ (cm)}$

BÀI 25: HAI MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC

A - KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Góc giữa hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) . Gọi a là đường thẳng tùy ý vuông góc với mặt phẳng (P) , b là đường thẳng tùy ý vuông góc với mặt phẳng (Q) . Khi đó, góc giữa a và b là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) .

Lưu ý: Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) có giao tuyến là đường thẳng c , đường thẳng a nằm trên (P) và vuông góc với c , đường thẳng b nằm trên (Q) và vuông góc với c thì góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng góc giữa hai đường thẳng a và b .

2. Hai mặt phẳng vuông góc

□ Nếu góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng 90° thì ta nói hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau. Kí hiệu là $(P) \perp (Q)$.

□ Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) thì $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$.

3. Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc

Hai mặt phẳng vuông góc với nhau nếu mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

4. Tính chất

□ Với hai mặt phẳng vuông góc với nhau, bất kì đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này mà vuông góc với giao tuyến cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

□ Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó.

5. Góc nhị diện

□ Hình gồm hai nửa mặt phẳng $(P), (Q)$ có chung bờ a được gọi là góc nhị diện, kí hiệu là $[P, a, Q]$.

□ Từ điểm O tùy ý thuộc cạnh a của góc nhị diện $[P, a, Q]$, vẽ các tia Ox, Oy tương ứng thuộc nửa mặt phẳng $(P), (Q)$ và vuông góc với a . Góc xOy gọi là một góc phẳng của góc nhị diện $[P, a, Q]$. Số đo của góc xOy được gọi là số đo của góc nhị diện $[P, a, Q]$.

□ Gọi α là số đo của góc nhị diện $[P, a, Q]$ thì $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$. Góc nhị diện được gọi là vuông, nhọn, tù nếu số đo tương ứng bằng, nhỏ hơn, lớn hơn 90° .

6. Một số hình lăng trụ đặc biệt

□ Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với mặt đáy.

□ Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng và có đáy là đa giác đều.

7. Hình chóp đều và hình chóp cụt đều

- Hình chóp đều là hình chóp có đáy là một đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau. Khi đó, hình chiếu của đỉnh trên mặt phẳng đáy là tâm của mặt đáy.
- Hình chóp cắt đều là hình chóp cắt có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

B - VÍ DỤ

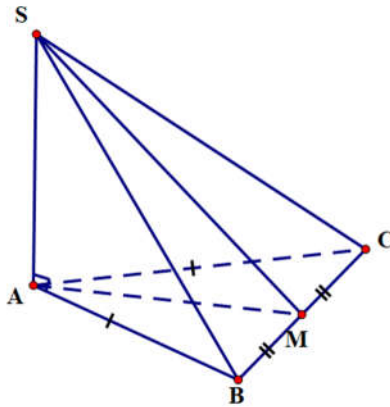
Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A và $AB = a$, biết

$SA \perp (ABC), SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính góc giữa mặt phẳng (ABC) và mặt phẳng (SBC) .

Lời giải

Gọi M là trung điểm của cạnh BC , ta có: $AM \perp BC; SM \perp BC$ nên góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) bằng góc giữa hai đường thẳng AM và SM . Ta có $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp AM$. Xét tam giác

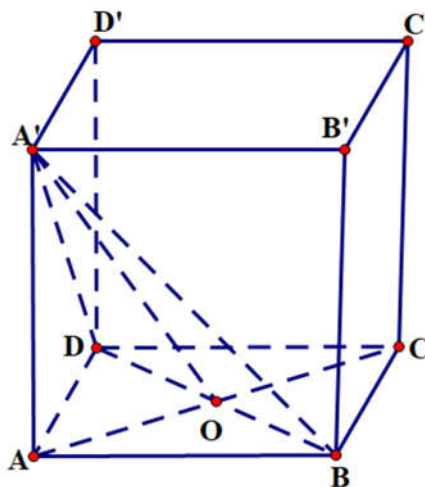
SAM vuông tại A , có: $AM = \frac{1}{2}BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, suy ra $\tan \widehat{AMS} = \frac{SA}{AM} = \sqrt{3}$, hay $\widehat{SMA} = 60^\circ$.



Vậy góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) bằng 60° .

Ví dụ 2. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Tính tang của góc giữa mặt phẳng $(ABCD)$ và mặt phẳng $(A'BD)$.

Lời giải



Gọi O là giao điểm của AC và BD , khi đó $AO \perp BD, A'O \perp BD$. Do đó, góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'BD)$ bằng góc giữa hai đường thẳng AO và $A'O$.

Ta có: $AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $AA' = a$ và tam giác $AA'O$ vuông tại A nên $\tan(\widehat{AO, A'O}) = \tan \widehat{AOA'} = \frac{AA'}{AO} = \sqrt{2}$.

Vậy tang của góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'BD)$ bằng $\sqrt{2}$.

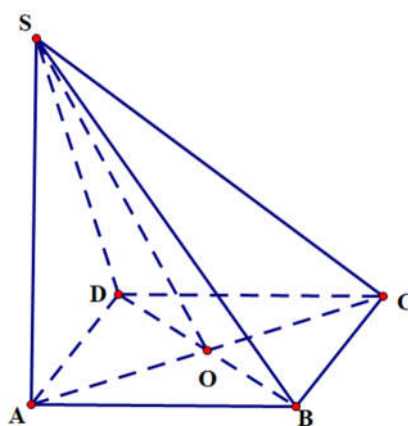
Ví dụ 3. Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a , $SA \perp (ABCD)$ và

$SA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính số đo của góc nhị diện $[S, BD, C]$.

Lời giải

Gọi O là giao điểm của AC và BD , khi đó $CO \perp BD, SO \perp BD$. Do đó, góc phẳng nhị diện $[S, BD, C]$ bằng

góc SOC . Xét tam giác SAO , có $AO = \frac{a\sqrt{2}}{2} = SA$ và góc SAO là góc vuông nên tam giác SAO là tam giác vuông cân tại A , suy ra $\widehat{SOA} = 45^\circ$; $\widehat{SOC} = 135^\circ$.

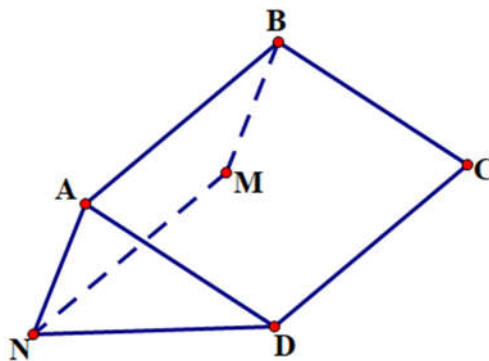


Vậy số đo của góc nhị diện $[S, BD, C]$ bằng 135° .

Ví dụ 4. Một ngôi nhà có hai mái trước, sau có dạng là các hình chữ nhật $ABCD, ABMN$, $AD = 4$ m, $AN = 3$ m, $DN = 5$ m. Tính góc giữa hai mặt phẳng chứa hai mái nhà đó (tính gần đúng theo đơn vị độ, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).



Lời giải



Xét tam giác ADN có: $AN^2 + AD^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2 = DN^2$ nên tam giác ADN vuông tại A . Mặt khác, góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(ABMN)$ bằng góc DAN . Vậy góc giữa hai mặt phẳng chứa hai mái nhà bằng 90° .

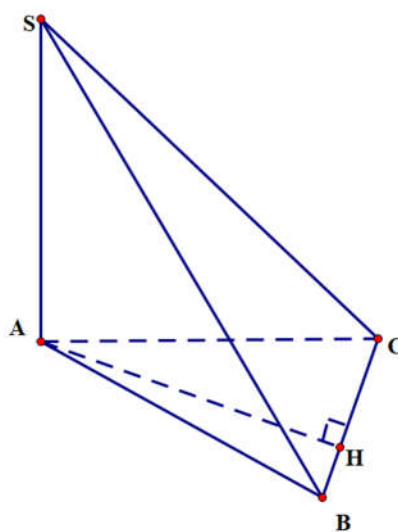
C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 7.16. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi H là hình chiếu của A trên BC .

a) Chứng minh rằng $(SAB) \perp (ABC)$ và $(SAH) \perp (SBC)$.

b) Giả sử tam giác ABC vuông tại A , $\widehat{ABC} = 30^\circ$, $AC = a$, $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính số đo của góc nhị diện $[S, BC, A]$.

Lời giải



a) $SA \perp (ABC); SA \subset (SAB) \Rightarrow (SAB) \perp (ABC)$

$$\left. \begin{array}{l} AH \perp BC \\ SA \perp BC \quad (SA \perp (ABC)) \\ AH \cap SA = \{A\} \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAH); BC \subset (SBC) \Rightarrow (SAH) \perp (SBC)$$

b) Ta có $AH \perp BC, BC \perp SH \quad (BC \perp (SAH))$

$$\Rightarrow [S, BC, A] = (SH, AH) = \widehat{SHA}$$

Xét tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{ABC} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{ACH} = 60^\circ$

Xét tam giác ACH vuông tại H có $\sin \widehat{ACH} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AH = a \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Xét tam giác SHA vuông tại A có $\tan \widehat{SHA} = \frac{SA}{AH} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = 1 \Rightarrow \widehat{SHA} = 45^\circ$

Vậy $[S, BC, A] = 45^\circ$

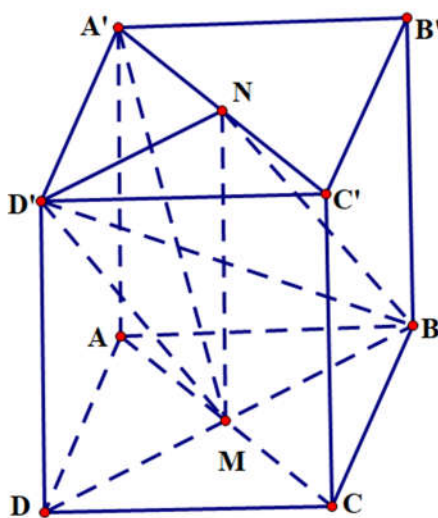
Bài 7.17. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh bằng a .

a) Tính độ dài đường chéo của hình lập phương.

b) Chứng minh rằng $(ACC'A') \perp (BDD'B')$.

c) Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Chứng minh rằng $\widehat{COC'}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[C, BD, C']$. Tính (gần đúng) số đo của các góc nhị diện $[C, BD, C'], [A, BD, C']$

Lời giải



a) Độ dài đường chéo của hình lập phương có thể tính từ công thức cạnh đường chéo của hình lập phương như sau: $d = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3}a$

b) Ta có $AC^2 + CA'^2 = AA'^2$ do tam giác vuông ACA' nên ta có $AC = CA' = \frac{a}{\sqrt{2}}$

Tương tự $BD^2 = DB'^2 = BC^2 = CB'^2 = AD^2 = DA'^2 = a^2$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh

$BD, A'C'$ thì $MN \parallel AC \parallel A'C'$ và $MN = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a^2a^2$

Do AMD' và $D'BN$ là hai tam giác vuông cân tại M, N .

Suy ra $(ACC'A') \perp (BDD'B')$

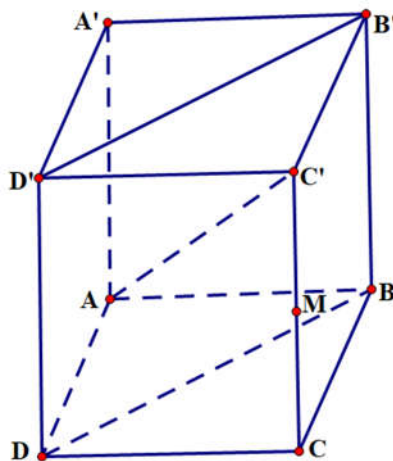
Bài 7.18. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$.

a) Chứng minh rằng $(BDD'B') \perp (ABCD)$.

b) Xác định hình chiếu của AC' trên mặt phẳng $(ABCD)$.

c) Cho $AB = a, BC = b, CC' = c$. Tính AC' .

Lời giải



a) Ta có $BB' \perp (ABCD); BB' \subset (BDD'B') \Rightarrow (BDD'B') \perp (ABCD)$.

b) A' là hình chiếu của A trên $(ABCD)$

C là hình chiếu của C' trên $(ABCD)$ do $CC' \perp (ABCD)$

$\Rightarrow AC$ là hình chiếu của AC' trên $(ABCD)$

c) Xét tam giác ABC vuông tại B có $AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow AC = \sqrt{a^2 + b^2}$

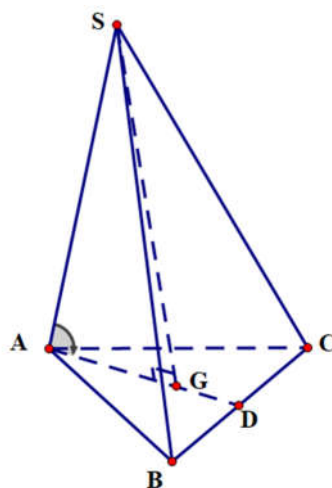
Xét tam giác $AC'C$ vuông tại C có $AC'^2 = CC'^2 + AC^2 = c^2 + a^2 + b^2 \Rightarrow A'C = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Bài 7.19. Cho hình chóp đều $S.ABC$, đáy có cạnh bằng a , cạnh bên bằng b .

a) Tính sin của góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy.

b) Tính tan của góc giữa mặt phẳng chứa mặt đáy và mặt phẳng chứa mặt bên.

Lời giải



Vì hình chóp $S.ABC$ đều, gọi G là hình chiếu của S trên (ABC) nên G là tâm của đáy ABC là tam giác đều do đó G cũng là trọng tâm hay trực tâm của tam giác ABC .

Gọi AG cắt BC tại D

a) Ta có A' là hình chiếu của A trên (ABC)

G là hình chiếu của S trên (ABC)

$\Rightarrow AG$ là hình chiếu của SA trên (ABC)

$\Rightarrow (SA, (ABC)) = (SA, AG) = \widehat{SAG}$

Tam giác ABC đều cạnh a nên $AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Mà G là trọng tâm nên $AG = \frac{2}{3}AD = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Xét tam giác SAG vuông tại G có

$$SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}$$

$$\sin \widehat{SAG} = \frac{SG}{SA} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}} : b = \sqrt{1 - \frac{a^2}{3b^2}}$$

b) Ta có $AG \perp BC, SG \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAD); SD \subset (SAD) \Rightarrow BC \perp SD$

$BC \perp AD$ (G là trọng tâm)

$$(SBC) \cap (ABC) = BC$$

$$\Rightarrow ((SBC), (ABC)) = (AD, SD) = \widehat{SDA}$$

Mà G là trọng tâm nên $GD = \frac{1}{3}AD = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

Xét tam giác SGD vuông tại G có

$$\tan \widehat{SGD} = \frac{SG}{GD} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}} : \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{6}{a\sqrt{3}} \cdot \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}$$

Bài 7.20. Hai mái nhà trong Hình 7.72 là hai hình chữ nhật. Giả sử $AB = 4,8$ m; $OA = 2,8$ m; $OB = 4$ m .

a) Tính (gần đúng) số đo của góc nhị diện tạo bởi hai nửa mặt phẳng tương ứng chứa hai mái nhà.

b) Chứng minh rằng mặt phẳng (OAB) vuông góc với mặt đất phẳng.

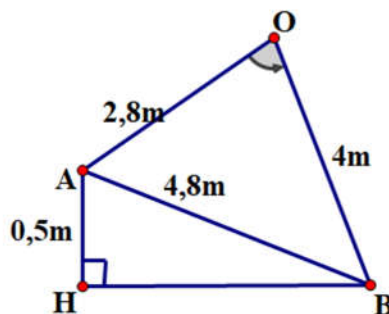
Lưu ý: Đường giao giữa hai mái (đường nóc) song song với mặt đất.

c) Điểm A ở độ cao (so với mặt đất) hơn điểm B là 0,5 m. Tính (gần đúng) góc giữa mái nhà (chứa OB) so với mặt đất.



Hình 7.72

Lời giải



a) Vì hai mái nhà trong Hình 7.72 là hai hình chữ nhật nên góc nhị diện tạo bởi hai nửa mặt phẳng tương ứng chứa hai mái nhà là góc giữa hai đường thẳng OA và OB .

Xét tam giác OAB có

$$\cos \widehat{AOB} = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2OA \cdot OB} = \frac{2,8^2 + 4^2 - 4,8^2}{2 \cdot 2,8 \cdot 4} = \frac{1}{28} \Rightarrow \widehat{AOB} \approx 88^\circ$$

b) (OAB) vuông góc với đường nóc nhà, đường nóc nhà song song với mặt phẳng đất nên (OAB) vuông góc với mặt đất phẳng đất.

c) Đường thẳng qua B song song với mặt đất cắt đường thẳng qua A vuông góc với mặt đất tại H

$$\text{Ta có } \sin \widehat{ABH} = \frac{0,5}{4,8} \Rightarrow \widehat{ABH} \approx 6^\circ; \cos \widehat{OBA} = \frac{13}{16} \Rightarrow \widehat{OBA} \approx 36^\circ$$

$$\text{Do đó } \widehat{OBH} = \widehat{ABH} + \widehat{OBA} \approx 42^\circ.$$

Vậy góc giữa mái nhà (chứa OB) so với mặt đất khoảng 42°

Bài 7.21. Độ dốc của mái nhà, mặt sân, con đường thẳng là tan của góc tạo bởi mái nhà mặt sân, con đường thẳng đó với mặt phẳng nằm ngang. Độ dốc của đường thẳng dành cho người khuyết tật được quy định là không quá $\frac{1}{12}$. Hỏi theo đó, góc tạo bởi đường dành cho người khuyết tật và mặt phẳng nằm ngang không vượt quá bao nhiêu độ? (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

Giả sử góc tạo bởi đường thẳng dành cho người khuyết tật và mặt phẳng nằm ngang là α

Vì độ dốc của đường thẳng dành cho người khuyết tật được quy định là không quá $\frac{1}{12}$ nên ta có

$$\tan \alpha \leq \frac{1}{12} \Rightarrow \alpha \leq 4,76^\circ$$

Vậy góc tạo bởi đường dành cho người khuyết tật và mặt phẳng nằm ngang không vượt quá $4,76^\circ$

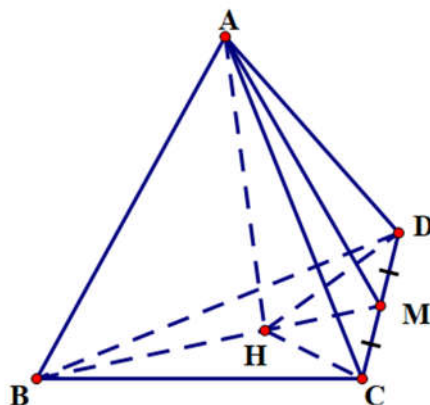
D - Bài tập

7.19. Cho tứ diện đều $ABCD$ có độ dài các cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm của CD kẻ AH vuông góc với BM tại H .

a) Chứng minh rằng $AH \perp (BCD)$.

b) Tính cosin của góc giữa mặt phẳng (BCD) và mặt phẳng (ACD) .

Lời giải



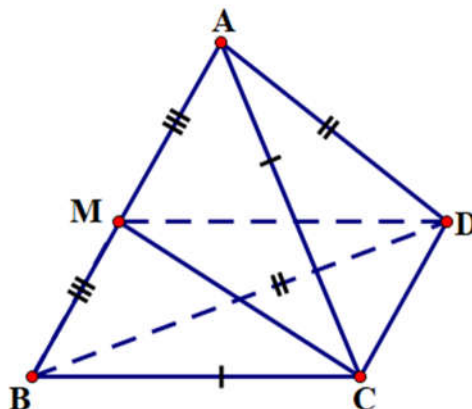
a) Vì M là trung điểm của CD nên $CD \perp BM$, $CD \perp AM$, do đó $CD \perp (ABM)$, suy ra $CD \perp AH$, ta lại có $AH \perp BM$ nên $AH \perp (BCD)$.

b) Vì $AM \perp CD, BM \perp CD$ nên góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) bằng góc giữa hai đường thẳng AM và BM , mà $(AM, BM) = \widehat{AMB}$ nên góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) bằng $\widehat{AMB}$.

Ta có: $HM = \frac{1}{3}BM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ và $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, tam giác AHM vuông tại H nên $\cos \widehat{AMB} = \frac{HM}{AM} = \frac{1}{3}$.

7.20. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = BC, AD = BD$. Gọi M là trung điểm của AB . Chứng minh rằng $(CDM) \perp (ABC)$ và $(CDM) \perp (ABD)$.

Lời giải



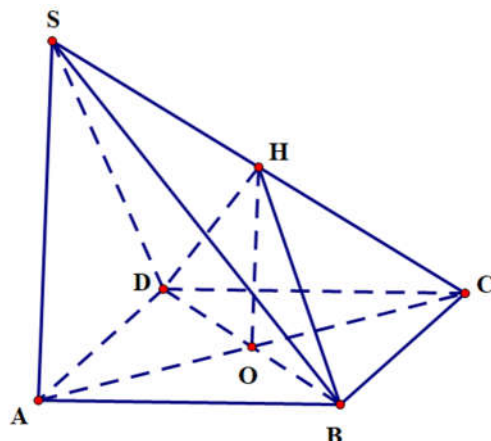
Vì M là trung điểm của AB nên $AB \perp CM$, $AB \perp DM$, suy ra $AB \perp (CDM)$.

Vì hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) đều chứa đường thẳng AB nên $(ABC) \perp (CDM), (ABD) \perp (CDM)$.

7.21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , cạnh bằng a , góc BAD bằng 60° . Kẻ OH vuông góc với SC tại H . Biết $SA \perp (ABCD)$ và $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Chứng minh rằng:

a) $(SBD) \perp (SAC)$; b) $(SBC) \perp (BDH)$; c) $(SBC) \perp (SCD)$.

Lời giải



a) Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp BD$ mà $BD \perp AC$, do đó $BD \perp (SAC)$. Vì mặt phẳng (SBD) chứa BD nên $(SBD) \perp (SAC)$.

b) Ta có $BD \perp (SAC)$ nên $BD \perp SC$ mà $SC \perp OH$, do đó $SC \perp (BDH)$. Vì mặt phẳng (SBC) chứa SC nên $(SBC) \perp (BDH)$.

c) Ta có: $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$. Vì $\triangle CHO \sim \triangle CAS$ nên $\frac{HO}{AS} = \frac{CO}{CS}$, suy ra

$$HO = \frac{CO \cdot AS}{CS} = \frac{a}{2} = \frac{BD}{2}.$$

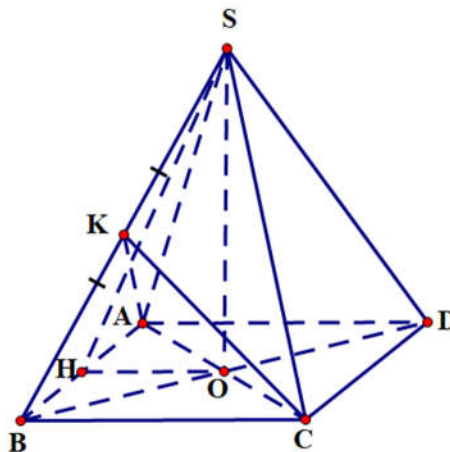
Do đó, tam giác BDH vuông tại H , suy ra $\widehat{BHD} = 90^\circ$. Ta lại có $BH \perp SC, DH \perp SC$ nên $(SBC) \perp (SCD)$.

7.22. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng sau:

a) Mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng $(ABCD)$;

b) Mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (SBC) .

Lời giải



a) Gọi O là giao điểm của AC và BD . Khi đó $SO \perp (ABCD)$ nên $SO \perp AB$, kẻ $OH \perp AB$ tại H thì $AB \perp (SOH)$, suy ra $AB \perp SH$. Do đó, góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ bằng góc giữa hai đường thẳng SH và HO , mà $(SH, HO) = \widehat{SHO}$ nên góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ bằng $\widehat{SHO}$.

Ta tính được $OH = \frac{a}{2}$, $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, suy ra $\cos \widehat{SHO} = \frac{OH}{SH} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) Gọi K là trung điểm của SB . Khi đó $AK \perp SB$, $CK \perp SB$, suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng góc giữa hai đường thẳng AK và CK . Ta có: $AK = CK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AC = a\sqrt{2}$.

Áp dụng định lý côsin trong tam giác ACK , ta có:

$$\cos \widehat{AKC} = \frac{AK^2 + CK^2 - AC^2}{2 \cdot AK \cdot CK} = \frac{-1}{3}, \text{ suy ra } \cos(AK, CK) = -\cos \widehat{AKC} = \frac{1}{3}.$$

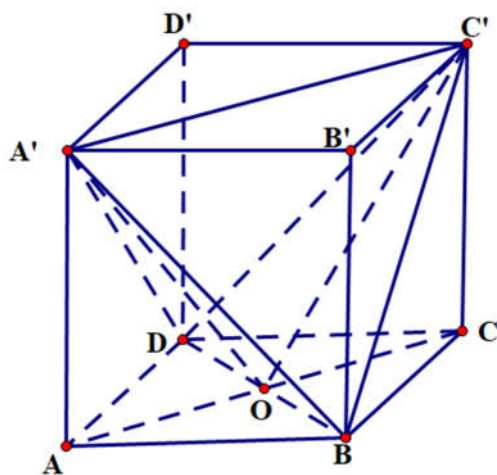
Vậy côsin góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng $\frac{1}{3}$.

7.23. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh bằng a .

a) Tính côsin của góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$.

b) Tính côsin của số đo góc nhị diện $[A', BD, C']$.

Lời giải



a) Gọi O là giao điểm của AC và BD , ta có: $AO \perp BD, A'O \perp BD$ nên góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ bằng góc giữa hai đường thẳng $AO, A'O$ mà $(AO, A'O) = \widehat{AOA'}$ nên góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ bằng $\widehat{AOA'}$. Ta có: $OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}, OA' = \sqrt{OA^2 + AA'^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Suy ra

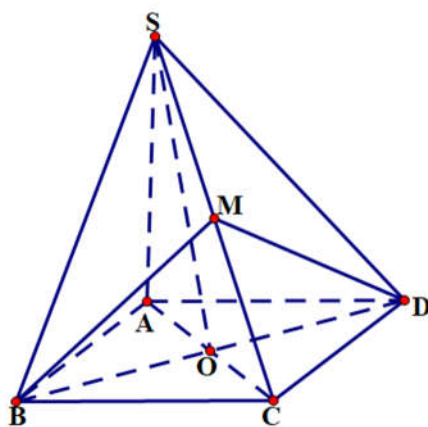
$$\cos \widehat{AOA'} = \frac{AO}{A'O} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

b) Vì $A'O \perp BD, CO' \perp BD$ nên góc nhị diện $[A', BD, C']$ bằng $\widehat{A'OC'}$.

$$\text{Ta có } OA' = OC' = \frac{a\sqrt{6}}{2}, A'C' = a\sqrt{2} \text{ nên } \cos \widehat{A'OC'} = \frac{OA'^2 + OC'^2 - A'C'^2}{2 \cdot OA' \cdot OC'} = \frac{2}{9}.$$

7.24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , biết $(SAB) \perp (ABCD)$ $(SAD) \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Tính cosin của số đo góc nhị diện $[S, BD, C]$ với góc nhị diện $[B, SC, D]$.

Lời giải



Ta có $SO \perp BD, CO \perp BD$ nên góc nhị diện $[S, BD, C]$ bằng $\widehat{SOC}$. Vì tam giác SAO vuông tại A nên

$$SO = \sqrt{SA^2 + AO^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \text{ và } \cos \widehat{SOC} = -\cos \widehat{SOA} = -\frac{OA}{SO} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

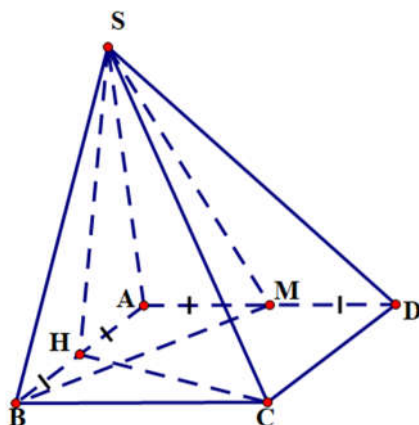
Kẻ $BM \perp SC$ tại M thì $DM \perp SC$ nên $[B, SC, D] = \widehat{BMD}$. Ta có $BC \perp (SAB)$ nên tam giác SBC vuông tại B , tính được $SB = a\sqrt{2}$, $SC = a\sqrt{3}$ và $DM = BM = \frac{SB \cdot BC}{SC} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Áp dụng định lí côsin trong tam giác BDM , ta có: $\cos \widehat{BMD} = \frac{BM^2 + DM^2 - BD^2}{2 \cdot BM \cdot DM} = -\frac{3}{4}$.

7.25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tam giác SAD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi H, M lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và AB .

a) Tính côsin của góc giữa đường thẳng SC và mặt đáy $(ABCD)$.

b) Chứng minh rằng $(SMD) \perp (SHC)$.

Lời giải



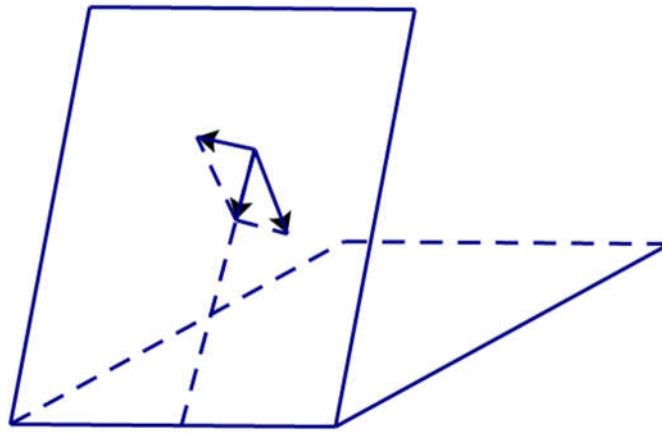
a) Ta có $(SAD) \perp (ABCD)$ và $SH \perp AD$ nên $SH \perp (ABCD)$, suy ra góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng góc giữa hai đường thẳng SC và CH , mà $(SC, CH) = \widehat{SCH}$, ta tính được

$$SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}, HC = \frac{a\sqrt{5}}{2} \text{ và } SC = a\sqrt{2}. \text{ Do đó } \cos \widehat{SCH} = \frac{HC}{SC} = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

b) Ta có $DM \perp CH, DM \perp SH$ nên $DM \perp (SCH)$. Hơn nữa, mặt phẳng (SDM) chứa đường thẳng DM nên $(SDM) \perp (SCH)$.

7.26. Một viên bi được thả lăn trên một mặt phẳng nằm nghiêng (so với mặt phẳng nằm ngang). Coi viên bi chịu tác dụng của hai lực chính là lực hút của Trái Đất (theo phương thẳng đứng, hướng xuống dưới) và phản lực, vuông góc với mặt phẳng nằm nghiêng, hướng lên trên. Giải thích vì sao viên bi di chuyển trên một đường thẳng vuông góc với giao tuyến của mặt phẳng nằm nghiêng và mặt phẳng nằm ngang.

Lời giải



Gọi a là giao tuyến của mặt phẳng nằm ngang và mặt phẳng nằm nghiêng. Phương của lực hút trái đất vuông góc với mặt phẳng nằm ngang, phương của phản lực vuông góc với mặt phẳng nghiêng nên phương của hai lực nói trên đều vuông góc với đường thẳng a , do đó đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) chứa hai phương của hai lực đó. Vì tổng hợp lực của trọng lực và phản lực là một lực có phương nằm trên mặt phẳng (P) nên phương đó vuông góc với a . Do đó, viên bi lăn dọc theo đường thẳng vuông góc với đường thẳng a

BÀI 26: KHOẢNG CÁCH

A - KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng, đến một mặt phẳng

- ☐ Khoảng cách từ một điểm M đến một đường thẳng a là khoảng cách giữa điểm M và hình chiếu H của M trên a .
- ☐ Khoảng cách từ một điểm M đến mặt phẳng (P) là khoảng cách giữa điểm M và hình chiếu H của M trên (P) .

2. Khoảng cách giữa các đường thẳng và mặt phẳng song song, giữa hai mặt phẳng song song

- ☐ Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với a là khoảng cách từ một điểm bất kì trên a đến (P) .
- ☐ Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P) và (Q) là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.
- ☐ Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song m và n là khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia.

3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Cho hai đường thẳng a và b chéo nhau, ta có:

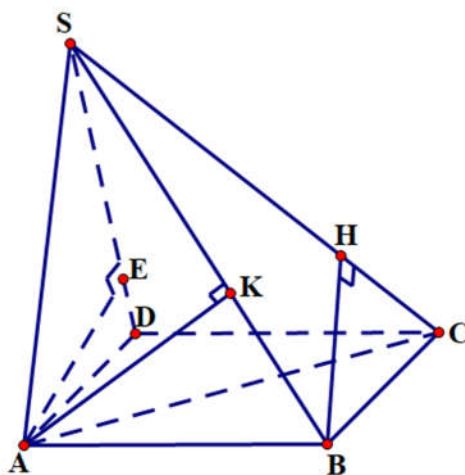
- ☐ Điểm A thuộc a , điểm B thuộc b sao cho đường thẳng AB là đường vuông góc chung của a và b thì độ dài đoạn AB là khoảng cách giữa hai đường thẳng a và b .
- ☐ Mặt phẳng (P) chứa a , mặt phẳng (Q) chứa b sao cho (P) song song với (Q) , khi đó khoảng cách giữa a và b bằng khoảng cách giữa a và (Q) cũng bằng khoảng cách giữa (P) và (Q) .

B - VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, đáy là tam giác ABC vuông tại B , biết $SA = AB = BC = a$. Tính theo a khoảng cách:

- a) Từ điểm B đến đường thẳng SC .
- b) Từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) .
- c) Giữa hai đường thẳng chéo nhau AB và SC .

Lời giải



a) Ta có: $BC \perp AB, BC \perp SA$ nên $BC \perp (SAB)$, suy ra $BC \perp SB$. Kẻ $BH \perp SC$ tại H thì $d(B, SC) = BH$.

Theo định lý Pythagore, ta tính được $SB = AC = a\sqrt{2}, SC = a\sqrt{3}$. Xét tam giác SBC vuông tại B có đường cao BH . Khi đó: $BH = \frac{SB \cdot BC}{SC} = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Vậy $d(B, SC) = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

b) Kẻ $AK \perp SB$ tại K , có $BC \perp (SAB)$ nên $BC \perp AK$. Suy ra $AK \perp (SBC)$, do đó $d(A, (SBC)) = AK$.

Xét tam giác SAB vuông tại A có đường cao AK . Khi đó $AK = \frac{SA \cdot AB}{SB} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Vậy

$$d(A, (SBC)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

c) Dựng hình bình hành $ABCD$, vì tam giác ABC vuông cân tại B nên $ABCD$ là hình vuông.

Vì $CD \perp AD, CD \perp SA$ nên $CD \perp (SAD)$. Kẻ $AE \perp SD$ tại E , mà $AE \perp CD$ nên $AE \perp (SCD)$ (1).

Vì mặt phẳng (SCD) chứa SC và song song với AB nên

$$d(AB, SC) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD)) \quad (2).$$

Từ (1) và (2), suy ra $d(AB, SC) = AE$. Vì tam giác SAD vuông cân tại A , có đường cao AE nên

$$AE = \frac{a\sqrt{2}}{2} \text{ Vậy } d(AB, SC) = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

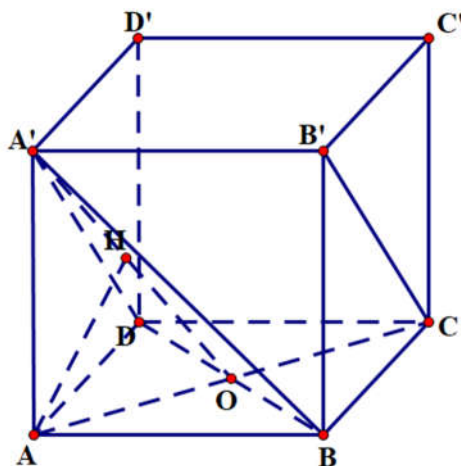
Ví dụ 2. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Tính theo khoảng cách:

a) Từ điểm A đến mặt phẳng (BDA') .

b) Giữa hai đường thẳng song song BC và $A'D'$.

c) Giữa hai đường thẳng chéo nhau $A'B$ và $B'C$.

Lời giải



a) Gọi O là giao điểm của AC và BD , kẻ AH vuông góc với $A'O$ tại H . Ta có $ABCD$ là hình vuông cạnh a , có tâm O nên $AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, tam giác AOA' vuông tại A , đường cao AH nên ta tính được

$$AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}. \text{ Do đó khoảng cách từ } A \text{ đến mặt phẳng } (A'BD) \text{ bằng } \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

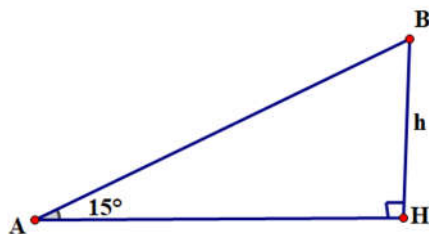
b) Ta có $A'D' \parallel BC$ và $BC \perp (ABB'A')$ nên $BC \perp A'B$. Do đó $A'B = d(A', BC) = d(A'D', BC) = a\sqrt{2}$.

c) Vì $B'C \parallel A'D$ và $A'D \subset (A'BD)$, $B'C \not\subset (A'BD)$ nên $B'C \parallel (A'BD)$.

Do đó $d(A'B, B'C) = d(B'C, (A'BD)) = d(C, (A'BD))$. Vì AC cắt mặt phẳng $(A'BD)$ tại O là trung điểm của AC nên $d(C, (A'BD)) = d(A, (A'BD)) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Ví dụ 3. Một chiếc máy bay cất cánh từ một điểm thuộc mặt đất phẳng nằm ngang. Trong 3 phút đầu máy bay bay với vận tốc 500 km/h và theo đường thẳng tạo với mặt đất một góc 15° . Hỏi sau 2 phút, máy bay ở độ cao bao nhiêu kilômét (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất)?

Lời giải



Sau 2 phút, máy bay đi được quãng đường là $AB = \frac{500}{60} \cdot 2 = \frac{50}{3} \text{ (km)}$.

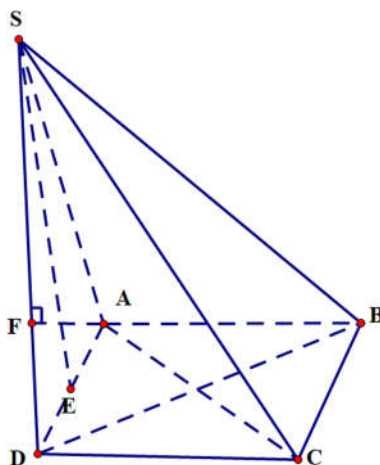
Sau 2 phút, máy bay ở độ cao là $h = AB \cdot \sin 15^\circ \approx 4,3 \text{ (km)}$.

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 7.22. Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy là một hình vuông cạnh a , mặt bên SAD là một tam giác đều và $(SAD) \perp (ABCD)$.

- Tính chiều cao của hình chóp.
- Tính khoảng cách giữa BC và (SAD) .
- Xác định đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa AB và SD .

Lời giải



a) Gọi E là trung điểm của AD

$$(SAD) \perp (ABCD), (SAD) \cap (ABCD) = AD$$

Mà tam giác SAD đều

$$\Rightarrow SE \perp (ABCD)$$

Xét tam giác SDE vuông tại E có

$$SE = \sqrt{SD^2 - DE^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

b) Ta có $AB \perp AD, AB \perp SE (SE \perp (ABCD)) \Rightarrow AB \perp (SAD)$

Vì $BC \parallel AD$ ($ABCD$ là hình vuông), $AD \subset (SAD)$ nên $BC \parallel (SAD)$

$$\Rightarrow d(BC, (SAD)) = d(B, (SAD)) = AB = a$$

c) Trong (SAD) kẻ $AF \perp SD$

$$\text{Có } AB \perp (SAD), AF \subset (SAD) \Rightarrow AB \perp AF$$

$$\Rightarrow d(AB, SD) = AF$$

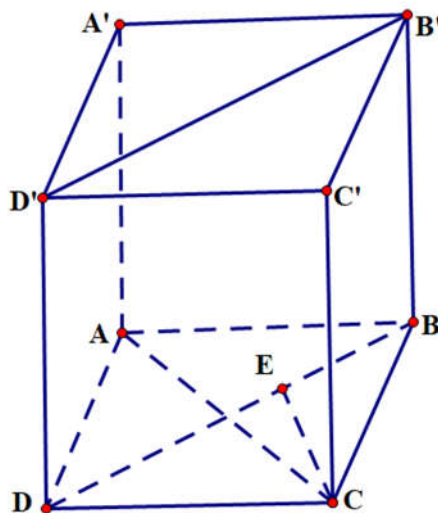
$$\text{Vì tam giác } SAD \text{ đều nên } AF = SE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Vậy } d(AB, SD) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Bài 7.23. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có $AA' = a, AB = b, BC = c$.

- Tính khoảng cách giữa CC' và $(BB'DD')$.
- Xác định đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa AC và $B'D'$.

Lời giải



a) Trong $(ABCD)$ kẻ $CE \perp BD$

Mà $CE \perp BB'$ ($BB' \perp (ABCD)$) $\Rightarrow CE \perp (BB'D'D)$

Ta có $CC' \parallel BB' \Rightarrow CC' \parallel (BB'D'D) \Rightarrow d(CC', (BB'D'D)) = d(C, (BB'D'D)) = CE$

Xét tam giác BCD vuông tại C có

$$\frac{1}{CE^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{CD^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{b^2 + c^2}{c^2 b^2} \Rightarrow CE = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$

b) $AC \subset (ABCD), B'D' \subset (A'B'C'D'), (ABCD) \parallel (A'B'C'D')$

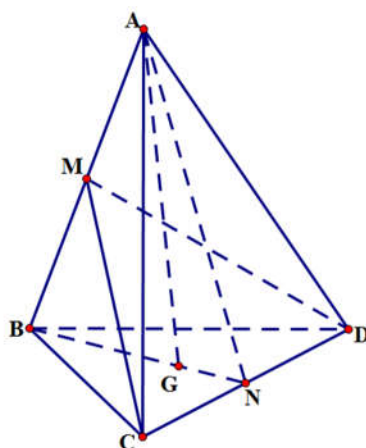
$\Rightarrow d(AC, B'D') = d((ABCD), (A'B'C'D')) = BB' = a$.

Bài 7.24. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh đều bằng a . Gọi M, N tương ứng là trung điểm của các cạnh AB, CD . Chứng minh rằng:

a) MN là đường vuông góc chung của AB và CD .

b) Các cặp cạnh đối diện trong tứ diện $ABCD$ đều vuông góc với nhau.

Lời giải



a) Ta có $BN \perp CD, AG \perp CD \Rightarrow CD \perp (ABN), MN \subset (ABN) \Rightarrow CD \perp MN$

Vì BN, AN lần lượt là 2 đường trung tuyến của 2 tam giác đều cạnh a nên $BN = AN$

Do đó tam giác ABN cân tại N mà M là trung điểm $AB \Rightarrow AB \perp MN$

Vậy MN là đường vuông góc chung của AB và CD .

b) Ta có $CD \perp (ABN); AB \subset (ABN) \Rightarrow CD \perp AB$

Chứng minh tương tự ta được $BC \perp AD, BD \perp AC$

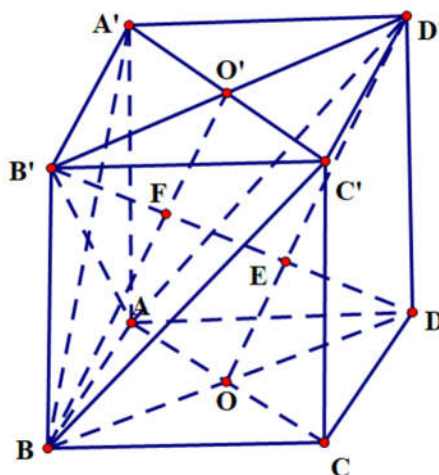
Vậy các cặp cạnh đối diện trong tứ diện $ABCD$ đều vuông góc với nhau

Bài 7.25. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh a .

a) Chứng minh rằng hai mặt phẳng $(D'AC)$ và $(BC'A')$ song song với nhau và DB' vuông góc với hai mặt phẳng đó.

b) Xác định các giao điểm E, F của DB' với $(D'AC), (BC'A')$. Tính $d((D'AC), (BC'A'))$.

Lời giải



a) $AC \parallel A'C', D'C \parallel A'B \Rightarrow (D'AC) \parallel (BC'A')$

Ta có $AC \perp BD, AC \perp BB' \Rightarrow AC \perp (BDB'); B'D \subset (BDB') \Rightarrow AC \perp B'D$

Mà $AC \parallel A'C' \Rightarrow B'D \perp A'C'$

Ta có $AB' \perp A'B, AD \perp A'B \Rightarrow A'B \perp (AB'D); B'D \subset (AB'D) \Rightarrow A'B \perp B'D$

Mà $A'B \parallel D'C \Rightarrow B'D \perp D'C$

Ta có $B'D \perp AC, B'D \perp D'C \Rightarrow B'D \perp (D'AC)$

$B'D \perp A'C', B'D \perp A'B \Rightarrow B'D \perp (BA'C')$

b) Gọi $AC \cap BD = \{O\}, A'C' \cap B'D' = \{O'\}$

Trong $(BB'D'D)$ nối $D'O \cap B'D = \{E\}, B'O' \cap B'D = \{F\}$

Vì $(D'AC) \parallel (BC'A')$ nên $d((D'AC), (BC'A')) = d(E, (BC'A')) = EF$ do $B'D \perp (BA'C')$

$$\left. \begin{array}{l} B'D \perp BO' (B'D \perp (BA'C')) \\ B'D \perp OD' (B'D \perp (D'AC)) \end{array} \right\} \Rightarrow BO' \parallel OD'$$

Áp dụng định lý Talet có $\frac{DE}{EF} = \frac{DO}{BO} = 1 \Rightarrow DE = EF$ và $\frac{B'F}{EF} = \frac{B'O'}{O'D'} = 1 \Rightarrow B'F = EF$

$$\Rightarrow EF = \frac{B'D}{3}$$

Xét tam giác ABD vuông tại A có $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$

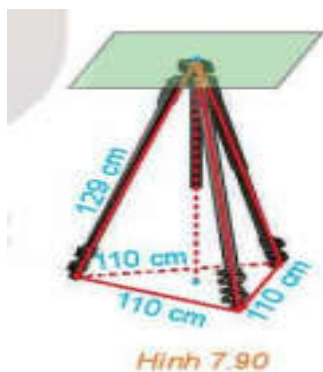
Xét tam giác $BB'D$ vuông tại B có $B'D = \sqrt{BB'^2 + BD^2} = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{3}$

$$\Rightarrow EF = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Vậy } d((D'AC), (BC'A')) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Bài 7.26. Giá đỡ ba chân ở Hình 7.90 đang được mở sao cho ba gốc chân cách đều nhau một khoảng cách bằng 110cm. Tính chiều cao của giá đỡ, biết các chân của giá đỡ dài 129cm.

Lời giải



Giá đỡ ba chân ở Hình 7.90 đang được mở sao cho ba gốc chân cách đều nhau một khoảng cách bằng 110 cm nên hình chiếu của đỉnh là tâm của đáy mà đáy là tam giác đều do đó tâm là trọng tâm.

Vì đáy là tam giác đều cạnh 110 cm nên chiều cao của đáy bằng $110 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 55\sqrt{3}$ (cm)

Khoảng cách từ gốc chân đến tâm là $\frac{2}{3} \cdot 55\sqrt{3} = \frac{110\sqrt{3}}{3}$ (cm)

Chiều cao giá đỡ là $\sqrt{129^2 - \left(\frac{110\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{37823}{3}} \approx 112,28$ (cm)

Bài 7.27. Một bể nước có đáy thuộc mặt phẳng nằm ngang. Trong trường hợp này, độ sâu của bể là khoảng cách giữa mặt nước và đáy bể. Giải thích vì sao để đo độ sâu của bể, ta có thể thả quả dọi chạm đáy bể và đo chiều dài của đoạn dây dọi nằm trong bể nước.

Lời giải

Khi bể nước có đáy thuộc mặt phẳng nằm ngang, thì mặt nước cũng sẽ có cùng độ cao trên toàn bể nước. Vì vậy, để đo độ sâu của bể, ta có thể đo khoảng cách từ mặt nước đến đáy bể.

Khi thả quả dọi vào bể nước, nó sẽ chìm dưới mặt nước và chạm đến đáy bể. Khi kéo quả dọi lên, ta sẽ thấy một đoạn dây dọi nằm trong bể nước và một đoạn dây dọi ở ngoài bể nước. Đoạn dây dọi nằm trong bể nước có độ dài bằng khoảng cách từ mặt nước đến chỗ quả dọi chạm đáy bể. Do đó, để đo độ sâu của bể, ta chỉ cần đo độ dài của đoạn dây dọi nằm trong bể nước.

Công thức để tính độ sâu của bể nước sẽ là: Độ sâu bể = chiều dài của đoạn dây dọi nằm trong bể nước

D - BÀI TẬP

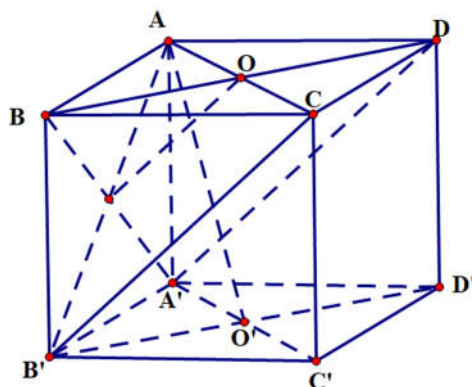
7.27. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Tính theo a khoảng cách:

a) Giữa hai đường thẳng AB và $C'D'$.

b) Giữa đường thẳng AC và mặt phẳng $(A'B'C'D')$.

- c) Từ điểm A đến đường thẳng $B'D'$.
- d) Giữa hai đường thẳng AC và $B'D'$.

Lời giải

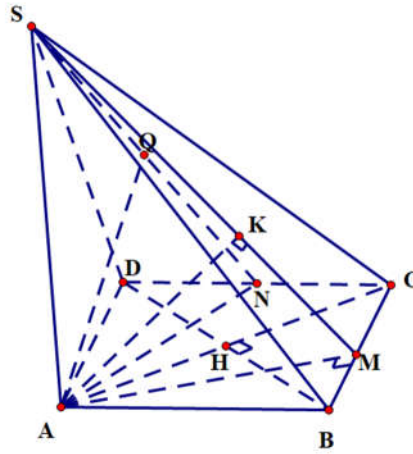


- a) Vì BC' vuông góc với cả hai đường thẳng AB và $C'D'$ nên $d(AB, C'D') = BC' = a\sqrt{2}$.
- b) Vì $AC \parallel (A'B'C'D')$ nên $d(AC, (A'B'C'D')) = d(A, (A'B'C'D')) = AA' = a$.
- c) Gọi O' là giao điểm của $A'C'$ và $B'D'$, ta có $AO' \perp B'D'$, theo định lý Pythagore, áp dụng cho tam giác $AA'O'$ vuông tại A' thì $AO' = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Do đó $d(A, B'D') = AO' = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.
- d) Ta có: $d(AC, B'D') = d(AC, (A'B'C'D')) = d(A, (A'B'C'D')) = AA' = a$.

7.28. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC đều cạnh bằng a , $SA \perp (ABC)$ và $SA = 2a$. Tính theo a khoảng cách:

- a) Từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) .
- b) Từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) .
- c) Giữa hai đường thẳng AB và SC .

Lời giải



a) Kẻ $BH \perp AC$ tại H , mà $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp BH$, suy ra $BH \perp (SAC)$. Do đó

$$d(B, (SAC)) = BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

b) Kẻ $AM \perp BC$ tại M và $AK \perp SM$ tại K thì $AK \perp (SBC)$, suy ra $d(A, (SBC)) = AK$.

Ta có: $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{19}{12a^2}$, suy ra $AK = 2a\sqrt{\frac{3}{19}}$. Vậy $d(A, (SBC)) = 2a\sqrt{\frac{3}{19}}$.

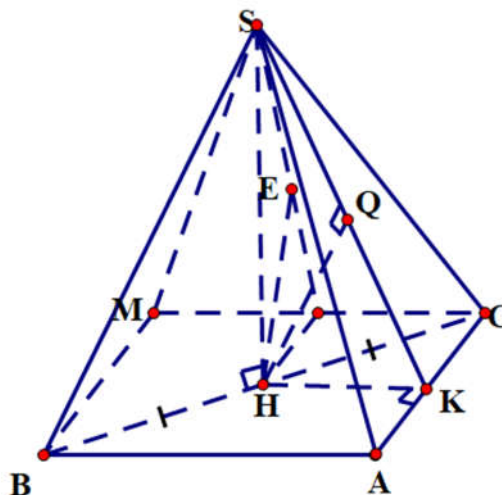
c) Dựng hình bình hành $ABCD$ thì $AB \parallel (SCD)$ và mặt phẳng (SCD) chứa SC nên $d(AB, SC) = d(AB, (SCD))$. Mà $d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD))$, tính tương tự như câu b ta được:

$$d(A, (SCD)) = 2a\sqrt{\frac{3}{19}}. \text{ Vậy } d(AB, SC) = 2a\sqrt{\frac{3}{19}}.$$

7.29. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , góc ABC bằng 60° , biết tam giác SBC đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Tính theo a khoảng cách:

- Từ điểm S đến mặt phẳng (ABC) .
- Từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) .
- Giữa hai đường thẳng AB và SC .

Lời giải



a) Kẻ SH vuông góc với BC tại H thì $SH \perp (ABC)$, suy ra $d(S, (ABC)) = SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

b) Kẻ HK vuông góc với AC tại K , HQ vuông góc với SK tại Q thì $d(H, (SAC)) = HQ$.

Ta có: $AB = \frac{a}{2}$, $HK = \frac{a}{4}$ và tam giác SHK vuông tại H , đường cao HQ nên $HQ = \frac{SH \cdot HK}{SK} = \frac{a\sqrt{39}}{26}$.

Lại có H là trung điểm của BC nên $d(B, (SAC)) = 2d(H, (SAC)) = \frac{a\sqrt{39}}{13}$.

c) Dựng hình bình hành $ABMC$, chứng minh được $ABMC$ là hình chữ nhật. Khi đó $AB \parallel (SCM)$ và mặt phẳng (SMC) chứa SC nên $d(AB, SC) = d(AB, (SCM)) = d(B, (SCM)) = 2d(H, (SCM))$.

Kẻ HN vuông góc với CM tại N , HE vuông góc với SN tại N thì $HE \perp (SCM)$, suy ra

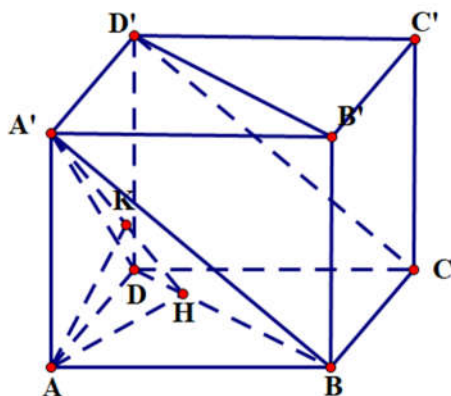
$d(H, (SCM)) = HE$. Ta có: $HN = \frac{BM}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$, tam giác SHN vuông tại H , đường cao HE nên

$HE = \frac{SH \cdot HN}{SN} = \frac{a\sqrt{15}}{10}$. Vậy $d(AB, SC) = \frac{a\sqrt{15}}{5}$.

7.30. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, $AA' = a\sqrt{3}$. Tính theo a khoảng cách:

a) Từ điểm A đến mặt phẳng $(BDD'B')$. b) Giữa hai đường thẳng BD và CD' .

Lời giải



a) Kẻ AH vuông góc với BD tại H . Khi đó $AH \perp (BB'D'D)$, suy ra

$$d(A, (BB'D'D)) = AH = \frac{AB \cdot AD}{BD} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

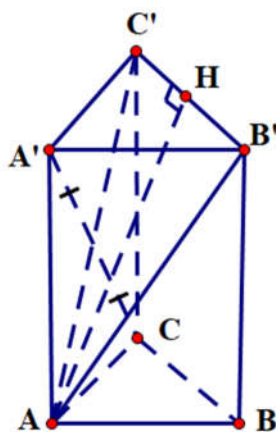
b) Ta có: $CD' \parallel (A'BD)$ nên $d(CD', BD) = d(CD', (A'BD)) = d(C, (A'BD))$.

Vì AC cắt BD tại trung điểm của AC nên $d(C, (A'BD)) = d(A, (A'BD))$. Kẻ AK vuông góc với $A'H$ tại K . Khi đó $AK \perp (A'BD)$, suy ra $d(A, (A'BD)) = AK = \frac{AH \cdot AA'}{A'H} = \frac{a\sqrt{66}}{11}$. Vậy $d(CD', BD) = \frac{a\sqrt{66}}{11}$

7.31. Cho hình lăng trụ đứng $ABC \cdot A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và $AB = AC = AA' = a$. Tính theo a khoảng cách:

a) Từ điểm A đến đường thẳng $B'C'$. b) Giữa hai đường thẳng BC và AB' .

Lời giải



a) Kẻ AH vuông góc với $B'C'$ tại H thì $d(A, B'C') = AH$.

Ta có: $AB' = AC' = B'C' = a\sqrt{2}$ nên $AH = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Vậy $d(A, B'C') = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

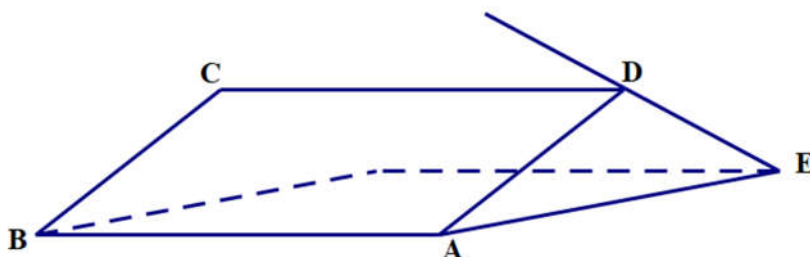
b) Vì $BC \parallel (AB'C')$ nên $d(BC, AB') = d(BC, (AB'C')) = d(C, (AB'C'))$.

Mà CA' cắt AC' tại trung điểm của CA' nên $d(C, (AB'C')) = d(A', (AB'C'))$.

Đặt $d(A', (AB'C')) = h$ thì $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{A'B'^2} + \frac{1}{A'C'^2} = \frac{3}{a^2}$, suy ra $h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Vậy $d(BC, AB') = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

7.32. Trên một mái nhà nghiêng 30° so với mặt phẳng nằm ngang, người tô dựng một chiếc cột vuông góc với mái nhà. Hỏi chiếc cột tạo với mặt phẳng nằm ngang một góc bao nhiêu độ? Vì sao?

Lời giải



Gọi AB là giao tuyến của mặt phẳng mái nhà và mặt phẳng nằm ngang, AD là đường thẳng nằm trên mái nhà và vuông góc với AB , đường thẳng DE là chiếc cột vuông góc với mái nhà, đường thẳng AE nằm trên mặt phẳng nằm ngang, khi đó tam giác ADE vuông tại D , đường thẳng AE là hình chiếu vuông góc của DE trên mặt phẳng nằm ngang, mà góc DAE bằng 30° nên góc giữa hai đường thẳng DE và AE bằng 60° .

Vậy góc giữa đường thẳng DE (chiếc cột) và mặt phẳng nằm ngang bằng góc giữa hai đường DE và AE bằng 60° .

BÀI 27: THỂ TÍCH

A – KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Thể tích của khối chóp

Thể tích của khối chóp có diện tích đáy S và chiều cao h là $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h$.

2. Thể tích khối lăng trụ

Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy S và chiều cao h là $V = S \cdot h$.

3. Thể tích khối chóp cụt

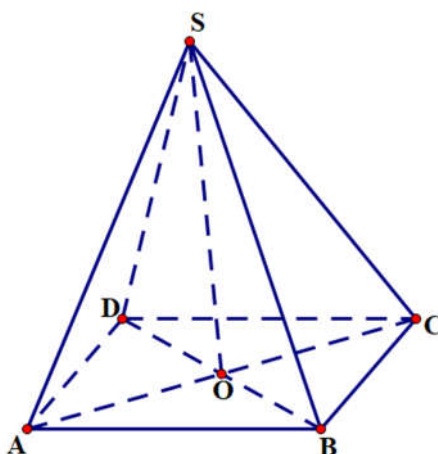
Thể tích khối chóp cụt có diện tích đáy lớn S , diện tích đáy bé S' và chiều cao h là

$$V = \frac{1}{3} \left(S + S' + \sqrt{S \cdot S'} \right) \cdot h$$

B - VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho khối chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a , góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải



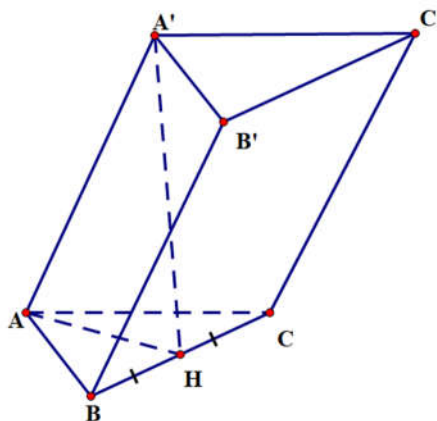
Gọi O là giao điểm của AC và BD thì $SO \perp (ABCD)$ và góc giữa SA và $(ABCD)$ bằng góc SAO

bằng 60° . Xét tam giác SAO vuông tại O , có $AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, và $\widehat{SAO} = 60^\circ$.

Khi đó $SO = AO \cdot \tan \widehat{SAO} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Do đó, $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$

Ví dụ 2. Cho khối lăng trụ tam giác $ABC \cdot A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a , cạnh $AA' = a$ và hình chiếu vuông góc H của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của BC . Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$.

Lời giải



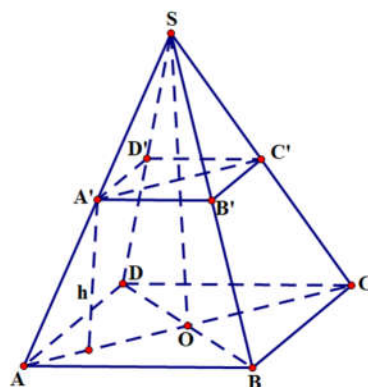
Ta có $A'H$ là đường cao của khối lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$, tam giác ABC đều có đường cao AH nên ta tính được $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AA' = a$ và tam giác $A'AH$ vuông tại H nên theo định lý Pythagore ta tính được

$A'H = \frac{a}{2}$. Tam giác ABC đều có cạnh bằng a nên diện tích tam giác ABC bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$$\text{Vậy } V_{ABC \cdot A'B'C'} = S_{ABC} \cdot A'H = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}.$$

Ví dụ 3. Cho hình chóp cắt đều $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có đáy lớn $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $a\sqrt{2}$, đáy nhỏ $A'B'C'D'$ là hình vuông cạnh bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, các cạnh bên bằng nhau và bằng a . Tính theo a thể tích khối chóp cắt $ABCD \cdot A'B'C'D'$.

Lời giải



Gọi O là giao điểm của AC và BD , S là giao điểm của AA' và CC' . Vì $A'B' = \frac{1}{2}AB$ nên A' là trung điểm của SA . Từ đó, suy ra $SA = SC = 2a$. Vì $ABCD$ là hình vuông và $AB = a\sqrt{2}$ nên $AC = 2a$. Do đó, tam giác SAC đều, có đường cao SO . Từ đó, ta tính được $SO = a\sqrt{3}$. Vì A' là trung điểm của SA và $SO \perp (ABCD)$ nên chiều cao h của hình chóp cắt $ABCD \cdot A'B'C'D'$ bằng $\frac{1}{2}SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Diện tích đáy

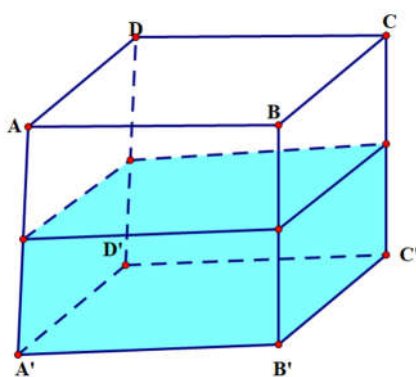
lớn và đáy nhỏ của hình chóp cắt $ABCD \cdot A'B'C'D'$ lần lượt là $2a^2; \frac{a^2}{2}$. Vậy thể tích khối chóp cắt

$$ABCD \cdot A'B'C'D' \text{ bằng } \frac{1}{3} \cdot \left(2a^2 + \frac{a^2}{2} + \sqrt{2a^2 \cdot \frac{a^2}{2}} \right) \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{7a^3\sqrt{3}}{12}.$$

Ví dụ 4. Một thùng nước có dạng hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$, $AB = 5 \text{ m}$, $AA' = 3 \text{ m}$, $AD = 4 \text{ m}$. Đáy bể là hình chữ nhật $A'B'C'D'$ được đặt trên một mặt phẳng nằm ngang.

- Giải tích vì sao khi nước trong bể phẳng lặng, thì phần nước đó ứng với một khối hộp chữ nhật.
- Tính mức nước trong bể (khoảng cách từ mặt nước đến đáy bể) khi thể tích phần nước trong bể là 40 m^3 .

Lời giải



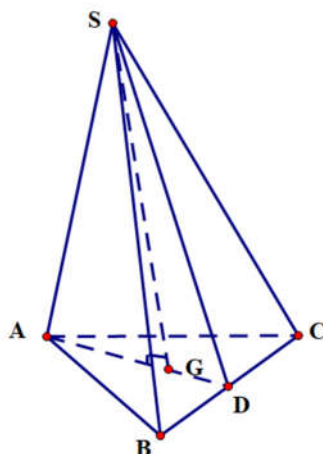
a) Vì mặt phẳng chứa bề mặt nước song song với mặt đáy nên phần nước trong bể là khối hình lăng trụ đứng, có đáy $A'B'C'D'$ là hình chữ nhật nên phần nước trong bể là khối hộp chữ nhật.

b) Mức nước trong bể là $h = \frac{40}{4 \cdot 5} = 2 \text{ (m)}$.

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 7.28. Cho khối chóp đều $S.ABC$, đáy có cạnh bằng a , cạnh bên bằng b . Tính thể tích của khối chóp đó. Từ đó suy ra thể tích của khối tứ diện đều có cạnh bằng a .

Lời giải



Vì hình chóp $S.ABC$ đều, gọi G là hình chiếu của S trên (ABC) nên G là tâm của đáy ABC là tam giác đều do đó G cũng là trọng tâm hay trực tâm của tam giác ABC .

Gọi AG cắt BC tại D

Tam giác ABC đều cạnh a nên $AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Mà G là trọng tâm nên $AG = \frac{2}{3}AD = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Xét tam giác SAG vuông tại G có

$$SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}$$

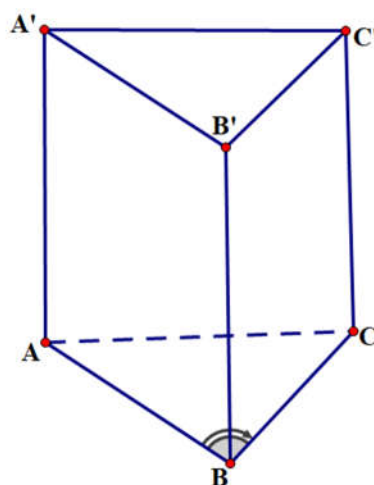
Diện tích tam giác đều ABC là : $S_{ABC} = \frac{1}{2}a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Thể tích khối chóp đều là: $V = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Do đó thể tích của khối tứ diện đều có cạnh bằng a là $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{12} \cdot \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Bài 7.29. Cho khối lăng trụ đứng $ABC \cdot A'B'C'$ có $AA' = 5$ cm, $AB = 6$ cm, $BC = 2$ cm, $\widehat{ABC} = 150^\circ$. Tính thể tích của khối lăng trụ.

Lời giải



Diện tích đáy ABC là : $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin \widehat{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 = 3\text{cm}^2$

$$V = 3 \cdot 5 = 15\text{cm}^3$$

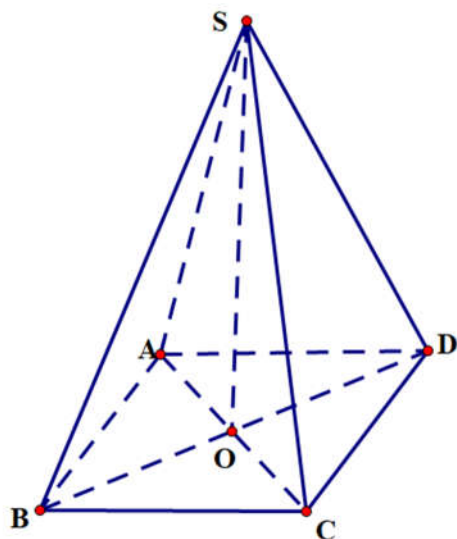
Vậy thể tích của khối lăng trụ là 15cm^3

Bài 7.30. Cho khối chóp đều $S.ABCD$, đáy có cạnh 6 cm. Tính thể tích của khối chóp đó trong các trường hợp sau:

a) Cạnh bên tạo với mặt đáy một góc bằng 60° .

b) Mặt bên tạo với mặt đáy một góc bằng 45° .

Lời giải



a)

Gọi $AC \cap BD = \{O\}$ mà $S.ABCD$ đều nên $SO \perp (ABCD)$

$\Rightarrow O$ là hình chiếu của S trên $(ABCD)$

C là hình chiếu của C trên $(ABCD)$

$\Rightarrow OC$ là hình chiếu của SC trên $(ABCD)$

$\Rightarrow (SC, (ABCD)) = (SC, OC) = \widehat{SCO}$

Mà cạnh bên tạo với mặt đáy một góc bằng 60° .

$\Rightarrow \widehat{SCO} = 60^\circ$

Xét tam giác ABC vuông tại B có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$ (cm)

$\Rightarrow OC = \frac{AC}{2} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$ (cm)

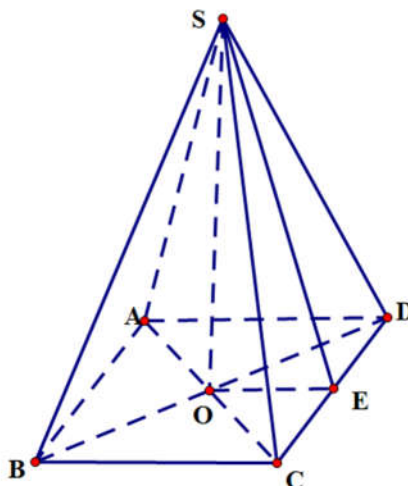
Xét tam giác SOC vuông tại O có

$\tan \widehat{SCO} = \frac{SO}{OC} \Rightarrow SO = 6\sqrt{2} \cdot \tan 60^\circ = 6\sqrt{6}$ (cm)

$S_{ABCD} = 6^2 = 36$ (cm^2)

Vậy khối chóp có thể tích $V = \frac{1}{3} SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{6} \cdot 36 = 72\sqrt{6}$ (cm^3)

b)



Trong $(ABCD)$ kẻ $OE \perp CD$

$$SO \perp CD (SO \perp (ABCD))$$

$$\Rightarrow CD \perp (SOE), SE \subset (SOE) \Rightarrow CD \perp SE, OE \perp CD, (SCD) \cap (ABCD) = CD$$

$$\Rightarrow ((SCD), (ABCD)) = (SE, OE) = \widehat{SEO}$$

Mà mặt bên tạo với mặt đáy một góc bằng 45° .

$$\Rightarrow \widehat{SEO} = 45^\circ$$

Ta có $\left. \begin{array}{l} OE \perp CD \\ AD \perp CD \end{array} \right\} \Rightarrow OE \parallel AD$ mà O là trung điểm AC nên OE là đường trung bình tam giác ACD.

$$\Rightarrow OE = \frac{AD}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ (cm)}$$

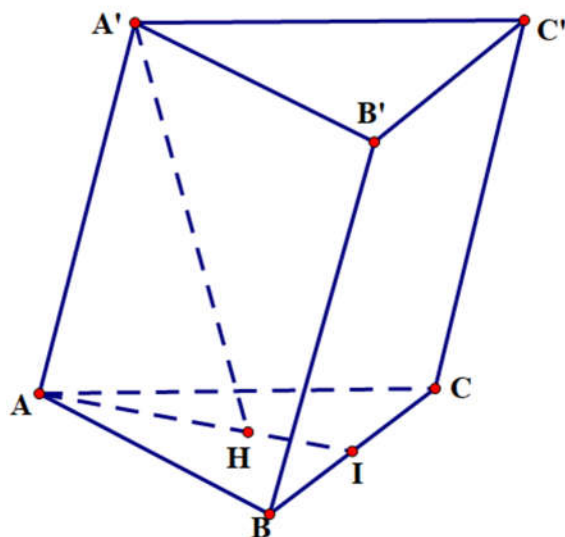
Xét tam giác SOE vuông tại O có

$$\tan \widehat{SEO} = \frac{SO}{OE} \Rightarrow SO = 3 \cdot \tan 45^\circ = 3 \text{ (cm)}$$

$$\text{Vậy khối chóp có thể tích } V = \frac{1}{3} SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 36 = 36 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Bài 7.31. Cho khối lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ có đáy là các tam giác đều cạnh a , $A'A = A'B = A'C = b$. Tính thể tích của khối lăng trụ.

Lời giải



Tam giác ABC đều $\Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Gọi H là trọng tâm tam giác ABC $\Rightarrow AH \perp (ABC), AH = \frac{2}{3}AI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

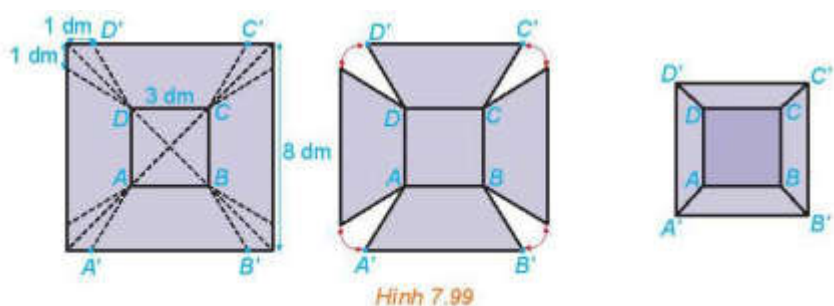
Diện tích tam giác ABC là: $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Thể tích khối lăng trụ là: $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a^3}{4}$

Bài 7.32. Từ một tấm tôn hình vuông có cạnh 8dm, bác Hùng cắt bỏ bốn phần như nhau ở bốn góc, sau đó bác hàn các mép lại để được một chiếc thùng (không có nắp) như Hình 7.99.

- Giải thích vì sao chiếc thùng có dạng hình chóp cụt.
- Tính cạnh bên của thùng.
- Hỏi thùng có thể chứa được nhiều nhất bao nhiêu lít nước?

Lời giải



Hình 7.99

a) $AB \parallel A'B' \Rightarrow AB \parallel (A'B'C'D'), AD \parallel A'D' \Rightarrow AD \parallel (A'B'C'D')$

Do đó $(ABCD) \parallel (A'B'C'D')$.

Chiếc thùng có dạng hình chóp cụt vì khi bác Hùng cắt bỏ bốn phần như nhau ở bốn góc của tấm tôn vuông, sẽ tạo thành bốn tam giác vuông cân.

Vậy chiếc thùng có dạng hình chóp cụt.

b) Cạnh bên của hình chóp cụt bằng $\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{34}}{2}(\text{dm})$

c) Xét mặt chứa đường chéo của hình vuông, nó là hình thang cân có chiều cao bằng chiều cao của hình

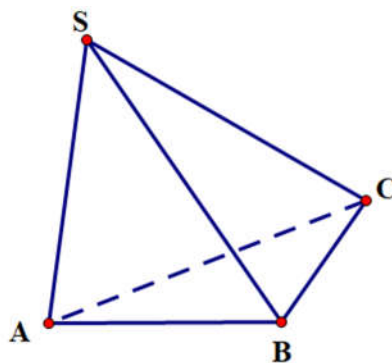
chóp cụt và được $h = \sqrt{\frac{34}{4} - \frac{18}{4}} = 2(\text{dm})$

Thể tích cần tìm là $V = 42$ lít.

D-BÀI TẬP

7.33. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$; $AB = a$; $AC = a\sqrt{2}$ và $\widehat{SBA} = 60^\circ$, $\widehat{BAC} = 45^\circ$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$.

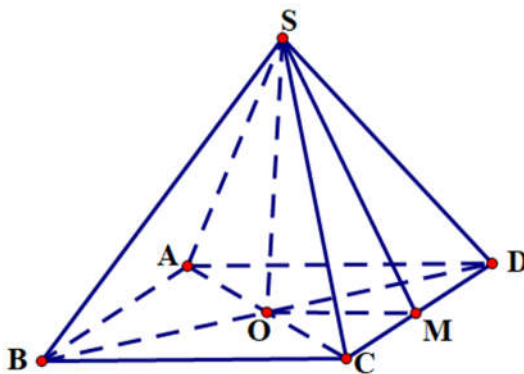
Lời giải



Ta có: $SA = AB \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$; $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} = \frac{a^2}{2}$. Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SA = \frac{a^3 \sqrt{3}}{6}$

7.34. Cho khối chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a , góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải

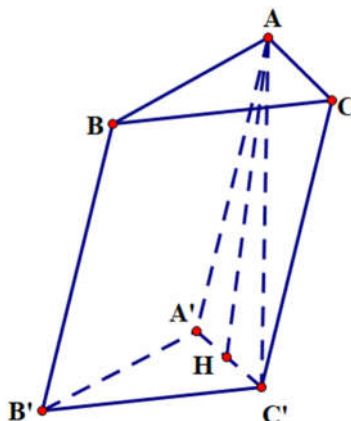


Gọi O là giao điểm của AC và BD , ta có SO vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Kẻ OM vuông góc với CD tại M thì SM cũng vuông góc với CD nên góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ bằng góc giữa hai đường thẳng SM và OM , mà $(SM, OM) = \widehat{SMO} = 60^\circ$.

Ta có: $OM = \frac{a}{2}$; $SO = OM \cdot \tan \widehat{SMO} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12}$.

7.35. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $A'B'C'$ và $AA'C'$ là hai tam giác đều cạnh a . Biết $(ACC'A') \perp (A'B'C')$. Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Lời giải

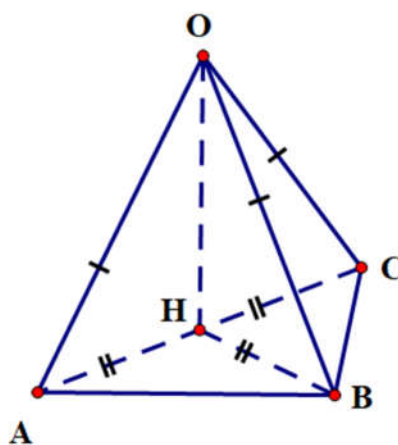


Kẻ $AH \perp A'C'$ tại H thì $AH \perp (A'B'C')$.

Ta có: $S_{A'B'C'} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, suy ra $V_{ABC \cdot A'B'C'} = S_{A'B'C'} \cdot AH = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^3}{8}$

7.36. Cho tứ diện $OABC$ có $OA = OB = OC = a$ và $\widehat{AOB} = 90^\circ$; $\widehat{BOC} = 60^\circ$; $\widehat{COA} = 120^\circ$. Tính theo a thể tích khối tứ diện $OABC$.

Lời giải



Ta có: $AB = a\sqrt{2}$, $BC = a$, $CA = a\sqrt{3}$, tam giác ABC vuông tại B . Kẻ OH vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại H . Vì $OA = OB = OC$ nên $HA = HB = HC$, hay H là trung điểm của AC . Xét tam giác

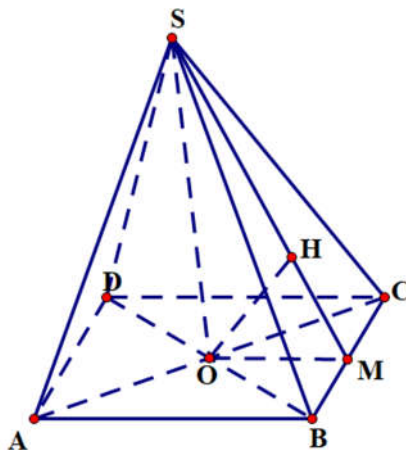
OAH vuông tại H , theo định lý Pythagore ta tính được: $OH = \frac{a}{2}$. Do đó

$$V_{OABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot OH = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

7.37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , biết $SO \perp (ABCD)$,

$AC = 2a\sqrt{3}$, $BD = 2a$ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính theo a thể tích khối chóp $S \cdot ABCD$.

Lời giải



Kẻ OM vuông góc với BC tại M, OH vuông góc với SM tại H, ta chứng minh được $OH \perp (SBC)$. Vì

O là trung điểm của AC nên $d(A, (SBC)) = 2 \cdot d(O, (SBC)) = 2 \cdot OH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, suy ra $OH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Tam giác OBC vuông tại O, có $OB = a, OC = a\sqrt{3}$ và đường cao OM nên $OM = \frac{OB \cdot OC}{BC} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

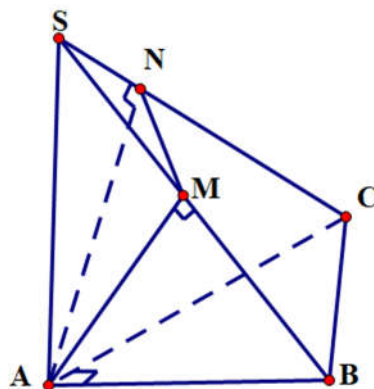
Tam giác SOM vuông tại O, đường cao OH nên $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{OS^2}$, suy ra $SO = \frac{a}{2}$.

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a\sqrt{3} \cdot 2a \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$$

7.38. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = a$ và đáy ABC là tam giác vuông tại

A , $AB = a, AC = a\sqrt{3}$. Kẻ AM vuông góc với SB tại M, AN vuông góc với SC tại N. Tính theo a thể tích khối chóp S.AMN.

Lời giải



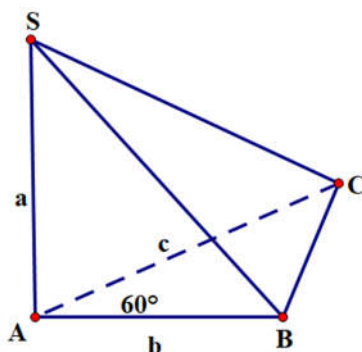
Ta có: $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$, tam giác SAB vuông cân tại A nên $\frac{SM}{SB} = \frac{1}{2}$; tam giác SAC vuông tại A, đường

cao AN nên $\frac{SN}{SC} = \frac{SN \cdot SC}{SC^2} = \frac{SA^2}{SC^2} = \frac{1}{4}$.

Do đó $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{1}{8}$, suy ra $V_{S.AMN} = \frac{1}{8} \cdot V_{S.ABC} = \frac{1}{8} \cdot \frac{a^3 \sqrt{3}}{6} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{48}$

7.39. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$, biết diện tích các tam giác ABC, SAB và SAC lần lượt là $3\sqrt{3}; 9; 12$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Lời giải



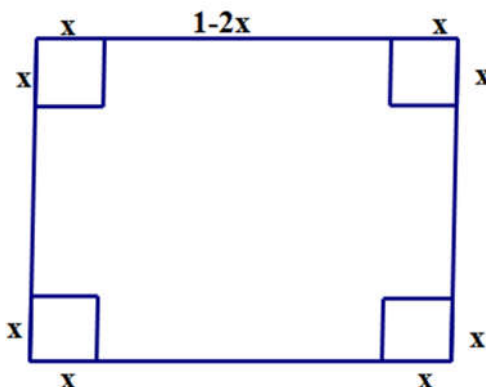
Đặt $SA = a, AB = b, AC = c$. Khi đó $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot bc \cdot \sin 60^\circ \cdot a = \frac{abc\sqrt{3}}{12}$.

Theo đề bài, ta có: $S_{ABC} = \frac{1}{2} bc \cdot \sin 60^\circ = 3\sqrt{3}$, suy ra $bc = 12$.

$S_{SAB} = \frac{ab}{2} = 9$, suy ra $ab = 18$; $S_{SAC} = \frac{ac}{2} = 12$, suy ra $ac = 24$. Do đó $(abc)^2 = 12 \cdot 18 \cdot 24 = 72^2$, hay $abc = 72$. Vậy $V_{S.ABC} = 6\sqrt{3}$.

7.40. Người ta cắt bỏ bốn hình vuông cùng kích thước ở bốn góc của một tấm tôn hình vuông có cạnh 1 m để gò lại thành một chiếc thùng có dạng hình hộp chữ nhật không nắp. Hỏi cạnh của các hình vuông cần bỏ đi có độ dài bằng bao nhiêu để thùng hình hộp nhận được có thể tích lớn nhất?

Lời giải



Gọi $x(m)$ là chiều dài cạnh hình vuông nhỏ tại mỗi góc của tấm tôn được cắt bỏ đi (với $0 < x < \frac{1}{2}$). Thể tích hình hộp chữ nhật nhận được là

$$V = (1-2x)^2 \cdot x = \frac{1}{4} \cdot (1-2x) \cdot (1-2x) \cdot 4x \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1-2x+1-2x+4x}{3} \right)^3 = \frac{2}{27}$$

Dấu "=" xảy ra khi $1-2x = 4x \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}$. Vậy để thể tích chiếc thùng là lớn nhất thì các cạnh của hình vuông

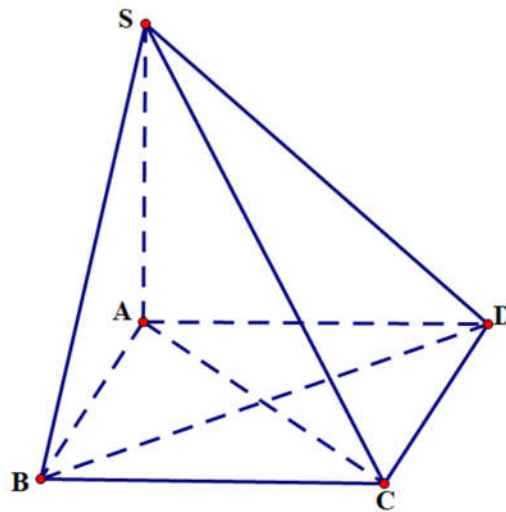
được cắt bỏ đi là $\frac{1}{6} m$.

C. Đường thẳng AC vuông góc với mặt phẳng (SBD) .

D. Đường thẳng AD vuông góc với mặt phẳng (SAB) .

Lời giải

Chọn C



Ta có: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AB, SA \perp BC, SA \perp BD$

$$AB \perp BC$$

Mà ABCD là hình vuông $\Rightarrow BD \perp AC$

$$AD \perp AB$$

$\Rightarrow BC \perp (SAB), BD \perp (SAC), AD \perp (SAB)$

Câu 7.37: Thể tích của khối chóp có diện tích đáy bằng S , chiều cao bằng h là:

- A.** $V = S \cdot h$. **B.** $V = \frac{1}{2} \cdot S \cdot h$ **C.** $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h$. **D.** $V = \frac{2}{3} \cdot S \cdot h$.

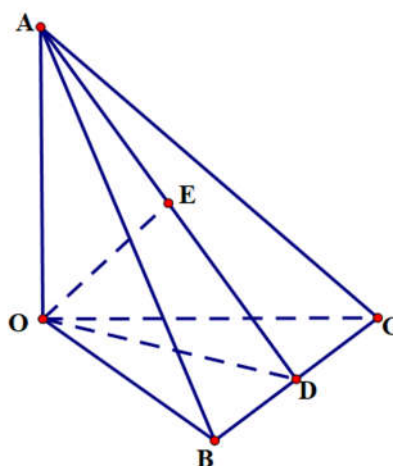
Lời giải

Chọn C

B – TỰ LUẬN

Bài 7.38. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = a, OB = a\sqrt{2}$ và $OC = 2a$. Tính khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (ABC) .

Lời giải



Ta có $OA \perp OB, OA \perp OC \Rightarrow OA \perp (OBC); BC \subset (OBC) \Rightarrow OA \perp BC$ Trong (OBC) kẻ $OD \perp BC$

$$\Rightarrow BC \perp (OAD); BC \subset (ABC) \Rightarrow (OAD) \perp (ABC)$$

$$(OAD) \cap (ABC) = AD$$

Trong (OAD) $OE \perp AD$

$$\Rightarrow OE \perp (ABC) \Rightarrow d(O, (ABC)) = OE$$

Xét tam giác OBC vuông tại O có

$$\frac{1}{OD^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{(a\sqrt{2})^2} + \frac{1}{(2a)^2} = \frac{3}{4a^2} \Rightarrow OD = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Xét tam giác OAD vuông tại O có

$$\frac{1}{OE^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OD^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{7}{4a^2} \Rightarrow OE = \frac{2a\sqrt{7}}{7}$$

$$\text{Vậy } d(O, (ABC)) = \frac{2a\sqrt{7}}{7}$$

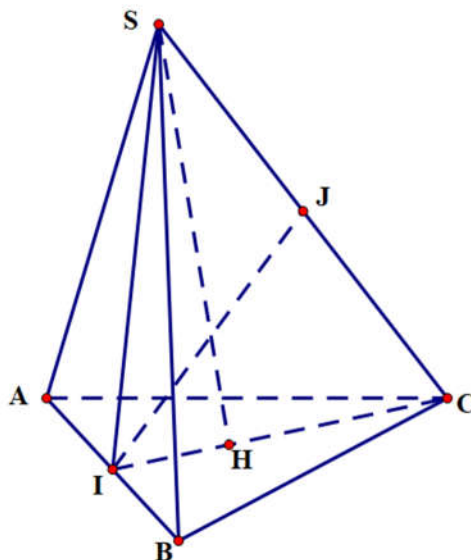
Bài 7.39. Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác ABC cân tại A , tam giác BCD cân tại D . Gọi I là trung điểm của cạnh BC .

a) Chứng minh rằng $BC \perp (AID)$

b) Kẻ đường cao AH của tam giác AD . Chứng minh rằng $AH \perp (BCD)$.

c) Kẻ đường cao IJ của tam giác AID . Chứng minh rằng IJ là đường vuông góc chung của AD và BC .

Lời giải



a) Xét tam giác ABC cân tại A có
 I là trung điểm của $BC \Rightarrow AI \perp BC$

Xét tam giác ACD cân tại D có
 I là trung điểm của $BC \Rightarrow DI \perp BC$

Ta có $AI \perp BC, DI \perp BC \Rightarrow BC \perp (AID)$

b) $BC \perp (AID); BC \subset (BCD) \Rightarrow (BCD) \perp (AID)$

$$(BCD) \cap (AID) = DI$$

Trong (AID) có $AH \perp DI$

$$\Rightarrow AH \perp (BCD)$$

c) Ta có $BC \perp (AID); IJ \subset (AID) \Rightarrow BC \perp IJ$

Mà $IJ \perp AD$

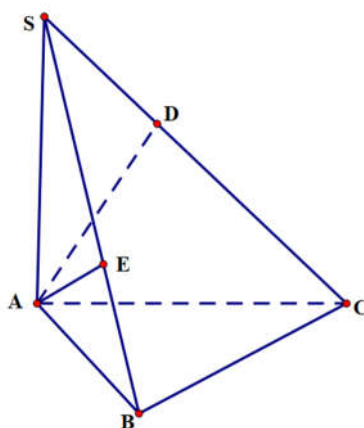
Do đó IJ là đường vuông góc chung của AD và BC

Bài 7.40. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $BC = a$ và $\widehat{CAB} = 30^\circ$. Biết $SA \perp (ABC)$ và $SA = a\sqrt{2}$.

a) Chứng minh rằng $(SBC) \perp (SAB)$.

b) Tính theo a khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng SC và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) .

Lời giải



a) $SA \perp BC$ ($SA \perp (ABC)$), $AB \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAB)$, $BC \subset (SBC) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$

b) +) Trong (SAC) kẻ $AD \perp SC \Rightarrow d(A, SC) = AD$

Xét tam giác ABC vuông tại B có

$$\sin \widehat{CAB} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow AC = \frac{a}{\sin 30^\circ} = 2a$$

Xét tam giác SAC vuông tại A có

$$\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{(a\sqrt{2})^2} + \frac{1}{(2a)^2} = \frac{3}{4a^2} \Rightarrow AD = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Do đó } d(A, SC) = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

+) $(SAB) \perp (SBC)$, $(SAB) \cap (SBC) = SB$

Trong (SAB) kẻ $AE \perp SB$

$$\Rightarrow AE \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AE$$

Xét tam giác ABC vuông tại B có

$$\tan \widehat{CAB} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow AB = \frac{a}{\tan 30^\circ} = a\sqrt{3}$$

Xét tam giác SAB vuông tại A có

$$\frac{1}{AE^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{(a\sqrt{2})^2} + \frac{1}{(a\sqrt{3})^2} = \frac{5}{6a^2} \Rightarrow AE = \frac{a\sqrt{30}}{5}$$

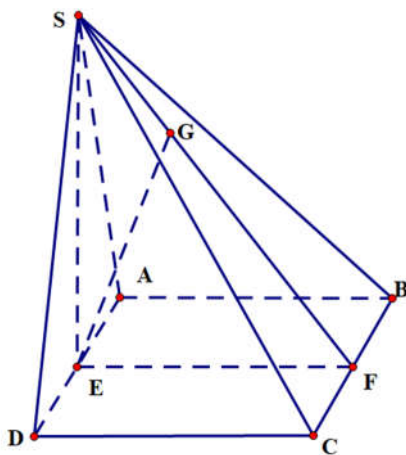
$$\text{Vậy } d(A, (SBC)) = \frac{a\sqrt{30}}{5}$$

Bài 7.41. Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a . Biết tam giác SAD vuông cân tại S và $(SAD) \perp (ABCD)$.

a) Tính theo a thể tích của khối chóp $S \cdot ABCD$.

b) Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SC .

Lời giải



a) Trong (SAD) kẻ $SE \perp AD$

Mà $(SAD) \perp (ABCD), (SAD) \cap (ABCD) = AD \Rightarrow SE \perp (ABCD)$

Xét tam giác SAD vuông cân tại S có

$$SE \perp AD$$

$\Rightarrow E$ là trung điểm của AD

$$\Rightarrow SE = \frac{AD}{2} = \frac{a}{2}$$

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = a^2$

$$\text{Thể tích khối chóp là } V = \frac{1}{3} SE \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot a^2 = \frac{a^3}{6}$$

b) Trong $(ABCD)$ kẻ $EF \parallel AB$ mà $AB \perp BC \Rightarrow EF \perp BC$

mà $SE \perp BC \Rightarrow BC \perp (SEF); BC \subset (SBC) \Rightarrow (SEF) \perp (SBC)$

$$(SEF) \cap (SBC) = SF$$

Trong (SEF) kẻ $EG \perp SF$

$$\Rightarrow EG \perp (SBC)$$

Ta có $AD \parallel BC$ nên $AD \parallel (SBC)$

$$\Rightarrow d(AD, SC) = d(AD, (SBC)) = d(E, (SBC)) = EG$$

Vì $ABCD$ là hình vuông và $EF \parallel AB$ nên $EF = AB = a$

Xét tam giác SEF vuông tại E có

$$\frac{1}{EG^2} = \frac{1}{SE^2} + \frac{1}{EF^2} = \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{a^2} \Rightarrow EG = \frac{a\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{Vậy } d(AD, SC) = \frac{a\sqrt{5}}{5}$$

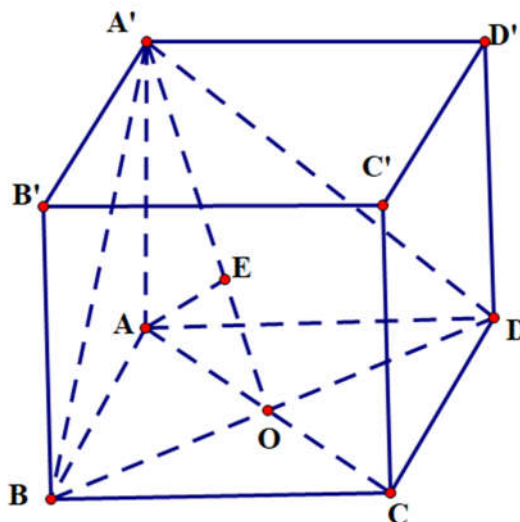
Bài 7.42. Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a , $AA' \perp (ABCD)$ và

$$\widehat{BAD} = 60^\circ.$$

a) Tính thể tích của khối hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$.

b) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BD)$.

Lời giải



a) Diện tích tam giác ABD bằng diện tích tam giác BCD vì chung đáy BD và chiều cao $AO = OC$ ($ABCD$ là hình thoi) Diện tích tam giác ABD :

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{BAD} = \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \sin 60^\circ = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \Rightarrow S = 2S_{ABD} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Thể tích khối hộp là } V = AA' \cdot S_{ABCD} = a \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{2}$$

b) Gọi $AC \cap BD = \{O\}$

Ta có $AA' \perp BD$, $AO \perp BD \Rightarrow BD \perp (A'AO)$; $BD \subset (A'BD) \Rightarrow (A'AO) \perp (A'BD)$

$$(A'AO) \cap (A'BD) = A'O$$

Trong $(A'AO)$ kẻ $AE \perp A'O$

$$\Rightarrow AE \perp (A'BD) \Rightarrow d(A, (A'BD)) = AE$$

Xét tam giác ABD có $AB = AD$ và $\widehat{BAD} = 60^\circ$ nên tam giác ABD đều

$$\Rightarrow OA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

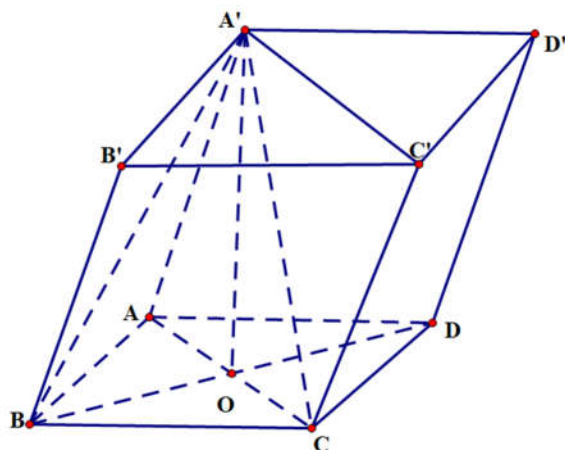
Xét tam giác AOA' vuông tại A có

$$\frac{1}{AE^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{OA^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{7}{3a^2} \Rightarrow AE = \frac{a\sqrt{21}}{7}$$

$$\text{Vậy } d(A, (A'BD)) = \frac{a\sqrt{21}}{7}$$

Bài 7.43. Cho hình lăng trụ $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Biết $A' \cdot ABCD$ là hình chóp đều có tất cả các cạnh đều bằng nhau và bằng a . Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABCD \cdot A'B'C'D'$ và thể tích của khối chóp $A' \cdot BB'C'C$.

Lời giải



Gọi $AC \cap BD = \{O\}$ mà $A' \cdot ABCD$ là hình chóp đều nên $A'O \perp (ABCD)$

Xét tam giác ABC vuông tại B có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$

$$\Rightarrow OA = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Xét tam giác A'AO vuông tại O có

$$A'O = \sqrt{AA'^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$S_{ABCD} = a^2$$

$$\text{Vậy khối lăng trụ có thể tích } V = \frac{1}{3} A'O \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$$

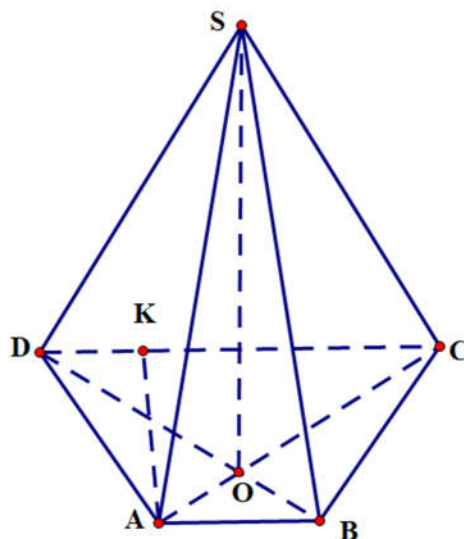
Nếu hình lăng trụ $ABCD \cdot A'B'C'D'$ xoay lại thành hình lăng trụ $AA'D'D \cdot BB'C'C$ thì thể tích không thay đổi do đó thể tích hình chóp $A' \cdot BB'C'C$ bằng một phần 3 thể tích hình lăng trụ $AA'D'D \cdot BB'C'C$ vì chung đáy và chung chiều cao kẻ từ A' xuống đáy $BB'C'C$.

$$\text{Thể tích khối chóp là } V_{A' \cdot BB'C'C} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^3\sqrt{2}}{6} = \frac{a^3\sqrt{2}}{18}$$

Bài 7.44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân, $AB // CD$ và

$AB = BC = DA = a, CD = 2a$. Biết hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Tính theo a khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$ và thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải



Gọi O là giao điểm của AC và BD

Mà (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ nên $SO \perp (ABCD)$ Kẻ $AK \perp DC$

$$\text{tại } K \Rightarrow DK = \frac{DC - AB}{2} = \frac{a}{2}$$

$$\text{Xét tam giác ADK vuông tại K có } AK = \sqrt{AD^2 - DK^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Xét tam giác AKC vuông tại K có } AC = \sqrt{AK^2 + KC^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2} = a\sqrt{3}$$

$$\text{Ta có } AB \parallel CD \text{ nên } \frac{OA}{OC} = \frac{AB}{DC} = \frac{1}{2} \Rightarrow OA = \frac{1}{3}AC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

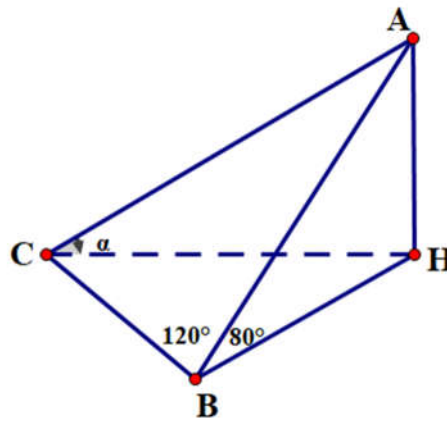
Xét tam giác SAO vuông tại O có

$$A'O = \sqrt{AA'^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Thể tích của khối chóp S.ABCD là } V = \frac{a^3\sqrt{5}}{4}$$

Bài 7.45. Trên mặt đất phẳng, người ta dựng một cây cột AB có chiều dài bằng 10 m và tạo với mặt đất góc 80° . Tại một thời điểm dưới ánh sáng mặt trời, bóng BC của cây cột trên mặt đất dài 12 m và tạo với cây cột một góc bằng 120° (tức là $\widehat{ABC} = 120^\circ$). Tính góc giữa mặt đất và đường thẳng chứa tia sáng mặt trời tại thời điểm nói trên.

Lời giải



Góc giữa mặt đất và đường thẳng chứa tia sáng mặt trời tại thời điểm nói trên là $\widehat{BAC}$ Xét tam giác ABC có

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC} = 10^2 + 12^2 - 2 \cdot 10 \cdot 12 \cdot \cos 120^\circ = 364$$

$$\Rightarrow AC = 2\sqrt{91} (m)$$

Gọi H là hình chiếu của A trên mặt đất

Xét tam giác ABH vuông tại H có $AH = 10 \cdot \sin 80^\circ$

$$\text{Xét tam giác ACH vuông tại H có } \sin \widehat{ACH} = \frac{AH}{AC} = \frac{10 \sin 80^\circ}{2\sqrt{91}} \Rightarrow \widehat{ACH} \approx 31^\circ$$

Vậy góc giữa mặt đất và đường thẳng chứa tia sáng mặt trời tại thời điểm nói trên khoảng 31° .

PHẦN 2. BÀI TẬP SÁCH BÀI TẬP

A - TRẮC NGHIỆM

7.41. Cho đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) , đường thẳng b song song với mặt phẳng (P) . Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng

- A.** 30° . **B.** 90° . **C.** 60° . **D.** 0° .

Lời giải

Chọn: B

7.42. Cho đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) , đường thẳng b vuông góc với đường thẳng a . Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A.** Đường thẳng b cắt mặt phẳng (P) .
B. Đường thẳng b song song với mặt phẳng (P) .
C. Đường thẳng b nằm trên mặt phẳng (P) .
D. Đường thẳng b nằm trên mặt phẳng (P) hoặc song song với mặt phẳng (P) .

Lời giải

Chọn: D

7.43. Cho tứ diện đều $ABCD$, góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

- A.** 30° . **B.** 45° . **C.** 60° . **D.** 90° .

Lời giải

Chọn: D

7.44. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a , cosin của góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD) bằng

- A.** $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn: B

7.45. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a , cosin của góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) bằng

- A.** $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn: D

7.46. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a , gọi O là giao điểm của AC và BD . Khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SBC) bằng

- A. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn: A

7.47. Cho hình chóp đều $S \cdot ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a , gọi O là giao điểm của AC và BD . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SD bằng

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải

Chọn: C

7.48. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC \cdot A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BB' bằng

- A. $\frac{a\sqrt{7}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{14}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{7}}{4}$. D. $\frac{a\sqrt{14}}{2}$.

Lời giải

Chọn: B

7.49. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Thể tích khối tứ diện $ABC'D'$ bằng

- A. $\frac{a^3}{3}$. B. $\frac{a^3}{2}$. C. $\frac{a^3}{6}$. D. $\frac{2a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn: A

7.50. Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$, gọi M là trung điểm của AA' . Tỉ số của thể tích khối chóp $M \cdot ABCD$ và khối hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ bằng

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{6}$. D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

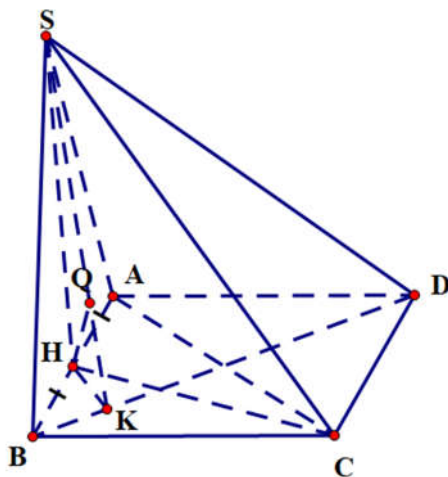
Chọn: C

B - TỰ LUẬN

7.51. Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tam giác SAB đều và $SC = a\sqrt{2}$. Gọi H là trung điểm của cạnh AB .

- Chứng minh rằng $SH \perp (ABCD)$.
- Tính theo a thể tích khối chóp $S \cdot ABCD$.
- Tính theo a khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD) .

Lời giải



a) Ta có: $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}, HC = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, suy ra $SH^2 + HC^2 = SC^2$, do đó $\triangle SHC$ vuông tại H , hay $SH \perp HC$.

Lại có $SH \perp AB$ nên $SH \perp (ABCD)$.

b) Ta có: $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}, S_{ABCD} = a^2$. Suy ra $V_{S,ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

c) Vì H là trung điểm của AB nên $d(A, (SBD)) = 2 \cdot d(H, (SBD))$. Kẻ HK vuông góc với BD tại K, HQ vuông góc với SK tại Q . Khi đó $HQ \perp (SBD)$, suy ra $d(H, (SBD)) = HQ$.

Ta tính được $HK = \frac{AC}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{4}, SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, mà tam giác SHK vuông tại H , đường cao HQ nên

$$\frac{1}{HQ^2} = \frac{1}{HK^2} + \frac{1}{HS^2}. \text{ Suy ra } HQ = \frac{a\sqrt{21}}{14}, \text{ do đó } d(A, (SBD)) = 2HQ = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

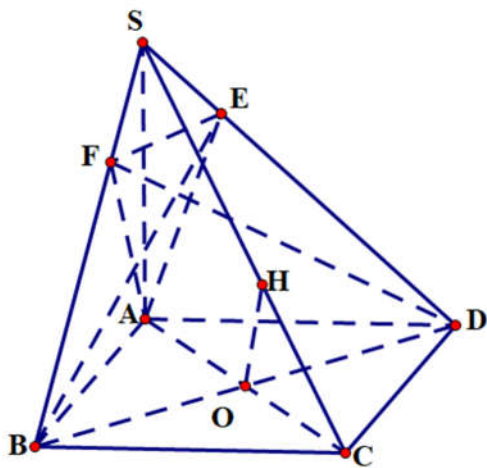
7.52. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, biết $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a và $SA = a\sqrt{2}$.

a) Chứng minh rằng $(SAC) \perp (SBD)$ và $(SAD) \perp (SCD)$.

b) Gọi BE, DF là hai đường cao của tam giác SBD . Chứng minh rằng $(ACF) \perp (SBC)$ và $(AEF) \perp (SAC)$.

c) Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC .

Lời giải



a) Ta có: $BD \perp AC, SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp BD$, suy ra $BD \perp (SAC)$, mà mặt phẳng (SBD) chứa đường thẳng BD , do đó $(SBD) \perp (SAC)$.

Ta có: $CD \perp AD, CD \perp SA$, suy ra $CD \perp (SAD)$, mà mặt phẳng (SCD) chứa đường thẳng CD , do đó $(SCD) \perp (SAD)$.

b) Ta có: $AD \perp (SAB)$ nên $AD \perp SB$, mà $SB \perp DF$ suy ra $SB \perp (ADF)$, do đó $SB \perp AF$. Ta lại có $BC \perp (SAB)$ nên $BC \perp AF$, suy ra $AF \perp (SBC)$, mà mặt phẳng (ACF) chứa đường thẳng AF nên $(ACF) \perp (SBC)$.

Vì $AF \perp (SBC)$ nên $AF \perp SC$. Tương tự, ta có $AE \perp (SCD)$ nên $AE \perp SC$, suy ra $SC \perp (AEF)$, mà mặt phẳng (SAC) chứa đường thẳng SC nên $(AEF) \perp (SAC)$.

c) Gọi O là giao điểm của AC và BD , kẻ $OH \perp SC$ tại H , mà $BD \perp (SAC)$ nên $OH \perp BD$, suy ra OH là đoạn vuông góc chung của BD và SC , hay $d(BD, SC) = OH$.

Ta có: $\triangle CHO \sim \triangle CAS$ nên $\frac{OC}{CS} = \frac{OH}{AS}$, suy ra $OH = \frac{AS \cdot OC}{CS} = \frac{a}{2}$. Vậy $d(BD, SC) = \frac{a}{2}$.

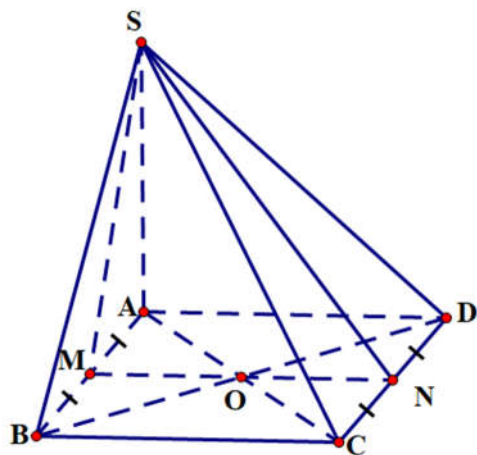
7.53. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a , cạnh bên $SA = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Gọi SM, SN lần lượt là đường cao của tam giác SAD và tam giác SBC .

a) Chứng minh rằng $(SMN) \perp (ABCD)$.

b) Tính số đo của góc nhị diện $[S, AD, B]$.

c) Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải



a) Gọi O là giao điểm của AC và BD .

Ta có: $AD \perp SM, AD \parallel BC$ nên $BC \perp SM$, mà $BC \perp SN$, suy ra $BC \perp (SMN)$. Do đó $(SMN) \perp (ABCD)$.

b) Vì MN đi qua O và $OM \perp AD, SM \perp AD$ nên $[S, AD, B] = \widehat{SMO}$, ta tính được $SM = SN = MN = a$. Do đó tam giác SMN đều, suy ra $\widehat{SMN} = 60^\circ$. Vậy $[S, AD, B] = 60^\circ$.

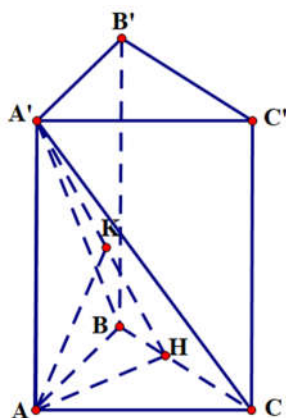
c) Ta có: $SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}, S_{ABCD} = a^2$, suy ra $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

7.54. Cho hình lăng trụ đứng $ABC \cdot A'B'C'$ có $\widehat{BAC} = 60^\circ, AB = 2a, AC = 3a$ và số đo của góc nhị diện $[A', BC, A]$ bằng 45° .

a) Tính theo a khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BC)$.

b) Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$.

Lời giải



a) Kẻ AH vuông góc với BC tại H, AK vuông góc với $A'H$ tại K thì $AK \perp (A'BC)$, suy ra $A'H \perp BC$. Góc nhị diện $[A', BC, A]$ bằng $\widehat{AHA'}$, suy ra $\widehat{AHA'} = 45^\circ$.

Theo định lí côsin, áp dụng cho tam giác ABC , ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} = 7a^2$ suy ra $BC = a\sqrt{7}$. Do đó $AH = \frac{2 \cdot S_{ABC}}{BC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC}}{BC} = \frac{3\sqrt{21}}{7}a$.

Vì tam giác AHA' vuông cân tại A nên $AK = \frac{A'H}{2} = \frac{AH\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{42}}{14}a$. Vậy $d(A, (A'BC)) = \frac{3\sqrt{42}}{14}$.

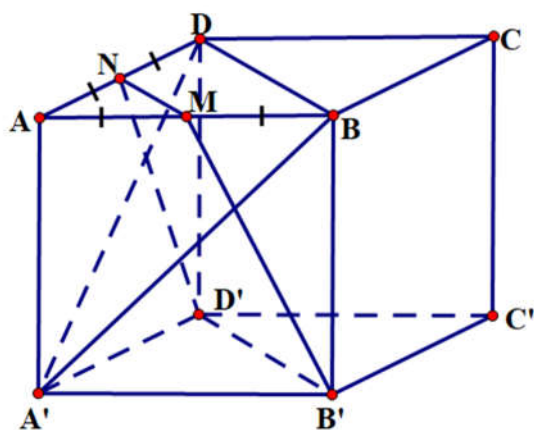
b) Thể tích khối lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ là $V_{ABC \cdot A'B'C'} = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin 60^\circ \cdot AA' = \frac{27\sqrt{7}}{14}a^3$

7.55. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AD .

a) Tính theo a thể tích khối chóp cụt $AMN \cdot A'B'D'$.

b) Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và $A'B$.

Lời giải



a) Ta có: $S_{A'B'D'} = \frac{a^2}{2}$; $S_{AMN} = \frac{a^2}{8}$; $S_{ABCD} = a^2$; $AA' = a$, suy ra thể tích khối chóp cụt $AMN \cdot A'B'D'$ là:

$$V = \frac{1}{3} \cdot AA' \cdot (S_{AMN} + S_{A'B'D'} + \sqrt{S_{AMN} \cdot S_{A'B'D'}}) = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \left(\frac{a^2}{8} + \frac{a^2}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{8} \cdot \frac{a^2}{2}} \right) = \frac{7a^3}{24}$$

b) Vì $MN \parallel BD$ nên $MN \parallel (A'BD)$, do đó: $d(MN, A'B) = d(MN, (A'BD)) = d(M, (A'BD))$.

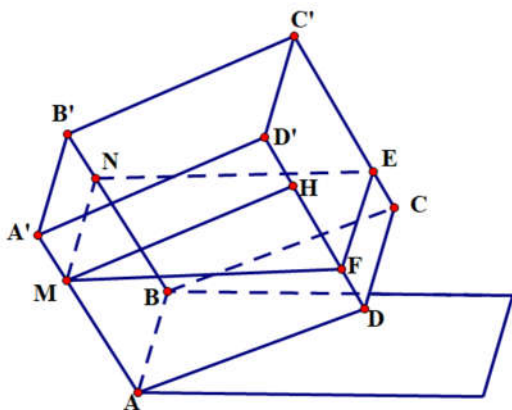
Vì M là trung điểm của AB nên $d(M, (A'BD)) = \frac{1}{2}d(A, (A'BD))$.

Đặt $h = d(A, (A'BD))$ thì $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AA'^2} = \frac{3}{a^2}$, suy ra $h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $d(MN, A'B) = d(M, (A'BD)) = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

7.56. Một bể chứa nước hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ được đặt trên một mái nhà nghiêng so với mặt đất nằm ngang góc 10° , $AB = 1$ m, $AD = 1,5$ m, $AA' = 1$ m. Đáy bể là hình chữ nhật $ABCD$. Các điểm A, B cùng ở độ cao 5 m (so với mặt đất), các điểm C, D ở độ cao lớn hơn so với độ cao của các điểm A, B . Khi nước trong bể phẳng lặng người ta đo được khoảng cách giữa đường mép nước ở mặt phẳng $(ABB'A')$ và mặt đáy của bể là 80 cm. Tính thể tích của phần nước trong bể.

Lời giải



Gọi MN là đường mép nước ở trên mặt $(ABB'A')$, EF là đường mép nước trên mặt $(CDD'C')$. Khi đó $ABNM$, $DCEF$ là một hình chóp cụt. Kẻ MH vuông góc với DD' tại H thì $HF = MH \cdot \tan 10^\circ = \tan 10^\circ$ (m).

Suy ra $DF = DH - HF = AM - HF = 0,8 - \tan 10^\circ \approx 0,62$ (m).

Ta có: $S_1 = S_{DCEF} = DF \cdot CD \approx 0,62$ (m²); $S_2 = S_{ABNM} = AB \cdot AM = 0,8$ (m²).

Vậy thể tích phần nước trong bể là

$$V = \frac{1}{3} \cdot (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}) \cdot AD = \frac{1}{3} \cdot (0,62 + 0,8 + \sqrt{0,62 \cdot 0,8}) \approx 0,71 \text{ (m}^3\text{)}$$

CHƯƠNG VIII: CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT

BÀI 28: BIẾN CỐ HỢP, BIẾN CỐ GIAO, BIẾN CỐ ĐỘC LẬP

A - KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- ☐ Cho A và B là hai biến cố. Biến cố: " A hoặc B xảy ra" được gọi là biến cố hợp của A và B và được kí hiệu là $A \cup B$.
- ☐ Giả sử A, B là tập con của không gian mẫu Ω . Biến cố hợp của A và B là tập con $A \cup B$ của không gian mẫu Ω .
- ☐ Cho A và B là hai biến cố. Biến cố: " A và B đều xảy ra" được gọi là biến cố giao của A và B và được kí hiệu là AB .
- ☐ Giả sử A, B là tập con của không gian mẫu Ω . Biến cố giao AB là tập con $A \cap B$ của không gian mẫu Ω .
- ☐ Hai biến cố A và B được gọi là độc lập nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của biến cố kia.
- ☐ Nếu cặp biến cố (A, B) độc lập thì các cặp biến cố $(A, \bar{B}); (\bar{A}, B)$ và $\bar{A}, \bar{B}$ cũng độc lập.

B - VÍ DỤ

Ví dụ 1. Hai xạ thủ X, Y mỗi người bắn một viên đạn vào một mục tiêu. Xét các biến cố A : "Xạ thủ X bắn trúng"; B : "Xạ thủ Y bắn trúng". Nêu nội dung của các biến cố $AB, A \cup B, \bar{A}\bar{B}, \bar{A}B, A\bar{B}, \bar{A}B \cup \bar{A}\bar{B}$.

Lời giải

- ☐ AB : "Cả hai xạ thủ bắn trúng".
- ☐ $A \cup B$: "Có ít nhất một xạ thủ bắn trúng".
- ☐ $\bar{A}\bar{B}$: "Cả hai xạ thủ bắn trượt".
- ☐ $\bar{A}B$: "Xạ thủ X bắn trượt, xạ thủ Y bắn trúng".
- ☐ $A\bar{B}$: "Xạ thủ X bắn trúng, xạ thủ Y bắn trượt".
- ☐ $\bar{A}B \cup \bar{A}\bar{B}$: "Chỉ có một xạ thủ bắn trúng".

Ví dụ 2. Có hai chiếc hộp A, B mỗi hộp đựng 30 tấm thẻ, đánh số từ 1 đến 30. Từ mỗi hộp rút ngẫu nhiên một tấm thẻ. Kí hiệu a, b là số ghi trên thẻ tương ứng rút từ hộp A và hộp B . Gọi M là biến cố: " a là số chẵn"; N là biến cố: " b là số chẵn". Xét biến cố E : " $a + b$ là số lẻ". Chứng tỏ rằng $E = \bar{M}\bar{N} \cup \bar{M}N$.

Lời giải

Nếu $\bar{M}\bar{N}$ xảy ra thì a là số chẵn, b là số lẻ, do đó $a + b$ lẻ tức là E xảy ra.

Nếu $\bar{M}N$ xảy ra thì a là số lẻ, b là số chẵn, do đó $a + b$ lẻ tức là E xảy ra.

Ngược lại, nếu E xảy ra thì a và b phải khác tính chẵn lẻ. Nếu a chẵn, b lẻ thì $\bar{M}\bar{N}$ xảy ra. Nếu a lẻ, b chẵn thì $\bar{M}N$ xảy ra.

Vậy $E = \overline{MN} \cup \overline{MN}$.

Ví dụ 3. Có hai lọ hoa. Lọ I cắm 5 bông hoa hồng và 3 bông hoa cúc. Lọ II cắm 4 bông hoa hồng và 5 bông hoa thược dược. Lấy ngẫu nhiên đồng thời từ mỗi lọ một bông hoa. Xét hai biến cố sau:

A : "Lấy được bông hoa hồng từ lọ I", B : "Lấy bông hoa hồng từ lọ II". Chứng tỏ rằng A và B độc lập.

Lời giải

Dù A có xảy ra (lấy được bông hoa hồng) hay A không xảy ra (lấy được bông hoa cúc) ta đều có

$$P(B) = \frac{4}{9}.$$

Dù B có xảy ra (lấy được bông hoa hồng) hay B không xảy ra (lấy được bông hoa thược dược) ta đều có

$$P(A) = \frac{5}{8}.$$

Việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của biến cố kia. Vậy A và B độc lập.

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 8.1. Một hộp đựng 15 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 15. Rút ngẫu nhiên một tấm thẻ và quan sát số ghi trên thẻ. Gọi A là biến cố "Số ghi trên tấm thẻ nhỏ hơn 7"; B là biến cố "Số ghi trên tấm thẻ là số nguyên tố".

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Mỗi biến cố $A \cup B$ và AB là tập con nào của không gian mẫu?

Lời giải

a) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$

b) A : số ghi trên tấm thẻ nhỏ hơn 7. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

B : số ghi trên tấm thẻ là số nguyên tố. $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$

$A \cup B$: số ghi trên tấm thẻ có thể là số nhỏ hơn 7 hoặc là số nguyên tố (có thể không nhỏ hơn 7).

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 13\}$$

AB : số ghi trên tấm thẻ vừa là số nhỏ hơn 7 vừa là số nguyên tố. $AB = \{2, 3, 5\}$

Bài 8.2. Gieo hai con xúc xắc cân đối, đồng chất. Xét các biến cố sau:

F : "Số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc đều là số chẵn";

F : "Số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc khác tính chẵn lẻ";

K : "Tích số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc là số chẵn".

Chứng minh rằng K là biến cố hợp của E và F .

Lời giải

Để tích của hai số chẵn là số chẵn, thì cả hai số đều phải chẵn. Vì vậy, khi biến cố K xảy ra, biến cố E cũng phải xảy ra. Đồng thời, khi tích của hai số không phải là số chẵn (tức là một số lẻ nhân một số chẵn), thì ít nhất một trong hai số phải là số lẻ. Do đó, khi biến cố K không xảy ra (tức là tích của hai số là số lẻ), biến cố F cũng không xảy ra.

Vậy nếu biến cố K xảy ra, thì biến cố E và biến cố F cũng phải xảy ra. Do đó, ta có thể kết luận rằng biến cố K là biến cố hợp của biến cố E và biến cố F .

Bài 8.3. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong trường em. Xét hai biến cố sau:

P : "Học sinh đó bị cận thị";

Q : "Học sinh đó học giỏi môn Toán".

Nêu nội dung của các biến cố $P \cup Q$; PQ và $\overline{PQ}$.

Lời giải

Biến cố $P \cup Q$ xảy ra khi học sinh đó bị cận thị hoặc học giỏi môn Toán hoặc cả hai đều xảy ra. Biến cố PQ xảy ra khi học sinh đó vừa bị cận thị vừa học giỏi môn Toán.

Biến cố $\overline{PQ}$ xảy ra khi học sinh đó không bị cận thị và không học giỏi môn Toán cùng lúc.

Bài 8.4. Có hai chuồng nuôi thỏ. Chuồng I có 5 con thỏ đen và 10 con thỏ trắng. Chuồng II có 3 con thỏ trắng và 7 con thỏ đen. Từ mỗi chuồng bắt ngẫu nhiên ra một con thỏ. Xét hai biến cố sau:

A : "Bắt được con thỏ trắng từ chuồng I";

B : "Bắt được con thỏ đen từ chuồng II".

Chứng tỏ rằng hai biến cố A và B độc lập.

Lời giải

Xác suất để bắt được con thỏ trắng từ chuồng I là: $P(A) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$.

Xác suất để bắt được con thỏ đen từ chuồng II là: $P(B) = \frac{7}{10}$.

Xác suất bắt được cả một con thỏ trắng từ chuồng I và một con thỏ đen từ chuồng II. Do các sự kiện này là độc lập nhau, nên ta có: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{10} = \frac{7}{15}$

Do đó, hai biến cố A và B độc lập.

Bài 8.5. Có hai chuồng nuôi gà. Chuồng I có 9 con gà mái và 3 con gà trống. Chuồng II có 3 con gà mái và 6 con gà trống. Bắt ngẫu nhiên một con gà của chuồng I để đem bán rồi dồn các con gà còn lại của chuồng I vào chuồng II. Sau đó bắt ngẫu nhiên một con gà của chuồng II. Xét hai biến cố sau:

E : "Bắt được con gà trống từ chuồng I";

F : "Bắt được con gà mái từ chuồng II".

Chứng tỏ rằng hai biến cố E và F không độc lập.

Lời giải

Xác suất bắt được con gà trống từ chuồng I: $P(E) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

Xác suất bắt được con gà mái từ chuồng II sau khi dồn con gà từ chuồng I vào: $P(F) = \frac{3}{11}$

Vì số lượng gà mái và gà trống trong chuồng I đã thay đổi sau khi bán một con gà, nên xác suất bắt được con gà từ chuồng II sẽ phụ thuộc vào giới tính của con gà đã bán từ chuồng I. Nếu con gà bán là con gà mái, thì số lượng gà mái trong chuồng I sẽ giảm xuống còn 8 con, do đó xác suất để bắt được con gà mái từ chuồng II sẽ giảm đi. Ngược lại, nếu con gà bán là con gà trống, thì xác suất để bắt được con gà mái từ chuồng II sẽ không bị ảnh hưởng.

Do đó, hai biến cố E và F không độc lập.

D-BÀI TẬP

8.1. Một hộp đựng 70 tấm thẻ, đánh số từ 1 đến 70. Rút ngẫu nhiên một tấm thẻ. Kí hiệu a là số ghi trên thẻ. Gọi A là biến cố: " a là ước của 28", B là biến cố: " a là ước của 70". Xét biến cố C : " a là ước của 14". Chứng tỏ C là biến cố giao của A và B .

Lời giải

$A = \{1; 2; 4; 7; 14; 28\}; B = \{1; 2; 5; 7; 10; 14; 35; 70\}; C = \{1; 2; 7; 14\}$. Ta có $A \cap B = \{1; 2; 7; 14\}$.

Vậy C là biến cố giao của A và B .

8.2. Một chiến hạm có ba bộ phận A, B, C có tầm quan trọng khác nhau. Chiến hạm sẽ bị chìm khi và chỉ khi:

- ☐ Hoặc có một quả ngư lôi bắn trúng bộ phận A ;
- ☐ Hoặc có hai quả ngư lôi bắn trúng bộ phận B ;
- ☐ Hoặc có ba quả ngư lôi bắn trúng bộ phận C .

Giả sử có hai quả ngư lôi bắn trúng chiến hạm. Xét hai biến cố K : "Hai quả trúng vào C ", H : "Một quả trúng vào B , một quả trúng vào C ". Gọi M là biến cố: "Chiến hạm không bị chìm". Chứng tỏ rằng M là biến cố hợp của H và K .

Lời giải

Nếu biến cố H xảy ra thì B trúng một quả ngư lôi, C trúng một quả ngư lôi. Từ điều kiện ta thấy chiến hạm không bị chìm (biến cố M xảy ra).

Nếu biến cố K xảy ra thì C trúng hai quả ngư lôi. Từ điều kiện ta thấy chiến hạm không bị chìm (biến cố M xảy ra).

Ngược lại giả sử chiến hạm không bị chìm, khi đó cả hai quả hoặc trúng vào C (biến cố K xảy ra) hoặc chỉ một quả trúng vào B và quả còn lại không trúng A , tức là trúng C (biến cố H xảy ra).

Vậy M là biến cố hợp của H và K .

8.3. Có bốn chiếc hộp I, II, III, IV mỗi hộp đựng 10 tấm thẻ, đánh số từ 1 đến 10. Từ mỗi hộp rút ngẫu nhiên một tấm thẻ. Gọi a, b, c, d là số ghi trên thẻ tương ứng rút từ I, II, III, IV.

Xét các biến cố sau:

A : " a là số chẵn"; B : " b là số chẵn"; C : " c là số chẵn"; D : " d là số chẵn"; E : " ad là số lẻ"; F : " bc là số lẻ"; G : " $ad - bc$ là số chẵn".

Chứng tỏ rằng:

a) $E = \overline{AD}$; $F = \overline{BC}$; b) $G = EF \cup \overline{EF}$.

Lời giải

a) ad là số lẻ khi và chỉ khi cả a và d đều là số lẻ, tức là không xảy ra cả biến cố A và D . Vậy $E = \overline{AD}$. Tương tự bc là số lẻ chỉ khi cả b và c đều là số lẻ, tức là không xảy ra cả biến cố B và C . Vậy $F = \overline{BC}$.

b) Giả sử G xảy ra, tức là ad và bc có cùng tính chẵn, lẻ. Nếu ad là số lẻ, bc là số lẻ thì E và F đều xảy ra. Do đó EF xảy ra.

Nếu ad là số chẵn, bc là số chẵn thì E và F đều không xảy ra. Do đó $\overline{EF}$ xảy ra. Ngược lại, nếu EF xảy ra thì ad là số lẻ, bc là số lẻ. Suy ra $ad - bc$ là số chẵn.

Nếu $\overline{EF}$ xảy ra thì ad là số chẵn, bc là số chẵn. Do đó $ad - bc$ là số chẵn. Vậy $G = EF \cup \overline{EF}$.

8.4. Hai bạn Sơn và Tùng, mỗi bạn gieo đồng thời hai đồng xu cân đối. Xét hai biến cố sau:

E: "Cả hai đồng xu bạn Sơn gieo đều ra mặt sấp". F: "Hai đồng xu bạn Tùng gieo có một sấp, một ngửa".

Chứng tỏ rằng E và F độc lập.

Lời giải

Nếu F xảy ra thì $P(E) = \frac{1}{4}$; nếu F không xảy ra thì $P(E) = \frac{1}{4}$. Nếu E xảy ra thì $P(F) = \frac{1}{2}$; nếu E không xảy ra thì $P(F) = \frac{1}{2}$. Vậy E và F độc lập.

8.5. Một chiếc túi có 12 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 12. Bạn Hoà rút ngẫu nhiên một tấm thẻ trong túi để sang bên cạnh. Tiếp theo, bạn Bình rút ngẫu nhiên tiếp một tấm thẻ. Xét hai biến cố sau:

M: "Bạn Hoà rút được tấm thẻ ghi số lẻ"; N: "Bạn Bình rút được tấm thẻ ghi số chẵn". Chứng tỏ rằng hai biến cố M và N không độc lập.

Lời giải

Có 6 số lẻ là $\{1; 3; 5; 7; 9; 11\}$ và 6 số chẵn là $\{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$.

Nếu M xảy ra, tức là bạn Hoà rút được tấm thẻ ghi số lẻ thì sau đó trong túi còn 11 tấm thẻ với 5 tấm thẻ ghi số lẻ và 6 tấm thẻ ghi số chẵn. Vậy $P(N) = \frac{6}{11}$.

Nếu M không xảy ra, tức là bạn Hoà rút được tấm thẻ ghi số chẵn thì sau đó trong túi còn 11 tấm thẻ với 6 tấm thẻ ghi số lẻ và 5 tấm thẻ ghi số chẵn. Vậy $P(N) = \frac{5}{11}$.

Như vậy xác suất của N thay đổi tùy theo M xảy ra hay M không xảy ra. Do đó M và N không độc lập.

BÀI 29: CÔNG THỨC CỘNG XÁC SUẤT

A - KIẾN THỨC CẦN NHỚ

□ Biến cố A và biến cố B được gọi là xung khắc nếu A và B không đồng thời xảy ra.

Giả sử A, B là tập con của không gian mẫu Ω . A và B xung khắc khi và chỉ khi $A \cap B = \emptyset$.

□ Công thức cộng xác suất cho hai biến cố xung khắc: Cho A và B là hai biến cố xung khắc. Khi đó ta có: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

□ Công thức cộng xác suất: Cho hai biến cố A và B . Khi đó ta có: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

B - VÍ DỤ

Ví dụ 1. Trong một hộp có 8 viên bi xanh và 6 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi trong hộp. Gọi A là biến cố: "Cả hai viên bi có màu xanh"; B là biến cố: "Có một viên bi màu xanh và một viên bi màu đỏ".

a) Tính $P(A)$ và $P(B)$.

b) Tính xác suất để trong hai viên bi lấy ra có ít nhất một viên bi màu xanh.

Lời giải

a) Ta có $n(\Omega) = C_{14}^2 = 91$; $n(A) = C_8^2 = 28$, $n(B) = 8 \cdot 6 = 48$. Vậy $P(A) = \frac{28}{91}$, $P(B) = \frac{48}{91}$.

b) **Cách 1:** Xét biến cố C : "Trong hai viên bi lấy ra có ít nhất một viên bi màu xanh", nên C là biến cố hợp của A và B . Do A và B là hai biến cố xung khắc nên $P(C) = P(A) + P(B) = \frac{28}{91} + \frac{48}{91} = \frac{76}{91}$.

Cách 2: Xét biến cố đối $\bar{C}$: "Cả hai viên bi lấy ra đều có màu đỏ". Khi đó $n(\bar{C}) = C_6^2 = 15$. Suy ra

$$P(\bar{C}) = \frac{15}{91}$$

$$\text{Vậy } P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - \frac{15}{91} = \frac{76}{91}.$$

Ví dụ 2. Một lớp có 29 học sinh, trong đó có 22 em học khá môn Toán, 21 em học khá môn Ngữ văn, 3 em không học khá cả hai môn Ngữ văn và Toán. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong lớp. Tính xác suất để học sinh đó:

a) Học khá cả hai môn Toán và Ngữ văn.

b) Học khá môn Toán và không học khá môn Ngữ văn.

c) Học khá môn Ngữ văn và không học khá môn Toán.

Lời giải

a) Gọi A là biến cố: "Học sinh đó học khá môn Toán", B là biến cố: "Học sinh đó học khá môn Ngữ văn". Ta cần tính $P(AB)$. Ta có: $P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{22}{29} + \frac{21}{29} - \frac{26}{29} = \frac{17}{29}$.

b) Tính $P(\overline{AB})$:

Ta có: $A = AB \cup \overline{AB}$, suy ra $P(A) = P(AB) + P(\overline{AB})$. Do đó $P(\overline{AB}) = P(A) - P(AB) = \frac{22}{29} - \frac{17}{29} = \frac{5}{29}$.

c) Tính $P(\overline{AB})$:

Ta có: $B = AB \cup \overline{AB}$, suy ra $P(B) = P(AB) + P(\overline{AB})$. Do đó $P(\overline{AB}) = P(B) - P(AB) = \frac{21}{29} - \frac{17}{29} = \frac{4}{29}$.

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 8.6. Một hộp đựng 8 viên bi màu xanh và 6 viên bi màu đỏ, có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Sơn lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp (lấy xong không trả lại vào hộp). Tiếp đó đến lượt bạn Tùng lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp đó. Tính xác suất để bạn Tùng lấy được viên bi màu xanh.

Lời giải

Ta có số cách chọn một viên bi trong hộp là $8+6=14$.

$$P(\text{Sơn lấy được bi màu xanh}) = \frac{8}{14}$$

$$P(\text{Sơn lấy được bi màu đỏ}) = \frac{6}{14}$$

$$P(\text{Tùng lấy được bi màu xanh, Sơn lấy được bi màu xanh}) = \frac{7}{13}$$

$$P(\text{Tùng lấy được bi màu xanh, Sơn lấy được bi màu đỏ}) = \frac{8}{13}$$

$$\text{Xác suất để bạn Tùng lấy được viên bi màu xanh là } P = \frac{8}{14} \cdot \frac{7}{13} + \frac{6}{14} \cdot \frac{8}{13} = \frac{28}{91}$$

Bài 8.7. Lớp 11A của một trường có 40 học sinh, trong đó có 14 bạn thích nhạc cổ điển, 13 bạn thích nhạc trẻ và 5 bạn thích cả nhạc cổ điển và nhạc trẻ. Chọn ngẫu nhiên một bạn trong lớp. Tính xác suất để:

a) Bạn đó thích nhạc cổ điển hoặc nhạc trẻ;

b) Bạn đó không thích cả nhạc cổ điển và nhạc trẻ.

Lời giải

$$\text{a) } P(A) = \frac{14}{40} \text{ xác suất bạn đó thích nhạc cổ điển.}$$

$$P(B) = \frac{13}{40} \text{ xác suất bạn đó thích nhạc trẻ.}$$

$$P(A \cap B) = \frac{5}{40} \text{ xác suất bạn đó thích cả nhạc cổ điển và nhạc trẻ.}$$

$$\text{Xác suất để bạn đó thích nhạc cổ điển hoặc nhạc trẻ là: } P(A \cup B) = \frac{14}{40} + \frac{13}{40} - \frac{5}{40} = \frac{22}{40} = \frac{11}{20}$$

b) Xác suất bạn đó không thích cả nhạc cổ điển và nhạc trẻ là:

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{11}{20} = \frac{9}{20}$$

Bài 8.8. Một khu phố có 50 hộ gia đình nuôi chó hoặc nuôi mèo, trong đó có 18 hộ nuôi chó, 16 hộ nuôi mèo và 7 hộ nuôi cả chó và mèo. Chọn ngẫu nhiên một hộ trong khu phố trên. Tính xác suất để:

- Hộ đó nuôi chó hoặc nuôi mèo;
- Hộ đó không nuôi cả chó và mèo.

Lời giải

a) Số hộ nuôi chó hoặc nuôi mèo là $18 + 16 - 7 = 27$.

Vậy xác suất để hộ đó nuôi chó hoặc nuôi mèo là $P = \frac{27}{50}$

b) Số hộ không nuôi cả chó và mèo $50 - 7 = 43$.

Vậy xác suất để hộ đó không nuôi cả chó và mèo là $P = \frac{43}{50}$

Bài 8.9. Một nhà xuất bản phát hành hai cuốn sách A và B . Thống kê cho thấy có 50% người mua sách A ; 70% người mua sách B ; 30% người mua cả sách A và sách B . Chọn ngẫu nhiên một người mua. Tính xác suất để:

- Người mua đó mua ít nhất một trong hai sách A hoặc B ;
- Người mua đó không mua cả sách A và sách B .

Lời giải

a) Số người mua sách A hoặc sách B là $50\% + 70\% - 30\% = 90\%$.

Vậy, xác suất để người mua đó mua ít nhất một trong hai sách A hoặc B là 90%.

b) Số người mua không mua cả sách A và sách B là $100\% - 30\% = 70\%$.

Vậy, xác suất để người mua đó không mua cả sách A và sách B là 70%.

Bài 8.10. Tại các trường trung học phổ thông của một tỉnh, thống kê cho thấy có 63% giáo viên môn Toán tham khảo bộ sách giáo khoa A , 56% giáo viên môn Toán tham khảo bộ sách giáo khoa B và 28,5% giáo viên môn Toán tham khảo cả hai bộ sách giáo khoa A và B . Tính tỉ lệ giáo viên môn Toán các trường trung học phổ thông của tỉnh đó không tham khảo cả hai bộ sách giáo khoa A và B .

Lời giải

Tỉ lệ giáo viên môn Toán các trường trung học phổ thông của tỉnh đó không tham khảo cả hai bộ sách giáo khoa A và B là $100\% - 28.5\% = 71.5\%$.

D - BÀI TẬP

8.6. Trong một căn phòng có 36 người, trong đó có 25 người họ Nguyễn và 11 người họ Trần. Chọn ngẫu nhiên hai người trong phòng đó. Tính xác suất để hai người được chọn có cùng họ.

Lời giải

Xét các biến cố sau:

A : "Cả hai người được chọn đều họ Nguyễn"; B : "Cả hai người được chọn đều họ Trần".

C : "Cả hai người được chọn có cùng họ". C là biến cố hợp của A và B . Do A và B xung khắc nên $P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Ta có: $n(\Omega) = C_{36}^2 = 630$ $n(A) = C_{25}^2 = 300$; $n(B) = C_{11}^2 = 55$.

Suy ra $P(A) = \frac{300}{630}$; $P(B) = \frac{55}{630}$.

Vậy $P(C) = P(A) + P(B) = \frac{300}{630} + \frac{55}{630} = \frac{355}{630} = \frac{71}{126}$.

8.7. Trong một công ty có 40 nhân viên, trong đó có 19 người thích chơi bóng bàn, 20 người thích chơi cầu lông, 8 người không thích chơi cả cầu lông và bóng bàn. Chọn ngẫu nhiên một nhân viên trong công ty đó. Tính xác suất để người đó:

- Thích chơi ít nhất một trong hai môn bóng bàn và cầu lông.
- Thích chơi cầu lông và không thích chơi bóng bàn.
- Thích chơi bóng bàn và không thích chơi cầu lông.
- Thích chơi đúng một trong hai môn.

Lời giải

Gọi A là biến cố: "Người đó thích chơi bóng bàn"; B là biến cố: "Người đó thích chơi cầu lông".

a) Ta cần tính $P(A \cup B)$. Biến cố đối của biến cố $A \cup B$: "Người đó thích chơi ít nhất một trong hai môn" là biến cố $\overline{A \cup B}$: "Người đó không thích chơi cầu lông và bóng bàn".

Ta có: $P(A) = \frac{19}{40}$; $P(B) = \frac{20}{40}$; $P(\overline{A \cup B}) = \frac{8}{40}$. Vậy $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - \frac{8}{40} = \frac{32}{40} = \frac{4}{5}$.

b) Ta cần tính $P(\overline{AB})$.

Ta có: $P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{19}{40} + \frac{20}{40} - \frac{32}{40} = \frac{7}{40}$.

$B = AB \cup \overline{AB}$, suy ra $P(B) = P(AB) + P(\overline{AB})$, do đó $P(\overline{AB}) = P(B) - P(AB) = \frac{20}{40} - \frac{7}{40} = \frac{13}{40}$.

c) Ta cần tính $P(\overline{AB})$. Ta có: $A = AB \cup \overline{AB}$, suy ra $P(A) = P(AB) + P(\overline{AB})$, do đó

$P(\overline{AB}) = P(A) - P(AB) = \frac{19}{40} - \frac{7}{40} = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$.

d) Gọi E là biến cố: "Người đó thích chơi đúng một trong hai môn cầu lông hay bóng bàn".

Ta có: $E = \overline{AB} \cup AB$, suy ra $P(E) = P(\overline{AB}) + P(AB) = \frac{12}{40} + \frac{7}{40} = \frac{19}{40} = \frac{19}{40}$.

8.8. Một nhóm có 50 người được phỏng vấn họ đã mua cành đào hay cây quất vào dịp Tết vừa qua, trong đó có 31 người mua cành đào, 12 người mua cây quất và 5 người mua cả cành đào và cây quất. Chọn ngẫu nhiên một người. Tính xác suất để người đó:

- Mua cành đào hoặc cây quất.
- Mua cành đào và không mua cây quất.
- Không mua cành đào và không mua cây quất.
- Mua cây quất và không mua cành đào.

Lời giải

a) Gọi A là biến cố: "Người đó mua cành đào", B là biến cố: "Người đó mua cây quất".

Ta cần tính $P(A \cup B)$. Ta có: $P(A) = \frac{31}{50}$; $P(B) = \frac{12}{50}$; $P(AB) = \frac{5}{50} = \frac{1}{10}$.

Do đó: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{31}{50} + \frac{12}{50} - \frac{5}{50} = \frac{38}{50} = \frac{19}{25}$.

b) Ta cần tính $P(\overline{AB})$. Ta có: $A = AB \cup \overline{AB}$, suy ra $P(A) = P(AB) + P(\overline{AB})$, do đó

$$P(\overline{AB}) = P(A) - P(AB) = \frac{31}{50} - \frac{5}{50} = \frac{26}{50} = \frac{13}{25}.$$

c) Ta cần tính $P(\overline{AB})$. Ta có biến cố đối của biến cố $\overline{AB}$ là biến cố $A \cup B$.

$$\text{Vậy } P(\overline{AB}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{38}{50} = \frac{12}{50} = \frac{6}{25}.$$

d) Ta cần tính $P(\overline{AB})$. Ta có: $B = AB \cup \overline{AB}$, suy ra $P(B) = P(AB) + P(\overline{AB})$, do đó

$$P(\overline{AB}) = P(B) - P(AB) = \frac{12}{50} - \frac{5}{50} = \frac{7}{50}.$$

BÀI 30: CÔNG THỨC NHÂN XÁC SUẤT CHO HAI BIẾN CỐ ĐỘC LẬP

A - KIẾN THỨC CẦN NHỚ

□ Hai biến cố A và B được gọi là độc lập nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của biến cố kia.

□ Nếu cặp biến cố (A, B) độc lập thì các cặp biến cố $(A, \bar{B}), (\bar{A}, B), (\bar{A}, \bar{B})$ cũng độc lập.

□ Nếu hai biến cố A và B độc lập với nhau thì ta có: $P(AB) = P(A)P(B)$.

Công thức này gọi là công thức nhân cho hai biến cố độc lập.

B - VÍ DỤ

Ví dụ 1. Một vận động viên thi bắn súng. Biết rằng xác suất để vận động viên đó bắn trúng vòng 10 là 0,2; bắn trúng vòng 9 là 0,25 và bắn trúng vòng 8 là 0,3. Nếu bắn trúng vòng k thì được k điểm. Vận động viên thực hiện bắn hai lần. Giả sử hai lần bắn của vận động viên là độc lập. Vận động viên đạt huy chương vàng nếu được 20 điểm, đạt huy chương bạc nếu được 19 điểm và đạt huy chương đồng nếu được 18 điểm. Tính xác suất để vận động viên đạt được huy chương đồng.

Lời giải

Gọi A, B, C tương ứng là các biến cố: "Vận động viên bắn trúng vòng 10", "Vận động viên bắn trúng vòng 9", "Vận động viên bắn trúng vòng 8".

Gọi G là biến cố: "Vận động viên đạt được huy chương đồng"; U là biến cố: "Vận động viên hai lần bắn trúng vòng 9", V là biến cố: "Vận động viên một lần bắn trúng vòng 10, một lần bắn trúng vòng 8".

Ta có: $G = U \cup V$.

$$P(U) = P(B) \cdot P(B) = 0,25 \cdot 0,25 = 0,0625$$

$$P(V) = P(AC) + P(CA) = 0,2 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,2 = 0,12$$

$$\text{Do } U \text{ và } V \text{ xung khắc nên } P(G) = P(U) + P(V) = 0,0625 + 0,12 = 0,1825.$$

Ví dụ 2. Gieo ba xúc xắc cân đối và đồng chất. Xét các biến cố sau:

A : "Số chấm xuất hiện trên mặt của ba xúc xắc khác nhau".

B : "Có ít nhất một xúc xắc xuất hiện mặt 6 chấm".

Chứng minh rằng hai biến cố A và B không độc lập.

Lời giải

Ta cần chứng minh $P(AB) \neq P(A)P(B)$.

□ Tính $P(A)$: Ta có $\Omega = \{(a, b, c); 1 \leq a, b, c \leq 6\}, n(\Omega) = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.

$A = \{(a, b, c); 1 \leq a, b, c \leq 6\}$ và a, b, c là các số nguyên dương phân biệt. Mỗi bộ (a, b, c) là một chỉnh hợp chập 3 của 6 phần tử $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Ta có $n(A) = A_6^3 = 120$. Vậy $P(A) = \frac{120}{216}$.

□ Tính $P(B)$:

Xét biến cố đối $\bar{B}$: "Số chấm xuất hiện trên mỗi xúc xắc đều khác 6". Mỗi kết quả thuận lợi cho $\bar{B}$ là một bộ ba số (a, b, c) trong đó $1 \leq a, b, c \leq 6$. Do đó theo quy tắc nhân, số kết quả thuận lợi cho $\bar{B}$ là $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

Vậy $P(\bar{B}) = \frac{125}{216}$. Suy ra $P(B) = 1 - P(\bar{B}) = \frac{91}{216}$.

□ Tính $P(AB)$:

Mỗi kết quả thuận lợi cho AB là một bộ ba số (a, b, c) trong đó $1 \leq a, b, c \leq 6$ và a, b, c là các số nguyên dương khác nhau và có đúng một số bằng 6. Có 3 cách chọn một số bằng 6 và $A_5^2 = 20$ cách chọn hai số còn lại trong 5 số $\{1; 2; 3; 4; 5\}$. Theo quy tắc nhân, ta có $3 \cdot 20 = 60$ kết quả thuận lợi.

Do đó $P(AB) = \frac{60}{216} \neq P(A)P(B) = \frac{120}{216} \cdot \frac{91}{216}$.

Vậy A, B không độc lập.

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 8.11. Cho hai biến cố A và B là hai biến cố xung khắc với $P(A) > 0, P(B) > 0$. Chứng tỏ rằng hai biến cố A và B không độc lập.

Lời giải

Giả sử rằng hai biến cố A và B là độc lập. Điều này có nghĩa là xác suất của A xảy ra không bị ảnh hưởng bởi việc B xảy ra và ngược lại. Khi đó, xác suất của biến cố A và B xảy ra cùng lúc là tích của xác suất của A và xác suất của B , tức là: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Tuy nhiên, nếu A và B là hai biến cố xung khắc, tức là không thể xảy ra cùng một lúc, thì xác suất của biến cố A và B xảy ra cùng lúc phải bằng 0, tức là: $P(A \cap B) = 0$

Ta có $P(A) \cdot P(B) > 0$

Do đó, ít nhất một trong hai xác suất $P(A)$ hoặc $P(B)$ phải bằng 0. Tuy nhiên, giả thiết ban đầu đã chỉ ra rằng cả hai xác suất này đều lớn hơn 0, vì vậy giả định ban đầu là sai. Do đó, hai biến cố A và B không độc lập.

Bài 8.12. Một thùng đựng 60 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 60. Rút ngẫu nhiên một tấm thẻ trong thùng. Xét hai biến cố sau:

A : "Số ghi trên tấm thẻ là ước của 60" và

B : "Số ghi trên tấm thẻ là ước của 48".

Chứng tỏ rằng A và B là hai biến cố không độc lập.

Lời giải

Tổng số các số ước của 60 là 12.

Tổng số các số ước của 48 là 8.

Tổng số ước của cả 60 và 48 là 5.

Xác suất để một số được rút ra từ thùng là ước của 60 là $\frac{12}{60} = \frac{1}{5}$

Xác suất để một số được rút ra từ thùng là ước của 48 là $\frac{5}{48}$.

Xác suất để số được rút ra là một số ước của 60 và 48 và là ước của 12 là $\frac{1}{12}$.

Xác suất để số được rút ra từ thùng là ước của 48, biết rằng số đó cũng là ước của 12 là $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

Vì vậy, xác suất của biến cố B phụ thuộc vào việc số đó có phải là một số ước của 60 hay không.

Do đó, hai biến cố A và B không độc lập.

Bài 8.13. Có hai túi đựng các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Túi I có 3 viên bi màu xanh và 7 viên bi màu đỏ. Túi II có 10 viên bi màu xanh và 6 viên bi màu đỏ. Từ mỗi túi, lấy ngẫu nhiên ra một viên bi. Tính xác suất để:

- Hai viên bi được lấy có cùng màu xanh;
- Hai viên bi được lấy có cùng màu đỏ;
- Hai viên bi được lấy có cùng màu;
- Hai viên bi được lấy không cùng màu.

Lời giải

a) Xác suất để lấy được hai viên bi màu xanh từ hai túi là tích của hai xác suất đó:

$$P(\text{Hai viên bi được lấy có cùng màu xanh}) = P(\text{bi xanh từ túi I}) \cdot P(\text{bi xanh túi II}) = \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{8} = \frac{3}{16}$$

b) Xác suất Hai viên bi được lấy có cùng màu đỏ:

$$P(\text{Hai viên bi được lấy có cùng màu đỏ}) = P(\text{bi đỏ từ túi I}) \cdot P(\text{bi đỏ túi II}) = \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{8} = \frac{21}{80}$$

c) Xác suất Hai viên bi được lấy có cùng màu.

$$P(\text{Hai viên bi được lấy có cùng màu}) = P(\text{bi đỏ từ túi I}) + P(\text{bi đỏ túi II}) = \frac{3}{16} + \frac{21}{80} = \frac{33}{80}$$

d) Xác suất Hai viên bi được lấy không cùng màu.

$$P(\text{Hai viên bi được lấy không cùng màu}) = P(\text{bi xanh từ túi I}) + P(\text{bi đỏ túi II}) \cdot P(\text{bi đỏ từ túi I}) + P(\text{bi đỏ túi II}) = \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{8} + \frac{7}{10} \cdot \frac{5}{8} = \frac{3}{5}$$

Bài 8.14. Có hai túi mỗi túi đựng 10 quả cầu có cùng kích thước và khối lượng được đánh số từ 1 đến 10. Từ mỗi túi, lấy ngẫu nhiên ra một quả cầu. Tính xác suất để trong hai quả cầu được lấy ra không có quả cầu nào ghi số 1 hoặc ghi số 5.

Lời giải

Ta có

Xác suất lấy ra quả cầu không có số 1 hoặc số 5 từ túi đầu tiên: $\frac{6}{10}$

Xác suất lấy được quả cầu không có số 1 hoặc số 5 từ túi thứ hai là: $\frac{6}{9}$

Vậy xác suất để trong hai quả cầu được lấy ra không có quả cầu nào ghi số 1 hoặc ghi số 5 là:

$$P = \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{4}{15}$$

Bài 8.15. Trong đợt kiểm tra cuối học kì II lớp 11 của các trường trung học phổ thông, thống kê cho thấy có 93% học sinh tỉnh X đạt yêu cầu; 87% học sinh tỉnh Y đạt yêu cầu. Chọn ngẫu nhiên một học sinh của tỉnh X và một học sinh của tỉnh Y. Giả thiết rằng chất lượng học tập của hai tỉnh là độc lập. Tính xác suất để:

- Cả hai học sinh được chọn đều đạt yêu cầu;
- Cả hai học sinh được chọn đều không đạt yêu cầu;

- c) Chỉ có đúng một học sinh được chọn đạt yêu cầu;
d) Có ít nhất một trong hai học sinh được chọn đạt yêu cầu.

Lời giải

- a) Xác suất để cả hai học sinh được chọn đều đạt yêu cầu là: $P = 0,93 - 0,87 = 0,06$
b) Xác suất để cả hai học sinh được chọn đều không đạt yêu cầu là: $P = (1 - 0,93) \cdot (1 - 0,87) = 0,0198$
c) Xác suất để chỉ có đúng một học sinh được chọn đạt yêu cầu là:

$$P = 0,93 \cdot (1 - 0,87) + (1 - 0,93) \cdot 0,87 = 0,1716$$

- d) Xác suất để ít nhất một trong hai học sinh được chọn đạt yêu cầu là: $P = 1 - 0,0198 = 0,9802$

D-BÀI TẬP

8.9. Cho $P(A) = 0,4; P(B) = 0,5; P(A \cup B) = 0,6$. Hỏi A và B có độc lập hay không?

Lời giải

$$P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,3 \neq P(A) \cdot P(B) = 0,2. \text{ Vậy } A \text{ và } B \text{ không độc lập.}$$

8.10. Cho $P(A) = \frac{2}{5}, P(B) = \frac{1}{3}, P(A \cup B) = \frac{1}{2}$. Hỏi A và B có độc lập hay không?

Lời giải

$$P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{7}{30} \neq P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{15} = \frac{4}{30}. \text{ Vậy } A \text{ và } B \text{ không độc lập.}$$

8.11. Gieo hai đồng xu cân đối. Xét các biến cố A : "Cả hai đồng xu đều ra mặt sấp",

B : "Có ít nhất một đồng xu ra mặt sấp". Hỏi A và B có độc lập hay không?

Lời giải

Tính $P(A)$: Ta có $\Omega = \{SS; SN; NS; NN\}, n(\Omega) = 4, A = \{SS\}, n(A) = 1$. Vậy $P(A) = \frac{1}{4}$.

Tính $P(B)$: Ta có $B = \{SS; SN; NS\}, n(B) = 3$. Vậy $P(B) = \frac{3}{4}$.

Tính $P(AB)$: Ta có $AB = A \cap B = \{SS\}, n(A \cap B) = 1$.

Vậy $P(AB) = \frac{1}{4}$.

Ta có $P(AB) = \frac{1}{4} \neq P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$. Vậy A và B không độc lập.

8.12. Gieo hai con xúc xắc cân đối. Xét các biến cố A : "Có ít nhất một con xúc xắc xuất hiện mặt 5 chấm",

B : "Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 7". Chứng tỏ rằng A và B không độc lập.

Lời giải

Tính $P(A)$: Xét biến cố đối $\bar{A}$: "Cả hai con xúc xắc không xuất hiện mặt 5 chấm",

$\bar{A} = \{(a, b) : a, b \in \{1; 2; 3; 4; 6\}\}$. Ta có $n(\bar{A}) = 25; n(\Omega) = 36$. Vậy $P(\bar{A}) = \frac{25}{36}$, do đó $P(A) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$.

Tính $P(B)$: Ta có $B = \{(1, 6); (2, 5); (3, 4); (4, 3); (5, 2); (6, 1)\}$, $n(B) = 6$. Vậy $P(B) = \frac{6}{36}$.

Tính $P(AB)$: Ta có $AB = A \cap B = \{(2, 5); (5, 2)\}$, $n(A \cap B) = 2$. Vậy $P(AB) = \frac{2}{36}$.

Ta có: $P(AB) = \frac{2}{36} = \frac{72}{36^2}$; $P(A) \cdot P(B) = \frac{11}{36} \cdot \frac{6}{36} = \frac{66}{36^2}$. Suy ra $P(AB) \neq P(A) \cdot P(B)$.

Vậy A và B không độc lập.

8.13. Có 3 hộp I, II, III. Mỗi hộp chứa ba tấm thẻ đánh số 1, 2, 3. Từ mỗi hộp rút ngẫu nhiên một tấm thẻ. Xét các biến cố sau:

A : "Tổng các số ghi trên ba tấm thẻ là 6"; B : "Ba tấm thẻ có ghi số bằng nhau".

a) Tính $P(A), P(B)$. b) Hỏi A, B có độc lập không?

Lời giải

a) Ta có $\Omega = \{(a, b, c) : 1 \leq a, b, c \leq 3\}$, $n(\Omega) = 27$.

Tính $P(A)$: $A = \{(1, 2, 3); (2, 1, 3); (3, 1, 2); (1, 3, 2); (3, 2, 1); (2, 3, 1); (2, 2, 2)\}$, $n(A) = 7$. Suy ra $P(A) = \frac{7}{27}$.

Tính $P(B)$: $B = \{(1, 1, 1); (2, 2, 2); (3, 3, 3)\}$, $n(B) = 3$. Suy ra $P(B) = \frac{3}{27}$.

b) Tính $P(AB)$: Ta có $A \cap B = \{(2, 2, 2)\}$. Vậy $P(AB) = \frac{1}{27}$.

Vì $P(AB) = \frac{1}{27} = \frac{27}{27^2} \neq \frac{21}{27^2} = \frac{7}{27} \cdot \frac{3}{27} = P(A) \cdot P(B)$ nên A và B không độc lập.

8.14. Hai bạn An và Bình không quen biết nhau và đều học xa nhà. Xác suất để bạn An về thăm nhà vào ngày Chủ nhật là 0,2 và của bạn Bình là 0,25. Dùng sơ đồ hình cây để tính xác suất vào ngày Chủ nhật:

a) Cả hai bạn đều về thăm nhà.

b) Có ít nhất một bạn về thăm nhà.

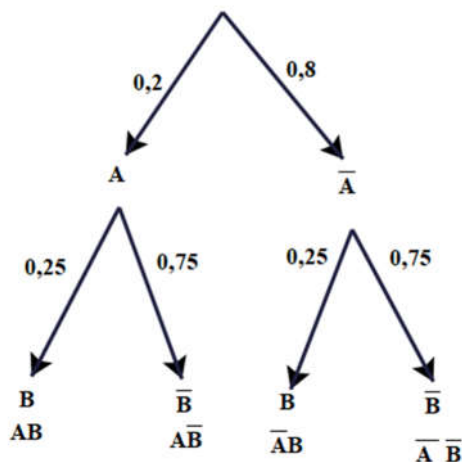
c) Cả hai bạn đều không về thăm nhà.

d) Chỉ có bạn An về thăm nhà.

e) Có đúng một bạn về thăm nhà.

Lời giải

Gọi A, B tương ứng là các biến cố: "Bạn An về thăm nhà vào ngày Chủ nhật" và "Bạn Bình về thăm nhà vào ngày Chủ nhật". A và B là hai biến cố độc lập. Ta có sơ đồ hình cây:



a) $P(AB) = 0,2 \cdot 0,25 = 0,05$.

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,2 + 0,25 - 0,05 = 0,4$.

c) $P(\overline{AB}) = 0,8 \cdot 0,75 = 0,6$.

d) $P(\overline{AB}) = 0,2 \cdot 0,75 = 0,15$.

e) $P(\overline{AB} \cup \overline{AB}) = P(\overline{AB}) + P(\overline{AB}) = 0,2 \cdot 0,75 + 0,8 \cdot 0,25 = 0,35$.

8.15. Cho A, B là hai biến cố độc lập và $P(AB) = 0,1; P(\overline{AB}) = 0,4$. Tìm $P(A \cup \overline{B})$.

Lời giải

$$P(A \cup \overline{B}) = P(A) + P(\overline{B}) - P(\overline{AB}).$$

$$P(A) = P(AB) + P(\overline{AB}) = 0,1 + 0,4 = 0,5$$

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0,1. \text{ Khi đó } 0,1 = 0,5 \cdot P(B), \text{ suy ra } P(B) = 0,2$$

$$P(A \cup \overline{B}) = P(A) + P(\overline{B}) - P(\overline{AB}) = 0,5 + 0,8 - 0,4 = 0,9$$

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VIII

PHẦN 1. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

A. TRẮC NGHIỆM

Sử dụng dữ kiện sau để trả lời các câu hỏi trong các Bài 8.16, 8.17.

Một hộp đựng 20 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 20. Rút ngẫu nhiên một tấm thẻ trong hộp. Gọi A là biến cố "Rút được tấm thẻ ghi số chẵn lớn hơn 9"; B là biến cố "Rút được tấm thẻ ghi số không nhỏ hơn 8 và không lớn hơn 15".

Câu 8.16: Số phần tử của $A \cup B$ là

- A. 11. B. 10. C. 12. D. 13.

Lời giải

Chọn A

Ta có $A = \{6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$, $B = \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$.

Có 3 số 16, 18, 20 trong biến cố A thuộc B .

Như vậy ta có: $A \cup B = A + B - (A \cap B) = 6 + 8 - 3 = 11$

Câu 8.17: Số phần tử của AB là

- A. 5. B. 6. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn C

Số tấm thẻ thỏa cả hai biến cố A và B là tấm thẻ số 10, 12, 14. Vì vậy, số phần tử của AB là 3.

Sử dụng dữ kiện sau để trả lời các câu hỏi trong các Bài 8.18, 8.19.

Tại một hội thảo quốc tế có 50 nhà khoa học, trong đó có 31 người thành thạo tiếng Anh, 21 người thành thạo tiếng Pháp và 5 người thành thạo cả tiếng Anh và tiếng Pháp. Chọn ngẫu nhiên một người trong hội thảo.

Câu 8.18: Xác suất để người được chọn thành thạo ít nhất một trong hai thứ tiếng Anh hoặc Pháp là:

- A. $\frac{47}{50}$. B. $\frac{37}{50}$. C. $\frac{39}{50}$. D. $\frac{41}{50}$.

Lời giải

Chọn A

Số người thành thạo ít nhất tiếng Anh hoặc Pháp là $31 + 21 - 5 = 47$. Tổng số người trong hội thảo là 50.

Câu 8.19: Xác suất để người được chọn không thành thạo cả hai thứ tiếng Anh hay Pháp là:

- A. $\frac{7}{50}$. B. $\frac{3}{50}$. C. $\frac{9}{50}$. D. $\frac{11}{50}$.

Lời giải

Chọn B

Sử dụng dữ kiện sau để trả lời các câu hỏi trong các Bài 8.20, 8.21.

Một lớp có 40 học sinh, trong đó có 23 học sinh thích bóng chuyền, 18 học sinh thích bóng rổ, 26 học sinh thích bóng chuyền hoặc bóng rổ hoặc cả hai. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong lớp.

Câu 8.20: Xác suất để chọn được học sinh không thích cả bóng chuyền và bóng rổ là:

A. $\frac{18}{40}$.

B. $\frac{14}{40}$.

C. $\frac{19}{40}$.

D. $\frac{21}{40}$.

Lời giải

Chọn B

Số học sinh không thích cả bóng chuyền và bóng rổ là: $40 - (23 + 18 - 15) = 14$.

Xác suất để chọn được học sinh không thích cả bóng chuyền và bóng rổ là $P = \frac{14}{40}$.

Câu 8.21: Xác suất để chọn được học sinh thích bóng chuyền và không thích bóng rổ là:

A. $\frac{7}{40}$.

B. $\frac{9}{40}$.

C. $\frac{8}{40}$.

D. $\frac{11}{40}$.

Lời giải

Chọn C

Số học sinh thích cả bóng chuyền và bóng rổ là 15, số học sinh chỉ thích bóng chuyền là 23.

Vậy có $23 - 15 = 8$ học sinh thích bóng chuyền và không thích bóng rổ.

Xác suất để chọn được một học sinh thích bóng chuyền và không thích bóng rổ là: $P = \frac{8}{40}$

B- TỰ LUẬN

Bài 8.22. Hai vận động viên bắn súng A và B mỗi người bắn một viên đạn vào tám bia một cách độc lập. Xét các biến cố sau:

M : “Vận động viên A bắn trúng vòng 10”;

N : “Vận động viên B bắn trúng vòng 10”.

Hãy biểu diễn các biến cố sau theo biến cố M và N :

- C : "Có ít nhất một vận động viên bắn trúng vòng 10";
- D : "Cả hai vận động viên bắn trúng vòng 10 ";
- E : "Cả hai vận động viên đều không bắn trúng vòng 10 ";
- F : "Vận động viên A bắn trúng và vận động viên B không bắn trúng vòng 10";
- G : "Chỉ có duy nhất một vận động viên bắn trúng vòng 10 ".

Lời giải

Biến cố C có thể biểu diễn là: $\overline{(M \cap N)} = M \cup N$.

Biến cố D có thể biểu diễn là: $M \cap N$.

Biến cố E có thể biểu diễn là: $\overline{M} \cap \overline{N}$.

Biến cố F có thể biểu diễn là: $M \cap \overline{N}$.

Biến cố G có thể biểu diễn là: $(M \cap \overline{N}) \cup (\overline{M} \cap N)$

Bài 8.23. Một đoàn khách du lịch gồm 31 người, trong đó có 7 người đến từ Hà Nội, 5 người đến từ Hải Phòng. Chọn ngẫu nhiên một người trong đoàn. Tính xác suất để người đó đến từ Hà Nội hoặc đến từ Hải Phòng.

Lời giải

Số cách chọn một người trong đoàn là: 31.

Số người đến từ Hà Nội hoặc đến từ Hải Phòng là: $7 + 5 = 12$.

Vậy xác suất cần tìm là: $P(A \cup B) = \frac{12}{31}$

Bài 8.24. Gieo một con xúc xắc cân đối, đồng chất liên tiếp hai lần. Xét các biến cố sau:

A : "Ở lần gieo thứ nhất, số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là 1";

B : "Ở lần gieo thứ hai, số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là 2";

C : "Tổng số chấm xuất hiện trên con xúc xắc ở hai lần gieo là 8";

D : "Tổng số chấm xuất hiện trên con xúc xắc ở hai lần gieo là 7".

Chứng tỏ rằng các cặp biến cố A và C ; B và C ; C và D không độc lập.

Lời giải

• A và C : Hai biến cố này không độc lập vì kết quả của biến cố A ảnh hưởng đến khả năng xảy ra của biến cố C . Nếu số chấm trên lần gieo thứ nhất là 1, thì để tổng số chấm là 8 thì lần gieo thứ hai phải ra số 7. Nếu số chấm trên lần gieo thứ nhất không phải là 1 thì biến cố C không thể xảy ra.

• B và C : Tương tự, hai biến cố này cũng không độc lập vì kết quả của biến cố B ảnh hưởng đến khả năng xảy ra của biến cố C .

• C : Nếu số chấm trên lần gieo thứ hai là 2, thì để tổng số chấm là 8 thì lần gieo thứ nhất phải ra số 6. Nếu số chấm trên lần gieo thứ hai không phải là 2 thì biến cố C không thể xảy ra.

• C và D : Hai biến cố này cũng không độc lập vì kết quả của biến cố C ảnh hưởng đến khả năng xảy ra của biến cố D . Nếu tổng số chấm trên hai lần gieo là 8, thì để tổng số chấm là 7 thì cả hai lần gieo đều phải ra số 3, nhưng điều này không thể xảy ra. Nếu tổng số chấm trên hai lần gieo không phải là 8 thì biến cố D không thể xảy ra.

Vậy các cặp biến cố A và C ; B và C ; C và D không độc lập.

Bài 8.25. Hai chuyến bay của hai hãng hàng không X và Y , hoạt động độc lập với nhau. Xác suất để chuyến bay của hãng X và hãng Y khởi hành đúng giờ tương ứng là 0,92 và 0,98. Dùng sơ đồ hình cây, tính xác suất để:

a) Cả hai chuyến bay khởi hành đúng giờ;

b) Chỉ có duy nhất một trong hai chuyến bay khởi hành đúng giờ;

c) Có ít nhất một trong hai chuyến bay khởi hành đúng giờ.

Lời giải

a) Xác suất để cả hai chuyến bay khởi hành đúng giờ là tích của xác suất của hai biến cố đó, vì các chuyến bay hoạt động độc lập với nhau. Vậy ta có: $P = 0,92 \cdot 0,98 = 0,9016$

b) Xác suất chỉ có duy nhất một trong hai chuyến bay khởi hành đúng giờ là:

c) Có ít nhất một trong hai chuyến bay khởi hành đúng giờ xảy ra khi: (1) cả hai chuyến bay đều đúng giờ, hoặc (2) chỉ có duy nhất một chuyến bay đúng giờ. Vì hai trường hợp độc lập với nhau, ta có:

$$P = 0,0348 + 0,9016 = 0,9364$$

PHẦN 2. BÀI TẬP SÁCH BÀI TẬP

A - TRẮC NGHIỆM

8.16. Một vận động viên thi bắn súng. Biết rằng xác suất để vận động viên bắn trúng vòng 10 là 0,2; bắn trúng vòng 9 là 0,25 và bắn trúng vòng 8 là 0,3. Nếu bắn trúng vòng k thì được k điểm. Vận động viên đạt huy chương vàng nếu được 20 điểm, đạt huy chương bạc nếu được 19 điểm và đạt huy chương đồng nếu được 18 điểm. Vận động viên thực hiện bắn hai lần và hai lần bắn độc lập với nhau. Xác suất để vận động viên đạt được huy chương bạc là

A. 0,15.

B. 0,1.

C. 0,2.

D. 0,12.

Lời giải

Chọn: B

8.17. Hai bạn Sơn và Tùng độc lập với nhau, mỗi người tung một con xúc xắc Xác suất để xúc xắc của bạn Sơn xuất hiện số lẻ, xúc xắc của bạn Tùng xuất hiện số lớn hơn 4 là

A. $\frac{1}{6}$.

B. $\frac{1}{5}$.

C. $\frac{1}{7}$.

D. $\frac{2}{11}$.

Lời giải

Chọn: A

8.18. Một trường học có hai máy in A và B hoạt động độc lập. Trong 24 giờ hoạt động, xác suất để máy A và máy B gặp lỗi kĩ thuật tương ứng là 0,08 và 0,12 Xác suất để trong 24 giờ hoạt động có nhiều nhất một máy gặp lỗi kĩ thuật là

A. 0,99.

B. 0,9904.

C. 0,991.

D. 0,9906.

Lời giải

Chọn: B

8.19. Hai xạ thủ A và B thi bắn súng một cách độc lập với nhau. Xác suất để xạ thủ A và xạ thủ B bắn trúng bia tương ứng là 0,7 và 0,8. Xác suất để có đúng một xạ thủ bắn trúng là

A. 0,38.

B. 0,385.

C. 0,37.

D. 0,374.

Lời giải

Chọn: A

8.20. Hai bạn An và Bình độc lập với nhau tham gia một cuộc thi. Xác suất để bạn An và bạn Bình đạt giải tương ứng là 0,8 và 0,6. Xác suất để có ít nhất một bạn đạt giải là

A. 0,94.

B. 0,924.

C. 0,92.

D. 0,93.

Lời giải

Chọn: C

B - TỰ LUẬN

8.21. Một nhóm 30 bệnh nhân có 24 người điều trị bệnh X , có 12 người điều trị cả bệnh X và bệnh Y , có 26 người điều trị ít nhất một trong hai bệnh X hoặc Y . Chọn ngẫu nhiên một bệnh nhân. Tính xác suất để người đó:

a) Điều trị bệnh Y .

b) Điều trị bệnh Y và không điều trị bệnh X .

c) Không điều trị cả hai bệnh X và Y .

Lời giải

Xét các biến cố A : "Người đó điều trị bệnh X ", B : "Người đó điều trị bệnh Y ".

$$a) P(B) = P(A \cup B) + P(AB) - P(A) = \frac{26}{30} + \frac{12}{30} - \frac{24}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}.$$

b) Ta có $B = AB \cup \overline{AB}$, suy ra $P(B) = P(AB) + P(\overline{AB})$, do đó

$$P(\overline{AB}) = P(B) - P(AB) = \frac{14}{30} - \frac{12}{30} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}.$$

$$c) P(\overline{AB}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{26}{30} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}.$$

8.22. Một lớp có 40 học sinh, trong đó có 34 em thích ăn chuối, 22 em thích ăn cam và 2 em không thích ăn cả hai loại quả đó. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong lớp. Tính xác suất để em đó:

a) Thích ăn ít nhất một trong hai loại quả chuối hoặc cam.

b) Thích ăn cả hai loại quả chuối và cam.

Lời giải

Xét các biến cố A : "Học sinh đó thích ăn chuối", B : "Học sinh đó thích ăn cam".

$$\text{Ta có } P(A) = \frac{34}{40}, P(B) = \frac{22}{40}, P(\overline{AB}) = \frac{2}{40} = \frac{1}{20}.$$

$$a) P(A \cup B) = 1 - P(\overline{AB}) = 1 - \frac{2}{40} = \frac{38}{40} = \frac{19}{20}.$$

$$b) P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{34}{40} + \frac{22}{40} - \frac{38}{40} = \frac{18}{40} = \frac{9}{20}.$$

8.23. Một dãy phố gồm 40 gia đình, trong đó 23 gia đình có điện thoại thông minh, 18 gia đình có laptop và 26 gia đình có ít nhất một trong hai thiết bị này. Chọn ngẫu nhiên một gia đình trong dãy phố. Tính xác suất để gia đình đó:

a) Có điện thoại thông minh và laptop.

b) Có điện thoại thông minh nhưng không có laptop.

c) Không có cả điện thoại thông minh và laptop.

Lời giải

Xét các biến cố A : "Gia đình đó có điện thoại thông minh", B : "Gia đình đó có laptop".

$$a) \text{ Ta có } P(A) = \frac{23}{40}, P(B) = \frac{18}{40}, P(A \cup B) = \frac{26}{40} = \frac{13}{20}.$$

$$P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{23}{40} + \frac{18}{40} - \frac{26}{40} = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}.$$

b) Ta có $A = AB \cup \overline{AB}$, suy ra $P(A) = P(AB) + P(\overline{AB})$, do đó:

$$P(\overline{AB}) = P(A) - P(AB) = \frac{23}{40} - \frac{15}{40} = \frac{8}{40} = \frac{1}{5}.$$

$$c) P(\overline{AB}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{26}{40} = \frac{14}{40} = \frac{7}{20}.$$

8.24. Một nhóm 50 học sinh đi cắm trại, trong đó có 23 em mang theo bánh ngọt, 22 em mang theo nước uống và 5 em mang theo cả bánh ngọt lẫn nước uống. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong nhóm. Tính xác suất để học sinh đó:

a) Mang theo hoặc bánh ngọt hoặc nước uống.

b) Không mang theo cả bánh ngọt và nước uống.

Lời giải

Xét các biến cố A : "Học sinh đó mang theo bánh ngọt", B : "Học sinh đó mang theo nước uống".

$$a) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{23}{50} + \frac{22}{50} - \frac{5}{50} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5}.$$

$$b) P(\overline{AB}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{40}{50} = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}.$$

8.25. Một lớp 40 học sinh, trong đó có 22 em học khá môn Toán, 25 em học khá môn Ngữ văn và 3 em không học khá cả hai môn này. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong lớp. Tính xác suất để em đó:

a) Học khá ít nhất một trong hai môn Toán hoặc Ngữ văn.

b) Học khá cả môn Toán và môn Ngữ văn.

Lời giải

Xét các biến cố A : "Học sinh đó học khá môn Toán", B : "Học sinh đó học khá môn Ngữ văn". Ta có

$$P(A) = \frac{22}{40}, P(B) = \frac{25}{40}, P(\overline{AB}) = \frac{3}{40}.$$

$$a) P(A \cup B) = 1 - P(\overline{AB}) = 1 - \frac{3}{40} = \frac{37}{40}.$$

$$b) P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{22}{40} + \frac{25}{40} - \frac{37}{40} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}.$$

8.26. Chọn ngẫu nhiên hai người từ một nhóm 9 nhà toán học tham dự hội thảo, trong nhóm có 5 nhà toán học nam và 4 nhà toán học nữ. Tính xác suất để hai người được chọn có cùng giới tính.

Lời giải

Xét các biến cố A : "Cả hai người là nam", B : "Cả hai người là nữ".

Biến cố C : "Hai người có cùng giới tính" là biến cố hợp của A và B . Hai biến cố A và B là xung khắc nên $P(C) = P(A) + P(B)$.

Ta có $n(\Omega) = C_9^2 = 36, n(A) = C_5^2 = 10, n(B) = C_4^2 = 6$. Do đó $P(A) = \frac{10}{36}, P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

$$P(C) = P(A) + P(B) = \frac{10}{36} + \frac{6}{36} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

8.27. Cho A, B là hai biến cố độc lập và xung khắc với $P(A) = 0,35; P(A \cup B) = 0,8$. Tính xác suất để:

- Xảy ra B .
- Xảy ra cả A và B .
- Xảy ra đúng một trong hai biến cố A hoặc B .

Lời giải

a) Do A, B xung khắc nên $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, suy ra

$$P(B) = P(A \cup B) - P(A) = 0,8 - 0,35 = 0,45.$$

b) Do A, B độc lập nên $P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0,35 \cdot 0,45 = 0,1575$.

c) Do $(A, \bar{B})$ độc lập và $(\bar{A}, B)$ độc lập nên

$$P(A\bar{B}) = P(A) \cdot P(\bar{B}) = 0,35 \cdot 0,55 = 0,1925$$

$$P(\bar{A}B) = P(\bar{A}) \cdot P(B) = 0,65 \cdot 0,45 = 0,2925$$

Xác suất xảy ra đúng một trong hai biến cố A hoặc B là

$$P(A\bar{B} \cup \bar{A}B) = P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) = 0,1925 + 0,2925 = 0,485.$$

8.28. Cho hai biến cố A, B với $P(A) = \frac{1}{4}, P(\bar{B}) = \frac{1}{5}, P(A \cup B) = \frac{7}{8}$. Hỏi A và B có độc lập hay không?

Lời giải

$$P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{4} + \left(1 - \frac{1}{5}\right) - \frac{7}{8} = \frac{7}{40}.$$

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{5} = \frac{8}{40} \neq \frac{7}{40} = P(AB).$$

Vậy hai biến cố A, B không độc lập.

CHƯƠNG IX: ĐẠO HÀM

BÀI 31: ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM

A- KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Đạo hàm của hàm số tại một điểm

Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và điểm $x_0 \in (a; b)$. Nếu tồn tại giới hạn

(hữu hạn) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của $f(x)$ tại điểm x_0 , kí hiệu là

$f'(x_0)$ hoặc $y'(x_0)$.

Cách viết khác của định nghĩa: $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

Quy tắc tính đạo hàm của hàm số tại một điểm bằng định nghĩa:

Bước 1: Tính $f(x) - f(x_0)$.

Bước 2: Lập và rút gọn tỉ số $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ với $x \in (a; b), x \neq x_0$.

Bước 3: Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

2. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M(x_0; f(x_0))$ là $k = f'(x_0)$ nếu đạo hàm $f'(x_0)$ tồn tại.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M(x_0; y_0), y_0 = f(x_0)$ là:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

3. Ý nghĩa vật lí của đạo hàm

Vận tốc tức thời của chuyển động $s = s(t)$ tại thời điểm t là $v(t) = s'(t)$.

B- VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính đạo hàm của hàm số $y = x + \sqrt{x-1}$ tại điểm $x_0 = 2$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số là $D = [1; +\infty]$.

Tại điểm $x_0 = 2, y_0 = 2 + \sqrt{2-1} = 3$. Với $1 \leq x \neq 2$, ta có:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{x + \sqrt{x-1} - 3}{x - 2} = \frac{(x-2) + (\sqrt{x-1} - 1)}{x - 2} = 1 + \frac{\sqrt{x-1} - 1}{x - 2}$$

Do đó:

$$y'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(1 + \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} \right) = 1 + \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} = 1 + \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)-1}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} = 1 + \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x-1}+1}$$

$$= 1 + \frac{1}{1+1} = \frac{3}{2}. \text{ Vậy } y'(2) = \frac{3}{2}.$$

Ví dụ 2. Tính đạo hàm (nếu tồn tại) của hàm số $y = |x-1|x^2$ tại điểm $x_0 = 1$.

Lời giải

$$\text{Đạo hàm } y'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{y-0}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|x^2}{x-1}.$$

Ta cần tính riêng các giới hạn bên phải và bên trái tại điểm 1. Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x-1|x^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)x^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|x^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)x^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x)^2 = -1$$

Giới hạn bên phải và bên trái tại điểm 1 khác nhau nên không tồn tại giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|x^2}{x-1}$. Do đó, đạo hàm $y'(1)$ không tồn tại.

Chú ý: $|x-1|x^2 = (x-1)x^2$ khi $x \geq 1$ và $|x-1|x^2 = -(x-1)x^2$ khi $x < 1$ nên để khử vô định trong giới hạn trên ta phải xét riêng các giới hạn một phía.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = (2x+1)^2$.

a) Bằng định nghĩa, hãy tính đạo hàm của hàm số đã cho tại điểm $x_0 = -1$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $A(-1;1)$.

Lời giải

a) Tại điểm $x_0 = -1, y_0 = (-2+1)^2 = 1$.

$$\text{Với } x \neq -1, \text{ ta có: } \frac{y-1}{x-(-1)} = \frac{(2x+1)^2-1}{x+1} = \frac{(2x+1-1)(2x+1+1)}{x+1} = 2.2x$$

$$\text{Do đó } y'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{y-1}{x-(-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} 2.2x = -4.$$

b) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $A(-1;1)$ là: $y-1 = y'(-1)(x-(-1)) = -4(x+1)$ hay $y = -4x-3$.

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = \frac{8}{x}, x \neq 0$.

- a) Tính đạo hàm của hàm số tại điểm x_0 bất kì, $x_0 \neq 0$.
- b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$.
- c) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số, biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng có phương trình $y = -2x + 8$

Lời giải

a) Với $x_0 \neq 0$ bất kì, ta có:
$$y'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{8}{x} - \frac{8}{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{8(x_0 - x)}{(x - x_0)x_0 \cdot x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-8}{x_0 \cdot x} = -\frac{8}{x_0^2}.$$

b) Với $x_0 = 2$ ta có $y_0 = 4$ và $y'(2) = -2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$ là: $y - 4 = -2(x - 2) = -2x + 4$ hay $y = -2x + 8$.

c) Hệ số góc tiếp tuyến có dạng $k = y'(x_0) = -\frac{8}{x_0^2}$ ($x = x_0$ là hoành độ tiếp điểm). Do tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = -2x + 8$ nên hệ số góc của tiếp tuyến là $k = -2$.

Ta có: $-\frac{8}{x_0^2} = -2 \Leftrightarrow x_0^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ x_0 = -2 \end{cases}$. Với, phương trình tiếp tuyến là: $y - 4 = -2(x - 2)$, hay $y = -2x + 8$ (loại do tiếp tuyến trùng với đường thẳng đã cho).

Với $x_0 = -2$, phương trình tiếp tuyến là: $y - (-4) = -2(x - (-2))$, hay $y = -2x - 8$.

Vậy $y = -2x - 8$ là tiếp tuyến cần tìm.

Chú ý. Đối với bài toán viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số song song với đường thẳng cho trước, ta cần kiểm tra lại kết quả và loại trường hợp hai đường thẳng trùng nhau do điều kiện hệ số góc bằng nhau chỉ là điều kiện cần.

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 9.1. Tính (bằng định nghĩa) đạo hàm các hàm số sau:

a) $y = x^2 - x$ tại $x_0 = 1$;

b) $y = -x^3$ tại $x_0 = 1$.

Lời giải

a)
$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1 - h - 1 + 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 1) \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) f'(-1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(h-1)^3 + 1^3}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(h^3 - 3h^2 + 3h - 1) + 1}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^3 + 3h^2 - 3h}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (-h^2 + 3h - 3) \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

Bài 9.2. Sử dụng định nghĩa, tìm đạo hàm các hàm số sau:

a) $y = kx^2 + c$ (với k, c là các hằng số);

b) $y = x^3$.

Lời giải

$$\begin{aligned}
 a) f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(x+h)^2 + c - (kx^2 + c)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{kx^2 + 2kxh + kh^2 + c - kx^2 - c}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2kxh + kh^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2kx + kh) = 2kx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2
 \end{aligned}$$

Bài 9.3. Viết phương trình tiếp tuyến của parabol $y = -x^2 + 4x$, biết:

a) Tiếp tuyến có hoành độ $x_0 = 1$;

b) Tiếp điểm có tung độ $y_0 = 0$.

Lời giải

a) Đạo hàm của hàm số tại điểm x_0

$$f'(x) = -2x + 4 \text{ đạo hàm của hàm số tại điểm } x_0 = 1.$$

$$f'(1) = -2(1) + 4 = 2$$

Phương trình tiếp tuyến của parabol tại điểm $x_0 = 1$ là:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - (x_0)) \Rightarrow y - f(1) = 2(x - 1).$$

Thay $f(1) = 3$, ta được phương trình tiếp tuyến: $y - 3 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x + 1$

b) Tại điểm $y_0 = 0$ ta có $x = 2$

Đường tiếp tuyến tại điểm $(2, 0)$ có độ dốc bằng $y' = -2.2 + 4 = -4$.

Sử dụng công thức tương tự, ta có: $y - 0 = -4(x - 2) \Rightarrow y = -4x + 8$

Bài 9.4. Một vật được phóng theo phương thẳng đứng lên trên từ mặt đất với vận tốc ban đầu là $19,6 \text{ m/s}$ thì độ cao h của nó (tính bằng m) sau t giây được cho bởi công thức $h = 19,6t - 4,9t^2$. Tìm vận tốc của vật khi nó chạm đất.

Lời giải

Tại thời điểm mà vật đạt độ cao bằng 0, ta có: $0 = 19,6t - 4,9t^2 \Leftrightarrow 0 = t(19,6 - 4,9t) \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 4 \end{cases}$

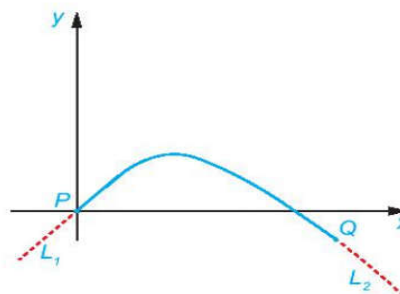
Khi $t = 4$ (thời điểm vật chạm đất), ta có: $19,6 - 9,8(4) = -19,6$.

Vậy vận tốc của vật khi nó chạm đất là $19,6 \text{ m/s}$.

Bài 9.5. Một kĩ sư thiết kế một đường ray tàu lượn, mà mặt cắt của nó gồm một đường cong có dạng parabol (H.9.6a), đoạn dốc lên L_1 và đoạn dốc xuống L_2 là phần đường thẳng có hệ số góc lần lượt là $0,5$ và $-0,75$. Để tàu lượn chạy êm và không bị đổi hướng đột ngột, L_1 và L_2 phải có những tiếp tuyến của cung parabol tại các điểm chuyển tiếp P và Q (H.9.6b). Giả sử gốc tọa độ đặt tại P và phương trình của parabol là $y = ax^2 + bx + c$, trong đó x tính bằng mét.



Hình 9.6a



Hình 9.6b

- Tìm c
- Tính $y'(0)$ và tìm b .
- Giả sử khoảng cách theo phương ngang giữa P và Q là 40 m . Tìm a .
- Tìm độ chênh lệch độ cao giữa hai điểm chuyển tiếp P và Q .

Lời giải

a) Ta có $y' = 2ax + b$

Ta lại có phương trình của tiếp tuyến là: $y - y_p = y'(x_p)(x - x_p)$

Thay các giá trị này vào phương trình tiếp tuyến, ta có: $0 = 2ap + b$

Vậy $b = -2ap$.

Thay $x = 0$ vào phương trình đường cong ta có $y = a(0)^2 + c(0) + c = c \Rightarrow c = yp$

b) $y' = 2ax + b = c$ khi $x = 0 \Rightarrow y'(0) = b$

c) Ta có $y'(P) = 2aP + b = 0,5$, $y'(Q) = 2aQ + b = -0,75$

Trừ hai phương trình, ta có: $2a(Q - P) = -1,25 \Leftrightarrow Q - P = 20 \Rightarrow a = \frac{-1,25}{40}$

D- BÀI TẬP

9.1. Tính (bằng định nghĩa) đạo hàm của hàm số $y = 2x^2 + 3x - 1$ tại điểm $x_0 = 1$.

Lời giải

$$y'(1) = 7.$$

9.2. Cho hàm số $f(x) = x(2x - 1)^2$. Tính $f'(0)$ và $f'(1)$.

Lời giải

$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} (2x - 1)^2 = (-1)^2 = 1$. Để tính $f'(1)$ ta phân tích:

$$f(x) - f(1) = x(2x - 1)^2 - 1 = (x - 1)(2x - 1)^2 + (2x - 1)^2 - 1 = (x - 1)(2x - 1)^2 + 4x(x - 1). \text{ Khi đó}$$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} ((2x - 1)^2 + 4x) = 5.$$

9.3. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x \geq 0 \\ 1-2x, & x < 0 \end{cases}$. Tính $f'(0)$.

Lời giải

Tìm giới hạn bên phải và bên trái tại điểm $x = 0$. Ta có $f(0) = 1$ và

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x-1)^2 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x-1-1)(x-1+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-2) = -2 \text{ và}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(1-2x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-2) = -2. \text{ Vậy } f'(0) = -2.$$

9.4. Tính đạo hàm của hàm số:

a) $y = ax^2$ (a là hằng số) tại điểm x_0 bất kì. b) $y = \frac{1}{x-1}$ tại điểm x_0 bất kì, $x_0 \neq 1$.

Lời giải

$$\text{a) } y'(x_0) = 2ax_0; \text{ b) } y'(x_0) = -\frac{1}{(x_0-1)^2}, x_0 \neq 1.$$

9.5. Tìm tốc độ điểm M trên đồ thị hàm số $y = x^3 + 1$, biết hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M bằng 3.

Lời giải

Gọi $M(a; a^3 + 1)$ là tọa độ cần tìm. Hệ số góc của tiếp tuyến đồ thị hàm số tại M là $k = y'(a) = 3a^2$.

Theo giả thiết $k = 3a^2 = 3 \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$. Vậy $M(1; 2)$ và $M(-1; 0)$ là tọa độ các điểm cần tìm.

9.6. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -3x^2$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng có phương trình $y = 6x + 5$.

Lời giải

$$y = 6x + 3$$

9.7. Vị trí của một vật chuyển động thẳng được cho bởi phương trình $s = t^3 - 4t^2 + 4t$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Tính vận tốc của vật tại thời điểm $t = 3$ giây và $t = 5$ giây.

Lời giải

Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 3$ giây là $v(3) = s'(3) = 7m/s$. Tương tự, $v(5) = 39m/s$.

BÀI 32. CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

A- KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phép toán

$$(u + v)' = u' + v'; (ku)' = ku' \text{ (} k \text{ là hằng số);}$$

$$(u - v)' = u' - v'; \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \text{ (} v \neq 0 \text{);}$$

$$(uv)' = u'v + uv'; \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \text{ (} v \neq 0 \text{)}.$$

2. Đạo hàm của hàm số hợp

Nếu hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm u'_x tại x và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm y'_u tại u thì hàm số hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm $y'(x)$ tại x và ta có $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

3. Công thức đạo hàm

$$(x^n)' = nx^{n-1} \text{ (} n \in \mathbb{N} \text{); } (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \text{ (nếu } x^{\alpha-1} \text{ có nghĩa);}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0; (\sin x)' = \cos x;$$

$$(\cos x)' = -\sin x; (a^x)' = a^x \ln a;$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; (\ln|x|)' = \frac{1}{x}, x \neq 0;$$

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, x \neq k\pi; (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, x > 0 \text{ (} 0 < a \neq 1 \text{);}$$

$$(e^x)' = e^x$$

B- VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (\sqrt{x} + 2)(x^2 + 1)$, b) $y = \frac{x-1}{x^2+1}$.

Lời giải

a) Áp dụng các công thức và phép toán đạo hàm, ta có:

$$y' = (\sqrt{x} + 2)'(x^2 + 1) + (\sqrt{x} + 2)(x^2 + 1)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 + 1) + (\sqrt{x} + 2)2x = \frac{x^2 + 1}{2\sqrt{x}} + 2x(\sqrt{x} + 2)$$

b) Ta có: $y' = \frac{(x-1)'(x^2+1) - (x-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2+1) - (x-1)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}.$

Ví dụ 2. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } y' &= 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\left(\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)' = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\left(x + \frac{\pi}{4}\right)' = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2x \end{aligned}$$

Ví dụ 3. Tính đạo hàm của hàm số $y = x^2 e^{-2x}$ và tìm x để $y' = 0$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y' = (x^2)' e^{-2x} + x^2 (e^{-2x})' = 2x e^{-2x} + x^2 e^{-2x} (-2x)' = 2x e^{-2x} - 2x^2 e^{-2x} = 2(x - x^2) e^{-2x}$$

$$\text{Do } e^{-2x} > 0 \text{ nên } y' = 0 \Leftrightarrow x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Ví dụ 4. Cho hàm số $f(x) = x + \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ và $g(x) = x \ln|2 - x|$. Tính $\frac{f'(0)}{g'(0)}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } f'(x) = 1 + \frac{\left(x + \frac{\pi}{4}\right)'}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = 1 + \frac{1}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}; \quad g'(x) = \ln|2 - x| + x \frac{(2 - x)'}{2 - x} = \ln|2 - x| - \frac{x}{2 - x}.$$

$$\text{Thay } x = 0 \text{ vào các đẳng thức trên, ta được: } f'(0) = 1 + \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = 3; \quad g'(0) = \ln 2 \text{ và } \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{3}{\ln 2}.$$

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 9.6. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$;

b) $y = x^2 - 4\sqrt{x} + 3$.

Lời giải

a) $y' = \frac{d}{dx}(x^3) - \frac{d}{dx}(3x^2) + \frac{d}{dx}(2x) + \frac{d}{dx}(1)$

$$y' = 3x^2 - 6x + 2$$

b) $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} \quad \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$

$$\frac{d}{dx}(cf(x)) = cf'(x)$$

$$y' = \frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}(4\sqrt{x}) + \frac{d}{dx}(3)$$

$$y' = 2x - 2\sqrt{x}$$

Bài 9.7. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \frac{2x-1}{x+2};$

b) $y = \frac{2x}{x^2+1}.$

Lời giải

a) $y' = \frac{(2)(x+2) - (2x-1)(1)}{(x+2)^2}$

$$y' = \frac{5}{(x+2)^2}$$

b) $y' = \frac{(2)(x^2+1) - (2x)(2x)}{(x^2+1)^2}$

$$y' = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

Bài 9.8. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x \sin^2 x;$

b) $y = \cos^2 x + \sin 2x;$

c) $y = \sin 3x - 3 \sin x;$

d) $y = \tan x + \cot x.$

Lời giải

a) $y' = x \sin 2x + \sin^2 x$ hay $y' = \sin^2 x + x \sin 2x$

b) $y' = -2 \sin 2x + 2 \cos x$ hay $y' = 2(\cos x - \sin 2x)$

c) $y = \sin 3x - 3 \sin x \Rightarrow y' = 3 \cos 3x - 3 \cos x$

d) $y' = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}$

$$y' = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$$

Bài 9.9. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 2^{3x-x^2};$

b) $y = \log_3(4x+1).$

Lời giải

a) $y' = 2^{3x-x^2} \cdot \ln 2 \cdot (3-2x)$

b) $y' = \frac{4}{\ln 3} \cdot \frac{1}{4x+1} \cdot 4 = \frac{4}{(4x+1) \ln 3}$

Bài 9.10. Cho hàm số $f(x) = 2 \sin^2 \left(3x - \frac{\pi}{4} \right)$. Chứng minh rằng $|f'(x)| \leq 6$ với mọi x .

Lời giải

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left[2 \sin^2 \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

$$= 4 \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) \cdot \cos \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) \cdot 3$$

$$= 6 \sin\left(6x - \frac{\pi}{2}\right) = 6 \cos(6x)$$

Vì $-1 \leq \cos(6x) \leq 1$ với mọi x , nên ta có $|f'(x)| = |6 \cos(6x)| \leq 6$ với mọi x . Vậy ta đã chứng minh được điều phải chứng minh.

Bài 9.11. Một vật chuyển động rơi tự do có phương trình $h(t) = 100 - 4,9t^2$, ở đó độ cao h so với mặt đất tính bằng mét và thời gian t tính bằng giây. Tính vận tốc của vật:

a) Tại thời điểm $t = 5$ giây;

b) Khi vật chạm đất.

Lời giải

a) Để tính vận tốc của vật tại thời điểm t , ta cần tính đạo hàm của hàm số $h(t)$ tại thời điểm đó:

$$v(t) = h'(t) = \frac{d}{dt}(100 - 4,9t^2) = -9,8t$$

Vậy vận tốc của vật tại thời điểm $t = 5$ giây là: $v(5) = -9,8 \cdot 5 = -49 \text{ (m/s)}$.

b) Vật chạm đất khi $h(t) = 0$, tức là:

$$100 - 4,9t^2 = 0 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{100}{4,9}}$$

$$v_f = \sqrt{2gh_0} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 100} = \sqrt{1960} = 44,3 \text{ m/s}$$

Bài 9.12. Chuyển động của một hạt trên một dây rung được cho bởi $s(t) = 12 + 0,5 \sin(4\pi t)$, trong đó s tính bằng centimét và t tính bằng giây. Tính vận tốc của hạt sau t giây. Vận tốc cực đại của hạt là bao nhiêu?

Lời giải

Đạo hàm của hàm $s(t)$ theo thời gian t :

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 2\pi \cos(4\pi t) \cdot 0,5$$

Ta thấy rằng hàm $v(t)$ là một hàm cosin với biên độ bằng 2π , do đó giá trị lớn nhất của hàm này là 2π . Vậy vận tốc cực đại của hạt là $2\pi \text{ cm/s}$.

D- BÀI TẬP

9.8. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (x+1)^2(x^2-1)$; b) $y = \left(x^2 - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^3$.

Lời giải

Dùng quy tắc và công thức đạo hàm của hàm số hợp.

a) $y' = 2(x+1)(x^2-1) + 2x(x+1)^2 = 2(x+1)(2x^2+x-1)$

b) $y' = 3\left(x^2 - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^2 \left(2x + \frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$.

9.9. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \frac{x^2 - x + 1}{x + 2}$; b) $y = \frac{1 - x^2}{x^2 + 1}$.

Lời giải

a) $y' = \frac{x^2 + 4x - 3}{(x + 2)^2}$; b) $y' = -\frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$.

9.10. Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$ và $g(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + x^2$. Tính $f'(0) - g'(1)$.

Lời giải

Dùng quy tắc tính đạo hàm $f'(x) \cdot g'(x)$ và thay giá trị tương ứng.

Ta có: $f'(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}}}{(\sqrt{4 - x^2})^2} = \frac{4}{(4 - x^2)\sqrt{4 - x^2}}$; $g'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} + 2x$.

Do đó $f'(0) = \frac{1}{2}$; $g'(1) = \frac{1}{2}$; $f'(0) - g'(1) = 0$.

9.11. Tính đạo hàm của hàm số $y = 3 \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2 \cot\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

Lời giải

$y' = \frac{3}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} - \frac{2}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = \frac{1}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = 1 + \tan^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

9.12. Cho hàm số $f(x) = \cos^2 x + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$. Tính đạo hàm $f'(x)$ và chứng tỏ $f'(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = -2 \cos x \sin x - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$
 $= -\sin 2x - \sin\left(\frac{4\pi}{3} + 2x\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{3} - 2x\right) = -\sin 2x + \sin\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$
 $= -\sin 2x + 2 \cos \frac{\pi}{3} \sin 2x = -\sin 2x + \sin 2x = 0$.

9.13. Cho hàm số $f(x) = 4 \sin^2\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$. Chứng minh rằng $|f'(x)| \leq 8$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tìm x để $f'(x) = 8$.

Lời giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } f'(x) &= 8 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \left(\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\right)' = 8 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \left(2x - \frac{\pi}{3}\right)' \\ &= 16 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 8 \sin\left(4x - \frac{2\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

$$\text{Từ đó suy ra } |f'(x)| = 8 \left| \sin\left(4x - \frac{2\pi}{3}\right) \right| \leq 8, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$f'(x) = 8 \Leftrightarrow \sin\left(4x - \frac{2\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow 4x - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

9.14. Biết y là hàm số của x thỏa mãn phương trình $xy = 1 + \ln y$. Tính $y'(0)$.

Lời giải

Dùng quy tắc tính đạo hàm của hàm số hợp, ta có:

$$y + xy' = (\ln y)' = \frac{y'}{y} \Rightarrow y' \left(\frac{1}{y} - x \right) = y \Rightarrow y' = \frac{y^2}{1 - xy}.$$

Tại $x = 0$, thay vào phương trình ta được $1 + \ln y = 0 \Leftrightarrow y = e^{-1} = \frac{1}{e}$. Vậy $y'(0) = \frac{1}{e^2}$.

9.15. Một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ mặt đất với vận tốc ban đầu là v_0 (m/s) (bỏ qua sức cản của không khí) thì độ cao h của vật (tính bằng mét) sau t giây được cho bởi công thức $h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$ (g là gia tốc trọng trường). Tìm vận tốc của vật khi chạm đất.

Lời giải

Tại thời điểm vật chạm đất: $h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = 0$ ($t > 0$). Giải phương trình ta được $t = \frac{2v_0}{g}$.

Vận tốc của vật khi chạm đất là $v = h' \left(\frac{2v_0}{g} \right) = -v_0$.

9.16. Chuyển động của một hạt trên một dây rung được cho bởi công thức $s(t) = 10 + \sqrt{2} \sin\left(4\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$, trong đó s tính bằng centimét và t tính bằng giây. Tính vận tốc của hạt sau t giây. Vận tốc cực đại của hạt là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến chữ số thập thứ nhất).

Lời giải

Vận tốc của hạt sau t giây là: $v(t) = s'(t) = 4\pi\sqrt{2} \cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$.

Vận tốc cực đại của hạt là: $v_{\max} = 4\pi\sqrt{2} \approx 17,8m/s$, đạt được khi $\left| \cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{6}\right) \right| = 1$ hay

$$t = \frac{5}{24} + \frac{k}{4}, k \in \mathbb{N}.$$

BÀI 33. ĐẠO HÀM CẤP HAI

A- KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Định nghĩa: $f''(x) = (f'(x))'$.

Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai: Gia tốc tức thời của chuyển động có phương trình $s = s(t)$ là $a(t) = s''(t)$.

B- VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{2}\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$; b) $y = x^2 e^{-x}$.

Lời giải

a) Ta có: $y' = -\sqrt{2}\sin\left(4\pi t + \frac{\pi}{3}\right)\left(4\pi t + \frac{\pi}{3}\right)' = -4\pi\sqrt{2}\sin\left(4\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$;

$$y'' = -4\pi\sqrt{2}\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{3}\right)\left(4\pi t + \frac{\pi}{3}\right)' = -16\pi^2\sqrt{2}\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{3}\right).$$

b) Ta có: $y' = (x^2)' e^{-x} + x^2 (e^{-x})' = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x}$;

$$y'' = (2x - x^2) e^{-x} + x^2 (e^{-x})' = (2 - 2x) e^{-x} - (2x - x^2) e^{-x} = (x^2 - 4x + 2) e^{-x}$$

Chú ý: Hàm số dạng $y = A\cos(\omega t + \varphi)$ (A, ω, φ là các hằng số, $A > 0, \omega > 0$) biểu diễn phương trình chuyển động của một dao động điều hoà. Hàm số đó thoả mãn phương trình $y'' = -\omega^2 y$. Phương trình này vì vậy được gọi là phương trình dao động điều hoà (một lớp phương trình quan trọng trong Vật lý).

Ví dụ 2. Cho hàm số $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. Tính $f''(0)$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{(x + \sqrt{1+x^2})'}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1 + \frac{(1+x^2)'}{2\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{(x + \sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$f''(x) = -\frac{(\sqrt{1+x^2})'}{(\sqrt{1+x^2})^2} = -\frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{(1+x^2)'}{2\sqrt{1+x^2}} = -\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}.$$

Thay $x=0$ vào biểu thức trên ta được $f''(0) = 0$.

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 9.13. Cho hàm số $f(x) = x^2 e^x$. Tính $f''(0)$.

Lời giải

$$f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = (x^2 + 2x)e^x$$

Tính giá trị của $f'(x)$ tại điểm $x=0$: $f'(0) = (0^2 + 2 \cdot 0)e^0 = 0 \cdot 1 = 0$

Bài 9.14. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = \ln(x+1)$;

b) $y = \tan 2x$.

Lời giải

a) $y' = \frac{1}{x+1}$

$$y'' = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

b) $y' = 2 \cdot \frac{1}{\cos^2 x}(2x)$

$$y'' = 8 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \tan(2x) = 8(1 + \tan^2(2x)) \tan(2x)$$

Bài 9.15. Cho hàm số $P(x) = ax^2 + bx + 3$ (a, b là hằng số). Tìm a, b biết $P(1) = 0$ và $P''(1) = -2$.

Lời giải

Ta có $P'(1) = 0$

$$P'(1) = 2a(1) + b = 0 \Rightarrow 2a = -b$$

Vì $P''(1) = -2$

$$P''(1) = 2a(-1) = -2 \Rightarrow a = 1$$

Vậy $a = 1$ và $b = -2a = -2$

$$\Rightarrow P(x) = x^2 - 2x + 3$$

Bài 9.16. Cho hàm số $f(x) = 2 \sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Chứng minh rằng $|f''(x)| \leq 4$ với mọi x .

Lời giải

$$f(x) = 2 \sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2 \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(x) \right]^2$$

$$= 2 \left(\frac{1}{2} \sin^2(x) + \frac{1}{2} \cos^2(x) + \sqrt{2} \sin(x) \cos(x) \right)$$

$$f'(x) = 2(\cos(x) - \sin(x) + \sqrt{2} \cos(x))$$

$$f''(x) = 2(-\sin(x) - \cos(x) + \sqrt{2}(-\sin(x) + \cos(x))) = -4 \cos(x)$$

Do đó, với mọi giá trị của x , ta có: $f''(x) = 4 |\cos(x)| \leq 4$

Bài 9.17. Phương trình chuyển động của một hạt được cho bởi $s(t) = 10 + 0,5 \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{5}\right)$, trong đó s

tính bằng centimét và t tính bằng giây. Tính gia tốc của hạt tại thời điểm $t = 5$ giây (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Lời giải

Đạo hàm của $s(t)$ theo t : $\frac{ds}{dt} = 0,5.2\pi \cdot \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{5}\right) = \pi \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{5}\right)$

Đạo hàm cấp hai của $s(t)$ theo t : $\frac{d^2s}{dt^2} = -\pi^2 \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{5}\right)$

Tại $t = 5$ giây: $\frac{d^2s}{dt^2} = -\pi^2 \sin\left(2\pi \cdot 5 + \frac{\pi}{5}\right) \approx -24.5 \text{ cm/s}^2$

D- BÀI TẬP

9.17. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 1$; b) $y = \frac{2x+1}{x-1}$.

Lời giải

a) $y'' = 3x^2 - 4$; b) $y'' = \frac{6}{(x-1)^3}$.

9.18. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = \ln|2x-1|$; b) $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Lời giải

a) $y'' = -\frac{4}{(2x-1)^2}$; b) $y' = \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)' = \frac{1}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} = 1 + \tan^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$;

$$y'' = 2 \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \left(\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right)' = \frac{2 \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}$$

9.19. Cho hàm số $f(x) = xe^{x^2} + \ln(x+1)$. Tính $f'(0)$ và $f''(0)$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = (1+2x^2)e^{x^2} + \frac{1}{x+1}$; $f''(x) = (6x+4x^3)e^{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$

Thay $x=0$ ta được $f'(0) = 2$; $f''(0) = -1$

9.20. Cho $f(x) = (x^2 + a)^2 + b$ (a, b là tham số). Biết $f(0) = 2$ và $f''(1) = 8$, tìm a và b .

Lời giải

Tính đạo hàm cấp hai ta được $f''(x) = 12x^2 + 4a$. Từ đó có $f''(1) = 12 + 4a = 8$ nên $a = -1$.

Mặt khác, $f(0) = a^2 + b = 2$. Thay $a = -1$ ta được $b = 1$. Vậy $a = -1$; $b = 1$ là các giá trị cần tìm.

9.21. Phương trình chuyển động của một hạt được cho bởi công thức $s(t) = 15 + \sqrt{2} \sin\left(4\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$, trong đó s tính bằng centimét và t tính bằng giây. Tính gia tốc của hạt tại thời điểm $t = 3$ giây (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Lời giải

Gia tốc của hạt tại thời điểm t là: $a(t) = s''(t) = -16\pi^2 \sqrt{2} \sin\left(4\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$.

Tại thời điểm $t = 3$ giây, gia tốc của hạt là: $a = -16\pi^2 \sqrt{2} \sin\left(12\pi + \frac{\pi}{6}\right) \approx -111,7 m/s^2$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IX

PHẦN 1. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

A. TRẮC NGHIỆM

Câu 9.18. Quy tắc tính đạo hàm nào sau đây là đúng?

- A. $(u+v)' = u' - v'$. B. $(uv)' = u'v + uv'$. C. $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{1}{v^2}$. D. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v + uv'}{v^2}$.

Lời giải

Chọn D

Câu 9.19. Cho hàm số $f(x) = x^2 + \sin^3 x$. Khi đó $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng

- A. π . B. 2π . C. $\pi + 3$. D. $\pi - 3$.

Lời giải

Chọn A

Câu 9.20. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x) \leq 0$ là

- A. $[1; 3]$. B. $[-1; 3]$. C. $[-3; 1]$. D. $[-3; -1]$.

Lời giải

Chọn D

Câu 9.21. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{4 + 3u(x)}$ với $u(1) = 7, u'(1) = 10$. Khi đó $f'(1)$ bằng

- A. 1. B. 6. C. 3. D. -3.

Lời giải

Chọn C

$$f'(u)\Big|_{x=1} = \frac{3}{2\sqrt{4+3u(1)}} = \frac{3}{2\sqrt{25}} = \frac{3}{10}.$$

Với $u'(1) = 10$.

Câu 9.22. Cho hàm số $f(x) = x^2 e^{-2x}$. Tập nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ là

- A. $\{0; 1\}$. B. $\{0; -1\}$. C. $\{0\}$. D. $\{1\}$.

Lời giải

Chọn A

$$f(x) = x^2 e^{-x} \Rightarrow f'(x) = (x^2)' e + x^2 (e^{-2x})' = 2xe^{-2x} - 2x^2 e^{-2x} = 2xe^{-2x} (1 - x)$$

Giải phương trình $2xe^{-2x} (1 - x) = 0$.

Phương trình này có hai nghiệm là $x = 0, x = 1$.

Câu 9.23. Chuyển động của một vật có phương trình $s(t) = \sin\left(0,8\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$, ở đó s tính bằng centimét

và thời gian t tính bằng giây. Tại các thời điểm vận tốc bằng 0, giá trị tuyệt đối của gia tốc của vật gần với giá trị nào sau đây nhất?

- A. $4,5 \text{ cm} / \text{s}^2$. B. $5,5 \text{ cm} / \text{s}^2$. C. $6,3 \text{ cm} / \text{s}^2$. D. $7,1 \text{ cm} / \text{s}^2$.

Lời giải

Chọn D

Câu 9.24. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ có đồ thị là (C) . Hệ số góc nhỏ nhất của tiếp tuyến tại một điểm M trên đồ thị (C) là

- A. 1. B. 2. C. -1. D. 3.

Lời giải

Chọn B.

B. TỰ LUẬN

Bài 9.25. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

- a) $y = \left(\frac{2x-1}{x+2} \right)^5$; b) $y = \frac{2x}{x^2+1}$; c) $y = e^x \sin^2 x$; d) $y = \log(x + \sqrt{x})$.

Lời giải

$$\text{a) } y'(x) = 5 \left(\frac{2x-1}{x+2} \right)^4 \cdot \frac{(x+2) \cdot 2 - (2x-1) \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{10(2x-1)(x+2)^3}{(x+2)^4} = \frac{20x-50}{(x+2)^4}.$$

$$\text{b) } y'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}.$$

$$\text{c) } y'(x) = e^x \cdot 2 \sin x \cdot \cos x + e^x \cdot 2 \sin^2 x \cdot 2 \cos x = 2e^x \sin x (\cos x + \sin x \cos x) = 2e^x \sin x \cos^2 x.$$

$$\text{d) } y'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x}(2\sqrt{x} + \sqrt{x} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{x}(3\sqrt{x} + 2)}$$

Bài 9.26. Xét hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ với α là số thực:

- a) Tìm tập xác định của hàm số đã cho.
b) Bằng cách viết $y = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, tính đạo hàm của hàm số đã cho.

Lời giải

a) Tập xác định của hàm số $y = x^\alpha$ là tập các số thực dương nếu α là số thực chẵn, hoặc tập các số thực nếu α là số thực lẻ.

$$\text{b) } y'(x) = \frac{d}{dx}(e^{\alpha \ln x}) = e^{\alpha \ln x} \frac{d}{dx}(\ln x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Bài 9.27. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{3x+1}$. Đặt $g(x) = f(1) + 4(x^2-1)f'(1)$. Tính $g(2)$.

Lời giải

$$f(x) = \sqrt{3x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} \Rightarrow f'(1) = \frac{3}{4}.$$

$$f''(x) = -\frac{9}{4(3x+1)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow f''(2) = -\frac{3}{4\sqrt{7}}.$$

Bài 9.28. Cho hàm số $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Tính $f''(1)$.

Lời giải

$$f'(x) = \frac{(x-1)-(x+1)}{(x+1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2}.$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx} \left(-\frac{2}{(x-1)^2} \right) = \frac{4}{(x-1)^3} \Rightarrow f''(1) = 0$$

Bài 9.29. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1) = 2$ và $f'(x) = x^2 f(x)$ với mọi x . Tính $f''(1)$.

Lời giải

$$f'''(x) = [x^2 f(x)]' = 2xf'(x) + x^2 f'(x) = 2xf'(x) + x^2 \cdot x^2 f(x) = (2x + x^4) f(x)$$

$$\Rightarrow f'(1) = (2 \cdot 1 + 1^4) f(1) = 3 \cdot 2 = 6$$

Bài 9.30. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 1$ tại điểm có hoành độ bằng 1.

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 + 6x$, $y'(1) = 9$

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số là $y = x^3 + 3x^2 - 1$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là

$$y - y(1) = y'(1)(x - 1)$$

Thay vào đó các giá trị đã biết: $y - y(1) = 9(x - 1)$, $y = 9x - 6$

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 1$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là: $y = 9x - 6$.

Bài 9.31. Đồ thị của hàm số $y = \frac{a}{x}$ (a là hằng số dương) là một đường hypebol. Chứng minh rằng tiếp tuyến tại một điểm bất kì của đường hypebol đó tạo với các trục tọa độ một tam giác có diện tích không đổi.

Lời giải

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{x^2}$$

Phương trình của đường tiếp tuyến tại điểm (x_0, y_0) là: $y - y_0 = -\frac{a}{x^2}(x - x_0)$.

Đường tiếp tuyến cắt trục hoành tại điểm $(x_0, 0)$ và cắt trục tung tại điểm $\left(0, y_0 + \frac{a}{x_0}\right)$.

Diện tích tam giác tạo bởi đường tiếp tuyến và trục hoành là: $S_1 = \frac{1}{2}(x_0 - 0) \cdot (0 - y_0) = \frac{1}{2}x_0 y_0$

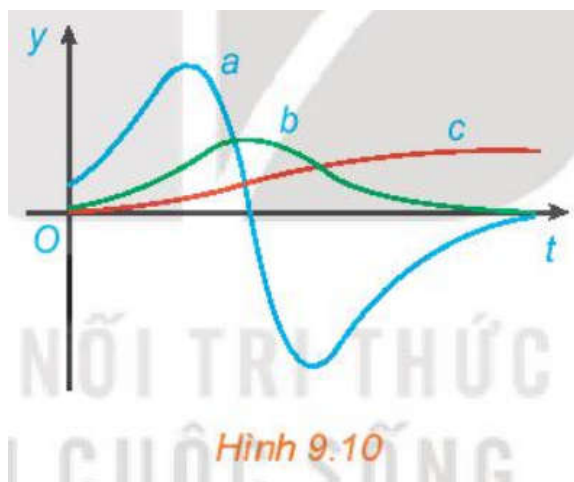
Diện tích tam giác tạo bởi đường tiếp tuyến và trục tung là:

$$S_2 = \frac{1}{2} \left(y_0 + \frac{a}{x_0} - y_0 \right) (0 - x_0) = \frac{1}{2}a$$

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{2}(x_0 y_0 + a) = \frac{1}{2}(2a) = a$$

Vì vậy, ta đã chứng minh được rằng diện tích của tam giác tạo bởi đường tiếp tuyến và các trục tọa độ là không đổi và bằng a , với a là hằng số dương của đường hyperbol.

Bài 9.32. Hình 9.10 biểu diễn đồ thị của ba hàm số. Hàm số thứ nhất là hàm vị trí của một chiếc ô tô, hàm số thứ hai biểu thị vận tốc và hàm số thứ ba biểu thị gia tốc của ô tô đó. Hãy xác định đồ thị của mỗi hàm số này và giải thích.



Lời giải

- Hàm số thứ nhất là hàm vị trí của chiếc ô tô, nó biểu thị khoảng cách mà chiếc ô tô đã di chuyển từ điểm xuất phát. Đồ thị của hàm số này là một đường cong mượt mà (nếu không có phần bị gián đoạn) và có độ dốc dương (nếu chiếc ô tô di chuyển theo phương dương) hoặc âm (nếu chiếc ô tô di chuyển theo phương âm).
- Hàm số thứ hai là hàm vận tốc của chiếc ô tô, nó biểu thị tốc độ của chiếc ô tô tại mỗi thời điểm. Đồ thị của hàm số này cũng là một đường cong mượt mà (nếu không có phần bị gián đoạn) và có độ dốc dương (nếu chiếc ô tô tăng tốc) hoặc âm (nếu chiếc ô tô giảm tốc).
- Hàm số thứ ba là hàm gia tốc của chiếc ô tô, nó biểu thị tốc độ thay đổi của chiếc ô tô tại mỗi thời điểm. Đồ thị của hàm số này có thể là một đường cong mượt mà hoặc bị gián đoạn (nếu chiếc ô tô tăng tốc/giảm tốc đột ngột). Nếu đồ thị của hàm số này là một đường thẳng thì nghĩa là gia tốc của chiếc ô tô là hằng số và chiếc ô tô đang di chuyển với chuyển động đều (chuyển động đều là chuyển động mà vận tốc của vật không đổi).

Bài 9.33. Vị trí của một vật chuyển động thẳng được cho bởi phương trình: $s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét.

- Tính vận tốc của vật tại các thời điểm $t = 2$ giây và $t = 4$ giây.
- Tại những thời điểm nào vật đứng yên?
- Tìm gia tốc của vật tại thời điểm $t = 4$ giây.
- Tính tổng quãng đường vật đi được trong 5 giây đầu tiên.
- Trong 5 giây đầu tiên, khi nào vật tăng tốc, khi nào vật giảm tốc?

Lời giải

$$a) s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$

$$\Rightarrow v = s' = f'(t) = 3t^2 - 12t + 9$$

$$\text{Tại } t=2 \text{ giây} \Rightarrow v = 3 \cdot (2)^2 - 12 \cdot 2 + 9 = -3(m/s)$$

$$\text{Tại } t=4 \text{ giây} \Rightarrow v = 3 \cdot (4)^2 - 12 \cdot 4 + 9 = 9(m/s)$$

b) Vật đứng yên khi $v=0$

$$v = 3t^2 - 12t + 9 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 1s \\ t = 3s \end{cases}$$

Vậy tại thời điểm $t=1s$, $t=3s$ thì vật đứng yên.

c) $a = v' = 6t - 12$

Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 4$ giây là:

$$a = 6.4 - 12 = 12(m/s^2)$$

d) Tổng quãng đường vật đi được trong 5 giây đầu tiên là:

$$s = 5^3 - 6.5^2 + 9.5 = 20(m)$$

e) Do $t=1s$ và $t=3s$ thì $v=0m/s$

$$t = 2 \Rightarrow v = -3m/s$$

$$t = 4s \Rightarrow v = 9m/s$$

$$t = 5 \Rightarrow v = 24m/s$$

Trong 5 giây đầu tiên, khi vật tăng tốc sau giây thứ 2, khi nào vật giảm tốc sau giây thứ 1

PHẦN 2. BÀI TẬP SÁCH BÀI TẬP

A- TRẮC NGHIỆM

9.22. Cho $f(x) = \cos^2\left(2x + \frac{\pi}{12}\right)$. Đạo hàm $f'(0)$ bằng

- A. 1. B. -1. C. $2\cos\frac{\pi}{12}$. D. $-2\cos\frac{\pi}{12}$

Lời giải

Chọn B

9.23. Cho $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x - 1$. Đạo hàm $f'(x) > 0$ khi

- A. $x < -1$. B. $x > 3$. C. $-1 < x < 3$. D. $x > -1$.

Lời giải

Chọn C

9. 24. Đạo hàm của hàm số $y = \ln|1 - 2x|$ là

- A. $y' = \frac{1}{|1 - 2x|}$. B. $y' = \frac{1}{1 - 2x}$. C. $y' = \frac{2}{2x - 1}$. D. $y' = \frac{-2}{2x - 1}$

Lời giải

Chọn C

9.25. Đạo hàm của hàm số $y = \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^3$ là

A. $3\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^2$. **B.** $-9\frac{(2x+1)^2}{(x-1)^5}$. **C.** $-9\frac{(2x+1)^2}{(x-1)^4}$. **D.** $9\frac{(2x+1)^2}{(x-1)^4}$

Lời giải

Chọn C

9.26. Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{1+2\sin^2 x}$ là

A. $y' = \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+2\sin^2 x}}$. **B.** $y' = \frac{\sin 2x}{2\sqrt{1+2\sin^2 x}}$. **C.** $y' = \frac{2\sin 2x}{\sqrt{1+2\sin^2 x}}$. **D.** $y' = \frac{\sin x \cos x}{2\sqrt{1+2\sin^2 x}}$.

Lời giải

Chọn A

9.27. Đạo hàm của hàm số $y = x \sin^2 x$ là

A. $y' = \sin^2 x + 2x \sin x$. **B.** $y' = \sin^2 x + x \sin 2x$.
C. $y' = \sin^2 x + 2x \cos x$. **D.** $y' = \sin^2 x + x \cos 2x$

Lời giải

Chọn B

9.28. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{1+5g(x)}$ với $g(0) = 3; g'(0) = -8$. Đạo hàm $f'(0)$ bằng

A. 10. **B.** -8. **C.** -5. **D.** 5

Lời giải

Chọn C

9.29. Cho $f(x) = x \sin x$ và $g(x) = \frac{\cos x}{x}$. Giá trị $\frac{f'(1)}{g'(1)}$ là

A. -1. **B.** $\sin 1 + \cos 1$. **C.** 1. **D.** $-\sin 1 - \cos 1$

Lời giải

Chọn A

9.30. Cho $f(x) = xe^{\frac{x^2}{2}}$. Tập nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ là

A. $\{1\}$. **B.** $\{-1\}$. **C.** $\{0;1\}$. **D.** $\{-1;1\}$

Lời giải

Chọn D

9.31. Cho hai hàm số $f(x) = 2x^3 + 3x - 1$ và $g(x) = 3(x^2 + x) + 2$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x) < g'(x)$ là:

A. $(-\infty; 0)$. **B.** $(1; +\infty)$. **C.** $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$. **D.** $(0; 1)$

Lời giải

Chọn D

9.32. Cho $S(r)$ là diện tích hình tròn bán kính r . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $S'(r)$ là diện tích nửa hình tròn đó. B. $S'(r)$ là chu vi đường tròn đó.
C. $S'(r)$ là nửa chu vi đường tròn đó. D. $S'(r)$ là hai lần chu vi đường tròn đó.

Lời giải

Chọn B

9.33. Tiếp tuyến đồ thị hàm số $y = x(x-1)^2 + x^2 + 1$ tại điểm $A(-1; -2)$ có phương trình là:

- A. $y = 6x + 4$. B. $y = 6x - 4$. C. $y = -2x - 4$. D. $y = -2x + 4$.

Lời giải

Chọn A

9.34. Tiếp tuyến đồ thị hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 5x + 3$ với hệ số góc nhỏ nhất có phương trình

- A. $y = 3x - 25$. B. $y = -3x + 25$. C. $y = -3x + \frac{25}{3}$. D. $y = -3x - \frac{25}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số có dạng $k = y' = 2x^2 - 8x + 5$.

Khi đó ta có: $k = 2(x^2 - 4x + 4) - 3 = 2(x - 2)^2 - 3 \geq -3$.

Dấu “=” đạt được, $k_{\min} = -3$ khi $x = 2$ và $y = \frac{7}{3}$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y - \frac{7}{3} = -3(x - 2) \Leftrightarrow y = -3x + \frac{25}{3}$.

9.35. Hệ số góc của tiếp tuyến đồ thị hàm số $y = \frac{1-2x}{x+2}$ tại điểm có hoành độ $x = -1$ là

- A. $k = 5$. B. $k = 2$. C. $k = -2$. D. $k = -5$.

Lời giải

Chọn D

9.36. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 1$ với hệ số góc lớn nhất có phương trình là

- A. $y = 3x - 5$. B. $y = 3x - 7$. C. $y = 3x + 5$. D. $y = 3x + 7$.

Lời giải

Chọn B

9.37. Cho $f(x) = (x^2 - x)e^{-x}$. Giá trị của $f''(0)$ là

A. 4.

B. -4.

C. 0.

D. -1.

Lời giải

Chọn A

9.38. Cho hàm số $y = e^x \cos x$. Đẳng thức đúng là

A. $y'' - 2y' - 2y = 0$.

B. $y'' - 2y' + 2y = 0$.

C. $y'' + 2y' - 2y = 0$.

D. $y'' + 2y' + 2y = 0$.

Lời giải

Chọn B

9.39. Độ cao (tính bằng mét) của một vật rơi tự do sau t giây là $h(t) = 400 - 4,9t^2$. Giá trị tuyệt đối của vận tốc của vật khi nó chạm đất (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất) là

A. $88,5m/s$.

B. $86,7m/s$.

C. $89,4m/s$.

D. $90m/s$.

Lời giải

Chọn A

9.40. Chuyển động của một vật có phương trình $s = 5 + \sin\left(0,8\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$, ở đó s tính bằng centimét và thời gian t tính bằng giây. Tại các thời điểm vận tốc bằng 0, giá trị tuyệt đối của gia tốc của vật gần với giá trị nào sau đây nhất?

A. $4,5cm/s^2$.

B. $5,5cm/s^2$.

C. $6,3cm/s^2$.

D. $7,2cm/s^2$.

Lời giải

Chọn C

9.41. Vị trí của một vật chuyển động (tính bằng mét) sau t giây được xác định bởi $s = t^4 - 4t^3 - 20t^2 + 20t, t > 0$. Gia tốc của vật tại thời điểm mà vận tốc $v = 20m/s$ là

A. $140m/s^2$.

B. $120m/s^2$.

C. $130m/s^2$.

D. $100m/s^2$.

Lời giải

Chọn A

B- TỰ LUẬN

9.42. Tính đạo hàm các hàm số sau:

a) $y = \left(x^2 - \frac{2}{x} + 4\sqrt{x}\right)^3$; b) $y = 2^x + \log_3(1 - 2x)$;

c) $y = \frac{1-2x}{x^2+1}$; d) $y = \sin 2x + \cos^2 3x$.

Lời giải

a) $y' = 3\left(x^2 - \frac{2}{x} + 4\sqrt{x}\right)^2 \left(x^2 - \frac{2}{x} + 4\sqrt{x}\right)' = 6\left(x^2 - \frac{2}{x} + 4\sqrt{x}\right)^2 \left(x + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

$$b) y' = 2^x \ln 2 + \frac{(1-2x)'}{(1-2x)\ln 3} = 2^x \ln 2 - \frac{2}{(1-2x)\ln 3}.$$

$$c) y' = \frac{2(x^2 - x - 1)}{(x^2 + 1)^2}.$$

$$d) y' = 2 \cos 2x + 2 \cos 3x (\cos 3x)' = 2 \cos 2x - 6 \cos 3x \sin 3x = 2 \cos 2x - 3 \sin 6x.$$

9.43. Cho hàm số $f(x) = x + \sqrt{4-x^2}$.

a) Tìm tập xác định của hàm số đã cho.

b) Tính đạo hàm $f'(x)$ và tìm tập xác định của $f'(x)$.

c) Tìm x sao cho $f'(x) = 0$.

Lời giải

a) Điều kiện: $4-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$. Tập xác định của hàm số là $[-2; 2]$.

b) Ta có: $f'(x) = 1 + \frac{(4-x^2)'}{2\sqrt{4-x^2}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$. Tập xác định của $f'(x)$ là $(-2; 2)$.

c) Ta có: $f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 4-x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$

9.44. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \leq 0 \\ -x^3 + mx, & x > 0 \end{cases}$, với m là tham số. Tìm m để hàm số có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = 2x - 1$ với $x \in (-\infty; 0)$ và $f'(x) = -3x^2 + m$, $x \in (0; +\infty)$.

Do đó hàm số có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi tồn tại $f'(0)$.

Ta tính đạo hàm bên phải và bên trái điểm $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x^2 + m) = m; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x - 1) = -1.$$

Vậy hàm số có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m = -1$.

9.45. Cho $f(x) = x^3 + ax^2 + 3x + 1$ ($a \in \mathbb{R}$ là tham số). Tìm a để $f'(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = 3x^2 + 2ax + 3$.

Do đó $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi: $3x^2 + 2ax + 3 > 0, \forall x \Leftrightarrow \Delta' = a^2 - 9 < 0 \Leftrightarrow -3 < a < 3$.

9.46. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ có đồ thị là đường cong (C) . Tìm tọa độ điểm M thuộc đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại điểm M song song với đường thẳng có phương trình $y = 2x - 1$.

Lời giải

Tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 2x - 1$ có hệ số góc $k = 2$. Mặt khác, hệ số góc của tiếp tuyến có dạng $k = y' = 3x^2 - 6x + 2$. Từ đó, ta có: $3x^2 - 6x + 2 = 2 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Thay $x = 0; x = 2$ vào biểu thức hàm số ta được $y = -1$. Thử lại ta thấy điểm $M(0; -1)$ thuộc đường thẳng $y = 2x - 1$ (tiếp tuyến trùng với đường thẳng đã cho) và điểm $N(2; -1)$ không thuộc đường thẳng đó.

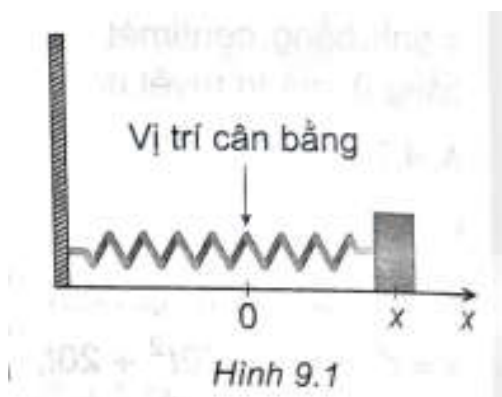
Vậy $M(2; -1)$ là điểm cần tìm.

9.47. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = (x^2 - 1)^2 - 3$ tại các giao điểm của nó với đồ thị hàm số $y = 10 - x^2$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $(x^2 - 1)^2 - 3 = 10 - x^2$. Giải phương trình ta được nghiệm $x = 2$ và $x = -2$. Tọa độ các giao điểm là $A(2; 6)$ và $B(-2; 6)$. Phương trình các tiếp tuyến cần tìm là: $y = 24x - 42$ và $y = -24x - 42$.

9.48. Một vật gắn trên lò xo chuyển động theo phương ngang trên một mặt phẳng nhẵn (H.9.1). Phương trình chuyển động của vật được cho bởi $x = 8 \sin\left(\sqrt{2}\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$, với t tính bằng giây và x tính bằng centimét. Tìm vận tốc và gia tốc của vật tại thời điểm $t = 5$ giây (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất). Vật chuyển động theo hướng nào tại thời điểm đó?



Lời giải

Vận tốc và gia tốc của vật tại thời điểm t là:

$$v(t) = x'(t) = 8\pi\sqrt{2}\cos\left(\sqrt{2}\pi t + \frac{\pi}{3}\right); \quad a(t) = x''(t) = -16\pi^2 \sin\left(\sqrt{2}\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$

Tại $t = 5$ giây, vận tốc và gia tốc của vật là: $v = -10,5m/s$ và $a = 150,8m/s^2$. Khi ấy vật đang chuyển động theo hướng từ phải sang trái (hướng tới vách chắn cố định).