

NGUYÊN TẮC GHÉP TRỤC XÉT SỰ BIẾN THIÊN CỦA HÀM HỢP $g = f(u(x))$

Bước 1. Tìm tập xác định của hàm $g = f(u(x))$, giả sử ta được tập xác định $\mathcal{D} = (a_1; a_2) \cup (a_3; a_4) \cup \dots \cup (a_{n-1}; a_n)$. Ở đây có thể là $a_1 \equiv -\infty; a_n \equiv +\infty$.

Bước 2. Xét sự biến thiên của $u = u(x)$ và hàm $y = f(x)$ (bước 2 có thể làm gộp trong bước 3 nếu nó đơn giản).

Bước 3. Lập bảng biến thiên tổng hợp xét sự tương quan giữa $[x; u = u(x)]$ và $[u; g = f(u)]$. Bảng này thường có 3 dòng giả sử như sau

x	a_1	a_2	$\dots$	a_{n-1}	a_n		
$u = u(x)$	u_1	b_1	$b_2 \cdots b_k$	u_2	$\cdots$	u_{n-1}	u_n
$g = f(u(x))$	$g(u_1)$	$g(b_1)$	$g(b_2) \cdots g(b_k)$	$g(u_2)$	$\cdots$	$g(u_{n-1})$	$g(u_n)$

Cụ thể các thành phần trong BBT như sau

- ☑ **Dòng 1.** Xác định các điểm kỳ dị của hàm $u = u(x)$, sắp xếp các điểm này theo thứ tăng dần từ trái qua phải, giả sử như sau: $a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n$ (xem chú ý 1).
- ☑ **Dòng 2.** Điền các giá trị $u_i = u(a_i)$ với $(i = \overline{1, n})$.
Trên mỗi khoảng $(u_i; u_{i+1})$, $i = \overline{1, n-1}$ cần bổ xung các điểm kỳ dị $b_1; b_2; \dots; b_k$ của hàm $y = f(x)$.
Trên mỗi khoảng $(u_i; u_{i+1})$, $i = \overline{1, n-1}$ cần sắp xếp các điểm $u_i; b_k$ theo thứ tự chẳng hạn: $u_i < b_1 < b_2 < \dots < b_k < u_{i+1}$ hoặc $u_i > b_1 > b_2 > \dots > b_k > u_{i+1}$ (xem chú ý 2).
- ☑ **Dòng 3.** Xét chiều biến thiên của hàm $g = f(u(x))$ dựa vào BBT của hàm $y = f(x)$ bằng cách hoán đổi: u đóng vai trò của x ; $f(u)$ đóng vai trò của $f(x)$. Sau khi hoàn thiện BBT hàm hợp $g = f(u(x))$ ta thấy được hình dạng đồ thị hàm này.

Bước 4. Dùng BBT hàm hợp $g = f(u(x))$ giải quyết các yêu cầu đặt ra trong bài toán và kết luận.

Chú ý 1

- ☑ Các điểm kỳ dị của $u = u(x)$ gồm: Điểm biên của tập xác định $\mathcal{D}$, các điểm cực trị của $u = u(x)$.
- ☑ Nếu xét hàm $u = |u(x)|$ thì trong dòng 1 các điểm kỳ dị còn có nghiệm của phương trình $u(x) = 0$ (là hoành độ giao điểm của $u = u(x)$ với trục Ox).
- ☑ Nếu xét hàm $u = u(|x|)$ thì trong dòng 1 các điểm kỳ dị còn có số 0 (là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $u = u(x)$ với trục Oy).

Chú ý 2

- ☑ Có thể dùng thêm các mũi tên để thể hiện chiều biến thiên của $u = u(x)$.
- ☑ Điểm kỳ dị của $y = f(x)$ gồm: Các điểm tại đó $f(x)$ và $f'(x)$ không xác định; các điểm cực trị hàm số $y = f(x)$.

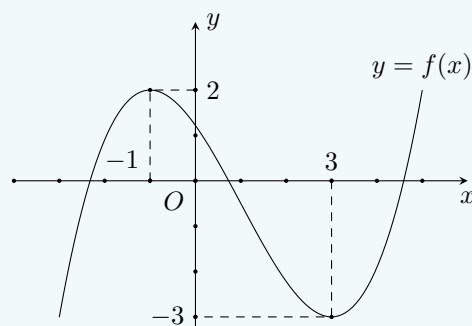
Nơi đầu có ý chỉ, ở đó có con đường

- ☑ Nếu xét hàm $g = |f(u(x))|$ thì trong dòng 2 các điểm kỳ dị còn có nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ (là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với trục Ox).
- ☑ Nếu xét hàm $g = f(u(|x|))$ thì trong dòng 2 các điểm kỳ dị còn có số 0 (là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với trục Oy).

Bài Tập Trắc Nghiệm

🔗 **Câu 1.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị được cho như ở hình vẽ bên dưới.

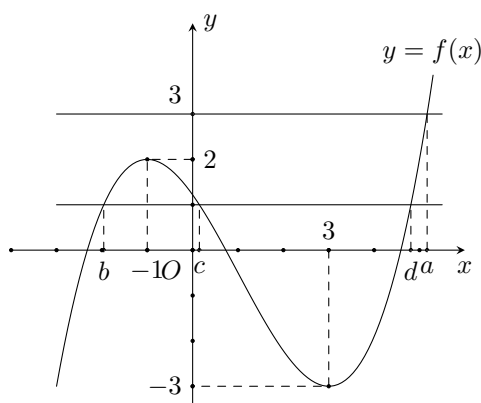
Hỏi phương trình $|f(x^3 - 3x + 1) - 2| = 1$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



- (A) 8. (B) 6. (C) 9. (D) 11.

💬 Lời giải.

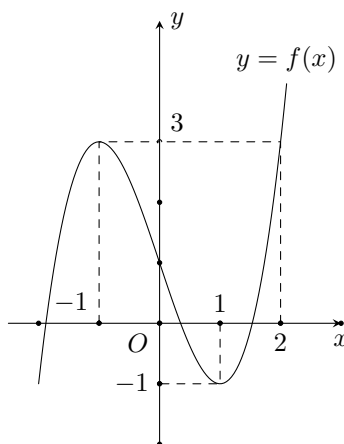
Cách 1: Tự luận truyền thống



Dựa vào đồ thị hàm số $f(x)$, ta có:

$$|f(x^3 - 3x + 1) - 2| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x^3 - 3x + 1) = 1 \\ f(x^3 - 3x + 1) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x + 1 = b (b < -1) & (2) \\ x^3 - 3x + 1 = c (-1 < c < 3) & (3) \\ x^3 - 3x + 1 = d (d > 3) & (4) \\ x^3 - 3x + 1 = a (a > d) & (1) \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ (hình vẽ dưới đây)



Ta suy ra: Phương trình (1), (2), (4) mỗi phương trình có 1 nghiệm, phương trình (3) có 3 nghiệm và các nghiệm này đều phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt.

Cách 2: Phương pháp ghép trực

Đặt $u = x^3 - 3x + 1$

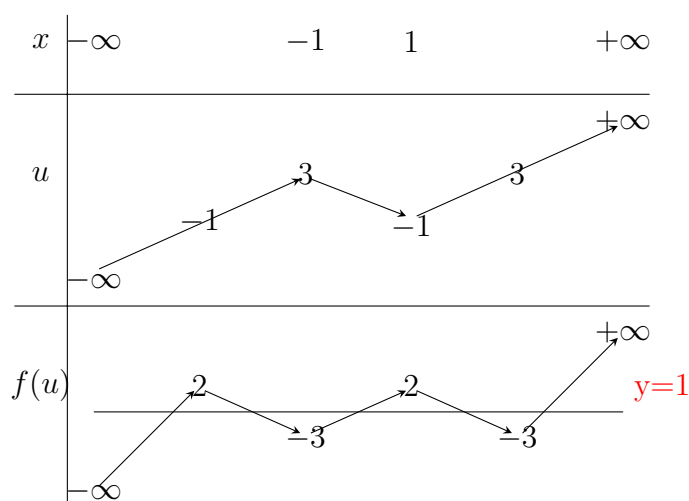
Ta có $u'(x) = 3x^2 - 3$; $u'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

BBT của hàm số $u(x)$:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
$u'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$u(x)$			3		$+\infty$	
	$-\infty$		-1			

Phương trình $|f(x^3 - 3x + 1) - 2| = 1$ trở thành: $|f(u) - 2| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(u) = 3 \\ f(u) = 1 \end{cases}$

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ và từ bảng biến thiên của hàm số $u(x) = x^3 - 3x + 1$ ta có bảng sau biến thiên của hàm hợp $f(x^3 - 3x + 1) = f(u)$ như sau:



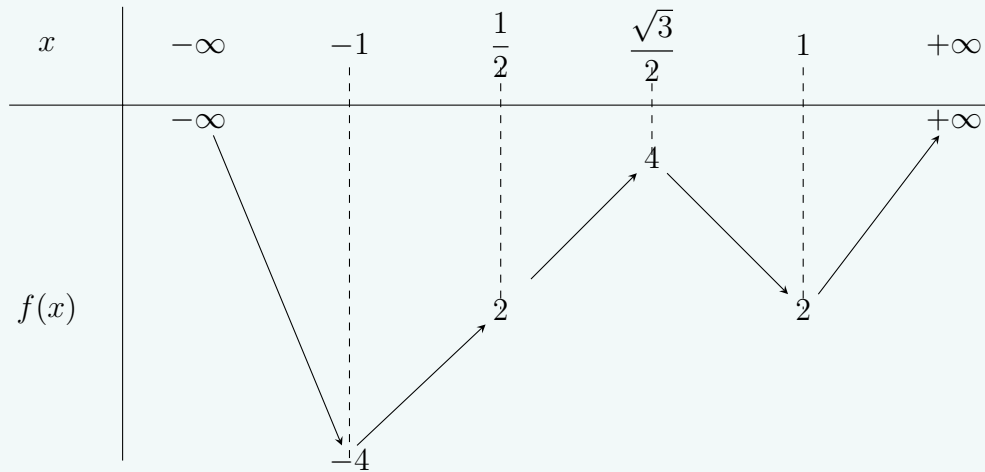
Từ bảng trên ta thấy phương trình $f(u) = 1$ có 5 nghiệm và phương trình $f(u) = 3$ có 1 nghiệm. Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm.

Chọn đáp án (B)

□

Nơi đâu có ý chí, ở đó có con đường

⇒ **Câu 2.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên.



Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(\cos x) + (3 - m)f(\cos x) + 2m - 10 = 0$ có đúng 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{3}; \pi\right]$ là

- (A) 5. (B) 6. (C) 7. (D) 4.

💬 **Lời giải.**

Cách 1: Tự luận truyền thống

Ta có $f^2(\cos x) + (3 - m)f(\cos x) + 2m - 10 = 0$.

Đặt $t = f(\cos x)$ ta được phương trình $t^2 + (3 - m)t + 2m - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = m - 5 \end{cases}$.

$$+) \text{ Với } t = 2 \Rightarrow f(\cos x) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} \\ x = 0 \end{cases} \text{ vì } x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \pi\right].$$

$$+) \text{ Với } t = m - 5 \Rightarrow f(\cos x) = m - 5 \quad (1).$$

Để phương trình ban đầu có 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{3}; \pi\right]$ thì phương trình (1) có đúng 1 nghiệm trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{3}; \pi\right]$ khác $-\frac{\pi}{3}; 0; \frac{\pi}{3}$.

$$\text{Với } x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \pi\right] \Rightarrow u = \cos x \in [-1; 1].$$

Nhận xét:

$$\text{Nếu } u \in \left[\frac{1}{2}; 1\right) \text{ thì có 2 nghiệm } x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \pi\right].$$

$$\text{Nếu } u = 1 \text{ hoặc } u \in \left[-1; \frac{1}{2}\right) \text{ thì có đúng 1 nghiệm } x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \pi\right].$$

Do đó yêu cầu bài toán xảy ra khi và chỉ khi phương trình (1) thỏa

$$f(\cos x) = m - 5 \Leftrightarrow f(u) = m - 5 \text{ có nghiệm } u \in \left[-1; \frac{1}{2}\right).$$

$$\text{Từ bảng biến thiên suy ra } -4 \leq m - 5 < 2 \Leftrightarrow 1 \leq m < 7.$$

$$\text{Vì } m \in \mathbb{Z} \text{ nên } m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}.$$

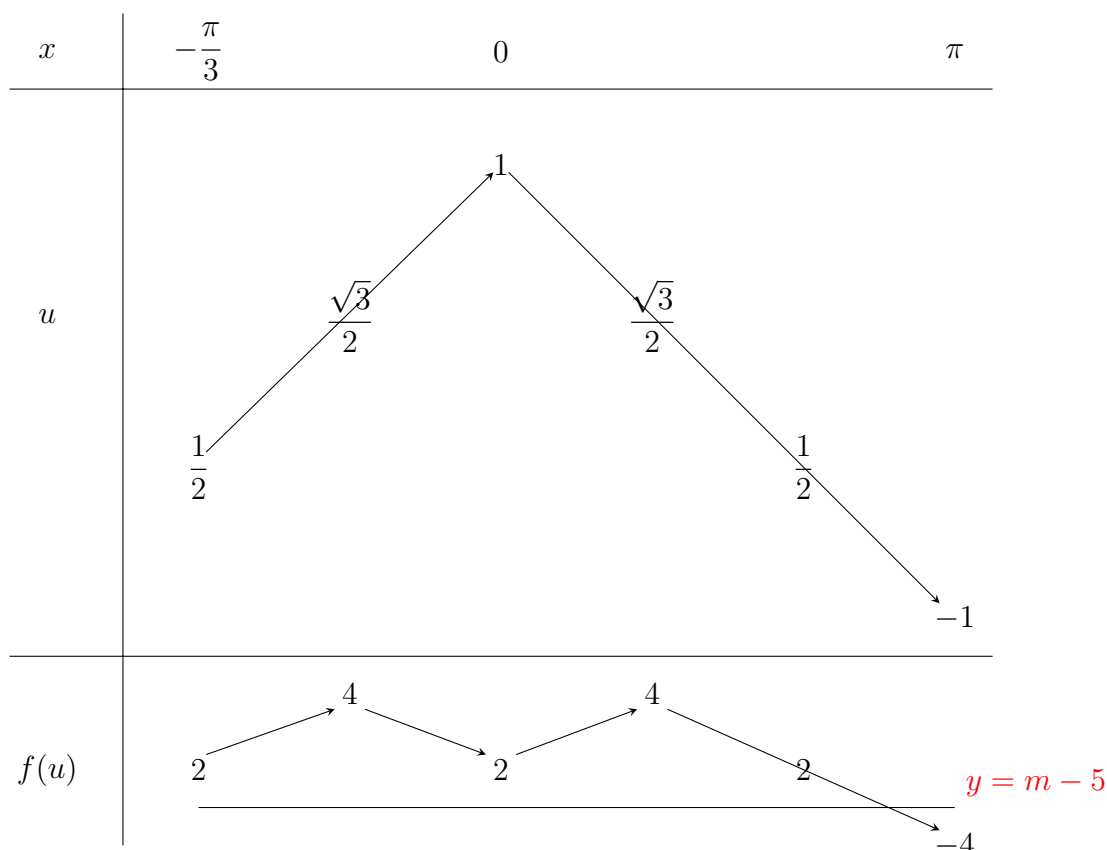
Cách 2: Phương pháp ghép trục

$$\text{Đặt } t = \cos x \in [-1; 1] \text{ vì } x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \pi\right]$$

$$t' = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \end{cases}.$$

Khi đó phương trình $f^2(\cos x) + (3 - m)f(\cos x) + 2m - 10 = 0$ thành

$$f^2(t) + (3 - m)f(t) + 2m - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(t) = 2 \\ f(t) = m - 5. \end{cases}$$



Do phương trình $f(t) = 2$ có 3 nghiệm nên yêu cầu bài toán tương đương với phương trình.

$f(t) = m - 5$ có duy nhất một nghiệm $-4 \leq m - 5 < 2 \Leftrightarrow 1 \leq m < 7$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Chọn đáp án (B)

❖ Câu 3 (CHUYÊN VINH LẦN 1-2020).

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như trên hình vẽ

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	-2	1	-3	$+\infty$

Xác định số nghiệm của phương trình $|f(x^3 - 3x^2)| = \frac{3}{2}$, biết $f(-4) = 0$

(A) 6.

(B) 9.

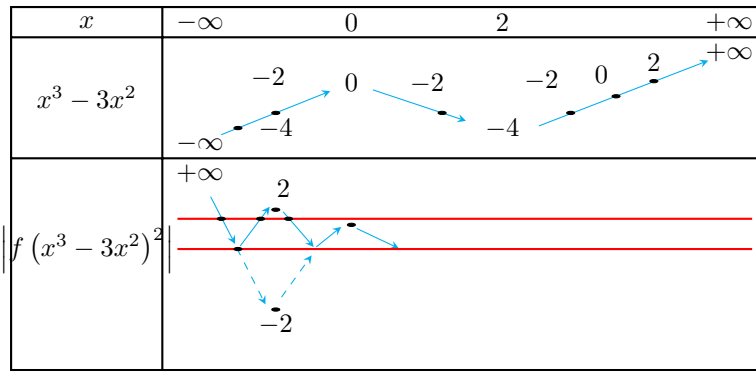
(C) 10.

(D) 11.

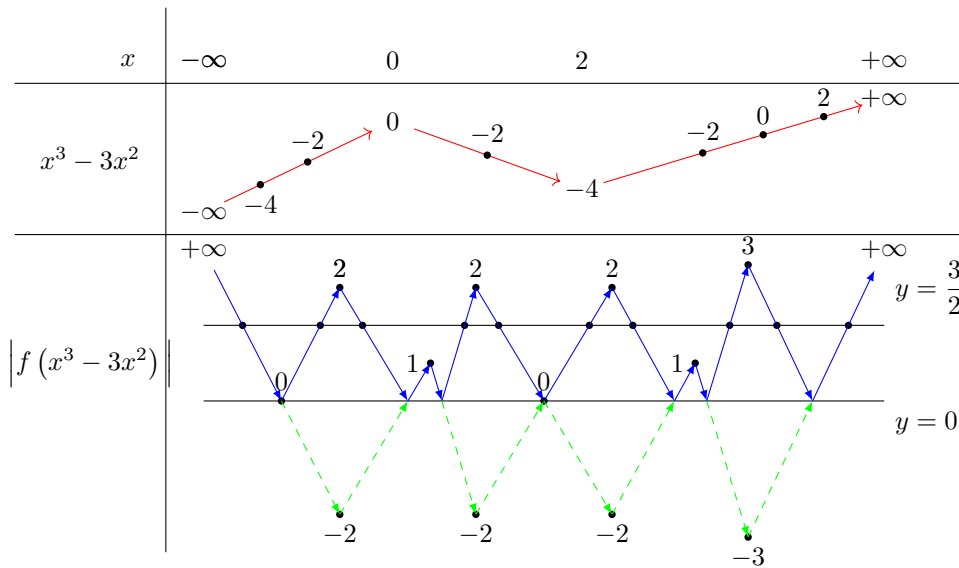
💬 Lời giải.

Theo đề bài ta có Bảng biến thiên tổng hợp

Nơi đâu có ý chí, ở đó có con đường



Đồ thị hàm số $y = |f(x^3 - 3x^2)|$ là phần nét liền

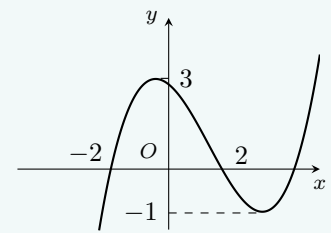


Chọn đáp án **C**



❖ Câu 4.

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $|3f(x^3 - 3x)| = m$ có 8 nghiệm phân biệt



A 5.

B 4.

C 3.

D 6.

🗨️ Lời giải.

Từ giả thiết và đồ thị ta có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x^3 - 3x$	$-\infty$	2	-2	$+\infty$
$f(x^3 - 3x)$	$-\infty$	3	0	$+\infty$
$ f(x^3 - 3x) $	$+\infty$	3	0	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy phương trình $|3f(x^3 - 3x)| = m$ có 8 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $1 < \frac{m}{3} < 3 \Leftrightarrow 3 < m < 9$.

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{4, 5, 6, 7, 8\}$.

Chọn đáp án (A)

⇒ **Câu 5.** Cho hàm số $y = f(x) = x^2 - 2x$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(f(x) - 1)$ là

(A) 8.

(B) 3.

(C) 4.

(D) 11.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có $y = f(x) = x^2 - 2x$, có tọa độ đỉnh $I(1; -1)$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$

Đặt $u(x) = f(x) - 1$, ta có $u'(x) = f'(x)$; $u'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow u = -2$.

Bảng biến thiên của hàm số $u(x)$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$u(x)$	$+\infty$	-2	$+\infty$

Từ hai bảng biến thiên trên ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x) = f(f(x) - 1) = f(u)$

Nơi đâu có ý chí, ở đó có con đường

x	$-\infty$	1	$+\infty$
u	$+\infty$	-2	$+\infty$
$f(u)$	$+\infty$	8	$+\infty$

Vậy hàm số ban đầu có 3 điểm cực trị.

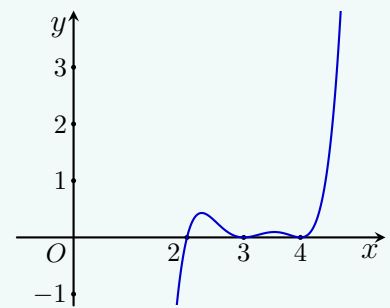
Chọn đáp án (B)



❖ Câu 6.

Cho $f(x)$ là hàm đa thức bậc 6 sao cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = g(x) = f(x^2 + 4x + 5)$.

- (A) 2. (B) 5. (C) 3. (D) 1.



💬 Lời giải.

Cách 1: PP tự luận truyền thống

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \text{ trong đó } x = 3, x = 4 \text{ là nghiệm kép.} \\ x = 4 \end{cases}$

- Ta có $y = g(x) = f(x^2 + 4x + 5)$, nên

$$g'(x) = (2x + 4)f'(x^2 + 4x + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ f'(x^2 + 4x + 5) = 0. \end{cases}$$

- Xét phương trình $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 3, \text{ ta loại } t = 3, t = 4 \text{ do nghiệm kép không là điểm cực trị.} \\ t = 4 \end{cases}$

- Từ $t = 2 \Rightarrow x^2 + 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3. \end{cases}$

Vậy hàm số $g(x)$ có ba điểm cực trị là $x = -1; x = -2; x = -3$.

Cách 2: PP ghép trực

- Bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$

- Đặt $u = x^2 + 4x + 5$, ta có $u' = 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow u = 1$.
- Bảng biến thiên của hàm số u như sau

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
u	$+\infty$		$+\infty$

$\swarrow \quad \searrow$
 1

- Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = g(x) = f(x^2 + 4x + 5) = f(u)$ là

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
u	$+\infty$		$+\infty$
$f(u)$			

$\swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow$
 $2 \quad 1 \quad 2$

Vậy hàm số $y = g(x) = f(x^2 + 4x + 5)$ có ba điểm cực trị.

❖ Câu 7.

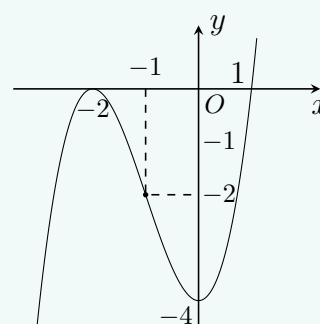
Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số nghiệm của phương trình $f(\sin x + \cos x) + 2 = 0$ trên đoạn $[0; 2\pi]$.

A 3.

B 4.

C 2.

D 6.



💬 Lời giải.

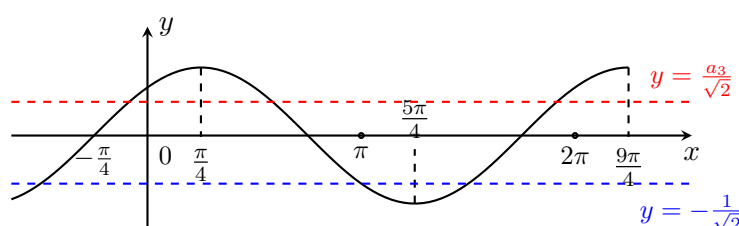
- Cách 1:** Phương pháp truyền thống

Ta có $f(\sin x + \cos x) + 2 = 0 \Leftrightarrow f\left(\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) = -2$.

$$\text{Dựa vào đồ thị ta có } \begin{cases} \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = a_1 \in (-\infty; -2) \\ \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \\ \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = a_3 \in (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{a_1}{\sqrt{2}} \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{a_3}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Ta có $\frac{a_1}{\sqrt{2}} < -1$ nên phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{a_1}{\sqrt{2}}$ vô nghiệm.

Xét đồ thị hàm số $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ trên $[0; 2\pi]$



Ta thấy phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ có 2 nghiệm trên $[0; 2\pi]$; phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{a_3}{\sqrt{2}}$ có 2 nghiệm trên $[0; 2\pi]$ và các nghiệm là khác nhau.

Vậy phương trình $f(\sin x + \cos x) + 2 = 0$ có 4 nghiệm trên $[0; 2\pi]$.

• **Cách 2:** Phương pháp ghép trực

Ta có $f(\sin x + \cos x) + 2 = 0 \Leftrightarrow f(\sin x + \cos x) = -2$.

Đặt $u = \sin x + \cos x \Rightarrow u' = \cos x - \sin x$. Cho $u' = 0 \Leftrightarrow \sin x = \cos x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

$$\text{Mà } x \in [0; 2\pi] \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số $u(x)$:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	2π		
$u'(x)$		+	0	−	0	+
$u(x)$	1	$\nearrow \sqrt{2}$	$\searrow -\sqrt{2}$	$\nearrow 1$		

Hàm số có hai điểm cực trị là $x = \frac{\pi}{4}$ và $x = \frac{5\pi}{4}$.

Ta có $f(\sqrt{2}) = a$, $f(-\sqrt{2}) = b$ với $a > 0$, $-2 < b < 0$.

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ và từ bảng biến thiên của hàm số $u = \sin x + \cos x$ ta có bảng sau:

x	0	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		2π
$u(x)$	1	$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	0	1
$f(u)$	0	a		b		0
			-4		-4	
						$y = -2$

Từ bảng trên ta thấy phương trình $f(u) = -2$ có 4 nghiệm x .

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Chọn đáp án **(B)**



⇒ **Câu 8.** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-3	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-2	2	-3	$+\infty$		

Số nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{3}; 2\pi\right)$ của phương trình $|f(2\cos x - 1)| = 2$ (1) là

(A) 8.

(B) 5.

(C) 3.

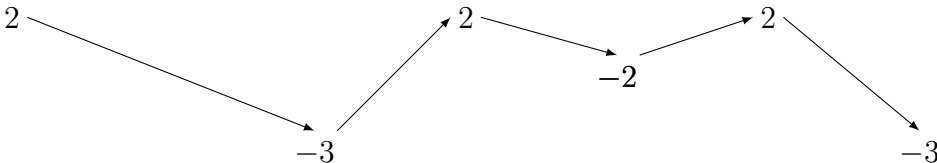
(D) 6.

Lời giải.

Đặt $u = 2 \cos x - 1$, $x \in \left(-\frac{\pi}{3}; 2\pi\right)$, ta có

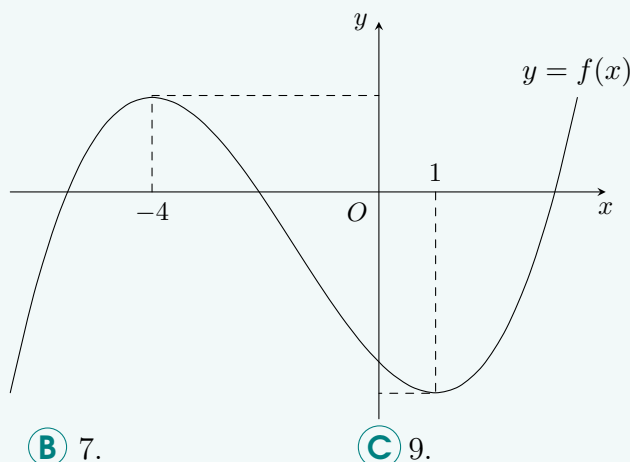
$$u'(x) = -2 \sin x; u'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(0) = 1 \\ u(\pi) = -3 \end{cases}$$

Bảng biến thiên của $u(x)$

x	$-\frac{\pi}{3}$	0		π	2π	
$u = 2 \cos x - 1$	0	1	0	-3	0	1
$f(u)$	2					
$ u $	2					

Số nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{3}; 2\pi\right)$ của phương trình $|f(2 \cos x - 1)| = 2$ là 6.

⇒ **Câu 9.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và xác định $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = f(x^2 - 4|x|)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



A 5.

B 7.

C 9.

D 11.

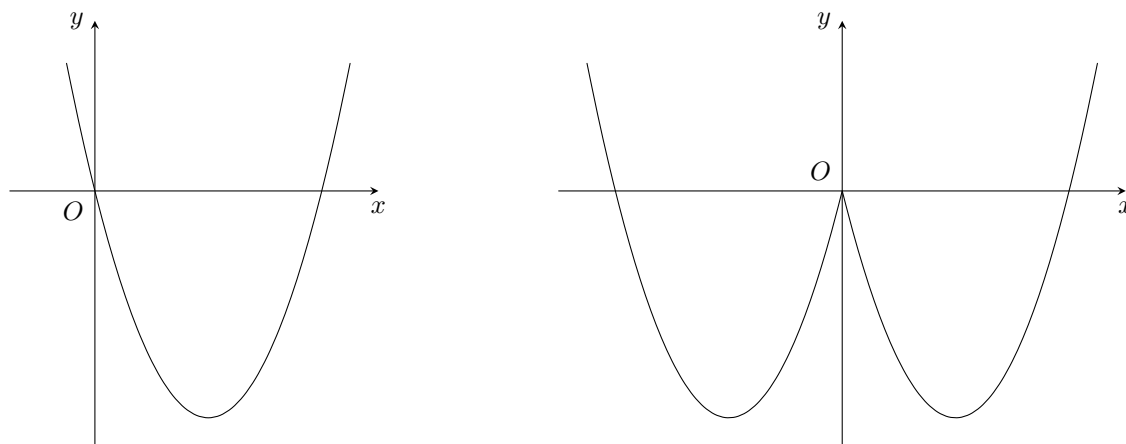
🗨️ **Lời giải.**

$$\text{Đặt } u(x) = x^2 - 4|x| \Rightarrow u' = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$\text{Đặt } t = u(|x|) = |x|^2 - 4|x|$$

Vẽ đồ thị hàm số $u(x) = x^2 - 4|x|$, từ đó suy ra đồ thị $t = u(|x|)$

Nơi đâu có ý chí, ở đó có con đường



Bảng biến thiên

x	$-\infty$		2					$+\infty$
$u = x^2 - 4x$	$+\infty$		-4		-2		0	$+\infty$
$t = u(x)$	$+\infty$	1	0		-4		0	$+\infty$
$f(t) = g(x)$	$+\infty$							$+\infty$

Diagram illustrating the function $f(t) = g(x)$ with critical points $f(1)$, $f(0)$, and $f(-4)$ marked on the graph.

Suy ra hàm số $y = g(x) = f(x^2 - 4|x|)$ có tất cả 5 điểm cực trị.

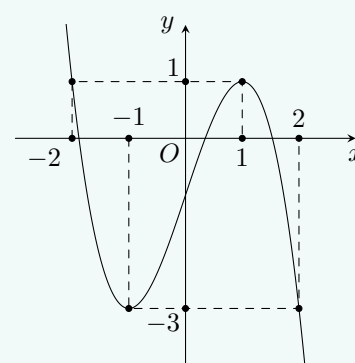
Chọn đáp án **A**

□

❖ Câu 10.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình bên. Phương trình $f(1 - f(x)) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

- A** 5. **B** 7. **C** 4. **D** 6.

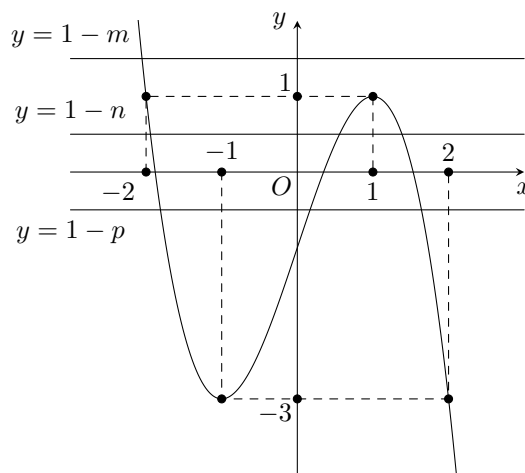


💬 Lời giải.

Cách 1: Phương pháp tự luận.

Ta có

$$f(1 - f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - f(x) = m \quad (-2 < m < -1) \\ 1 - f(x) = n \quad (0 < n < 1) \\ 1 - f(x) = p \quad (1 < p < 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 1 - m \quad (1) \\ f(x) = 1 - n \quad (2) \\ f(x) = 1 - p \quad (3) \end{cases}$$



Từ đồ thị, ta có

- $-2 < m < -1 \Rightarrow 2 < 1 - m < 3$, suy ra phương trình (1) có 1 nghiệm x_1 ;
- $0 < n < 1 \Rightarrow 0 < 1 - n < 1$, suy ra phương trình (2) có 3 nghiệm x_2, x_3, x_4 ;
- $1 < p < 2 \Rightarrow -1 < 1 - p < 0$, suy ra phương trình (3) có 3 nghiệm x_5, x_6, x_7 .

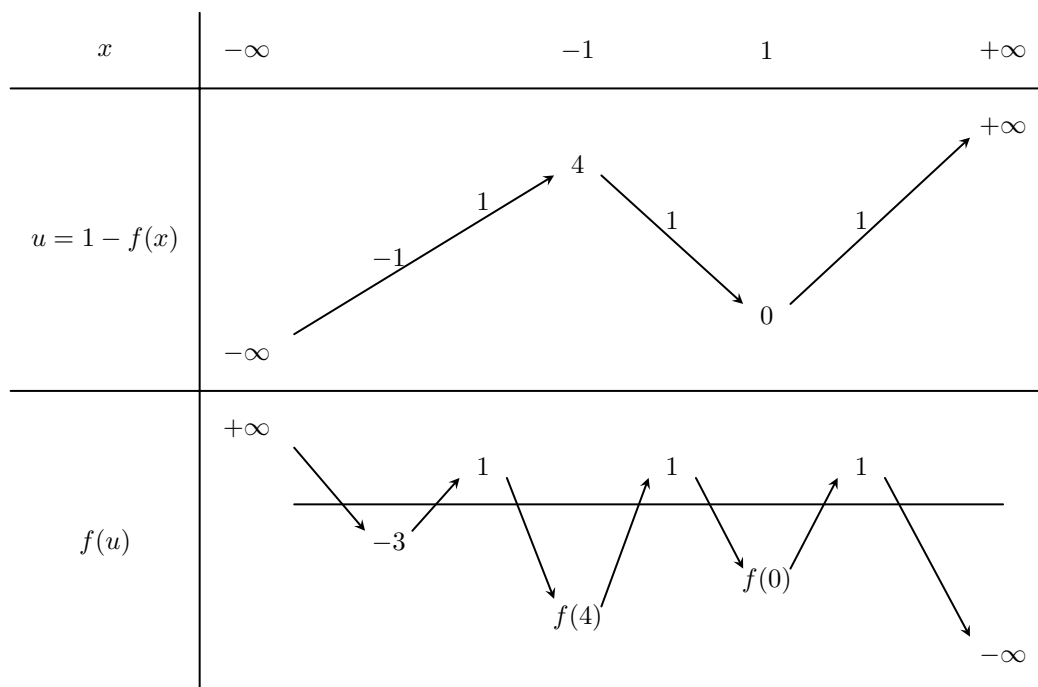
Để thấy 7 nghiệm trên là phân biệt. Vậy phương trình đã cho có đúng 7 nghiệm.

Cách 2: Phương pháp ghép trực.

Đặt $u = 1 - f(x)$.

Từ đồ thị của hàm $y = f(x)$ ta có $f(4) < -3$ và $-3 < f(0) < 0$.

Từ đó suy ra bảng biến thiên của hàm $u = 1 - f(x)$ và hàm $f(u)$ như sau:



Từ bảng trên ta thấy phương trình $f(u) = 0$ có 7 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án **(B)**

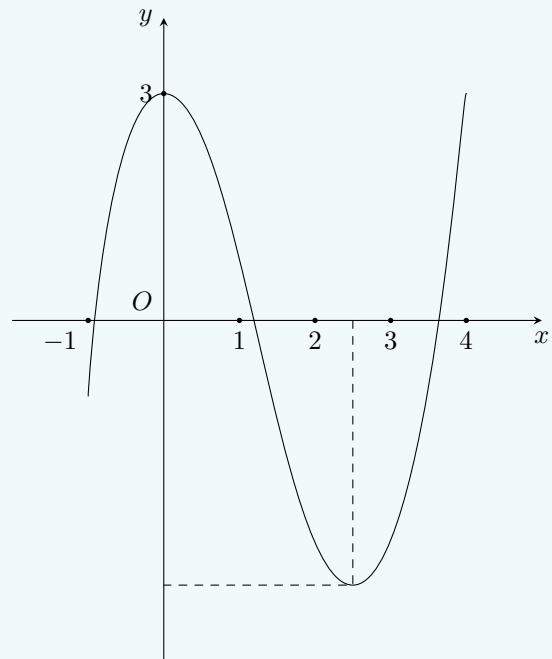
⇒ Câu 11.

□

Nơi đâu có ý chí, ở đó có con đường

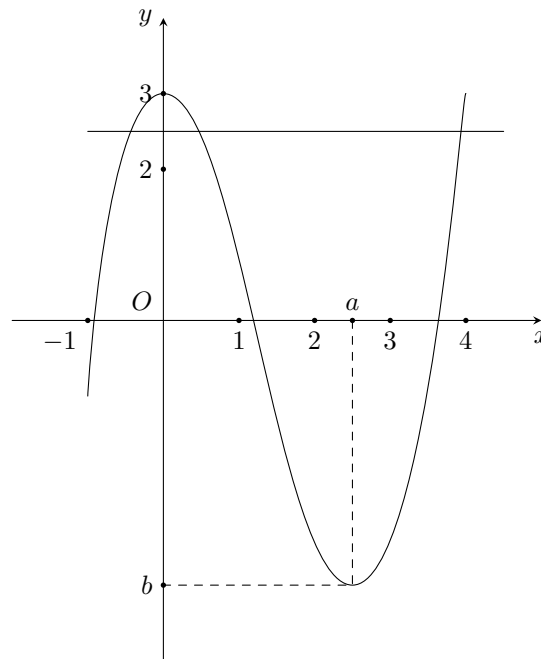
Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Đặt $g(x) = 3f(f(x)) + 4$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ là

- (A) 2. (B) 8. (C) 10. (D) 6.



🗨️ Lời giải.

Cách 1: Phương pháp tự luận



$$g'(x) = 3f'(f(x)) \cdot f'(x)g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3f'(f(x)) \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(f(x)) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = a \\ x = 0 \\ x = a \end{cases}, (2 < a < 3).$$

+ $f(x) = 0$ có 3 nghiệm đơn phân biệt x_1, x_2, x_3 khác 0 và a .

+ Vì $2 < a < 3$ nên $f(x) = a$ có 3 nghiệm đơn phân biệt x_4, x_5, x_6 khác $x_1, x_2, x_3, 0, a$.

Suy ra $g'(x) = 0$ có 8 nghiệm đơn phân biệt.

Do đó hàm số $g(x) = 3f(f(x)) + 4$ có 8 điểm cực trị.

Cách 2: Phương pháp ghép trực

Đặt $u = f(x)$

Từ đồ thị của hàm $y = f(x)$ ta suy ra BBT của hàm $u = f(x)$ và hàm $g(x) = 3f(f(x)) + 4$ như sau (với $2 < a < 3$; $f(-5) < -5 < f(a) < -4$).

x	$-\infty$			0			a			$+\infty$
$u = f(x)$	$-\infty$	0	a	3	a	0	-5	0	a	$+\infty$
$g(x) = 3f(u) + 4$	$-\infty$									

Diagram showing the mapping of values through the function $g(x) = 3f(u) + 4$:

- $-\infty \rightarrow 13$
- $13 \rightarrow g(a)$
- $g(a) \rightarrow -8$
- $-8 \rightarrow g(a)$
- $g(a) \rightarrow 13$
- $13 \rightarrow g(-5)$
- $g(-5) \rightarrow 13$
- $13 \rightarrow g(a)$
- $g(a) \rightarrow +\infty$

Từ BBT của hàm hợp ta có hàm số $g(x) = 3f(f(x)) + 4$ có 8 điểm cực trị.

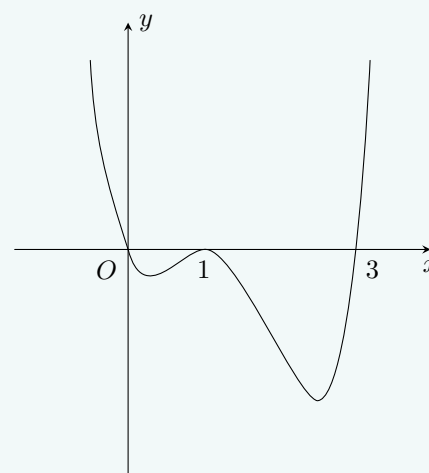
Chọn đáp án (B)

❖ Câu 12.

Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x + 1)$ là

- (A) 3. (B) 5. (C) 7. (D) 11.



💬 Lời giải.

Cách 1: Phương pháp tự luận truyền thống

Do $y = f(x)$ là hàm số bậc bốn nên là hàm số liên tục và có đạo hàm luôn xác định tại $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Theo đồ thị hàm số ta có được } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \in (0; 1) \\ x = 1 \\ x = x_2 \in (1; 3). \end{cases}$$

$$\text{Mặt khác } g'(x) = (3x^2 - 3)f'(x^3 - 3x + 1) \text{ nên } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ f'(x^3 - 3x + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x^3 - 3x + 1 = x_1 \\ x^3 - 3x + 1 = 1 \\ x^3 - 3x + 1 = x_2. \end{cases}$$

Xét hàm số $h(x) = x^3 - 3x + 1$ trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } h'(x) = 3x^2 - 3, h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}, \text{ từ đó ta có BBT của } y = h(x) \text{ như sau}$$

Nơi đâu có ý chí, ở đó có con đường

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$-\infty$	3	-1	$+\infty$	

Từ BBT của hàm số $h(x) = x^3 - 3x + 1$ nên ta có $h(x) = x_1 \in (0; 1)$ có ba nghiệm phân biệt, $h(x) = 1$ có đúng 3 nghiệm phân biệt, $h(x) = x_2 \in (1; 3)$ có đúng ba nghiệm phân biệt và các nghiệm này đều khác nhau đồng thời khác 1 và -1 . Vì thế phương trình $g'(x) = 0$ có đúng 11 nghiệm phân biệt và đều là các nghiệm đơn nên hàm số $y = g(x)$ có 11 cực trị.

Cách 2: PP ghép trực

Từ đồ thị hàm số ta có được $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \in (0; 1) \\ x = 1 \\ x = b \in (1; 3) \end{cases}$ và $\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(a) < f(b) < 0 \end{cases}$

Đặt $t = x^3 - 3x + 1 \Rightarrow t' = 3x^2 - 3$. Cho $t' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Ta sử dụng phương pháp ghép trực để lập bảng biến thiên cho hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x + 1)$ như sau

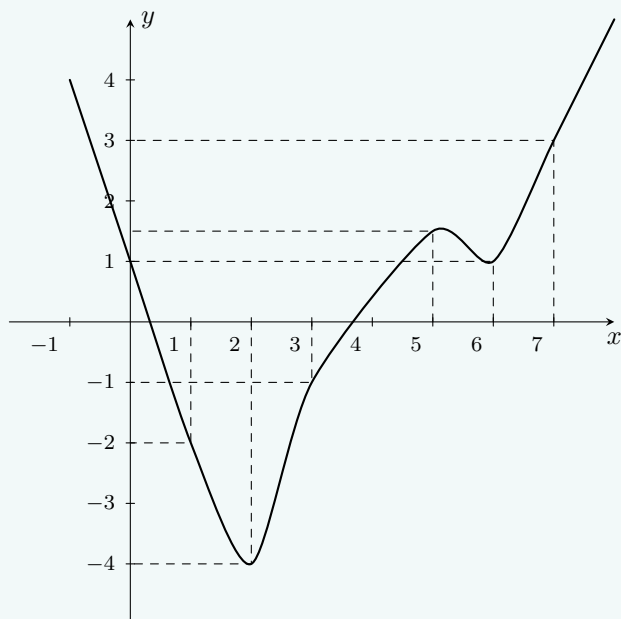
x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
t'		0	0				
t	$-\infty$	3	-1	$+\infty$			
$g(x)=f(t)$	$+\infty$	0	0	0	$f(-1)$	0	$+\infty$

Từ bảng biến thiên trên ta thấy hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x + 1)$ có 11 điểm cực trị.

Chọn đáp án **(D)**

□

❖ **Câu 13.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Tìm tất cả các giá trị m để phương trình $\left| f\left(\frac{3x^2 + 2x + 3}{2x^2 + 2}\right) \right| = m$ có nghiệm.

A $-4 \leq m \leq -2$.

B $m > -4$.

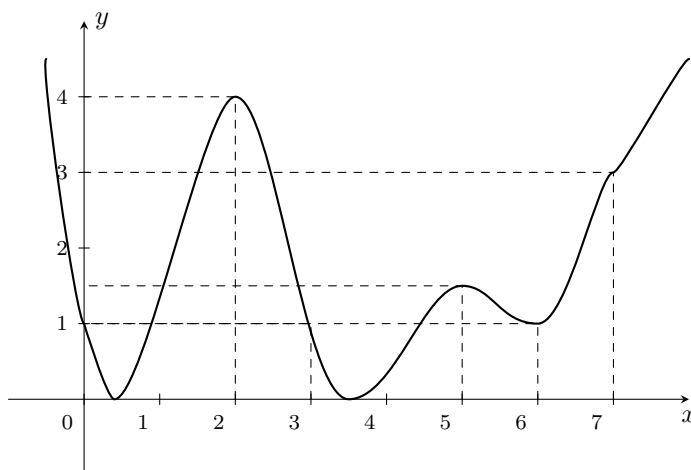
C $2 < m < 4$.

D $2 \leq m \leq 4$.

Lời giải.

Cách 1: Phương pháp truyền thống

Dựa vào đồ thị đã cho ta có đồ thị của hàm $y = |f(x)|$ là



$$\text{Đặt } t = \frac{3x^2 + 2x + 3}{2x^2 + 2} \Rightarrow t' = \frac{-4x^2 + 4}{(2x^2 + 2)^2}; t' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

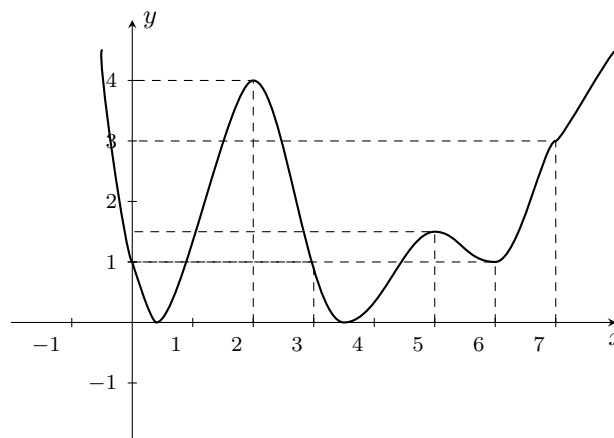
x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0
y	$\frac{3}{2}$		1	2
				$\frac{3}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow t \in [1; 2]$.

Vậy phương trình $\left| f\left(\frac{3x^2 + 2x + 3}{2x^2 + 2}\right) \right| = m$ có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $|f(t)| = m$ có nghiệm $t \in [1; 2] \Leftrightarrow 2 \leq m \leq 4$.

Cách 2: Phương pháp ghép trực

Dựa vào đồ thị đã cho ta có đồ thị của hàm $y = |f(x)|$ là



$$\text{Đặt } t = \frac{3x^2 + 2x + 3}{2x^2 + 2} \Rightarrow t' = \frac{-4x^2 + 4}{(2x^2 + 2)^2}; t' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Nơi đâu có ý chí, ở đó có con đường

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0
y	$\frac{3}{2}$		2	$\frac{3}{2}$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
t	$\frac{3}{2}$		2	$\frac{3}{2}$
$ f(t) $	a		4	a

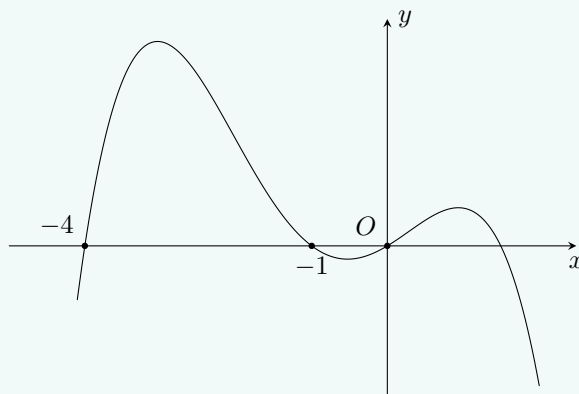
Với $2 < a < 4$.

Vậy phương trình $\left| f\left(\frac{3x^2 + 2x + 3}{2x^2 + 2}\right) \right| = m$ có nghiệm khi và chỉ khi $2 \leq m \leq 4$.

Chọn đáp án **(D)**

□

❖ **Câu 14.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị có ba điểm cực trị như hình dưới đây



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x + 2)$ là

(A) 5.

(B) 7.

(C) 9.

(D) 11.

💬 **Lời giải.**

Cách 1: Tự luận truyền thống

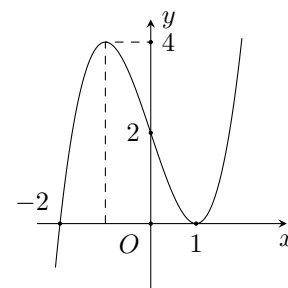
Ta có: $g'(x) = (3x^2 - 3) \cdot f'(x^3 - 3x + 2)$, suy ra

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ f'(x^3 - 3x + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x^3 - 3x + 2 = a & (1) \\ x^3 - 3x + 2 = b & (2) \\ x^3 - 3x + 2 = c & (3) \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$, suy ra

- ☑ Phương trình (1) có 1 nghiệm khác ± 1 , vì $-4 < a < -1$.
- ☑ Phương trình (2) có 1 nghiệm khác ± 1 , vì $-1 < b < 0$.
- ☑ Phương trình (3) có 3 nghiệm phân biệt khác ± 1 , vì $0 < c < 4$.

Như vậy phương trình $g'(x) = 0$ có 7 nghiệm phân biệt, tức là hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x + 2)$ có 7 điểm cực trị.



Cách 2: Phương pháp ghép trực

Đặt $g(x) = f(x^3 - 3x + 2)$ và $t = x^3 - 3x + 2$, suy ra $t' = 3x^2 - 3$, $t' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Bảng biến thiên của $t(x)$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	4	0	$+\infty$	

Khi đó hàm số trở thành $g(t) = f(t)$.

Từ đồ thị hàm số $g(x) = f(x)$ ta có các điểm cực trị $a \in (-\infty; -1), b \in (-1; 0), c \in (0; +\infty)$. Khi đó ta có bảng biến thiên sau:

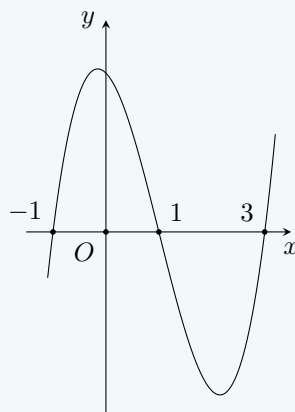
x	$-\infty$	a	b	c	4	c	0	c	$+\infty$
y'									
y	$-\infty$	$f(a)$	$f(b)$	$f(c)$	$f(4)$	$f(c)$	$f(0)$	$f(c)$	$-\infty$

Vậy hàm số có 7 cực trị.

Chọn đáp án **(B)**

□

❖ **Câu 15.** Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Số điểm cực đại của hàm số $g(x) = f(\sqrt{x^2 + 2x + 2})$ là



(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.

💬 **Lời giải.**

Cách 1: Phương pháp truyền thống

Nơi đầu có ý chí, ở đó có con đường

Ta có $g'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} f'(\sqrt{x^2+2x+2})$.

Khi đó

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ f'(\sqrt{x^2+2x+2})=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ \sqrt{x^2+2x+2}=-1 \\ \sqrt{x^2+2x+2}=1 \\ \sqrt{x^2+2x+2}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-1+2\sqrt{2} \\ x=-1-2\sqrt{2} \end{cases}$$

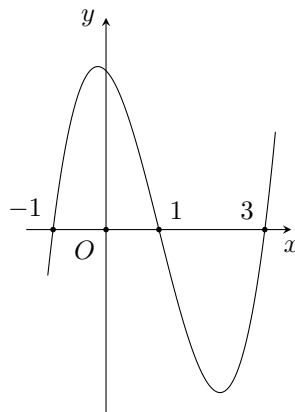
Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-1-2\sqrt{2}$	-1	$-1+2\sqrt{2}$	$+\infty$			
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Từ đó suy ra hàm số $g(x) = f(\sqrt{x^2+2x+2})$ có một điểm cực đại.

Chú ý: Để thực hiện xét dấu $-$ hay $+$ của $g'(x)$ một cách nhanh chóng, ta lấy một giá trị x_0 thuộc khoảng đang xét rồi thay vào $g'(x)$. Chẳng hạn với khoảng $(-1; -1+2\sqrt{2})$ ta chọn $x_0 = 0 \rightarrow g'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} f'(\sqrt{2}) < 0$ (vì dựa vào đồ thị ta thấy $f'(\sqrt{2}) < 0$).

Cách 2: Phương pháp ghép trực



Đặt $u(x) = \sqrt{x^2+2x+2} = \sqrt{(x+1)^2+1} \geq 1$.

Khi đó $u'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$; $u'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

$$\text{Xét } \begin{cases} \sqrt{x^2+2x+2} = -1 & (\text{Vô nghiệm}) \\ \sqrt{x^2+2x+2} = 1 \\ \sqrt{x^2+2x+2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -1+2\sqrt{2} \\ x = -1-2\sqrt{2} \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(u) = f(\sqrt{x^2+2x+2})$ (Dựa vào đồ thị của hàm số $f'(u)$)

x	$-\infty$	$-1-2\sqrt{2}$	-1	$-1+2\sqrt{2}$	$+\infty$			
$u(x)$	$+\infty$	3	1	3	$+\infty$			
$f'(u)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(u)$								

Quan sát bảng biến thiên ta thấy hàm số $f(u) = f(\sqrt{x^2 + 2x + 2})$ có một điểm cực đại.

Chọn đáp án (A)



Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	-8	5	13	$-\infty$

Phương trình $f(\cos x) = \frac{13}{3}$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$?

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 4.

Lời giải.

Cách 1: Phương pháp truyền thống

Đặt $t = \cos x$, $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow t \in (0; 1]$.

Phương trình $f(\cos x) = \frac{13}{3}$ trở thành $f(t) = \frac{13}{3}$.

Dựa vào bảng biến thiên trên, ta có phương trình $f(t) = \frac{13}{3}$ có đúng một nghiệm $t \in (0; 1]$.

Với một nghiệm $t \in (0; 1]$, thay vào phép đặt ta được phương trình $\cos x = t$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

Cách 2: Phương pháp ghép trực

Đặt $u(x) = \cos x$, $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow u \in (0; 1]$.

Ta có $u'(x) = -\sin x$, $u'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(u)$ trên nửa khoảng $(0; 1]$

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$u(x)$	0	1	0
$f(x)$	-8	5	-8

Quan sát bảng biến thiên, ta thấy phương trình $f(u) = \frac{13}{3}$ có hai nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án (C)



Nơi đâu có ý chí, ở đó có con đường

❖ **Câu 17.** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	5	2	$+\infty$	

Số nghiệm của phương trình $f(4 - \sqrt{x^3 - 6x^2 + 9x}) - 3 = 0$ là

A 5.

B 6.

C 3.

D 4.

💬 **Lời giải.**

Cách 1: Phương pháp truyền thống.

Điều kiện xác định $x^3 - 6x^2 + 9x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$.

$$\text{Ta có } f(4 - \sqrt{x^3 - 6x^2 + 9x}) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - \sqrt{x^3 - 6x^2 + 9x} = a_1 \in (-\infty; 2) & (1) \\ 4 - \sqrt{x^3 - 6x^2 + 9x} = a_2 \in (2; 4) & (2) \\ 4 - \sqrt{x^3 - 6x^2 + 9x} = a_3 \in (4; +\infty) & (3) \end{cases}$$

Đặt $t = 4 - \sqrt{x^3 - 6x^2 + 9x}$ với $x \geq 0$.

$$\text{Ta có } t' = -\frac{3x^2 - 12x + 9}{2\sqrt{x^3 - 6x^2 + 9x}} \text{ với } x > 0, x \neq 3; t' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (nhận)} \\ x = 3 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên của $t = 4 - \sqrt{x^3 - 6x^2 + 9x}$.

x	0	1	3	$+\infty$	
t'		-	0	+	-
t	4	2	4	$-\infty$	

Từ bảng biến thiên trên, suy ra

- ✔ Phương trình (1) có 1 nghiệm.
- ✔ Phương trình (2) có 3 nghiệm.
- ✔ Phương trình (3) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt.

Cách 2: Phương pháp ghép trực.

Đặt $t = 4 - \sqrt{x^3 - 6x^2 + 9x}$ với $x \geq 0$.

$$\text{Ta có } t' = -\frac{3x^2 - 12x + 9}{2\sqrt{x^3 - 6x^2 + 9x}} \text{ với } x > 0, x \neq 3; t' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (nhận)} \\ x = 3 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên của $t = 4 - \sqrt{x^3 - 6x^2 + 9x}$.

x	0	1		3	$+\infty$
t'		-	0	+	-
t	4	2		4	$-\infty$

Ta có bảng sau

x	0	1	3	$+\infty$
t	4	2	4	$-\infty$
$y = f(t)$				

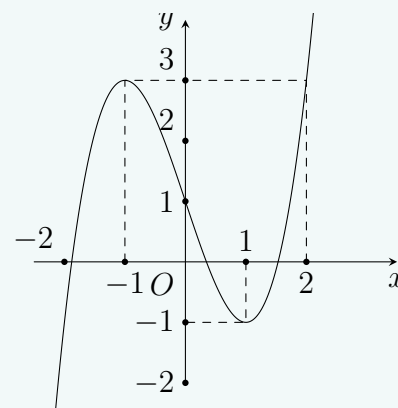
Dựa vào bảng, phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án **(D)**

❖ Câu 18.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình sau. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sqrt{4-x^2}) = m$ có đúng 2 nghiệm phân biệt.

- (A)** 1. **(B)** 2. **(C)** 3. **(D)** 4.



🗨️ Lời giải.

✔ Cách 1: Cách tự luận truyền thống.

Từ đồ thị, suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	3	-1	$+\infty$	

Xét hàm số $g(x) = f(\sqrt{4-x^2})$ có tập xác định $\mathcal{D} = [-2; 2]$.

Ta có $g'(x) = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} f'(\sqrt{4-x^2})$.

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(\sqrt{4-x^2}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{4-x^2} = -1 \text{ (loại)} \\ \sqrt{4-x^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	-2	$-\sqrt{3}$			0	$\sqrt{3}$			2
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$g(x)$		1				3			

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình $g(x) = m$ có hai nghiệm phân biệt khi

$$\begin{cases} m = -1 \\ m \in (1; 3). \end{cases}$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-1; 2\}$.

Vậy có 2 giá trị m thỏa mãn bài toán.

❖ **Cách 2:** Phương pháp ghép trực.

Đặt $t = \sqrt{4 - x^2}$ có tập xác định $\mathcal{D} = [-2; 2]$.

Ta có: $t' = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$; $t' = 0 \Rightarrow x = 0 \in (-2; 2)$.

Bảng biến thiên

x	-2	0	2
t'		+	-
t	0	2	0

Phương trình $f(\sqrt{4 - x^2}) = m$ trở thành $f(t) = m$.

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ và bảng biến thiên $t(x) = \sqrt{4 - x^2}$ ta có bảng sau đây

x	-2	0		2	
t	0	1	2	1	0
$y = f(t)$					

Từ bảng trên suy ra phương trình $f(t) = m$ có hai nghiệm phân biệt khi $m \in (1; 3)$ hoặc $m = -1$ mà do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-1; 2\}$ thỏa mãn bài toán.

Vậy có 2 giá trị m thỏa mãn.

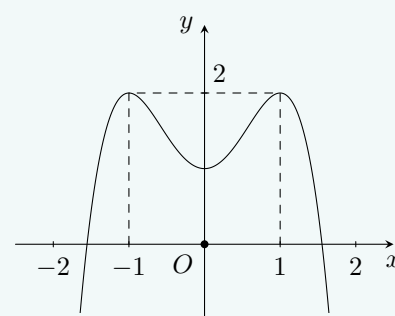
Chọn đáp án (B)

□

❖ **Câu 19.**

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thuộc đoạn $[0; 4]$ của phương trình $|f(x^2 - 2x)| = 2$ là

- (A) 4. (B) 3. (C) 5. (D) 6.



Lời giải.

Cách 1: Phương pháp tự luận truyền thống.

Ta có phương trình $|f(x^2 - 2x)| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x^2 - 2x) = 2 \\ f(x^2 - 2x) = -2 \end{cases}$

Từ đồ thị hàm số đã vẽ của $y = f(x)$ ta có

$$f(x^2 - 2x) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = 1 \\ x^2 - 2x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \pm \sqrt{2} \\ x = 1 \end{cases}$$

Xét trên đoạn $[0; 4]$, ta được 2 nghiệm $x = 1$; $x = 1 + \sqrt{2}$.

$$f(x^2 - 2x) = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = a \\ x^2 - 2x = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - a = 0 \\ x^2 - 2x - b = 0 \end{cases} \text{ với}$$

$$\begin{cases} -2 < a < -1 \\ 1 < b < 2. \end{cases}$$

Với phương trình $x^2 - 2x - a = 0$ có $\Delta' = 1 + a < 0$ do vậy phương trình này vô nghiệm.

Với phương trình $x^2 - 2x - b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{b+1} \\ x = 1 - \sqrt{b+1} \end{cases}$ ta có nghiệm $x = 1 - \sqrt{b+1} < 0$ còn

$0 < 1 + \sqrt{b+1} < 4$, như vậy ở trường hợp này phương trình có 1 nghiệm.

Kết luận: phương trình đã cho có 3 nghiệm trong đoạn $[0; 4]$.

Cách 2: Phương pháp ghép trục

Đặt $t = x^2 - 2x$, ta có $t' = 2x - 2$, từ đồ thị của hàm số $f(x)$ đã cho ta có $f(0) = 1$, $f(1) = f(-1) = 2$ và $f(8) = m < -2$.

Ta có bảng ghép trục như sau:

x	$-\infty$	1	2	4
t				8
$f(t)$				
$ f(t) $				

Diagram illustrating the mapping of values from x to t , then to $f(t)$, and finally to $|f(t)|$. Arrows show the flow of values between the rows. For example, from $x=1$, $t=0$, $f(t)=2$, and $|f(t)|=2$. From $x=2$, $t=0$, $f(t)=1$, and $|f(t)|=1$. From $x=4$, $t=8$, $f(t)=m < -2$, and $|f(t)|=|m| > 2$. A dashed line connects $t=0$ to $t=0$ across the first two rows.

Nơi đâu có ý chí, ở đó có con đường

Qua bảng ta thấy phương trình $|f(t)| = 2 \Leftrightarrow |f(x^2 - 2x)| = 2$ có 3 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án (B)



⇒ **Câu 20.** Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa $f(0) = -2$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	1	-3	$+\infty$	

Số nghiệm thực của phương trình $f[2 + f(e^x)] = 1$ là

(A) 2.

(B) 4.

(C) 1.

(D) 3.

🗨️ **Lời giải.**

Cách 1. Phương pháp truyền thống

$$f(x) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = b \text{ với } a < -1, -1 < b < 0, c > 1. \\ x = c \end{cases}$$

Đặt $g(x) = f[2 + f(e^x)]$

$$g'(x) = f'[2 + f(e^x)] \cdot f'(e^x) \cdot e^x$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'[2 + f(e^x)] = 0 \\ f'(e^x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + f(e^x) = -1 \\ 2 + f(e^x) = 1 \\ e^x = -1 \\ e^x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = 1 \\ e^x = a \\ e^x = b \\ e^x = c \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln c \\ x = 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$	0	$\ln c$	$+\infty$	
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$		1		$+\infty$	
	-2		-3		

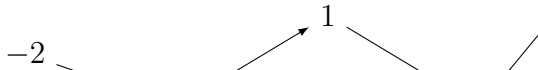
$$f[2 + f(e^x)] = 1 \Leftrightarrow g(x) = 1$$

Vậy số nghiệm của phương trình $f[2 + f(e^x)] = 1$ là 2.

Cách 2. Phương pháp ghép trục

Đặt $t = e^x$ và $u = f(t) + 2$.

Bảng biến thiên của hàm $f(u)$ như sau:

x	$-\infty$				$+\infty$
t	0	①			$+\infty$
u	0	①	-1	①	$+\infty$
$f(u)$	$+\infty$				
					

Vậy số nghiệm của phương trình $f[2 + f(e^x)] = 1$ là 2.

Chọn đáp án **(A)**

❖ **Câu 21.** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Hàm số $g(x) = f(3x - 2)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- (A)** $(2; 4)$. **(B)** $(-1; 1)$. **(C)** $(1; 2)$. **(D)** $(0; 1)$.

💬 **Lời giải.**

Cách 1: Tự luận truyền thống

$$g'(x) = 3f'(3x - 2).$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 3f'(3x - 2) > 0 \Leftrightarrow f'(3x - 2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < 3x - 2 < 0 \\ 3x - 2 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < \frac{2}{3} \\ x > \frac{4}{3} \end{cases}$$

Chọn khoảng $(2; 4)$ vì $(2; 4) \subset \left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$.

Cách 2: Phương pháp ghép trục

Đặt $u = 3x - 2$. Ta có $u'(x) = 3$.

Hàm số $g(x) = f(3x - 2)$ trở thành hàm số $y = f(u)$.

Từ bảng xét dấu đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ ta có bảng sau

x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
u		-2	0	2	
$f(u)$		$-$	$+$	$-$	$+$

Từ bảng trên ta thấy $\left(-\frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right)$ và $\left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$ chỉ chứa khoảng $(2; 4)$.

Vậy hàm số $g(x) = f(3x - 2)$ đồng biến trên khoảng $(2; 4)$.

Chọn đáp án **(A)**

❖ **Câu 23.** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-2	0	-2	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{7\pi}{4}; \frac{13\pi}{4}\right]$ của phương trình $f(\sin x - \cos x) + 1 = 0$ là

- (A)** 7. **(B)** 10. **(C)** 6. **(D)** 8.

💬 **Lời giải.**

Nơi đâu có ý chí, ở đó có con đường

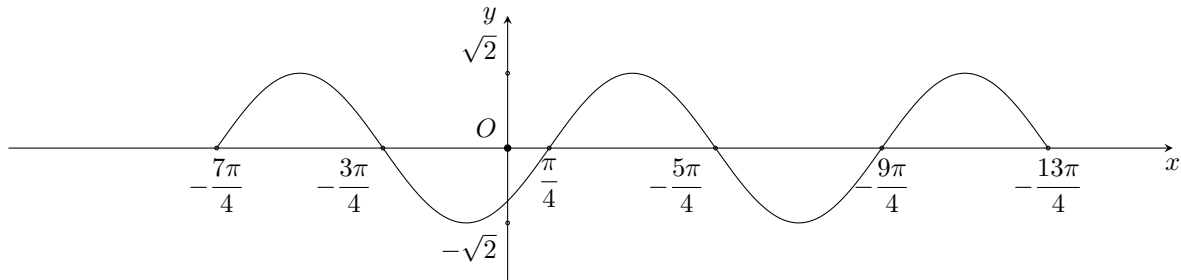
Cách 1. Tự luận truyền thống

Ta có $f(\sin x - \cos x) + 1 = 0 \Leftrightarrow f\left(\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) = -1 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = t_1 \in (-\infty; -\sqrt{2}) & (1) \\ \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = t_2 \in (-\sqrt{2}; 0) & (2) \\ \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = t_3 \in (0; \sqrt{2}) & (3) \\ \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = t_4 \in (\sqrt{2}; +\infty) & (4). \end{cases}$$

Các phương trình (1) và (4) đều vô nghiệm.

Xét đồ thị hàm số $y = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ trên $\left[-\frac{7\pi}{4}; \frac{13\pi}{4}\right]$



Ta thấy phương trình (2) có 4 nghiệm phân biệt và phương trình (3) có 6 nghiệm phân biệt đồng thời trong số chúng không có 2 nghiệm nào trùng nhau.

Vậy phương trình đã cho có 10 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{7\pi}{4}; \frac{13\pi}{4}\right]$.

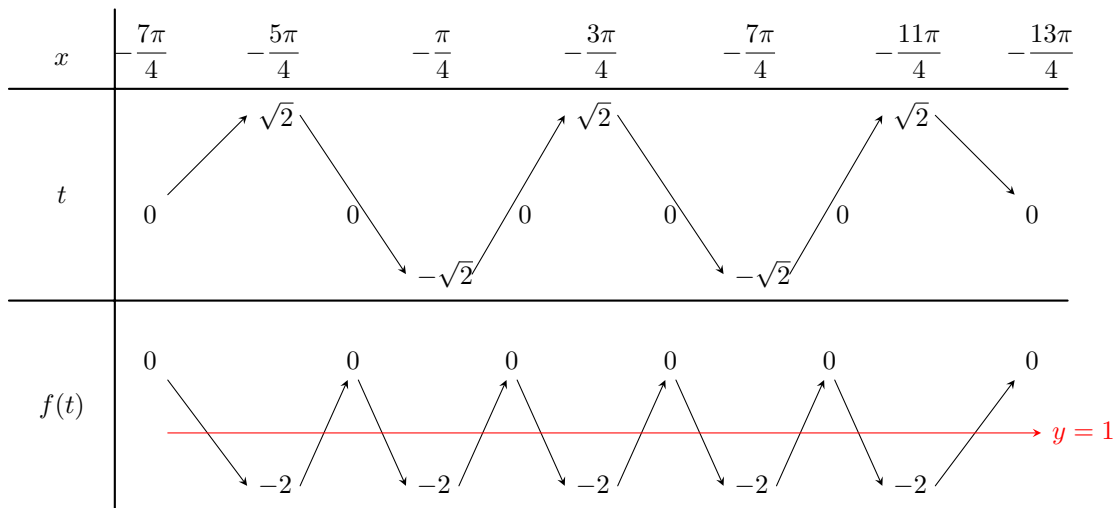
Cách 2. Phương pháp ghép trục

Đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; vì $x \in \left[-\frac{7\pi}{4}; \frac{13\pi}{4}\right]$ nên $t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

Ta có $t' = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{5\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}; \frac{11\pi}{4}; \frac{13\pi}{4}\right\}$.

Khi đó phương trình $f(\sin x - \cos x) + 1 = 0$ trở thành $f(t) = -1$.

Ta có

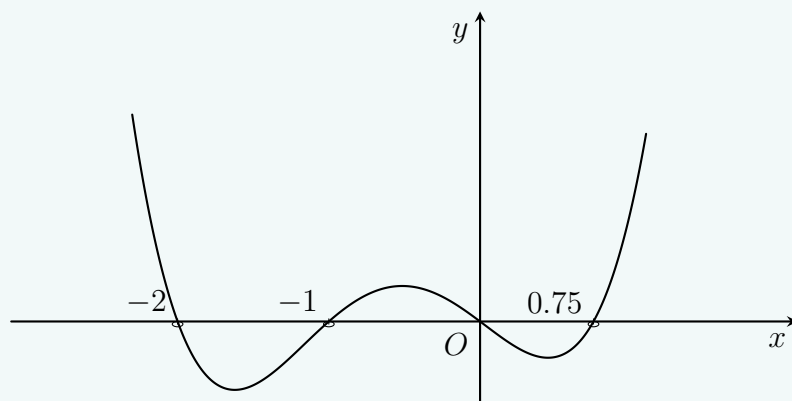


Dựa vào bảng biến thiên thì phương trình đã cho có 10 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án **(B)**

□

⇒ **Câu 24.** Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(2x^3 + 3x^2)$ là

(A) 5.

(B) 3.

(C) 7.

(D) 11.

Lời giải.

Cách 1. Tự luận truyền thống

Do $y = f(x)$ là hàm số bậc bốn nên là hàm số liên tục và có đạo hàm luôn xác định tại $\forall x \in \mathbb{R}$.

Theo đồ thị hàm số ta có được $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \in (-2; -1) \\ x = x_2 \in (-1; 0) \\ x = x_3 \in (0; 0,75). \end{cases}$

Mặt khác $g'(x) = (6x^2 + 6x) f'(2x^3 + 3x^2)$ nên

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 + 6x = 0 \\ f'(2x^3 + 3x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ 2x^3 + 3x^2 = x_1 \\ 2x^3 + 3x^2 = x_2 \\ 2x^3 + 3x^2 = x_3. \end{cases}$$

Xét hàm số $h(x) = 2x^3 + 3x^2$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $h'(x) = 6x^2 + 6x$, $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$, từ đó ta có bảng biến thiên của $y = h(x)$ như sau

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$		
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$			1		0	$+\infty$
	$-\infty$					

Từ bảng biến thiên của hàm số $h(x) = 2x^3 + 3x^2$ nên ta có $h(x) = x_1$ có đúng một nghiệm, $h(x) = x_2$ có đúng 1 nghiệm, $h(x) = x_3$ có đúng ba nghiệm phân biệt và các nghiệm này đều khác 0 và -1 . Vì thế phương trình $g'(x) = 0$ có đúng bảy nghiệm phân biệt và đều là các nghiệm đơn nên hàm số $y = g(x)$ có 7 cực trị.

Cách 2. Phương pháp ghép trực

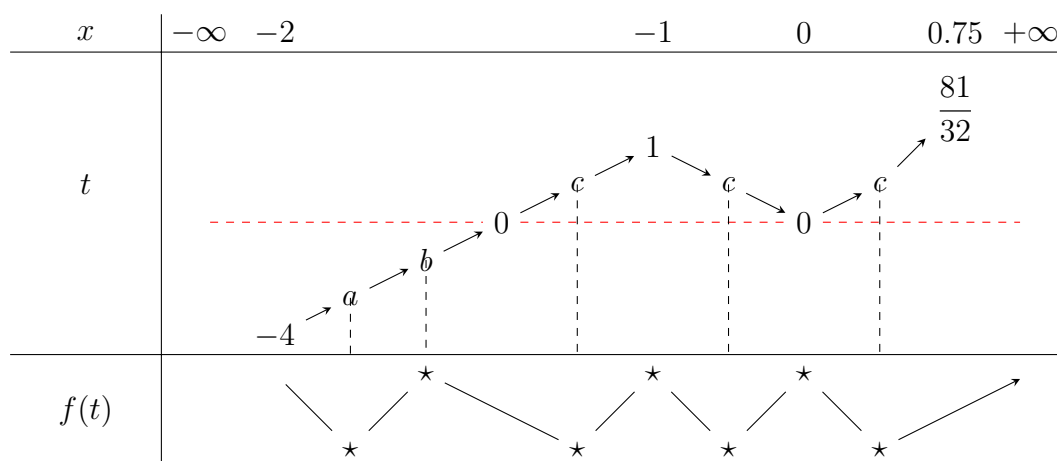
Gọi a, b, c là các điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$, trong đó $-2 < a < b < 0 < c < 0,75$.

Đặt $t = 2x^3 + 3x^2$; $t' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1. \end{cases}$

Nơi đâu có ý chí, ở đó có con đường

Khi đó phương trình $g(x) = f(2x^3 + 3x^2) = f(t)$

Ta có bảng biến thiên



Do phương trình $g'(x) = 0$ có đúng bảy nghiệm phân biệt và đều là các nghiệm đơn nên hàm số $y = g(x)$ có 7 cực trị.

Chọn đáp án **(C)**

□

❖ **Câu 25.** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$-$
y	$-\infty$	2	1	2	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ của phương trình $2f(\cos x) - 3 = 0$ là

(A) 4.

(B) 7.

(C) 6.

(D) 8.

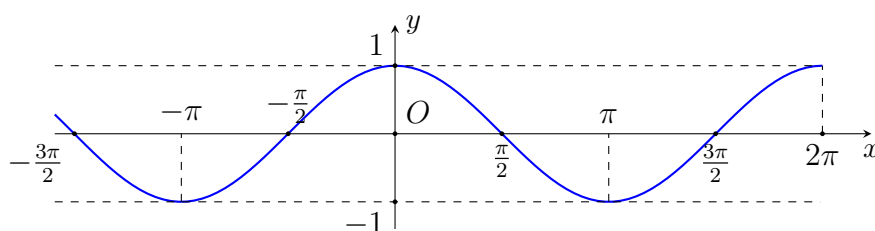
💬 **Lời giải.**

Cách 1: Tự luận truyền thống

$$\text{Ta có } 2f(\cos x) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(\cos x) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = a \in (-\infty; -1) \\ \cos x = b \in (-1; 0) \\ \cos x = c \in (0; 1) \\ \cos x = d \in (1; +\infty) \end{cases}$$

Vì $\cos x \in [-1; 1]$ nên $\cos x = a \in (-\infty; -1)$ và $\cos x = d \in (1; +\infty)$ vô nghiệm.

Xét đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên $\left[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$



Phương trình $\cos x = b \in (-1; 0)$ có 4 nghiệm phân biệt.

Phương trình $\cos x = c \in (0; 1)$ có 3 nghiệm phân biệt, không trùng với nghiệm nào của phương trình

$$\cos x = b \in (-1; 0).$$

Vậy phương trình đã cho có 7 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Cách 2: Phương pháp ghép trục

$$\text{Ta có } 2f(\cos x) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(\cos x) = \frac{3}{2} \quad (*)$$

$$\text{Đặt } t = \cos x, t \in [-1; 1]; t' = -\sin x; t' = 0 \Rightarrow x = k\pi; x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right] \Rightarrow x \in \{-\pi; 0; \pi; 2\pi\}$$

x	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	0	π	2π		
t'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
t	0			1			1
		-1			-1		

Khi đó (*) trở thành $f(t) = \frac{3}{2}$.

Số nghiệm của phương trình (*) trên đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(t)$,

$t \in [-1; 1]$ và đường thẳng $y = \frac{3}{2}$.

Ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$t = \cos x$	0	-1	0	1	0	-1	0	1
$f(t)$	1	2	1	2	1	2	1	2

Từ bảng biến thiên ta được kết quả đường thẳng $y = \frac{3}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(t)$ tại 7 điểm hay phương trình (*) có 7 nghiệm phân biệt trên đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$

Chọn đáp án **(B)**

❖ Câu 26.

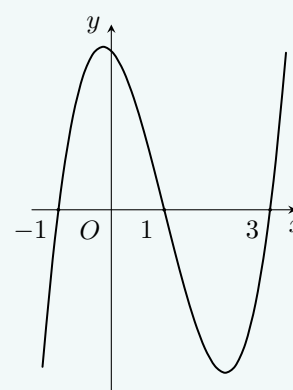
Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Số điểm cực đại của hàm số $y = f(\sqrt{x^2 + 2x + 2})$ là

(A) 3.

(B) 2.

(C) 4.

(D) 1.



Nơi đâu có ý chí, ở đó có con đường

Lời giải.

Cách 1: Tự luận truyền thống

Từ đồ thị của $y = f'(x)$ ta chọn $f'(x) = (x+1)(x-1)(x-3)$.

Áp dụng công thức $y = [f(u)]' = u'f'(u)$ với $u = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$.

Ta có

$$\begin{aligned} y' &= \left[f(\sqrt{x^2 + 2x + 2}) \right]' = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} \cdot (\sqrt{x^2 + 2x + 2} + 1)(\sqrt{x^2 + 2x + 2} - 1)(\sqrt{x^2 + 2x + 2} - 3) \\ &= \frac{(x+1)(\sqrt{x^2 + 2x + 2} + 1)(x+1)^2(x^2 + 2x - 7)}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}(\sqrt{x^2 + 2x + 2} + 1)(\sqrt{x^2 + 2x + 2} + 3)} \\ \Rightarrow y' &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -1 + 2\sqrt{2} \\ x = -1 - 2\sqrt{2} \end{cases} \end{aligned}$$

x	$-\infty$	$-1-2\sqrt{2}$			-1	$-1+2\sqrt{2}$			$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y									

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số có một điểm cực đại.

Cách 2: Phương pháp ghép trực

Đặt $u = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$.

$$\begin{aligned} u'(x) &= (\sqrt{x^2 + 2x + 2})' = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} \\ u'(x) &= 0 \Leftrightarrow x = -1. \end{aligned}$$

Ta có BBT của hàm số $u = u(x)$:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$u'(x)$	$-$	0	$+$
$u(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

Ta có BBT của hàm số $y = f(x)$:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$									

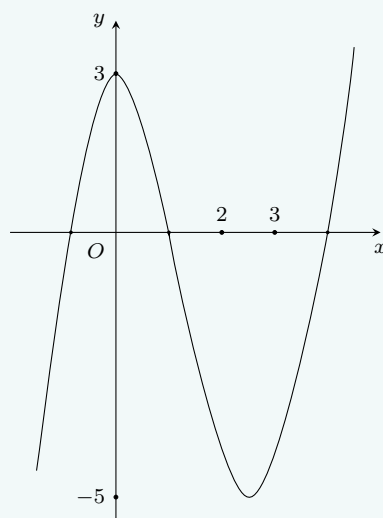
Ta có BBT của hàm số $y = f(u)$:

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$u(x)$	$+\infty$	1		3	$+\infty$
$f(u)$					

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f(\sqrt{x^2 + 2x + 2})$ có một điểm cực đại.

Chọn đáp án **(D)**

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ



Đặt $g(x) = 3f(f(x)) + 4$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ là

(A) 2.

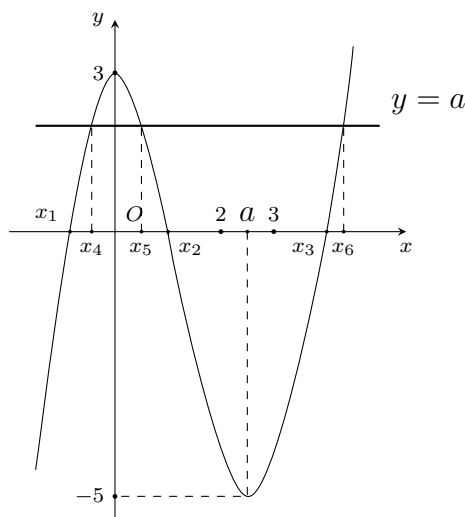
(B) 8.

(C) 10.

(D) 6.

Lời giải.

Cách 1: PP tự luận truyền thống:



Ta có $g'(x) = 3f'(f(x)) \cdot f'(x)$.

Suy ra

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3f'(f(x)) \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(f(x)) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = a \quad (2 < a < 3). \\ x = 0 \\ x = a \end{cases}$$

Nơi đâu có ý chí, ở đó có con đường

Dựa vào đồ thị ta có $f(x) = 0$ có 3 nghiệm đơn phân biệt x_1, x_2, x_3 khác 0 và a .
 Vì $2 < a < 3$ nên $f(x) = a$ có 3 nghiệm đơn phân biệt x_4, x_5, x_6 khác $x_1, x_2, x_3, 0, a$.
 Suy ra $g'(x) = 0$ có 8 nghiệm đơn phân biệt.
 Do đó hàm số $g(x) = 3f(f(x)) + 4$ có 8 điểm cực trị.

Cách 2: Phương pháp ghép trực:

Đặt $u = f(x)$, ta có bảng biến thiên hàm $f(u)$:

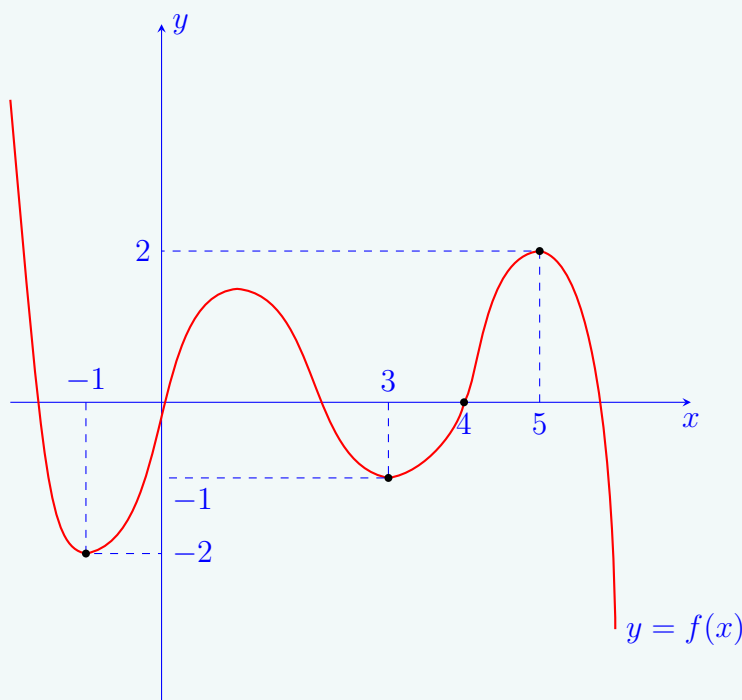
x	$-\infty$	0	a	3	a	0	$f(a)$	0	a	$+\infty$
$u = f(x)$	$-\infty$	0	a	3	a	0	$f(a)$	0	a	$+\infty$
$f(u)$	$-\infty$	3	$f(a)$	$f(3)$	$f(a)$	3	$f(f(a))$	3	$f(a)$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = 3f(f(x)) + 4$ bằng với số điểm cực trị của hàm số $f(f(x))$ tức hàm số $f(u)$ trên. Từ bảng biến thiên của $f(u)$, ta được $g(x)$ có 8 cực trị.

Chọn đáp án (B)

□

❖ **Câu 28.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-10; 10)$ để phương trình $f(\sqrt{x^2 + 2x + 10}) - 3 = m$ có nghiệm?

(A) 8.

(B) 6.

(C) 9.

(D) 7.

💬 **Lời giải.**

Cách 1: Tự luận truyền thống

Đặt $t = \sqrt{x^2 + 2x + 10} \Rightarrow t = \sqrt{(x+1)^2 + 9} \Rightarrow t \geq 3$.

Để phương trình $f(\sqrt{x^2 + 2x + 10}) - 3 = m \Leftrightarrow f(\sqrt{x^2 + 2x + 10}) = m + 3$ có nghiệm thì đường thẳng $y = m + 3$ cắt đồ thị $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x \geq 3$.

Từ đồ thị ta được $m + 3 \leq 2 \Leftrightarrow m \leq -1$

Mà $m \in (-10; 10)$ và $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ có 9 giá trị m thỏa mãn.

Cách 2: Phương pháp ghép trực

Đặt $u = \sqrt{x^2 + 2x + 10} \Rightarrow u = \sqrt{(x+1)^2 + 9} \Rightarrow u \geq 3$

Khi đó $u'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 10}} \Rightarrow u' = 0 \Leftrightarrow x = -1$

BBT của hàm số $u(x)$:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$u'(x)$	$-$	0	$+$
$u(x)$	$+\infty$	3	$+\infty$

Phương trình $f(\sqrt{x^2 + 2x + 10}) - 3 = m \Leftrightarrow f(\sqrt{x^2 + 2x + 10}) = m + 3 \Leftrightarrow f(u) = m + 3$

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ và từ bảng biến thiên của hàm số $u = \sqrt{x^2 + 2x + 10}$ ta có bảng sau biến thiên của hàm hợp $f(\sqrt{x^2 + 2x + 10}) = f(u)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$u(x)$	$+\infty$	3	$+\infty$
$f(u)$	$-\infty$	2	$-\infty$

Từ BBT: phương trình $f(u) = m + 3$ với $u \geq 3$ có nghiệm khi $m + 3 \leq 2 \Leftrightarrow m \leq -1$

Mà $m \in (-10; 10)$ và $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ có 9 giá trị m thỏa mãn.

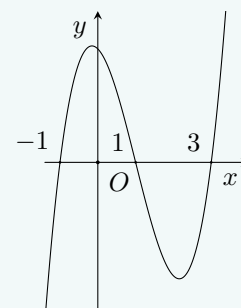
Chọn đáp án **C**

□

Câu 29.

Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị của $f'(x)$ như hình vẽ bên. Số điểm cực đại của hàm số $g(x) = f(\sqrt{x^2 + 2x + 2})$ là

- A** 1. **B** 2. **C** 2. **D** 4.



Lời giải.

Cách 1: Phương pháp tự luận truyền thống

Ta có $g'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} \cdot f'(\sqrt{x^2 + 2x + 2})$.

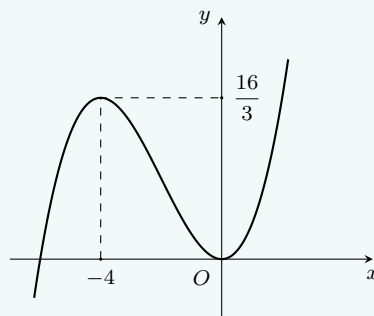
Nơi đâu có ý chí, ở đó có con đường

Luyện mãi thành tài, miệt mài tất giỏi.

x	$-\infty$	$-1 - \sqrt{2}$	-1	$-1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2 + 2x + 2} \Rightarrow t' = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}, t' = 0 \Leftrightarrow x = -1 \rightarrow t = 1.$$

🔗 **Câu 30.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



(A) 3. **(B)** 4. **(C)** 5. **(D)** Vô số.

Cách 1: Phương pháp tư luận truyền thống

Mua file qua: 0905.193.688 – facebook.com/vietgold/ – Site: Luyenthitracngkiem.vn

Phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow (2t+1)^2 + (t+3)^2 \geq (4t+1)^2 \Leftrightarrow -\frac{9}{11} \leq t \leq 1$.

Suy ra $0 \leq |t| \leq 1$.

Từ đồ thị $y = f(x)$ ta có:

☑ $y = f(x)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

☑ $m^2 + 4m + 4 = (m+2)^2 \in [0; +\infty)$.

☑ $|t| \in [0; +\infty)$.

Nên $f\left(\left|\frac{3\sin x - \cos x - 1}{2\cos x - \sin x + 4}\right|\right) = f(m^2 + 4m + 4) \Leftrightarrow f(|t|) = f(m^2 + 4m + 4) \Leftrightarrow |t| = m^2 + 4m + 4$.

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow 0 \leq m^2 + 4m + 4 \leq 1 \Leftrightarrow m^2 + 4m + 4 \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq -1$.

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1\}$.

Cách 2: Dùng bảng biến thiên

Đặt $t = \frac{3\sin x - \cos x - 1}{2\cos x - \sin x + 4} \Leftrightarrow (2t+1)\cos x - (t+3)\sin x = -1 - 4t$ (*).

Phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow (2t+1)^2 + (t+3)^2 \geq (4t+1)^2 \Leftrightarrow -\frac{9}{11} \leq t \leq 1$.

Suy ra $0 \leq |t| \leq 1$.

x	0	1
$ t $	0	1
$f(t)$	$f(0)$	$f(1)$

$y = f(m^2 + 4m + 4)$

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số $f(|t|)$ đồng biến trên $[0; 1]$.

Phương trình có nghiệm trên $[0; 1] \Leftrightarrow 0 \leq m^2 + 4m + 4 \leq 1 \Leftrightarrow m^2 + 4m + 4 \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq -1$.

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1\}$.

Chọn đáp án (A)

🔗 **Câu 31.** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-2	-1	-2	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$ của phương trình $2f(\sin x) + 3 = 0$ là

(A) 4.

(B) 6.

(C) 3.

(D) 8.

💬 **Lời giải.**

☑ **Cách 1:** Tự luận truyền thống

Đặt $t = \sin x$. Do $x \in [-\pi; 2\pi]$ nên $t \in [-1; 1]$.

Nơi đâu có ý chí, ở đó có con đường



Khi đó ta có phương trình $2f(t) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(t) = -\frac{3}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(t) = -\frac{3}{2}$ có 2 nghiệm: $t = a \in (-1; 0)$ và $t = b \in (0; 1)$.

— Trường hợp 1: $t = a \in (-1; 0)$

Ứng với giá trị $t \in (-1; 0)$, phương trình có 4 nghiệm $-\pi < x_1 < x_2 < 0 < \pi < x_3 < x_4 < 2\pi$.

— Trường hợp 2: $t = b \in (0; 1)$

Ứng với giá trị $t \in (0; 1)$, phương trình có 2 nghiệm $0 < x_5 < x_6 < \pi$.

Hiển nhiên cả 6 nghiệm trong 2 trường hợp trên đều khác nhau từng đôi một.

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$.

☑ Cách 2: Phương pháp ghép trực

Đặt $t = \sin x$. Vì $x \in [-\pi; 2\pi]$ nên $t \in [-1; 1]$;

$$t' = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{3\pi}{2} \end{cases}.$$

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$t = \sin x$	0	-1	0	1	0	-1	0
$f(t) = f(\sin x)$	-1	-2	-1	-2	-1	-2	-1

Ta có $2f(\sin x) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(\sin x) = -\frac{3}{2}$.

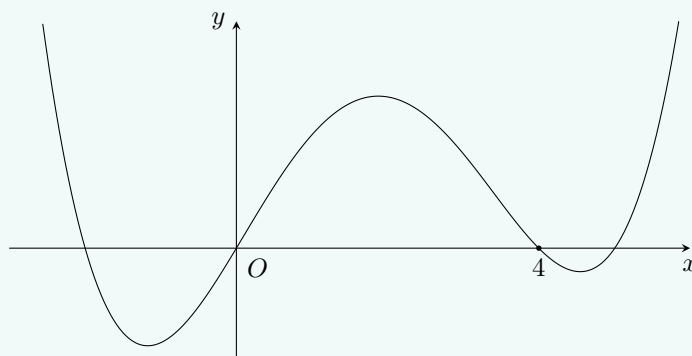
Do đó tổng số nghiệm của phương trình đã cho là 6.

Chọn đáp án (B)

□

❖ Câu 32 (Câu 46 MH - Lan1 - 2019 - 2020).

Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$ là

(A) 5.

(B) 3.

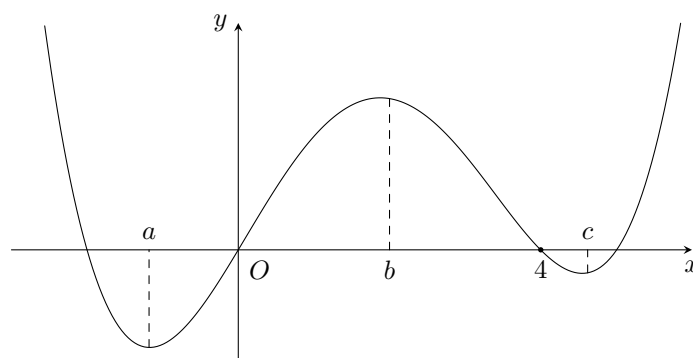
(C) 7.

(D) 11.



Lời giải.

Ta có



a) Cách 1. Tự luận truyền thống

Từ đồ thị, ta có bảng biến thiên của $y = f(x)$ như sau:

x	$-\infty$	a		b		c		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$							$+\infty$

$$g(x) = f(x^3 + 3x^2) \Rightarrow g'(x) = (x^3 + 3x^2)' \cdot f'(x^3 + 3x^2) = (3x^2 + 6x) \cdot f'(x^3 + 3x^2).$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (3x^2 + 6x) \cdot f'(x^3 + 3x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 6x = 0 \\ f'(x^3 + 3x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x^3 + 3x^2 = a < 0 \\ x^3 + 3x^2 = b \in (0; 4) \\ x^3 + 3x^2 = c > 4 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

$$\text{Xét hàm số } h(x) = x^3 + 3x^2 \Rightarrow h'(x) = 3x^2 + 6x \Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2. \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$-\infty$	4	0	$+\infty$	

Từ bảng biến thiên, ta thấy

- ☑ Đường thẳng $y = a$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 1 điểm.
- ☑ Đường thẳng $y = b$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 3 điểm.
- ☑ Đường thẳng $y = c$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 1 điểm.

Như vậy, phương trình $g'(x) = 0$ có tất cả 7 nghiệm đơn phân biệt.Vậy hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$ có 7 cực trị.

b) Cách 2. Tự luận truyền thống

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau



x	$-\infty$	a	b	c	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$				$+\infty$

Ta có $g(x) = f(x^3 + 3x^2) \Rightarrow g'(x) = (3x^2 + 6x) \cdot f'(x^3 + 3x^2)$.

$$\text{Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 6x = 0 \\ f'(x^3 + 3x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x^3 + 3x^2 = a; \quad a < 0 \\ x^3 + 3x^2 = b; \quad 0 < b < 4 \\ x^3 + 3x^2 = c; \quad c > 4. \end{cases}$$

Xét hàm số $h(x) = x^3 + 3x^2 \Rightarrow h'(x) = 3x^2 + 6x$. Có $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2. \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$-\infty$	4	0	$+\infty$	

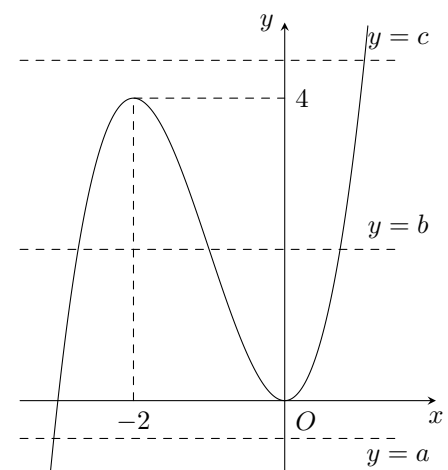
Ta có đồ thị của hàm $h(x) = x^3 + 3x^2$ như sau

Từ đồ thị ta thấy:

- ☑ Đường thẳng $y = a$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 1 điểm.
- ☑ Đường thẳng $y = b$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 3 điểm.
- ☑ Đường thẳng $y = c$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 1 điểm.

Như vậy, phương trình $g'(x) = 0$ có tất cả 7 nghiệm đơn phân biệt.

Vậy hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$ có 7 cực trị.

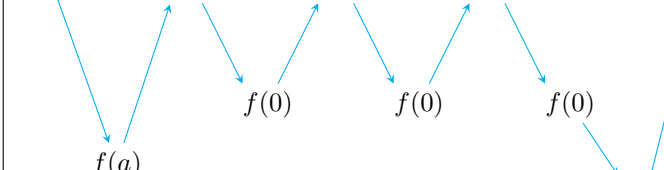


c) Cách 3. Phương pháp ghép trực

Đặt $u = x^3 + 3x^2$.

Ta có $u' = 3x^2 + 6x$. Khi đó $u' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2. \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1			2			$+\infty$		
u	$-\infty$	a	b	4	b	0	b	4	c	$+\infty$
$f(u)$	$+\infty$	$+\infty$								
										

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $g(x)$ có 7 điểm cực trị.

Chọn đáp án **C**

⇒ Câu 33 (Câu 46 MH - Lan2 - 2019 - 2020).

Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$			2		2			
	$-\infty$			0			$-\infty$	

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(\sin x) = 1$ là

A 7.

B 4.

C 5.

D 6.

🗨️ Lời giải.

a) Cách 1. Tự luận truyền thống

Đặt $t = \sin x$, $x \in \left[0; \frac{5\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [-1; 1]$.

Khi đó phương trình $f(\sin x) = 1$ trở thành $f(t) = 1$, $\forall t \in [-1; 1]$.

Đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(t)$ và đường thẳng $y = 1$.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $f(t) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = a \in (-1; 0) \\ t = b \in (0; 1) \end{cases}$.

(a) Trường hợp 1: $t = a \in (-1; 0)$

Ứng với mỗi giá trị $t \in (-1; 0)$ thì phương trình $\sin x = t$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\pi < x_1 < x_2 < 2\pi$.

(b) Trường hợp 2: $t = b \in (0; 1)$

Ứng với mỗi giá trị $t \in (0; 1)$ thì phương trình $\sin x = t$ có 3 nghiệm x_3, x_4, x_5 thỏa mãn $0 < x_3 < x_4 < \pi$; $2\pi < x_5 < \frac{5\pi}{2}$.

Hiển nhiên cả 5 nghiệm trong 2 trường hợp trên đều khác nhau.

Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$.

b) Cách 2. Phương pháp ghép trực

Đặt $t = \sin x$, $x \in \left[0; \frac{5\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [-1; 1]$.

Khi đó phương trình $f(\sin x) = 1$ trở thành $f(t) = 1$, $\forall t \in [-1; 1]$.

Nơi đâu có ý chí, ở đó có con đường

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$
$u = \sin x$	0	1	0	-1	0	1
$f(u) = f(\sin x)$						

Do đó tổng số nghiệm của phương trình là 5.

Chọn đáp án **C**



❖ **Câu 34.** Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2x$.

- Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $f(x^2 - 4x + 1) = m$ theo m .
- Đếm số điểm cực trị của hàm số $y = f[f(x) - 1]$.

💬 **Lời giải.**

- Đặt $u = x^2 - 4x + 1$, khi đó phương trình trở thành $f(u) = m$. Ta lập bảng biến thiên ghép như sau.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
u	$+\infty$	1	$+\infty$
$f(u)$	$+\infty$	-3	$+\infty$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
u	$+\infty$	1	$+\infty$
$f(u)$	$+\infty$	-3	$+\infty$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
u	$+\infty$	1	$+\infty$
$f(u)$	$+\infty$	-3	$+\infty$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
u	$+\infty$	1	$+\infty$
$f(u)$	$+\infty$	-3	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy phương trình $f(x^2 - 4x + 1) = m$

- ☑ Vô nghiệm khi $m < -1$.
- ☑ Có hai nghiệm phân biệt khi $m = -1$ hoặc $m > 15$.
- ☑ Có ba nghiệm phân biệt khi $m = 15$.
- ☑ Có bốn nghiệm phân biệt khi $-1 < m < 15$.

- Ta có hàm số $y = f[f(x) - 1] = f(x^2 - 2x - 1)$. Đặt $v = x^2 - 2x - 1$, ta có bảng biến thiên của $y = f(v)$ như sau.



x	$-\infty$	1		$+\infty$
v	$+\infty$	1	-2	$+\infty$
$f(v)$	$+\infty$	-1	8	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số $y = f[f(x) - 1]$ có ba điểm cực trị, gồm hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại.

□

Nơi đâu có ý chí, ở đó có con đường

