

§1. ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM

A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Đạo hàm của hàm số tại một điểm

Định nghĩa 1.1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và điểm $x_0 \in (a; b)$. Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 , kí hiệu bởi $f'(x_0)$ (hoặc $y'(x_0)$), tức là

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Chú ý. Để tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x_0 \in (a; b)$, ta thực hiện theo các bước sau:

- Tính $f(x) - f(x_0)$.
- Lập và rút gọn tỉ số $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ với $x \in (a; b)$, $x \neq x_0$.
- Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Ví dụ 1

Tính đạo hàm của hàm số $y = f(x) = x^2 + 2x$ tại điểm $x_0 = 1$.

Lời giải.

Ta có $f(x) - f(1) = x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$.

Với $x \neq 1$, $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 3)}{x - 1} = x + 3$.

Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 3) = 4$.

Vậy $f'(1) = 4$.

Trong thực hành, ta thường trình bày ngắn gọn như sau:

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + 2x) - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 3)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 3) = 4.$$

Chú ý. Đặt $h = x - x_0$, khi đó đạo hàm của hàm số đã cho tại điểm $x_0 = 1$ có thể tính như sau:

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(1+h)^2 + 2(1+h)] - (1^2 + 2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h^2 + 4h + 3) - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 4) = 4. \end{aligned}$$

2. Đạo hàm của hàm số trên một khoảng

Định nghĩa 1.2. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ nếu nó có đạo hàm $f'(x)$ tại mọi điểm x thuộc khoảng đó, kí hiệu là $y' = f'(x)$.

Ví dụ 2

Tìm đạo hàm của hàm số $y = cx^2$ với c là hằng số.

Lời giải.

Với x_0 bất kỳ, ta có:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{cx^2 - cx_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} c(x + x_0) = c(x_0 + x_0) = 2cx_0.$$

Vậy hàm số $y = cx^2$ (với c là hằng số) có đạo hàm là hàm số $y' = 2cx$. □

Chú ý. Nếu phương trình chuyển động của vật là $s = f(t)$ thì $v(t) = f'(t)$ là vận tốc tức thời của vật tại thời điểm t .

Ví dụ 3

Giải bài toán sau (bỏ qua sức cản của không khí và làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Nếu một quả bóng được thả rơi tự do từ đài quan sát trên sân thượng của tòa nhà Landmark 81 (Thành phố Hồ Chí Minh) cao 461,3 m xuống mặt đất. Có tính được vận tốc của quả bóng khi nó chạm đất hay không?

Lời giải.

Phương trình chuyển động rơi tự do của quả bóng là $s = f(t) = \frac{1}{2}gt^2$ (g là gia tốc rơi tự do, lấy $g = 9,8 \text{ m/s}^2$). Do vậy, vận tốc của quả bóng tại thời điểm t là $v(t) = f'(t) = gt = 9,8t$. Mặt khác, vì chiều cao của tòa tháp là 461,3 m nên quả bóng sẽ chạm đất tại thời điểm t_1 , với $f(t_1) = 461,3$. Từ đó, ta có:

$$4,9t_1^2 = 461,3 \Leftrightarrow t_1 = \sqrt{\frac{461,3}{4,9}} \text{ (giây)}.$$

Vậy vận tốc của quả bóng khi nó chạm đất là

$$v(t_1) = 9,8t_1 = 9,8 \cdot \sqrt{\frac{461,3}{4,9}} \approx 95,1 \text{ (m/s)}.$$

□

3. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

a) Tiếp tuyến của đồ thị hàm số

Định nghĩa 1.3. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $P(x_0; f(x_0))$ là đường thẳng đi qua P với hệ số góc $k = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ nếu giới hạn này tồn tại và hữu hạn, nghĩa là $k = f'(x_0)$. Điểm P gọi là tiếp điểm.

Nhận xét. Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $P(x_0; f(x_0))$ là đạo hàm $f'(x_0)$.

Ví dụ 4

Tìm hệ số góc của tiếp tuyến của parabol $y = x^2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$.

Lời giải.

Ta có $(x^2)' = 2x$ nên $y'(-1) = 2 \cdot (-1) = -2$. Vậy hệ số góc của tiếp tuyến của parabol $y = x^2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ là $k = -2$. $\square$

b) Phương trình tiếp tuyến

Định nghĩa 1.4. Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $P(x_0; y_0)$ là $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, trong đó $y_0 = f(x_0)$.

Ví dụ 5

Viết phương trình tiếp tuyến của parabol (P): $y = 3x^2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$.

Lời giải.

Ta có $y' = 6x$. Do đó, hệ số góc của tiếp tuyến là $k = f'(1) = 6$. Ngoài ra, ta có $f(1) = 3$ nên phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y - 3 = 6(x - 1)$ hay $y = 6x - 3$. $\square$

B MỘT SỐ DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 Tính đạo hàm bằng định nghĩa

Ví dụ 1

Tính đạo hàm bằng định nghĩa của hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2$ tại điểm $x_0 = 1$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 - (-2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 2x - 2)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x - 2) = -3. \quad \square$$

Ví dụ 2

Dùng định nghĩa, tính đạo hàm các hàm số sau đây:

a) $y = x^2 + 3x - 2$ tại $x_0 = 1$.

b) $y = -\frac{3}{x}$ tại $x_0 = 2$.

c) $y = \frac{x+1}{x-1}$ tại điểm $x_0 = 0$.

Lời giải.

a) Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 2 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+4)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+4) = 5.$

b) Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{-3}{x} + \frac{3}{2}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 6}{2x(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{2x} = \frac{3}{4}$.

c) Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x+1}{x-1} + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(x-1)} = -2$.

□

Ví dụ 3

Tính đạo hàm bằng định nghĩa của hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2$ tại điểm $x_0 = 1$.

👉 **Lời giải.**

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 - (-2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 2x - 2)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x - 2) = -3$.

□

Dạng 2 Hệ số góc và phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số

Ví dụ 1

Cho hàm số $y = f(x) = x^2$ có đồ thị (C) và điểm $M(2; 4) \in (C)$. Tính hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm M và viết phương trình của tiếp tuyến đó.

👉 **Lời giải.**

Ta có $(x^2)' = 2x$ nên tiếp tuyến của (C) tại M có hệ số góc là $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là

$$y - 4 = 4(x - 2) \Leftrightarrow y = 4x - 4.$$

□

Ví dụ 2

Cho (C) là đồ thị của hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ và điểm $M(1; 1) \in (C)$. Tính hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm M và viết phương trình tiếp tuyến đó.

👉 **Lời giải.**

Đạo hàm $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

✔ Hệ số góc của tiếp tuyến (C) tại $M(1; 1)$ là $k = f'(1) = -1$.

✔ Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(1; 1)$ là $y = -x + 2$.

□

Ví dụ 3

Viết phương trình tiếp tuyến của parabol $y = -x^2 + 4x$, biết:

a) Tiếp điểm có hoành độ $x_0 = 1$;

b) Tiếp điểm có tung độ $y_0 = 0$.

👉 **Lời giải.**

a) Tiếp điểm có hoành độ $x_0 = 1$
Gọi $(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.

Ta có $y' = -2x + 4$.

Hệ số góc tiếp tuyến $k = f'(1) = 2, y_0 = f(1) = 3$.

Phương trình tiếp tuyến $y - 3 = 2(x - 1)$ hay $y = 2x + 1$.

b) Tiếp điểm có tung độ $y_0 = 0$.

Gọi $(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.

$$y_0 = 0 \Leftrightarrow -x_0^2 + 4x_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 4. \end{cases}$$

TH1: $x_0 = 0, k = f'(0) = 4$.

Phương trình tiếp tuyến $y - 0 = 4(x - 0)$ hay $y = 4x$.

TH2: $x = 4, k = f'(4) = -4$

Phương trình tiếp tuyến $y - 0 = -4(x - 4)$ hay $y = -4x + 16$.

□

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1

Tính (bằng định nghĩa) đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x^2 - x$ tại $x_0 = 1$;

b) $y = -x^3$ tại $x_0 = -1$.

 **Lời giải.**

a) $y = x^2 - x$ tại $x_0 = 1$; Ta có $f(x) - f(1) = x^2 - x - (1^2 - 1) = x(x - 1)$.

Với $x \neq 1, \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x(x - 1)}{x - 1} = x$.

Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x = 1$.

Vậy $f'(1) = 1$.

b) $y = -x^3$ tại $x_0 = -1$.

Ta có $f(x) - f(-1) = -x^3 - 1 = -(x + 1)(x^2 - x + 1)$.

Với $x \neq -1, \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \frac{-(x + 1)(x^2 - x + 1)}{x + 1} = -(x^2 - x + 1)$.

Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} -(x^2 - x + 1) = -3$.

Vậy $f'(-1) = -3$.

□

Bài 2

Sử dụng định nghĩa, tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = kx^2 + c$ (với k, c là hằng số);

b) $y = x^3$.

 **Lời giải.**

a) $y = kx^2 + c$ (với k, c là hằng số).

Với x_0 bất kỳ, ta có:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(kx^2 + c) - (kx_0^2 + c)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{k(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} k(x + x_0) = k(x_0 + x_0) = 2kx_0. \end{aligned}$$

Vậy hàm số $y = kx^2 + c$ (với c, k là hằng số) có đạo hàm là hàm số $y' = 2kx$.

b) $y = x^3$

Với x_0 bất kỳ, ta có:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x^3) - (x_0^3)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (x^2 + xx_0 + x_0^2) = (x_0^2 + x_0x_0 + x_0^2) = 3x_0^2. \end{aligned}$$

Vậy hàm số $y = x^3$ có đạo hàm là hàm số $y' = 3x^2$.

□

Bài 3

Một vật được phóng theo phương thẳng đứng lên trên từ mặt đất với vận tốc ban đầu là 19,6 m/s thì độ cao h của nó (tính bằng mét) sau t giây được cho bởi công thức $h = 19,6t - 4,9t^2$. Tìm vận tốc của vật khi nó chạm đất.

📌 Lời giải.

Phương trình biểu diễn độ cao của vật là $h = 19,6t - 4,9t^2$ nên vận tốc của vật theo thời gian t là $v(t) = 19,6 - 9,8t$.

Khi vật chạm đất thì $h = 0$ hay $19,6t - 4,9t^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \text{ (loại)} \\ t = 4 \text{ (nhận)}. \end{cases}$

Vận tốc của vật khi chạm đất là $v(4) = 19,6 - 9,8 \cdot 4 = -19,6$ m/s.

□

Bài 4

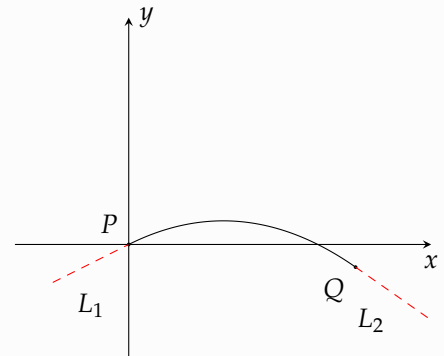
Một kỹ sư thiết kế một đường ray tàu lượn, mà mặt cắt của nó gồm một cung đường cong có dạng parabol, đoạn dốc lên L_1 và đoạn dốc xuống L_2 là những phần đường thẳng có hệ số góc lần lượt là 0,5 và $-0,75$. Để tàu lượn chạy êm và không bị đổi hướng đột ngột, L_1 và L_2 phải là những tiếp tuyến của cung parabol tại các điểm chuyển tiếp P và Q . Giả sử gốc tọa độ đặt tại P và phương trình của parabol là $y = ax^2 + bx + c$, trong đó x tính bằng mét.

a) Tìm c .

b) Tính $y'(0)$ và tìm b .

c) Giả sử khoảng cách theo phương ngang giữa P và Q là 40m. Tìm a .

d) Tìm chênh lệch độ cao giữa hai điểm chuyển tiếp P và Q .



📌 Lời giải.

a) Tìm c .

Chọn hệ trục tọa độ như hình, đồ thì đi qua gốc tọa độ $P(0;0)$ nên $c = 0$.

b) Tính $y'(0)$ và tìm b .

$$y' = 2ax^2 + b \text{ nên } y'(0) = b.$$

Do hệ số góc tại P bằng 0,5 nên $y'(0) = 0,5$ hay $b = 0,5$.

c) Giả sử khoảng cách theo phương ngang giữa P và Q là 40 m. Tìm a .

Khoảng cách theo phương ngang giữa P và Q là 40 m nên $x_Q = 40$.

$$\text{Hệ số góc tại } Q \text{ bằng } -0,75 \text{ nên } y'(40) = -0,75 \text{ hay } 2a \cdot 40^2 + 0,5 = -0,75 \Leftrightarrow a = \frac{-1}{2560}.$$

d) Tìm chênh lệch độ cao giữa hai điểm chuyển tiếp P và Q .

$$y = -\frac{1}{2560}x^2 + \frac{1}{2}x.$$

$$y_Q = y(40) = \frac{155}{8} = 19,375 \text{ m.}$$

Vậy chênh lệch độ cao giữa P và Q là 19,375 m.

□

Bài 5

Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $f(x) = -x^2;$

b) $f(x) = x^3 - 2x;$

c) $f(x) = \frac{4}{x}.$

 **Lời giải.**

Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) Với bất kì x_0 , ta có

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-x^2 + x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} [-(x + x_0)] = -2x_0.$$

Vậy $f'(x) = -2x$ trên $\mathbb{R}$.

b) Với bất kì x_0 , ta có

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{[(x^3 - 2x) - (x_0^3 - 2x_0)]}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} [x^2 + xx_0 + x_0^2 - 2] = 3x_0^2 - 2. \end{aligned}$$

Vậy $f'(x) = 3x^2 - 2$ trên $\mathbb{R}$.

c) Với mọi $x_0 \neq 0$, ta có

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{4}{x} - \frac{4}{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{4(x_0 - x)}{xx_0(x - x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-4}{xx_0} = -\frac{4}{x_0^2}.$$

Vậy $f'(x) = \left(\frac{4}{x}\right)' = -\frac{4}{x^2}$ trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

□

Bài 6

Cho hàm số $f(x) = -2x^2$ có đồ thị (C) và điểm $A(1; -2) \in (C)$. Tính hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại điểm A .

 **Lời giải.**

Đạo hàm $f'(x) = -4x$.

Hệ số góc tiếp tuyến của (C) tại điểm A là

$$k = f'(1) = -4 \cdot 1 = -4.$$

□

**Bài 7**

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3$.

a) Tại điểm $(-1; 1)$;

b) Tại điểm có hoành độ bằng 2.

📌 **Lời giải.**

a) Ta có $f'(x) = 3x^2$ nên $f'(-1) = 3$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm $(-1; 1)$ là

$$y = f'(-1) \cdot (x + 1) + 1 \Leftrightarrow y = 3x + 4.$$

b) Gọi $A(2; 8)$ thuộc đồ thị hàm số $y = x^3$

Ta có $f'(x) = 3x^2$ nên $f'(2) = 12$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại A là

$$y = f'(2) \cdot (x - 2) + 8 \Leftrightarrow y = 12x - 16.$$

□

Bài 8

Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = 4t^3 + 6t + 2$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc tức thời của chuyển động tại $t = 2$.

📌 **Lời giải.**

Ta có: $v(t) = s'(t) = 12t^2 + 6$.

Vận tốc tức thời tại $t = 2$ là $v(2) = 12 \cdot 2^2 + 6 = 54 \text{ m/s}$.

□

Bài 9

Một người gửi tiết kiệm khoản tiền 10 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 5%/ năm. Tính tổng số tiền vốn và lãi mà người đó nhận được sau một năm, nếu tiền lãi được tính theo thể thức

a) Lãi kép với kì hạn 6 tháng;

b) Lãi kép liên tục.

📌 **Lời giải.**

Số tiền nhận được sau

a) Lãi kép với kì hạn 6 tháng.

Số tiền nhận được sau 6 tháng đầu là $T = 10000000 \cdot e^{0.05 \cdot \frac{1}{2}} = 10253151,21$ (đồng).

Số tiền nhận được sau 6 tháng tiếp theo là $T = 10253151,21 \cdot e^{0.05 \cdot \frac{1}{2}} = 10512710,97$ (đồng).

b) Lãi kép với kì hạn liên tục là $T = 10000000 \cdot e^{0.05} = 10512710,96$ (đồng).

□



D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN – ĐỀ SỐ 1

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

1	(A) (B) (C) (D)	8	(A) (B) (C) (D)	15	(A) (B) (C) (D)	22	(A) (B) (C) (D)	29	(A) (B) (C) (D)
2	(A) (B) (C) (D)	9	(A) (B) (C) (D)	16	(A) (B) (C) (D)	23	(A) (B) (C) (D)	30	(A) (B) (C) (D)
3	(A) (B) (C) (D)	10	(A) (B) (C) (D)	17	(A) (B) (C) (D)	24	(A) (B) (C) (D)	31	(A) (B) (C) (D)
4	(A) (B) (C) (D)	11	(A) (B) (C) (D)	18	(A) (B) (C) (D)	25	(A) (B) (C) (D)	32	(A) (B) (C) (D)
5	(A) (B) (C) (D)	12	(A) (B) (C) (D)	19	(A) (B) (C) (D)	26	(A) (B) (C) (D)	33	(A) (B) (C) (D)
6	(A) (B) (C) (D)	13	(A) (B) (C) (D)	20	(A) (B) (C) (D)	27	(A) (B) (C) (D)	34	(A) (B) (C) (D)
7	(A) (B) (C) (D)	14	(A) (B) (C) (D)	21	(A) (B) (C) (D)	28	(A) (B) (C) (D)	35	(A) (B) (C) (D)

Câu 1

Tính đạo hàm của hàm số $y = k$, với k là hằng số.

- (A) $y' = -1$. (B) $y' = 0$. (C) $y' = 1$. (D) $y' = k$.

Lời giải.

Ta có $y' = 0$.

Chọn đáp án (B)

Câu 2

Số gia Δy của hàm số $y = x^2 + 2x - 5$ tại điểm $x_0 = 1$ là

- (A) $(\Delta x)^2 - 4\Delta x$. (B) $(\Delta x)^2 + 4\Delta x$. (C) $(\Delta x)^2 - 2\Delta x$. (D) $(\Delta x)^2 + 2\Delta x - 5$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(1 + \Delta x) - f(1) = (1 + \Delta x)^2 + 2(1 + \Delta x) - 5 + 2 \\ &= (\Delta x)^2 + 4\Delta x.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B)

Câu 3

Tìm số gia Δy của hàm số $y = x^2$ biết $x_0 = 3$ và $\Delta x = -1$.

- (A) $\Delta y = 13$. (B) $\Delta y = 7$. (C) $\Delta y = -5$. (D) $\Delta y = 16$.

Lời giải.

Ta có $\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = y(2) - y(3) = 2^2 - 3^2 = -5$.

Chọn đáp án (C)

Câu 4

Tính số gia Δy của hàm số $y = x^3 - 2x$ theo số gia của đối số Δx tại $x = 1$.

- (A) $\Delta y = (\Delta x)^3 + 3(\Delta x)^2 + 3\Delta x + 1$. (B) $\Delta y = (\Delta x)^3 - 3(\Delta x)^2 + \Delta x$.
(C) $\Delta y = (\Delta x)^3 + 3(\Delta x)^2 + \Delta x$. (D) $\Delta y = (\Delta x)^3 - 3(\Delta x)^2 + 3\Delta x + 1$.

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}\Delta y &= (1 + \Delta x)^3 - 2(1 + \Delta x) - (1^3 - 2 \cdot 1) \\ &= 1 + 3\Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 2 - 2\Delta x + 1 \\ &= (\Delta x)^3 + 3(\Delta x)^2 + \Delta x.\end{aligned}$$

Chọn đáp án **C****Câu 5**

Cho hàm số $f(x)$ xác định bởi $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$. Giá trị $f'(0)$ là

- A** 0. **B** Không tồn tại. **C** $\frac{1}{2}$. **D** 1.

Lời giải.

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} \stackrel{\text{nhân liên hợp}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1} = \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án **C****Câu 6**

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên tập số thực. Tìm hệ thức đúng.

- A** $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$. **B** $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1}$.
C $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x}$. **D** $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(1)}{x - 1}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Chọn đáp án **A****Câu 7**

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 là $f'(x_0)$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A** $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. **B** $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x + x_0) - f(x_0)}{x - x_0}$.
C $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$. **D** $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Lời giải.

Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$. Giới hạn hữu hạn (nếu có) của tỉ số $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ khi x dần đến x_0 gọi là đạo hàm của hàm số đã cho tại điểm x_0 , kí hiệu là $f'(x_0)$,

ta có $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Từ định nghĩa rút ra kết luận đáp án “ $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x + x_0) - f(x_0)}{x - x_0}$ ” sai.

“ $f'(x_0) = f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ” đúng do định nghĩa.



$$“f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}” \text{ đúng vì đặt } x = x_0 + h \Rightarrow \begin{cases} x - x_0 = h \\ x \rightarrow x_0 \Rightarrow h \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$“f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}” \text{ đúng vì đặt } x = x_0 + \Delta x \Rightarrow \begin{cases} x - x_0 = \Delta x \\ x \rightarrow x_0 \Rightarrow \Delta x \rightarrow 0 \end{cases}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 8

Tính số gia Δy của hàm số $y = x^3 - 2x$ theo số gia của đối số Δx tại $x = 1$.

(A) $\Delta y = (\Delta x)^3 + 3(\Delta x)^2 + 3\Delta x + 1$.

(B) $\Delta y = (\Delta x)^3 - 3(\Delta x)^2 + \Delta x$.

(C) $\Delta y = (\Delta x)^3 + 3(\Delta x)^2 + \Delta x$.

(D) $\Delta y = (\Delta x)^3 - 3(\Delta x)^2 + 3\Delta x + 1$.

 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} \Delta y &= (1 + \Delta x)^3 - 2(1 + \Delta x) - (1^3 - 2 \cdot 1) \\ &= 1 + 3\Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 2 - 2\Delta x + 1 \\ &= (\Delta x)^3 + 3(\Delta x)^2 + \Delta x. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 9

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm thỏa mãn $f'(6) = 2$. Tính giá trị của biểu thức

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - f(6)}{x - 6}.$$

(A) 2.

(B) $\frac{1}{3}$.

(C) $\frac{1}{2}$.

(D) 12.

 **Lời giải.**

Theo định nghĩa đạo hàm của hàm số tại $x = 6$, suy ra $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - f(6)}{x - 6} = f'(6) = 2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 10

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 . Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định dưới đây?

(A) $f(x)$ gián đoạn tại x_0 .

(B) $f(x)$ không cần xác định tại x_0 .

(C) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

(D) $f(x)$ liên tục tại x_0 .

 **Lời giải.**

$f(x)$ gián đoạn tại x_0 sai vì theo Định lý 1 trang 150 SGK Đại Số và Giải Tích 11 cơ bản, nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó. Như vậy $f(x)$ liên tục tại x_0 đúng.

$f(x)$ không cần xác định tại x_0 sai vì theo định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm SGK Đại Số và Giải Tích 11 cơ bản, trang 148, hàm số $f(x)$ phải xác định tại x_0 .

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ sai. Chẳng hạn, xét hàm số $f(x) = x^2$. Đạo hàm của $f(x) = x^2$ tại $x_0 = 1$ tồn tại và bằng 2. Nhưng $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1 \neq 0$.

Chọn đáp án (D) □



Câu 11

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 2$. Kết quả đúng là

(A) $f'(2) = 3$. (B) $f'(x) = 2$. (C) $f'(x) = 3$. (D) $f'(3) = 2$.

Lời giải.

Theo định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm ta có

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 2 = f'(3).$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 12

Tiếp tuyến với đồ thị của hàm số $f(x) = \frac{3}{2x-1}$ tại điểm có hoành độ $x = 2$ có hệ số góc là

(A) $-\frac{2}{3}$. (B) $\frac{2}{3}$. (C) 2. (D) -2.

Lời giải.

Tính $f'(2) = -\frac{2}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 13

Tính số gia Δy của hàm số $y = x^3 - 2x$ theo số gia của đối số Δx tại $x = 1$.

- (A) $\Delta y = (\Delta x)^3 + 3(\Delta x)^2 + 3\Delta x + 1$. (B) $\Delta y = (\Delta x)^3 - 3(\Delta x)^2 + \Delta x$.
 (C) $\Delta y = (\Delta x)^3 + 3(\Delta x)^2 + \Delta x$. (D) $\Delta y = (\Delta x)^3 - 3(\Delta x)^2 + 3\Delta x + 1$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \Delta y &= (1 + \Delta x)^3 - 2(1 + \Delta x) - (1^3 - 2 \cdot 1) \\ &= 1 + 3\Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 2 - 2\Delta x + 1 \\ &= (\Delta x)^3 + 3(\Delta x)^2 + \Delta x. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 14

Tính số gia Δy của hàm số $y = x^3 - 2x$ theo số gia của đối số Δx tại $x = 1$.

- (A) $\Delta y = (\Delta x)^3 + 3(\Delta x)^2 + 3\Delta x + 1$. (B) $\Delta y = (\Delta x)^3 - 3(\Delta x)^2 + \Delta x$.
 (C) $\Delta y = (\Delta x)^3 + 3(\Delta x)^2 + \Delta x$. (D) $\Delta y = (\Delta x)^3 - 3(\Delta x)^2 + 3\Delta x + 1$.

Lời giải.



Ta có

$$\begin{aligned}\Delta y &= (1 + \Delta x)^3 - 2(1 + \Delta x) - (1^3 - 2 \cdot 1) \\ &= 1 + 3\Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 2 - 2\Delta x + 1 \\ &= (\Delta x)^3 + 3(\Delta x)^2 + \Delta x.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 15

Hàm số $f(x_0)$ có đạo hàm tại x_0 là $f'(x_0)$. Chọn khẳng định sai.

- (A) $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. (B) $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.
(C) $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$. (D) $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x + x_0) - f(x_0)}{x - x_0}$.

 **Lời giải.**

✓ Theo định nghĩa đạo hàm tại một điểm SGK ĐS-GT 11, ta có $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

✓ Đặt $\Delta x = x - x_0$, ta có

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x_0 + \Delta x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

✓ Đặt $h = x - x_0$, ta có

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

✓ Như vậy, đáp án sai là $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x + x_0) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 16

Tính số gia của hàm số $y = f(x) = x^3 + x^2 + 1$ tại điểm x_0 ứng với số gia $\Delta x = 1$.

- (A) $\Delta y = 3x_0^2 + 5x_0 + 3$. (B) $\Delta y = 2x_0^3 + 3x_0^2 + 5x_0 + 2$.
(C) $\Delta y = 3x_0^2 + 5x_0 + 2$. (D) $\Delta y = 3x_0^2 - 5x_0 + 2$.

 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x_0 + 1) - f(x_0) \\ &= [(x_0 + 1)^3 + (x_0 + 1)^2 + 1] - [x_0^3 + x_0^2 + 1] \\ &= 3x_0^2 + 5x_0 + 2.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

**Câu 17**

Cho các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định **đúng**?

- a) Một hàm số liên tục tại một điểm có thể không có đạo hàm tại điểm đó.
- b) Nếu hàm số liên tục tại x_0 thì nó có đạo hàm tại điểm đó.
- c) Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.
- d) Nếu hàm số $y = f(x)$ gián đoạn tại x_0 thì nó không có đạo hàm tại điểm đó.

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

📌 Lời giải.

Theo định lý về quan hệ giữa sự tồn tại của đạo hàm và tính liên tục của hàm số, khẳng định a), c), d) đúng.

Chọn đáp án (C) □

Câu 18

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm thỏa mãn $f'(6) = 2$. Tính giá trị của biểu thức $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - f(6)}{x - 6}$.

(A) 2. (B) $\frac{1}{3}$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) 12.

📌 Lời giải.

Theo định nghĩa đạo hàm của hàm số tại $x = 6$, suy ra $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - f(6)}{x - 6} = f'(6) = 2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 19

Cho hàm số $y = \frac{5}{3}x^3 - x^2 + 4$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = 3$ có hệ số góc là

(A) 39. (B) 40. (C) 51. (D) 3.

📌 Lời giải.

Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ x_0 là $k = f'(x_0)$.

Hàm số $y = \frac{5}{3}x^3 - x^2 + 4$ có $y' = 5x^2 - 2x$.

Suy ra tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = 3$ có hệ số góc $k = y'(3) = 39$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 20

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 3$. Kết quả nào sau đây là đúng?

(A) $f'(3) = 2$. (B) $f'(2) = 3$. (C) $f'(x) = 3$. (D) $f'(x) = 2$.

 Lời giải.

Theo định nghĩa đạo hàm ta có $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Dó đó

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) = 3.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 21

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 . Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định dưới đây?

- (A) $f(x)$ gián đoạn tại x_0 .
 (B) $f(x)$ không cần xác định tại x_0 .
 (C) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.
 (D) $f(x)$ liên tục tại x_0 .

 Lời giải.

$f(x)$ gián đoạn tại x_0 sai vì theo Định lý 1 trang 150 SGK Đại Số và Giải Tích 11 cơ bản, nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó. Như vậy $f(x)$ liên tục tại x_0 đúng.

$f(x)$ không cần xác định tại x_0 sai vì theo định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm SGK Đại Số và Giải Tích 11 cơ bản, trang 148, hàm số $f(x)$ phải xác định tại x_0 .

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ sai. Chẳng hạn, xét hàm số $f(x) = x^2$. Đạo hàm của $f(x) = x^2$ tại $x_0 = 1$ tồn tại và bằng 2. Nhưng $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1 \neq 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 22

Trong các phát biểu sau, phát biểu nào sau đây là **đúng**?

- (A) Nếu hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại x_0 thì nó có đạo hàm tại điểm đó.
 (B) Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó không liên tục tại điểm đó.
 (C) Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.
 (D) Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0 thì nó có đạo hàm tại điểm đó.

 Lời giải.

“Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó” là mệnh đề **đúng**.

Điều ngược lại chưa chắc đúng tức là “Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0 thì nó có đạo hàm tại điểm đó” là mệnh đề là mệnh đề **sai**.

Ví dụ: Hàm số $y = |x|$ liên tục tại $x = 0$ nhưng không có đạo hàm tại $x = 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 23

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên tập số thực. Tìm hệ thức đúng.

- (A) $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
 (B) $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1}$.
 (C) $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x}$.
 (D) $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(1)}{x - 1}$.

 Lời giải.

Ta có $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.



Chọn đáp án (A)

**Câu 24**

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$, $x_0 \in (a; b)$. Tính $f'(x_0)$ bằng định nghĩa ta cần tính

(A) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

(B) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

(C) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}$.

(D) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{x}$.

📌 **Lời giải.**

Theo định nghĩa đạo hàm ta có $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Chọn đáp án (B)

**Câu 25**

Số gia Δy của hàm số $y = x^2 + 2x - 5$ tại điểm $x_0 = 1$ là

(A) $(\Delta x)^2 - 4\Delta x$.

(B) $(\Delta x)^2 + 4\Delta x$.

(C) $(\Delta x)^2 - 2\Delta x$.

(D) $(\Delta x)^2 + 2\Delta x - 5$.

📌 **Lời giải.**

$$\Delta y = f(1 + \Delta x) - f(1) = (1 + \Delta x)^2 + 2(1 + \Delta x) - 5 - (-2) = (\Delta x)^2 + 4\Delta x.$$

Chọn đáp án (B)

**Câu 26**

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm thỏa mãn $f'(6) = 2$. Tính giá trị của biểu thức $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - f(6)}{x - 6}$.

(A) 2.

(B) $\frac{1}{3}$.

(C) $\frac{1}{2}$.

(D) 12.

📌 **Lời giải.**

Theo định nghĩa đạo hàm của hàm số tại $x = 6$, suy ra $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - f(6)}{x - 6} = f'(6) = 2$.

Chọn đáp án (A)

**Câu 27**

Tính tỷ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số $y = f(x) = 2x^3$ theo x và Δx .

(A) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x^3 - 2(\Delta x)^3}{\Delta x}$.

(B) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2(\Delta x)^2$.

(C) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x^2 + 6x\Delta x + 2(\Delta x)^2$.

(D) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2$.

📌 **Lời giải.**

Ta có

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 2(x + \Delta x)^3 - 2x^3 = 6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3$$

Suy ra

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x^2 + 6x\Delta x + 2(\Delta x)^2.$$

Chọn đáp án (C)



Câu 28

Có bao nhiêu mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

- (1) Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x = x_0$ thì $f(x)$ liên tục tại x_0 .
- (2) Nếu hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x = x_0$ thì $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 .
- (3) Nếu hàm số $f(x)$ gián đoạn tại điểm $x = x_0$ thì $f(x)$ không có đạo hàm tại x_0 .

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

 **Lời giải.**

Hàm số liên tục tại một điểm có thể không có đạo hàm tại điểm đó. Như vậy, chỉ có hai mệnh đề đúng là mệnh đề (1) và (3).

Chọn đáp án (C) □

Câu 29

Cho các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định **đúng**?

- a) Một hàm số liên tục tại một điểm có thể không có đạo hàm tại điểm đó.
- b) Nếu hàm số liên tục tại x_0 thì nó có đạo hàm tại điểm đó.
- c) Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.
- d) Nếu hàm số $y = f(x)$ gián đoạn tại x_0 thì nó không có đạo hàm tại điểm đó.

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

 **Lời giải.**

Theo định lý về quan hệ giữa sự tồn tại của đạo hàm và tính liên tục của hàm số, khẳng định a), c), d) đúng.

Chọn đáp án (C) □

Câu 30

Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. (B) $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + f(x_0)}{x - x_0}$.
- (C) $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x - x_0}$. (D) $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

 **Lời giải.**

Chọn đáp án (A) □

Câu 31

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$. Giả sử các giới hạn (hữu hạn) sau tồn tại, giới hạn nào là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 ?

- (A) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. (B) $\lim_{\Delta x \rightarrow +\infty} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. (C) $\lim_{\Delta x \rightarrow x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. (D) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

**Lời giải.**

Theo định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm.

Chọn đáp án (A) □

Câu 32

Số gia Δy của hàm số $y = x^2 + 2x - 5$ tại điểm $x_0 = 1$ là

- (A) $(\Delta x)^2 - 4\Delta x$. (B) $(\Delta x)^2 + 4\Delta x$. (C) $(\Delta x)^2 - 2\Delta x$. (D) $(\Delta x)^2 + 2\Delta x - 5$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(1 + \Delta x) - f(1) = (1 + \Delta x)^2 + 2(1 + \Delta x) - 5 + 2 \\ &= (\Delta x)^2 + 4\Delta x.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 33

Có bao nhiêu mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

- (1) Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x = x_0$ thì $f(x)$ liên tục tại x_0 .
 (2) Nếu hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x = x_0$ thì $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 .
 (3) Nếu hàm số $f(x)$ gián đoạn tại điểm $x = x_0$ thì $f(x)$ không có đạo hàm tại x_0 .

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Hàm số liên tục tại một điểm có thể không có đạo hàm tại điểm đó. Như vậy, chỉ có hai mệnh đề đúng là mệnh đề (1) và (3).

Chọn đáp án (C) □

Câu 34

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$. Giả sử các giới hạn (hữu hạn) sau tồn tại, giới hạn nào là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 ?

- (A) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. (B) $\lim_{\Delta x \rightarrow +\infty} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. (C) $\lim_{\Delta x \rightarrow x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. (D) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Lời giải.

Theo định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm.

Chọn đáp án (A) □

Câu 35

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 2$. Kết quả đúng là

- (A) $f'(2) = 3$. (B) $f'(x) = 2$. (C) $f'(x) = 3$. (D) $f'(3) = 2$.

Lời giải.

Theo định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm ta có

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 2 = f'(3).$$

Chọn đáp án (D)



—————HẾT—————

§2. CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

A KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1. Đạo hàm của một số hàm số thường gặp

1.1. Đạo hàm của hàm số $y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

Định lý 2.1. Hàm số $y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(x^n)' = nx^{n-1}$.

1.2. Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$

Định lý 2.2. Hàm số $y = \sqrt{x}$ có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ và $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Ví dụ 1

Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$ tại các điểm $x = 4$ và $x = \frac{1}{4}$.

Lời giải.

Với mọi $x \in (0; +\infty)$, ta có $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Do đó, $y'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$ và $y'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}} = 1$. □

2. Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương

Định lý 2.3. Giả sử các hàm số $u = u(x)$, $v = v(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$. Khi đó

$$(u + v)' = u' + v';$$

$$(u - v)' = u' - v';$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v';$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \quad (v = v(x) \neq 0).$$

Chú ý:

- ✔ Quy tắc tính đạo hàm của tổng, hiệu có thể áp dụng cho tổng, hiệu của hai hay nhiều hàm số.
- ✔ Với k là một hằng số, ta có $(ku)' = k \cdot u'$.
- ✔ Đạo hàm của hàm số nghịch đảo: $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$ ($v = v(x) \neq 0$).

Ví dụ 2

Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x + 1;$

b) $y = \frac{2x + 1}{x - 1}.$

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{3}(x^3)' - (x^2)' + 2(x)' + 1' \\ &= \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - 2x + 2 \\ &= x^2 - 2x + 2. \end{aligned}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(2x+1)' \cdot (x-1) + (2x+1) \cdot (x-1)'}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2(x-1) - (2x+1)}{(x-1)^2} \\ &= -\frac{3}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 3

Một vật được phóng lên theo phương thẳng đứng lên trên từ mặt đất với vận tốc ban đầu $v_0 = 20 \text{ m/s}$. Trong vật lí, ta biết rằng khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao h so với mặt đất (tính bằng mét) của vật tại thời điểm t (giây) sau khi ném được cho bởi công thức sau: $h = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$, trong đó v_0 là vận tốc ban đầu của vật, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ là gia tốc rơi tự do. Hãy tính vận tốc của vật khi nó đạt độ cao cực đại và khi nó chạm đất.

Lời giải.

Phương trình chuyển động của vật là $h = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$.

Vận tốc của vật tại thời điểm t được cho bởi $v(t) = h' = v_0 - gt$.

Vận tốc của vật cao cực đại tại thời điểm $t_1 = \frac{v_0}{g}$, tại đó vận tốc bằng $v(t_1) = v_0 - gt_1 = 0$.

Vật chạm đất tại thời điểm t_2 mà $h(t_2) = 0$ nên ta có $v_0 t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2 = 0 \Leftrightarrow t_2 = 0$ (loại) và $t_2 = \frac{2v_0}{g}$.

Khi chạm đất, vận tốc của vật là $v(t_2) = v_0 - gt_2 = -v_0 = -20 \text{ (m/s)}$.

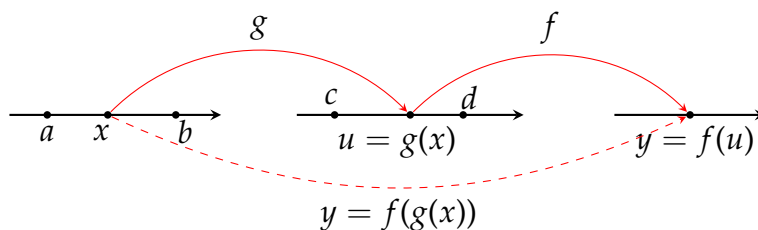
Dấu âm của $v(t_2)$ thể hiện độ cao của vật giảm với 20 m/s (tức là chiều chuyển động của vật ngược với chiều dương đã chọn). □

3. Đạo hàm của hàm hợp

3.1. Khái niệm hàm số hợp

Diện tích của một chiếc đĩa kim loại hình tròn bán kính r được cho bởi $S = \pi r^2$. Bán kính r thay đổi theo nhiệt độ t của chiếc đĩa, tức là $r = r(t)$. Khi đó, diện tích của chiếc đĩa phụ thuộc nhiệt độ $S = S(t) = \pi(r(t))^2$. Ta nói $S(t)$ là hàm số hợp của hàm $S = \pi r^2$ với $r = r(t)$.

Định lý 2.4. Giả sử $u = g(x)$ là hàm số xác định trên khoảng $(a; b)$, có tập giá trị chứa trong khoảng $(c; d)$ và $y = f(u)$ là hàm số xác định trên khoảng $(c; d)$. Hàm số $y = f(g(x))$ được gọi là hàm số hợp của hàm số $y = f(u)$ với $u = g(x)$.



Hình 9.8

Ví dụ 4

Biểu diễn hàm số $y = (2x + 1)^{10}$ dưới dạng hàm số hợp.

Lời giải.

Hàm số $y = (2x + 1)^{10}$ là hàm hợp của hàm số $y = u^{10}$ với $u = 2x + 1$. □

3.2. Đạo hàm của hàm số hợp

Nếu hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm u'_x tại x và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm y'_u tại u thì hàm số hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm y'_x tại x là

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Ví dụ 5

Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x^2 + 1}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \frac{(x^2 + 1)'}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$. □

4. Đạo hàm của hàm số lượng giác**4.1. Đạo hàm của hàm số $y = \sin x$** **Định lý 2.5.**

- Hàm số $y = \sin x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(\sin x)' = \cos x$.
- Đối với hàm số hợp $y = \sin u$, với $u = u(x)$, ta có $(\sin u)' = u' \cdot \cos u$.

Ví dụ 6

Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{8}\right)$.

Lời giải.

Ta có

$$y' = \left(2x + \frac{\pi}{8}\right)' \cdot \cos\left(2x + \frac{\pi}{8}\right) = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{8}\right).$$
□

4.2. Đạo hàm của hàm số $y = \cos x$ **Định lý 2.6.**

- Hàm số $y = \cos x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(\cos x)' = -\sin x$.
- Đối với hàm số hợp $y = \cos u$, với $u = u(x)$, ta có $(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$.

Ví dụ 7

Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Lời giải.

Ta có

$$y' = -\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)' \cdot \sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = -4 \sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right).$$

□

4.3. Đạo hàm của hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$

Định lý 2.7.

- Hàm số $y = \tan x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) và $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.
- Hàm số $y = \cot x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) và $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
- Đối với hàm số hợp $y = \tan u$ và $y = \cot u$ với $u = u(x)$, ta có $(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$; $(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$ (giả thiết $\tan u$ và $\cot u$ có nghĩa).

Ví dụ 8

Tính đạo hàm của hàm số $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải.

Ta có

$$y' = \frac{\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)'}{\cos^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{2}{\cos^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)}.$$

□

5. Đạo hàm của hàm số mũ và lôgarit

5.1. Giới hạn liên quan đến hàm số mũ và hàm số lôgarit

! Ta có các giới hạn sau:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

5.2. Đạo hàm của hàm số mũ

Định lý 2.8.

- Hàm số $y = e^x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(e^x)' = e^x$.
Đối với hàm số hợp $y = e^u$, với $u = u(x)$, ta có $(e^u)' = u' \cdot e^u$.
- Hàm số $y = a^x$ ($0 < a \neq 1$) có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$.
Đối với hàm số hợp $y = a^u$, với $u = u(x)$, ta có $(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$.

Ví dụ 9

Tính đạo hàm của hàm số $y = 2^{x^2-x}$.

Lời giải.

Ta có

$$y' = (x^2 - x)' \cdot 2^{x^2-x} \cdot \ln 2 = (2x - 1) \ln 2 \cdot 2^{x^2-x}.$$

□

5.3. Đạo hàm của hàm số logarit

Định lý 2.9.

- Hàm số $\ln x$ có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ và $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
Đối với hàm số hợp $y = \ln u$, với $u = u(x)$, ta có $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.
- Hàm số $\log_a x$ có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ và $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$.
Đối với hàm số hợp $y = \log_a u$, với $u = u(x)$, ta có $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$.

Ví dụ 10

Tính đạo hàm của hàm số $y = \ln(x^2 + 1)$.

Lời giải.

Ta có

$$y' = \frac{(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)} = \frac{2x}{(x^2 + 1)}.$$

□

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 Đạo hàm một số hàm thường gặp

☑ $(x^n)' = nx^{n-1}$

☑ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Ví dụ 1

Tính đạo hàm của hàm số $y = x^5$ tại điểm $x = 2$ và $x = -\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $(x^5)' = 5x^4$. Từ đó, $y'(2) = 5 \cdot 2^4 = 80$ và $y'(-\frac{1}{2}) = 5 \cdot (-\frac{1}{2})^4 = \frac{5}{16}$.

□

Ví dụ 2

Tính đạo hàm của hàm số $y = x^{10}$ tại điểm $x = -1$ và $x = \sqrt[3]{2}$.

Lời giải.

Ta có $(x^{10})' = 10x^9$. Từ đó, $y'(-1) = 10 \cdot (-1)^9 = -10$ và $y'(\sqrt[3]{2}) = 10 \cdot (\sqrt[3]{2})^9 = 80$.

□



Ví dụ 3

Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$ tại điểm $x = 1$ và $x = \frac{1}{4}$.

Lời giải.

Ta có $y' = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0$. Từ đó, $y'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$ và $y'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 1$. □

Ví dụ 4

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ tại điểm có hoành độ bằng 4.

Lời giải.

Với $x = 4$ thì $y = \sqrt{4} = 2$.

Ta có $y' = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0$. Từ đó, $y'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ tại điểm có hoành độ bằng 4 là

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4) \text{ hay } y = \frac{1}{4}x + 1.$$

□

Ví dụ 5

Tìm đạo hàm của hàm số $y = \sqrt[3]{x}$ tại điểm $x = 8$.

Lời giải.

Ta có $y' = (\sqrt[3]{x})' = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

Từ đó, $y'(8) = \frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{12}$. □

Ví dụ 6

Tìm đạo hàm của các hàm số

a) $y = \sqrt[4]{x}$ tại $x = 1$;

b) $y = \frac{1}{x}$ tại $x = -\frac{1}{4}$.

Lời giải.

a) $y = \sqrt[4]{x}$ tại $x = 1$.

Ta có $y' = (\sqrt[4]{x})' = (x^{\frac{1}{4}})' = \frac{1}{4} \cdot x^{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$. Từ đó, $y'(1) = \frac{1}{4\sqrt[4]{1^3}} = \frac{1}{4}$.

b) $y = \frac{1}{x}$ tại $x = -\frac{1}{4}$.

Ta có $y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$. Từ đó, $y'\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{\left(-\frac{1}{4}\right)^2} = -16$.

□

**Dạng 2 Đạo hàm của hàm số lượng giác**

Ta có công thức tính đạo hàm của các hàm số lượng giác như sau:

a) $(\sin x)' = \cos x;$

b) $(\cos x)' = -\sin x;$

c) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right);$

d) $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \left(x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \right).$

Ví dụ 1

Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos x$ tại $x = \frac{\pi}{6}$.

👉 **Lời giải.**

Ta có $y' = (\cos x)' = -\sin x$. Vậy $y' \left(\frac{\pi}{6} \right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$. □

Ví dụ 2

Tính đạo hàm của hàm số $y = \tan x$ tại $x = \frac{3\pi}{4}$.

👉 **Lời giải.**

Ta có $y' = (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right)$. Vậy $y' \left(\frac{3\pi}{4} \right) = \frac{1}{\cos^2 \left(\frac{3\pi}{4} \right)} = 2$. □

Dạng 3 Đạo hàm của hàm số mũ và hàm số lôgarit

Ta có công thức đạo hàm của các hàm số mũ và hàm số lôgarit sau:

a) $(e^x)' = e^x;$

b) $(\ln x)' = \frac{1}{x} \ (x > 0);$

c) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a \ (a > 0, a \neq 1);$

d) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a} \ (x > 0, a > 0, a \neq 1).$

Ví dụ 1

Tìm đạo hàm của các hàm số

a) $y = e^x$ tại $x = 2 \ln 3;$

b) $y = \log_5 x$ tại $x = 2.$

👉 **Lời giải.**

Tìm đạo hàm của các hàm số

a) $y = e^x$ tại $x = 2 \ln 3.$

Ta có $y' = (e^x)' = e^x$. Từ đó, $y'(2 \ln 3) = e^{2 \ln 3} = (e^{\ln 3})^2 = 3^2 = 9$.

b) $y = \log_5 x$ tại $x = 2.$

Ta có $y' = (\log_5 x)' = \frac{1}{x \cdot \ln 5} \ (x > 0)$. Từ đó $y'(2) = \frac{1}{2 \cdot \ln 5}$. □

Ví dụ 2

Tìm đạo hàm của các hàm số

a) $y = 9^x$ tại $x = 1$;

b) $y = \ln x$ tại $x = \frac{1}{3}$.

Lời giải.

Tìm đạo hàm của các hàm số

a) $y = 9^x$ tại $x = 1$.

Ta có $y' = (9^x)' = 9^x \cdot \ln 9$. Từ đó $y'(1) = 9^1 \cdot \ln 9 = 18 \ln 3$.

b) $y = \ln x$ tại $x = \frac{1}{3}$.

Ta có $y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$ ($x > 0$). Từ đó $y'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$.

Dạng 4 Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm số

Cho hai hàm số $u(x), v(x)$ có đạo hàm tại điểm x thuộc tập xác định. Ta có

a) $(u + v)' = u' + v'$;

b) $(u - v)' = u' - v'$;

c) $(u \cdot v)' = u'v + v'u$ (1);

d) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ (với $v = v(x) \neq 0$) (2).

Chú ý

a) Với $u = C$ (C là hằng số), công thức (1) trở thành $(C \cdot v)' = C \cdot v'$.

b) Với $u = 1$, công thức (2) trở thành $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{1}{v^2}$ (với $v = v(x) \neq 0$).

Ví dụ 1

Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 3x^2 - 4x + 2$;

b) $y = x \sin x$;

c) $y = \frac{3x + 2}{2x - 1}$.

Lời giải.

a) $y = 3x^2 - 4x + 2$.

$$y' = (3x^2 - 4x + 2)' = (3x^2)' - (4x)' + (2)' = 3(x^2)' - 4(x)' + 0 = 3 \cdot 2x - 4 \cdot 1 = 6x - 4.$$

b) $y = x \sin x$.

$$y' = (x \sin x)' = (x)' \sin x + x (\sin x)' = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x = \sin x + x \cos x.$$

c) $y = \frac{3x + 2}{2x - 1}$.

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{3x + 2}{2x - 1}\right)' = \frac{(3x + 2)'(2x - 1) - (3x + 2)(2x - 1)'}{(2x - 1)^2} \\ &= \frac{3 \cdot (2x - 1) - (3x + 2) \cdot 2}{(2x - 1)^2} = \frac{6x - 3 - 6x - 4}{(2x - 1)^2} = \frac{-7}{(2x - 1)^2}. \end{aligned}$$



Ví dụ 2

Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x^2 \cdot 3^x$;

b) $y = \frac{\sqrt{x}}{\cos x}$.

🔑 **Lời giải.**

a) $y = x^2 \cdot 3^x$.

$$y' = (x^2 \cdot 3^x)' = (x^2)' \cdot 3^x + x^2 \cdot (3^x)' = 2x \cdot 3^x + x^2 \cdot 3^x \cdot \ln 3 = x \cdot 3^x (2 + x \ln 3).$$

b) $y = \frac{\sqrt{x}}{\cos x}$.

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{\sqrt{x}}{\cos x} \right)' = \frac{(\sqrt{x})' \cdot \cos x - \sqrt{x} \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \cos x - \sqrt{x} \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos x + 2x \sin x}{2\sqrt{x} \cos^2 x}. \end{aligned}$$



Ví dụ 3

Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x \cdot \log_2 x$;

b) $y = x^3 \cdot e^x$.

🔑 **Lời giải.**

a) $y = x \cdot \log_2 x$.

$$y' = (x \cdot \log_2 x)' = x' \cdot \log_2 x + x \cdot (\log_2 x)' = 1 \cdot \log_2 x + x \cdot \frac{1}{x \ln 2} = \log_2 x + \frac{1}{\ln 2}.$$

b) $y = x^3 \cdot e^x$.

$$y' = (x^3 \cdot e^x)' = (x^3)' \cdot e^x + x^3 \cdot (e^x)' = 3x^2 \cdot e^x + x^3 \cdot e^x = x^2 e^x (3 + x).$$



Dạng 5

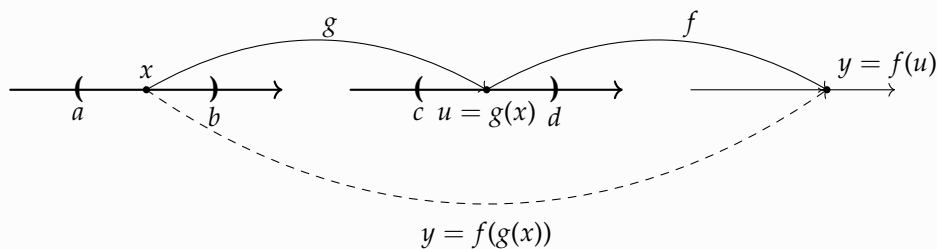
Đạo hàm của hàm hợp

Cho $u = g(x)$ là hàm số của x xác định trên khoảng $(a; b)$ và lấy giá trị trên khoảng $(c; d)$; $y = f(u)$ là hàm số của u xác định trên khoảng $(c; d)$ và lấy giá trị trên khoảng $\mathbb{R}$. Ta lập hàm số xác định trên $(a; b)$ và lấy giá trị trên $\mathbb{R}$ như sau:

$$x \mapsto f(g(x))$$

Hàm số $y = f(g(x))$ được gọi là hàm hợp của hàm số $y = f(u)$ với $u = g(x)$.





Ví dụ 1

- Hàm số $y = (2x + 1)^3$ là hàm hợp của các hàm số nào?
- Hàm số $y = \cos(x^2 + 1)$ là hàm hợp của các hàm số nào?

Lời giải.

- Hàm số $y = (2x + 1)^3$ là hàm hợp của hàm số $y = u^3$ với $u = 2x + 1$.
- Hàm số $y = \cos(x^2 + 1)$ là hàm hợp của hàm số $y = \cos u$ với $u = x^2 + 1$.

Cho hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm tại x là u'_x và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm tại u là y'_u thì hàm hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm tại x là $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Ví dụ 2

Tính đạo hàm của các hàm số sau:

- $y = (3x^2 + x)^3$;
- $y = \sin 2x$;
- $y = e^{x^2+1}$.

Lời giải.

- $y = (3x^2 + x)^3$.
Đặt $u = 3x^2 + x$ thì $y = u^3$. Ta có $u'_x = 6x + 1$ và $y'_u = 3u^2$.
Suy ra $y'_x = y'_u \cdot u'_x = 3u^2 \cdot (6x + 1) = 3(3x^2 + x)^2(6x + 1)$.
Vậy $y' = 3(3x^2 + x)^2(6x + 1)$.
- $y = \sin 2x$.
Đặt $u = 2x$ thì $y = \sin u$. Ta có $u'_x = 2$ và $y'_u = \cos u$.
Suy ra $y'_x = y'_u \cdot u'_x = \cos u \cdot 2 = \cos 2x \cdot 2 = 2 \cos 2x$.
Vậy $y' = 2 \cos 2x$.
- $y = e^{x^2+1}$.
Đặt $u = x^2 + 1$ thì $y = e^u$. Ta có $u'_x = 2x$ và $y'_u = e^u$.
Suy ra $y'_x = y'_u \cdot u'_x = e^u \cdot 2x = e^{x^2+1} \cdot 2x = 2xe^{x^2+1}$.
Vậy $y' = 2xe^{x^2+1}$.

Ví dụ 3

Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (2x^3 + 3)^2$;

b) $y = \cos 3x$;

c) $y = \log_2 (x^2 + 2)$.

👉 Lời giải.

a) $y = (2x^3 + 3)^2$.

Đặt $u = 2x^3 + 3$ thì $y = u^2$. Ta có $u'_x = 6x$ và $y'_u = 2u$.

Suy ra $y'_x = y'_u \cdot u'_x = 2u \cdot 6x = 2(2x^3 + 3) \cdot 6x = 12x(2x^3 + 3)$.

Vậy $y' = 12x(2x^3 + 3)$.

b) $y = \cos 3x$.

Đặt $u = 3x$ thì $y = \cos u$. Ta có $u'_x = 3$ và $y'_u = -\sin u$.

Suy ra $y'_x = y'_u \cdot u'_x = (-\sin u) \cdot 3 = (-\sin 3x) \cdot 3 = -3 \sin 3x$.

Vậy $y' = -3 \sin 3x$.

c) $y = \log_2 (x^2 + 2)$.

Đặt $u = x^2 + 2$ thì $y = \log_2 u$. Ta có $u'_x = 2x$ và $y'_u = \frac{1}{u \ln 2}$.

Suy ra $y'_x = y'_u \cdot u'_x = \frac{1}{u \ln 2} \cdot 2x = \frac{1}{(x^2 + 2) \ln 2} \cdot 2x = \frac{2x}{(x^2 + 2) \ln 2}$.

Vậy $y' = \frac{2x}{(x^2 + 2) \ln 2}$.

□

C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1

Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$;

b) $y = x^2 - 4\sqrt{x} + 3$.

👉 Lời giải.

a) Ta có

$$y' = 3x^2 - 6x + 2.$$

b) Ta có

$$y' = 2x - 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2x - \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

□

Bài 2

Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = \frac{2x - 1}{x + 2}$;

b) $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

👉 Lời giải.



a) Ta có

$$y' = \frac{2(x+2) - (2x-1)}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2}.$$

b) Ta có

$$y' = \frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}.$$

□

Bài 3

Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = x \sin^2 x;$

c) $y = \sin 3x - 3 \sin x;$

b) $y = \cos^2 x + \sin 2x;$

d) $y = \tan x + \cot x.$

👉 **Lời giải.**

a) Ta có

$$y' = \sin^2 x + x \cdot 2 \sin x \cdot \cos x.$$

b) Ta có

$$y' = -2 \cos x \cdot \sin x + 2 \cos 2x = -\sin 2x + 2 \cos 2x.$$

c) Ta có

$$y' = 3 \cos 3x - 3 \cos x.$$

d) Ta có

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} = -\frac{\cos 2x}{\frac{1}{4} \sin^2 2x} = -\frac{4 \cos 2x}{\sin^2 2x}.$$

□

Bài 4

Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = 2^{3x-x^2};$

b) $y = \log_3 x.$

👉 **Lời giải.**

a) Ta có

$$y' = (3 - 2x) \ln 2 \cdot 2^{3x-x^2}.$$

b) Ta có

$$y' = \frac{1}{x \ln 3}.$$

□

Bài 5

Cho hàm số $f(x) = 2 \sin^2 \left(3x - \frac{\pi}{4} \right)$. Chứng minh rằng $|f'(x)| \leq 6$ với mọi x .

Lời giải.

Ta có

$$f'(x) = 4 \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) \cdot \cos \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) \cdot \left(3x - \frac{\pi}{4} \right)' = 6 \sin 2 \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) = 6 \sin \left(6x - \frac{\pi}{2} \right) = -6 \cos 6x.$$

Do $|\cos 6x| \leq 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ suy ra $|-6 \cos 6x| \leq 6$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Hay $|f'(x)| \leq 6$ với mọi x (điều phải chứng minh). □

Bài 6

Một vật chuyển động rơi tự do có phương trình $h(t) = 100 - 4,9t^2$, ở đó độ cao h so với mặt đất tính bằng mét và thời gian t tính bằng giây. Tính vận tốc của vật

a) Tại thời điểm $t = 5$ giây;

b) Khi vật chạm đất.

Lời giải.

Một vật chuyển động rơi tự do có phương trình $h(t) = 100 - 4,9t^2$ suy ra vận tốc tức thời của vật tại thời điểm t là $v(t) = h'(t) = -9,8t$.

Khi vật chạm đất thì $h(t) = 0$ suy ra $100 - 4,9t^2 = 0 \Leftrightarrow t = \pm \frac{10\sqrt{10}}{7}$.

Do $t > 0$ suy ra $t = \frac{10\sqrt{10}}{7}$.

a) Tại thời điểm $t = 5$ giây thì vận tốc của vật là $v(5) = -9,8 \cdot 5 = -49$ (m/s).

b) Khi vật chạm đất tức là tại thời điểm $t = \frac{10\sqrt{10}}{7}$ có vận tốc là

$$v \left(\frac{10\sqrt{10}}{7} \right) = -9,8 \cdot \frac{10\sqrt{10}}{7} = -14\sqrt{10} \text{ (m/s)}.$$

□

Bài 7

Chuyển động của một hạt trên một dây rung được cho bởi $s(t) = 12 + 0,5 \sin(4\pi t)$, trong đó s được tính bằng centimét và t tính bằng giây. Tính vận tốc của hạt sau t giây. Vận tốc cực đại của hạt là bao nhiêu?

Lời giải.

a) Chuyển động của một hạt trên một dây rung được cho bởi $s(t) = 12 + 0,5 \sin(4\pi t)$ suy ra vận tốc tức thời của hạt tại thời điểm t là

$$v(t) = s'(t) = 2\pi \cos(4\pi t).$$

b) Do $\cos(4\pi t) \leq 1$ với mọi $t \in \mathbb{R}$ suy ra $2\pi \cos(4\pi t) \leq 2\pi$ với mọi $t \in \mathbb{R}$.
Vậy vận tốc cực đại của hạt là 2π . □

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN – ĐỀ SỐ 1

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

1	(A) (B) (C) (D)	8	(A) (B) (C) (D)	15	(A) (B) (C) (D)	22	(A) (B) (C) (D)	29	(A) (B) (C) (D)
2	(A) (B) (C) (D)	9	(A) (B) (C) (D)	16	(A) (B) (C) (D)	23	(A) (B) (C) (D)	30	(A) (B) (C) (D)
3	(A) (B) (C) (D)	10	(A) (B) (C) (D)	17	(A) (B) (C) (D)	24	(A) (B) (C) (D)	31	(A) (B) (C) (D)
4	(A) (B) (C) (D)	11	(A) (B) (C) (D)	18	(A) (B) (C) (D)	25	(A) (B) (C) (D)	32	(A) (B) (C) (D)
5	(A) (B) (C) (D)	12	(A) (B) (C) (D)	19	(A) (B) (C) (D)	26	(A) (B) (C) (D)	33	(A) (B) (C) (D)
6	(A) (B) (C) (D)	13	(A) (B) (C) (D)	20	(A) (B) (C) (D)	27	(A) (B) (C) (D)	34	(A) (B) (C) (D)
7	(A) (B) (C) (D)	14	(A) (B) (C) (D)	21	(A) (B) (C) (D)	28	(A) (B) (C) (D)	35	(A) (B) (C) (D)

Câu 1

Đạo hàm của hàm số $y = \sin(x^3)$ là

- (A) $y' = 3x^2 \cos(x^2)$. (B) $y' = 3 \cos(x^2)$. (C) $y' = 3x^2 \sin(x^3)$. (D) $y' = 3x^2 \cos(x^3)$.

Lời giải.

Ta có $y' = (\sin(x^3))' = (x^3)' \cos(x^3) = 3x^2 \cos(x^3)$.

Chọn đáp án (D)

Câu 2

Cho $u = u(x), v = v(x)$ là các hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $(uv)' = u'v + uv'$. (B) $(uv)' = u'v'$.
(C) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'}{v'}$. (D) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v + uv'}{v^2}$.

Lời giải.

Ta có $(uv)' = u'v + uv'$; $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Chọn đáp án (A)

Câu 3

Tính đạo hàm của hàm số $y = (\sin x + \cos x)^3$.

- (A) $3(\sin x + \cos x)^2 (\cos x - \sin x)$. (B) $3(\sin x - \cos x)^2 (\cos x - \sin x)$.
(C) $(\sin x + \cos x)^2 (\cos x - \sin x)$. (D) $3(\sin x + \cos x)^2 (\cos x + \sin x)$.

Lời giải.

Áp dụng $(u^a)'$, với $u = \sin x + \cos x$ $y' = 3(\sin x + \cos x)^2 \cdot (\sin x + \cos x)' = 3(\sin x + \cos x)^2 (\cos x - \sin x)$.

Chọn đáp án (A)

Câu 4

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào *sai*?

Ⓐ $(\sin x)' = -\cos x.$

Ⓑ $(\cos x)' = -\sin x.$

Ⓒ $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$

Ⓓ $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$

👉 **Lời giải.**

Ta có đạo hàm các hàm lượng giác thường gặp

$$(\sin x)' = \cos x; (\cos x)' = -\sin x; (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Chọn đáp án Ⓐ

**Câu 5**

Hàm số $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$ có đạo hàm bằng

Ⓐ $y' = 2 \sin 2x.$

Ⓑ $y' = -2 \cos 2x.$

Ⓒ $y' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right).$

Ⓓ $y' = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right).$

👉 **Lời giải.**

$$y' = \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)' \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = -2 \cos 2x.$$

Chọn đáp án Ⓑ

**Câu 6**

Cho các hàm số $u = u(x), v = v(x)$ có đạo hàm tại mọi x thuộc tập xác định. Khẳng định nào sau đây là *sai*?

Ⓐ $(u + v)' = u' + v'.$ Ⓑ $(uv)' = u'v + uv'.$ Ⓒ $(u^n)' = nu^{n-1}.$ Ⓓ $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$

👉 **Lời giải.**

Khẳng định $(u^n)' = nu^{n-1}$ là sai vì theo công thức tính đạo hàm của hàm số hợp $(u^n)' = nu^{n-1}u'.$

Chọn đáp án Ⓒ

**Câu 7**

Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{\sin 3x}$ là:

Ⓐ $y' = \frac{3 \cos 3x}{2\sqrt{\sin 2x}}.$

Ⓑ $y' = \frac{\cos 3x}{2\sqrt{\sin 2x}}.$

Ⓒ $y' = \frac{-\cos 3x}{2\sqrt{\sin 2x}}.$

Ⓓ $y' = \frac{-3 \cos 3x}{2\sqrt{\sin 2x}}.$

👉 **Lời giải.**

$$y' = \frac{(\sin 3x)'}{2\sqrt{\sin 3x}} = \frac{3 \cos 3x}{2\sqrt{\sin 2x}}.$$

Chọn đáp án Ⓐ



Câu 8

Cho hàm số $f(x) = x^4 - 3x^2 + 5$. Tính $f'(2)$.

- (A) 4. (B) 5. (C) 20. (D) 0.

 **Lời giải.**

Ta có $f'(x) = 4x^3 - 6x \Rightarrow f'(2) = 20$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 9

Hàm số $y = \tan x + \frac{1}{x} - x^2 + 2$ có đạo hàm là

- (A) $y' = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{x^2} - 2x$. (B) $y' = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{x^2} - 2x$.
(C) $y' = -\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{x^2} - 2x$. (D) $y' = -\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{x^2} - 2x$.

 **Lời giải.**

Ta có $y' = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{x^2} - 2x$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 10

Hàm số $y = \tan x + \frac{1}{x} - x^2 + 2$ có đạo hàm là

- (A) $y' = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{x^2} - 2x$. (B) $y' = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{x^2} - 2x$.
(C) $y' = -\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{x^2} - 2x$. (D) $y' = -\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{x^2} - 2x$.

 **Lời giải.**

Ta có $y' = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{x^2} - 2x$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 11

Hàm số nào dưới đây có đạo hàm $y' = 3x^2 - 6x$?

- (A) $y = x^3 - 3x^2 + x$. (B) $y = x^3 + 3x^2 - 2$.
(C) $y = x^3 - 3x^2 + 2x$. (D) $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

 **Lời giải.**

$$y = x^3 - 3x^2 + 2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 12

Hàm số $y = \tan x - \cot x$ có đạo hàm là

- (A) $y' = \frac{1}{\cos^2 2x}$. (B) $y' = \frac{4}{\sin^2 2x}$. (C) $y' = \frac{4}{\cos^2 2x}$. (D) $y' = \frac{1}{\sin^2 2x}$.



Lời giải.

$$\text{Ta có } y' = \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \frac{1}{\frac{1}{4} \sin^2 2x} = \frac{4}{\sin^2 2x}.$$

Chọn đáp án (B)



Câu 13

Hàm số nào dưới đây có đạo hàm $y' = 3x^2 - 6x$?

(A) $y = x^3 - 3x^2 + x.$

(B) $y = x^3 + 3x^2 - 2.$

(C) $y = x^3 - 3x^2 + 2x.$

(D) $y = x^3 - 3x^2 + 2.$

Lời giải.

$$y = x^3 - 3x^2 + 2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x.$$

Chọn đáp án (D)



Câu 14

Đạo hàm của hàm số $f(x) = 5x^3 - x^2 - 1$ trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ là

(A) 0.

(B) $15x^2 - 2x - 1.$

(C) $15x^2 + 2x.$

(D) $15x^2 - 2x.$

Lời giải.

$$f'(x) = 5 \cdot 3x^2 - 2x = 15x^2 - 2x.$$

Chọn đáp án (D)



Câu 15

Cho hàm số $y = (2x^2 + 1)^3$. Tìm tập hợp tất cả nghiệm của bất phương trình $y' \geq 0$.

(A) $\mathbb{R}.$

(B) $(-\infty; 0].$

(C) $\emptyset.$

(D) $[0; +\infty).$

Lời giải.

Ta có $y' = 3(2x^2 + 1)^2 \cdot (2x^2 + 1)' = 12x(2x^2 + 1)^2$. Ta có

$$y' \geq 0 \Leftrightarrow 12x(2x^2 + 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$$

Chọn đáp án (D)



Câu 16

Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin 2x$.

(A) $y' = 2 \cos 2x.$

(B) $y' = \cos 2x.$

(C) $y' = -2 \cos 2x.$

(D) $y' = -\cos 2x.$

Lời giải.

Ta có $y' = (2x)' \cdot \cos 2x = 2 \cos 2x$.

Chọn đáp án (A)



Câu 17

Cho hàm số $f(x) = \sin 2x$. Tính $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}.$

(B) $\sqrt{3}.$

(C) $\frac{1}{2}.$

(D) 1.



Lời giải.

Ta có: $f'(x) = 2 \cos 2x \Rightarrow f'(\frac{\pi}{6}) = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 1$.

Chọn đáp án (D)

Câu 18

Tính $f'(\frac{\pi}{2})$ biết $f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$.

- (A) -2. (B) $\frac{1}{2}$. (C) 0. (D) $-\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{1 + \sin x} \Rightarrow f'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{1 + \sin \frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án (D)

Câu 19

Hàm số $y = \tan^2 \frac{x}{2}$ có đạo hàm là

- (A) $y' = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos^3 \frac{x}{2}}$. (B) $y' = \frac{2 \sin \frac{x}{2}}{\cos^3 \frac{x}{2}}$. (C) $y' = \frac{\sin \frac{x}{2}}{2 \cos^3 \frac{x}{2}}$. (D) $y' = \tan^3(\frac{x}{2})$.

Lời giải.

$y' = (\tan \frac{x}{2})' \cdot 2 \tan \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} 2 \tan \frac{x}{2} = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos^3 \frac{x}{2}}$.

Chọn đáp án (A)

Câu 20

Cho hàm số $f(x) = \sqrt{3+x}$. Tính $f(1) + 4f'(1)$.

- (A) 1. (B) 3. (C) $\frac{1}{4}$. (D) 0.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \sqrt{3+x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3+x}}$.

Nên $f(1) + 4f'(1) = \sqrt{3+1} + \frac{4}{2\sqrt{3+1}} = 3$.

Chọn đáp án (B)

Câu 21

Tìm đạo hàm y' của hàm số $y = \sin x + \cos x$.

- (A) $y' = 2 \cos x$. (B) $y' = 2 \sin x$. (C) $y' = \sin x - \cos x$. (D) $y' = \cos x - \sin x$.

Lời giải.

Ta có $y' = (\sin x + \cos x)' = \cos x - \sin x$.

Chọn đáp án (D)

**Câu 22**

Cho hàm số $f(x) = \sin 2x$. Tính $f'(x)$.

(A) $f'(x) = 2 \sin 2x$.

(B) $f'(x) = 2 \cos 2x$.

(C) $f'(x) = \cos 2x$.

(D) $f'(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x$.

👉 **Lời giải.**

Ta có $f'(x) = 2 \cos 2x$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 23

Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ tại điểm $x = \frac{1}{2}$.

(A) $f'(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$.

(B) $f'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

(C) $f'(\frac{1}{2}) = -4$.

(D) $f'(\frac{1}{2}) = 4$.

👉 **Lời giải.**

Ta có $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, thay $x = \frac{1}{2}$ ta được $f'(\frac{1}{2}) = -4$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 24

Tìm đạo hàm của hàm số $y = x^2 + x + 1$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

(A) $y' = 2 + x$.

(B) $y' = 2x + 1$.

(C) $y' = 3x$.

(D) $y' = x^2 + x$.

👉 **Lời giải.**

Ta có $y' = (x^2 + x + 1)' = 2x + 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 25

Đạo hàm của hàm số $y = x^4 - 3x^2 - 5x + 2017$ là

(A) $y' = x^3 - 6x - 5$.

(B) $y' = 4x^3 - 6x - 5$.

(C) $y' = 4x^3 - 6x + 2017$.

(D) $y' = 4x^3 + 6x - 5$.

👉 **Lời giải.**

Áp dụng công thức nguyên hàm cơ bản ta có được kết quả.

Chọn đáp án (B) □

Câu 26

Hàm số $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$ có đạo hàm bằng

(A) $y' = 2 \sin 2x$.

(B) $y' = -2 \sin 2x$.

(C) $y' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$.

(D) $y' = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$.

👉 **Lời giải.**

Ta có $y = \cos 2x$ nên $y' = -2 \sin 2x$.

Chọn đáp án (B) ☐

Câu 27

Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin 2x$.

- (A) $y' = 2 \cos 2x$. (B) $y' = \cos 2x$. (C) $y' = -2 \cos 2x$. (D) $y' = -\cos 2x$.

 **Lời giải.**

Ta có $y' = (2x)' \cdot \cos 2x = 2 \cos 2x$.

Chọn đáp án (A) ☐

Câu 28

Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{2x}{x-1}$.

- (A) $y' = \frac{-1}{(x-1)^2}$. (B) $y' = \frac{2}{(x-1)^2}$. (C) $y' = \frac{3}{(x-1)^2}$. (D) $y' = \frac{-2}{(x-1)^2}$.

 **Lời giải.**

Ta có: $y' = \frac{-2}{(x-1)^2}$.

Chọn đáp án (D) ☐

Câu 29

Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{4x^2 + 3x + 1}$ là

- (A) $y' = 12x + 3$. (B) $y' = \frac{1}{2\sqrt{4x^2 + 3x + 1}}$.
(C) $y' = \frac{8x + 3}{2\sqrt{4x^2 + 3x + 1}}$. (D) $y' = \frac{8x + 3}{\sqrt{4x^2 + 3x + 1}}$.

 **Lời giải.**

Ta có $y' = \frac{(4x^2 + 3x + 1)'}{2\sqrt{4x^2 + 3x + 1}} = \frac{8x + 3}{2\sqrt{4x^2 + 3x + 1}}$.

Chọn đáp án (C) ☐

Câu 30

Đạo hàm của hàm số $y = (x^3 - 2x^2)^2$ bằng

- (A) $6x^5 - 20x^4 - 16x^3$. (B) $6x^5 - 20x^4 + 4x^3$.
(C) $6x^5 + 16x^3$. (D) $6x^5 - 20x^4 + 16x^3$.

 **Lời giải.**

Ta có $y' = 2(x^3 - 2x^2)(3x^2 - 4x) = 6x^5 - 20x^4 + 16x^3$.

Chọn đáp án (D) ☐

Câu 31

Cho $u = u(x)$, $v = v(x)$, $v(x) \neq 0$. Hãy chọn khẳng định **sai**?

- (A) $(u + v)' = u' + v'$. (B) $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v}$. (C) $(uv)' = u'v + uv'$. (D) $(ku)' = ku'$.

**Lời giải.**

Ta có $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$.

Chọn đáp án (B)

**Câu 32**

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai** (giả thiết lấy đạo hàm tại mỗi điểm thuộc tập xác định của hàm số)?

- (A) $(\sin x)' = \cos x$. (B) $(\cos x)' = \sin x$. (C) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$. (D) $(\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$.

Lời giải.

$(\cos x)' = -\sin x$.

Chọn đáp án (B)

**Câu 33**

Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin^2 2x$.

- (A) $y' = \cos^2 2x$. (B) $y' = 2 \sin 4x$. (C) $y' = 2 \cos^2 2x$. (D) $y' = 2 \sin 2x$.

Lời giải.

Ta có $y' = 2 \cdot \sin 2x \cdot (\sin 2x)' = 2 \cdot \sin 2x \cdot (2x)' \cos 2x = 2 \cdot 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x = 2 \sin 4x$.

Chọn đáp án (B)

**Câu 34**

Cho hai hàm số $y_1 = \sin^4 x + \cos^4 x$ và $y_2 = \frac{1}{4} \cos 4x$. Chứng minh $y_1' = y_2'$.

Lời giải.

$$y_1 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$$

$$\Rightarrow y_1' = -\frac{1}{2} \cdot 2 \sin 2x \cdot 2 \cos 2x = -\sin 4x.$$

$$y_2 = \frac{1}{4} \cos 4x \Rightarrow y_2' = -\frac{1}{4} \cdot 4 \sin 4x = -\sin 4x.$$

Vậy $y_1' = y_2'$.

**Câu 35**

Cho hai hàm số $f(x) = x^2 + 5$ và $g(x) = 9x - \frac{3}{2}x^2$. Giá trị của x là bao nhiêu để $f'(x) = g'(x)$?

- (A) -4 . (B) 4 . (C) $\frac{9}{5}$. (D) $\frac{5}{4}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} f'(x) = 2x \\ g'(x) = 9 - 3x \end{cases}, f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow 2x = 9 - 3x \Leftrightarrow x = \frac{9}{5}.$$

Chọn đáp án (C)



—————HẾT—————



Ví dụ 4

Chuyển động của một vật gắn trên con lắc lò xo (khi bỏ qua ma sát và sức cản không khí) được cho bởi phương trình sau: $x(t) = 4 \cos \left(2\pi t + \frac{\pi}{3} \right)$. Trong đó x tính bằng centimet và thời gian t tính bằng giây. Tìm gia tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 5$ giây (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải.

✓ Vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t là

$$v(t) = x'(t) = - \left(2\pi t + \frac{\pi}{3} \right)' \cdot 4 \sin \left(2\pi t + \frac{\pi}{3} \right) = -8\pi \sin \left(2\pi t + \frac{\pi}{3} \right).$$

✓ Gia tốc tức thời tại thời điểm t là

$$a(t) = v'(t) = -8\pi \left(2\pi t + \frac{\pi}{3} \right)' \cdot \cos \left(2\pi t + \frac{\pi}{3} \right) = -16\pi^2 \cos \left(2\pi t + \frac{\pi}{3} \right).$$

✓ Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 5$ giây.

$$a(5) = -16\pi^2 \cos \left(10\pi + \frac{\pi}{3} \right) = -16\pi^2 \cos \frac{\pi}{3} \approx -79(\text{cm/s}^2).$$

□

Ví dụ 5

Một vật chuyển động thẳng có phương trình là $s = 2t^2 + \frac{1}{2}t^4$ (s tính bằng mét, t tính bằng giây). Tìm gia tốc của vật tại thời điểm $t = 4$ giây.

Lời giải.

Ta có $v(t) = s'(t) = \left(2t^2 + \frac{1}{2}t^4 \right)' = 4t + 2t^3$.

Suy ra $a(t) = v'(t) = (4t + 2t^3)' = 4 + 6t^2$.

Do đó gia tốc của vật tại thời điểm $t = 4$ giây là $a(4) = 4 + 6 \cdot 4^2 = 100(\text{m/s}^2)$.

□

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 Đạo hàm cấp hai

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y' = f'(x)$ tại mọi $x \in (a; b)$.

Nếu hàm số $y' = f'(x)$ có đạo hàm tại x thì ta gọi đạo hàm của y' là *đạo hàm cấp hai* của hàm số $y = f(x)$ tại x , kí hiệu y'' hoặc $f''(x)$.

Ví dụ 1

Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số:

a) $y = 3x^2 + 5x + 1$;

b) $y = \sin x$.

Lời giải.

a) $y = 3x^2 + 5x + 1$.
 $y' = (3x^2 + 5x + 1)' = 6x + 5, y'' = (6x + 5)' = 6$.

b) $y = \sin x$.
 $y' = (\sin x)' = \cos x, y'' = (\cos x)' = -\sin x$.

Ví dụ 2

Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau

a) $y = 2x^4 - 5x^2 + 3$;

b) $y = x \cdot e^x$.

 **Lời giải.**

a) $y = 2x^4 - 5x^2 + 3$.

Ta có $y' = (2x^4 - 5x^2 + 3)' = 8x^3 - 10x; y'' = (8x^3 - 10x)' = 24x^2 - 10$.

b) $y = x \cdot e^x$.

Ta có $y' = (x \cdot e^x)' = x' \cdot e^x + x \cdot (e^x)' = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (1 + x) \cdot e^x$.

$y'' = [(1 + x) \cdot e^x]' = (1 + x)' \cdot e^x + (1 + x) \cdot (e^x)' = e^x + (1 + x)e^x = (2 + x)e^x$.

Dạng 2**Toán thực tế****Ví dụ 1**

Một vật chuyển động thẳng không đều xác định bởi phương trình $s(t) = t^2 - 4t + 3$, trong đó s là quãng đường tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 4$.

 **Lời giải.**

Ta có $s'(t) = (t^2 - 4t + 3)' = 2t - 4, s''(t) = (2t - 4)' = 2$.

Gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 4$ là $s''(4) = 2 \text{ m/s}^2$.

Ví dụ 2

Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = x^2 - x$;

b) $y = \cos x$.

 **Lời giải.**

a) $y = x^2 - x$.

$y' = (x^2 - x)' = 2x - 1, y'' = (2x - 1)' = 2$.

b) $y = \cos x$.

$y' = (\cos x)' = -\sin x, y'' = (-\sin x)' = -(\sin x)' = -\cos x$.

**Ví dụ 3**

Một hòn sỏi rơi tự do có quãng đường rơi tính theo thời gian t là $s(t) = 4,9t^2$, trong đó s tính bằng mét và t tính bằng giây. Tính gia tốc rơi của hòn sỏi lúc $t = 3$.

Lời giải.

Ta có $s'(t) = (4,9t^2)' = 4,9 \cdot 2t = 9,8t$; $s''(t) = (9,8t)' = 9,8$.

Gia tốc rơi của hòn sỏi lúc $t = 3$ là $s''(3) = 9,8 \text{ m/s}^2$. □

Ví dụ 4

Một công ty xác định rằng tổng chi phí của họ, tính theo nghìn đô-la, để sản xuất x mặt hàng là $C(x) = \sqrt{5x^2 + 60}$ và công ty lên kế hoạch nâng sản lượng trong t tháng kể từ nay theo hàm số $x(t) = 20t + 40$. Chi phí sẽ tăng thế nào sau 4 tháng kể từ khi công ty thực hiện kế hoạch đó?

Lời giải.

Ta có $C'(x) = \frac{(5x^2 + 60)'}{2\sqrt{2x^2 + 60}} = \frac{5x}{\sqrt{5x^2 + 50}}$.

Công ty thực hiện kế hoạch nâng sản lượng sau 4 tháng có sản lượng là $x(4) = 20 \cdot 4 + 40 = 120$. Chi phí sẽ tăng sau 4 tháng kể từ khi công ty thực hiện kế hoạch là $C'(120) \simeq 2,235$. □

Ví dụ 5

Trên Mặt Trăng, quãng đường rơi tự do của một vật được cho bởi công thức $s(t) = 0,81t^2$, trong đó t là thời gian được tính bằng giây và s tính bằng mét. Một vật thả rơi từ độ cao 200 m phía trên Mặt Trăng. Tại thời điểm $t = 2$ sau khi thả vật đó, tính:

a) Quãng đường vật đã rơi;

b) Gia tốc của vật.

Lời giải.

Ta có $s'(t) = 1,62t$, $s''(t) = 1,62$.

a) Quãng đường vật đã rơi tại thời điểm $t = 2$ sau khi thả vật rơi từ độ cao 200 m phía trên Mặt Trăng là $s(2) = 0,81 \cdot 2^2 = 3,24 \text{ m}$.

b) Gia tốc của vật thời điểm $t = 2$ là $s''(2) = 1,62 \text{ m/s}^2$. □

C

BÀI TẬP RÈN LUYỆN
Bài 1

Cho hàm số $f(x) = x^2 \cdot e^x$. Tính $f''(0)$.

Lời giải.

$f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = e^x \cdot (x^2 + 2x)$.

$f''(x) = e^x \cdot (x^2 + 2x) + (2x + 2) \cdot e^x = e^x \cdot (x^2 + 4x + 2)$.

$f''(0) = e^0 \cdot (0^2 + 4 \cdot 0 + 2) = 2$. □

Bài 2

Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau

a) $y = \ln(x + 1)$.

b) $y = \tan 2x$.

 **Lời giải.**

$$\begin{aligned} \text{a) } y' &= \frac{(x+1)'}{x+1} = \frac{1}{x+1}. \\ y'' &= -\frac{(x+1)'}{(x+1)^2} = -\frac{1}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } y' &= \frac{(2x)'}{\cos^2 2x} = \frac{2}{\cos^2 2x}. \\ y'' &= -\frac{2(\cos^2 2x)'}{\cos^4 2x} = \frac{-2 \cdot 2(2x)' \cdot \cos 2x \cdot (-\sin 2x)}{\cos^4 2x} = \frac{4 \cdot \sin 4x}{\cos^4 2x}. \end{aligned}$$

□

Bài 3

Cho hàm số $P(x) = ax^2 + bx + 3$, (a, b là các hằng số). Tìm a, b biết $P'(1) = 0$, $P''(1) = -2$.

 **Lời giải.**

$$\begin{aligned} P'(x) &= 2ax + b, P''(x) = 2a. \\ \text{Giải hệ } \begin{cases} 2a \cdot 1 + b = 0 \\ 2a = -2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2. \end{cases} \\ \text{Vậy } a &= -1, b = 2. \end{aligned}$$

□

Bài 4

Cho hàm số $f(x) = 2 \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$. Chứng minh rằng $|f''(x)| \leq 4$ với mọi x .

 **Lời giải.**

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cdot 2 \cdot \left(x + \frac{\pi}{4} \right)' \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 2 \cdot \sin \left(2x + \frac{\pi}{2} \right). \\ f''(x) &= 2 \cdot \left(2x + \frac{\pi}{2} \right)' \cdot \cos \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) = 4 \cos \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) \\ \Rightarrow |f''(x)| &= 4 \left| \cos \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) \right|. \\ \text{Ta có } 0 &\leq \left| \cos \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) \right| \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 4 \left| \cos \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) \right| \leq 4. \end{aligned}$$

□

Bài 5

Phương trình chuyển động của một hạt được cho bởi công thức $s(t) = 10 + 0,5 \sin \left(2\pi t + \frac{\pi}{5} \right)$, trong đó s tính bằng centimét, t tính bằng giây. Gia tốc của hạt tại thời điểm $t = 5$ giây (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

 **Lời giải.**

$$v(t) = s'(t) = \left(2\pi t + \frac{\pi}{5}\right)' \cdot 0,5 \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{5}\right) = \pi \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{5}\right).$$

$$a(t) = v'(t) = -\pi \cdot \left(2\pi t + \frac{\pi}{5}\right)' \cdot \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{5}\right) = -2\pi^2 \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{5}\right).$$

Gia tốc của hạt tại thời điểm $t = 5$ giây là $a(5) = -2\pi^2 \sin\left(2\pi \cdot 5 + \frac{\pi}{5}\right) \approx -11,6 \text{ (m/s}^2\text{)}$. □

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN – ĐỀ SỐ 1

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

1	(A) (B) (C) (D)	8	(A) (B) (C) (D)	15	(A) (B) (C) (D)	22	(A) (B) (C) (D)	29	(A) (B) (C) (D)
2	(A) (B) (C) (D)	9	(A) (B) (C) (D)	16	(A) (B) (C) (D)	23	(A) (B) (C) (D)	30	(A) (B) (C) (D)
3	(A) (B) (C) (D)	10	(A) (B) (C) (D)	17	(A) (B) (C) (D)	24	(A) (B) (C) (D)	31	(A) (B) (C) (D)
4	(A) (B) (C) (D)	11	(A) (B) (C) (D)	18	(A) (B) (C) (D)	25	(A) (B) (C) (D)	32	(A) (B) (C) (D)
5	(A) (B) (C) (D)	12	(A) (B) (C) (D)	19	(A) (B) (C) (D)	26	(A) (B) (C) (D)	33	(A) (B) (C) (D)
6	(A) (B) (C) (D)	13	(A) (B) (C) (D)	20	(A) (B) (C) (D)	27	(A) (B) (C) (D)	34	(A) (B) (C) (D)
7	(A) (B) (C) (D)	14	(A) (B) (C) (D)	21	(A) (B) (C) (D)	28	(A) (B) (C) (D)	35	(A) (B) (C) (D)

Câu 1

Tính đạo hàm của hàm số $y = k$, với k là hằng số.

- (A) $y' = -1$. (B) $y' = 0$. (C) $y' = 1$. (D) $y' = k$.

 **Lời giải.**

Ta có $y' = 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 2

Số gia Δy của hàm số $y = x^2 + 2x - 5$ tại điểm $x_0 = 1$ là

- (A) $(\Delta x)^2 - 4\Delta x$. (B) $(\Delta x)^2 + 4\Delta x$. (C) $(\Delta x)^2 - 2\Delta x$. (D) $(\Delta x)^2 + 2\Delta x - 5$.

 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(1 + \Delta x) - f(1) = (1 + \Delta x)^2 + 2(1 + \Delta x) - 5 + 2 \\ &= (\Delta x)^2 + 4\Delta x.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 3

Tìm số gia Δy của hàm số $y = x^2$ biết $x_0 = 3$ và $\Delta x = -1$.

- (A) $\Delta y = 13$. (B) $\Delta y = 7$. (C) $\Delta y = -5$. (D) $\Delta y = 16$.

 **Lời giải.**

Ta có $\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = y(2) - y(3) = 2^2 - 3^2 = -5$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 4

Tính số gia Δy của hàm số $y = x^3 - 2x$ theo số gia của đối số Δx tại $x = 1$.

- (A) $\Delta y = (\Delta x)^3 + 3(\Delta x)^2 + 3\Delta x + 1$. (B) $\Delta y = (\Delta x)^3 - 3(\Delta x)^2 + \Delta x$.
(C) $\Delta y = (\Delta x)^3 + 3(\Delta x)^2 + \Delta x$. (D) $\Delta y = (\Delta x)^3 - 3(\Delta x)^2 + 3\Delta x + 1$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\Delta y &= (1 + \Delta x)^3 - 2(1 + \Delta x) - (1^3 - 2 \cdot 1) \\ &= 1 + 3\Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 2 - 2\Delta x + 1 \\ &= (\Delta x)^3 + 3(\Delta x)^2 + \Delta x.\end{aligned}$$

Chọn đáp án **C****Câu 5**

Cho hàm số $f(x)$ xác định bởi $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$. Giá trị $f'(0)$ là

- A** 0. **B** Không tồn tại. **C** $\frac{1}{2}$. **D** 1.

Lời giải.

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} \stackrel{\text{nhân liên hợp}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1} = \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án **C****Câu 6**

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên tập số thực. Tìm hệ thức đúng.

- A** $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$. **B** $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1}$.
C $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x}$. **D** $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(1)}{x - 1}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Chọn đáp án **A****Câu 7**

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 là $f'(x_0)$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A** $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. **B** $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x + x_0) - f(x_0)}{x - x_0}$.
C $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$. **D** $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Lời giải.

Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$. Giới hạn hữu hạn (nếu có) của tỉ số $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ khi x dần đến x_0 gọi là đạo hàm của hàm số đã cho tại điểm x_0 , kí hiệu là $f'(x_0)$,

ta có $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Từ định nghĩa rút ra kết luận đáp án " $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x + x_0) - f(x_0)}{x - x_0}$ " sai.

" $f'(x_0) = f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ " đúng do định nghĩa.



$$“f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}” \text{ đúng vì đặt } x = x_0 + h \Rightarrow \begin{cases} x - x_0 = h \\ x \rightarrow x_0 \Rightarrow h \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$“f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}” \text{ đúng vì đặt } x = x_0 + \Delta x \Rightarrow \begin{cases} x - x_0 = \Delta x \\ x \rightarrow x_0 \Rightarrow \Delta x \rightarrow 0 \end{cases}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 8

Tính số gia Δy của hàm số $y = x^3 - 2x$ theo số gia của đối số Δx tại $x = 1$.

(A) $\Delta y = (\Delta x)^3 + 3(\Delta x)^2 + 3\Delta x + 1$.

(B) $\Delta y = (\Delta x)^3 - 3(\Delta x)^2 + \Delta x$.

(C) $\Delta y = (\Delta x)^3 + 3(\Delta x)^2 + \Delta x$.

(D) $\Delta y = (\Delta x)^3 - 3(\Delta x)^2 + 3\Delta x + 1$.

 **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} \Delta y &= (1 + \Delta x)^3 - 2(1 + \Delta x) - (1^3 - 2 \cdot 1) \\ &= 1 + 3\Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 2 - 2\Delta x + 1 \\ &= (\Delta x)^3 + 3(\Delta x)^2 + \Delta x. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 9

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm thỏa mãn $f'(6) = 2$. Tính giá trị của biểu thức

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - f(6)}{x - 6}.$$

(A) 2.

(B) $\frac{1}{3}$.

(C) $\frac{1}{2}$.

(D) 12.

 **Lời giải.**

Theo định nghĩa đạo hàm của hàm số tại $x = 6$, suy ra $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - f(6)}{x - 6} = f'(6) = 2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 10

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 . Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định dưới đây?

(A) $f(x)$ gián đoạn tại x_0 .

(B) $f(x)$ không cần xác định tại x_0 .

(C) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

(D) $f(x)$ liên tục tại x_0 .

 **Lời giải.**

$f(x)$ gián đoạn tại x_0 sai vì theo Định lý 1 trang 150 SGK Đại Số và Giải Tích 11 cơ bản, nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó. Như vậy $f(x)$ liên tục tại x_0 đúng.

$f(x)$ không cần xác định tại x_0 sai vì theo định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm SGK Đại Số và Giải Tích 11 cơ bản, trang 148, hàm số $f(x)$ phải xác định tại x_0 .

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ sai. Chẳng hạn, xét hàm số $f(x) = x^2$. Đạo hàm của $f(x) = x^2$ tại $x_0 = 1$ tồn tại và bằng 2. Nhưng $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1 \neq 0$.

Chọn đáp án (D) □



Câu 11

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 2$. Kết quả đúng là

(A) $f'(2) = 3$. (B) $f'(x) = 2$. (C) $f'(x) = 3$. (D) $f'(3) = 2$.

Lời giải.

Theo định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm ta có

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 2 = f'(3).$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 12

Tiếp tuyến với đồ thị của hàm số $f(x) = \frac{3}{2x-1}$ tại điểm có hoành độ $x = 2$ có hệ số góc là

(A) $-\frac{2}{3}$. (B) $\frac{2}{3}$. (C) 2. (D) -2.

Lời giải.

Tính $f'(2) = -\frac{2}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 13

Tính số gia Δy của hàm số $y = x^3 - 2x$ theo số gia của đối số Δx tại $x = 1$.

- (A) $\Delta y = (\Delta x)^3 + 3(\Delta x)^2 + 3\Delta x + 1$. (B) $\Delta y = (\Delta x)^3 - 3(\Delta x)^2 + \Delta x$.
 (C) $\Delta y = (\Delta x)^3 + 3(\Delta x)^2 + \Delta x$. (D) $\Delta y = (\Delta x)^3 - 3(\Delta x)^2 + 3\Delta x + 1$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \Delta y &= (1 + \Delta x)^3 - 2(1 + \Delta x) - (1^3 - 2 \cdot 1) \\ &= 1 + 3\Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 2 - 2\Delta x + 1 \\ &= (\Delta x)^3 + 3(\Delta x)^2 + \Delta x. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 14

Tính số gia Δy của hàm số $y = x^3 - 2x$ theo số gia của đối số Δx tại $x = 1$.

- (A) $\Delta y = (\Delta x)^3 + 3(\Delta x)^2 + 3\Delta x + 1$. (B) $\Delta y = (\Delta x)^3 - 3(\Delta x)^2 + \Delta x$.
 (C) $\Delta y = (\Delta x)^3 + 3(\Delta x)^2 + \Delta x$. (D) $\Delta y = (\Delta x)^3 - 3(\Delta x)^2 + 3\Delta x + 1$.

Lời giải.



Ta có

$$\begin{aligned}\Delta y &= (1 + \Delta x)^3 - 2(1 + \Delta x) - (1^3 - 2 \cdot 1) \\ &= 1 + 3\Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 2 - 2\Delta x + 1 \\ &= (\Delta x)^3 + 3(\Delta x)^2 + \Delta x.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (C)

Câu 15

Hàm số $f(x_0)$ có đạo hàm tại x_0 là $f'(x_0)$. Chọn khẳng định sai.

- (A) $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. (B) $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.
(C) $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$. (D) $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x + x_0) - f(x_0)}{x - x_0}$.

👉 Lời giải.

✔ Theo định nghĩa đạo hàm tại một điểm SGK ĐS-GT 11, ta có $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

✔ Đặt $\Delta x = x - x_0$, ta có

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x_0 + \Delta x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

✔ Đặt $h = x - x_0$, ta có

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

✔ Như vậy, đáp án sai là $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x + x_0) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Chọn đáp án (D)

Câu 16

Tính số gia của hàm số $y = f(x) = x^3 + x^2 + 1$ tại điểm x_0 ứng với số gia $\Delta x = 1$.

- (A) $\Delta y = 3x_0^2 + 5x_0 + 3$. (B) $\Delta y = 2x_0^3 + 3x_0^2 + 5x_0 + 2$.
(C) $\Delta y = 3x_0^2 + 5x_0 + 2$. (D) $\Delta y = 3x_0^2 - 5x_0 + 2$.

👉 Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x_0 + 1) - f(x_0) \\ &= [(x_0 + 1)^3 + (x_0 + 1)^2 + 1] - [x_0^3 + x_0^2 + 1] \\ &= 3x_0^2 + 5x_0 + 2.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (C)

**Câu 17**

Cho các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định **đúng**?

- a) Một hàm số liên tục tại một điểm có thể không có đạo hàm tại điểm đó.
- b) Nếu hàm số liên tục tại x_0 thì nó có đạo hàm tại điểm đó.
- c) Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.
- d) Nếu hàm số $y = f(x)$ gián đoạn tại x_0 thì nó không có đạo hàm tại điểm đó.

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Theo định lý về quan hệ giữa sự tồn tại của đạo hàm và tính liên tục của hàm số, khẳng định a), c), d) đúng.

Chọn đáp án (C) □

Câu 18

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm thỏa mãn $f'(6) = 2$. Tính giá trị của biểu thức $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - f(6)}{x - 6}$.

(A) 2. (B) $\frac{1}{3}$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) 12.

Lời giải.

Theo định nghĩa đạo hàm của hàm số tại $x = 6$, suy ra $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - f(6)}{x - 6} = f'(6) = 2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 19

Cho hàm số $y = \frac{5}{3}x^3 - x^2 + 4$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = 3$ có hệ số góc là

(A) 39. (B) 40. (C) 51. (D) 3.

Lời giải.

Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ x_0 là $k = f'(x_0)$.

Hàm số $y = \frac{5}{3}x^3 - x^2 + 4$ có $y' = 5x^2 - 2x$.

Suy ra tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = 3$ có hệ số góc $k = y'(3) = 39$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 20

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 3$. Kết quả nào sau đây là đúng?

(A) $f'(3) = 2$. (B) $f'(2) = 3$. (C) $f'(x) = 3$. (D) $f'(x) = 2$.

 Lời giải.

Theo định nghĩa đạo hàm ta có $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Dó đó

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) = 3.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 21

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 . Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định dưới đây?

- (A) $f(x)$ gián đoạn tại x_0 . (B) $f(x)$ không cần xác định tại x_0 .
(C) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$. (D) $f(x)$ liên tục tại x_0 .

 Lời giải.

$f(x)$ gián đoạn tại x_0 sai vì theo Định lý 1 trang 150 SGK Đại Số và Giải Tích 11 cơ bản, nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó. Như vậy $f(x)$ liên tục tại x_0 đúng.

$f(x)$ không cần xác định tại x_0 sai vì theo định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm SGK Đại Số và Giải Tích 11 cơ bản, trang 148, hàm số $f(x)$ phải xác định tại x_0 .

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ sai. Chẳng hạn, xét hàm số $f(x) = x^2$. Đạo hàm của $f(x) = x^2$ tại $x_0 = 1$ tồn tại và bằng 2. Nhưng $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1 \neq 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 22

Trong các phát biểu sau, phát biểu nào sau đây là **đúng**?

- (A) Nếu hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại x_0 thì nó có đạo hàm tại điểm đó.
(B) Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó không liên tục tại điểm đó.
(C) Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.
(D) Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0 thì nó có đạo hàm tại điểm đó.

 Lời giải.

“Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó” là mệnh đề **đúng**.

Điều ngược lại chưa chắc đúng tức là “Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0 thì nó có đạo hàm tại điểm đó” là mệnh đề là mệnh đề **sai**.

Ví dụ: Hàm số $y = |x|$ liên tục tại $x = 0$ nhưng không có đạo hàm tại $x = 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 23

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên tập số thực. Tìm hệ thức đúng.

- (A) $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$. (B) $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1}$.
(C) $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x}$. (D) $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(1)}{x - 1}$.

 Lời giải.

Ta có $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Chọn đáp án (A)

**Câu 24**

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$, $x_0 \in (a; b)$. Tính $f'(x_0)$ bằng định nghĩa ta cần tính

(A) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

(B) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

(C) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}$.

(D) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{x}$.

📌 **Lời giải.**

Theo định nghĩa đạo hàm ta có $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Chọn đáp án (B)

**Câu 25**

Số gia Δy của hàm số $y = x^2 + 2x - 5$ tại điểm $x_0 = 1$ là

(A) $(\Delta x)^2 - 4\Delta x$.

(B) $(\Delta x)^2 + 4\Delta x$.

(C) $(\Delta x)^2 - 2\Delta x$.

(D) $(\Delta x)^2 + 2\Delta x - 5$.

📌 **Lời giải.**

$$\Delta y = f(1 + \Delta x) - f(1) = (1 + \Delta x)^2 + 2(1 + \Delta x) - 5 - (-2) = (\Delta x)^2 + 4\Delta x.$$

Chọn đáp án (B)

**Câu 26**

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm thỏa mãn $f'(6) = 2$. Tính giá trị của biểu thức $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - f(6)}{x - 6}$.

(A) 2.

(B) $\frac{1}{3}$.

(C) $\frac{1}{2}$.

(D) 12.

📌 **Lời giải.**

Theo định nghĩa đạo hàm của hàm số tại $x = 6$, suy ra $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - f(6)}{x - 6} = f'(6) = 2$.

Chọn đáp án (A)

**Câu 27**

Tính tỷ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số $y = f(x) = 2x^3$ theo x và Δx .

(A) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x^3 - 2(\Delta x)^3}{\Delta x}$.

(B) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2(\Delta x)^2$.

(C) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x^2 + 6x\Delta x + 2(\Delta x)^2$.

(D) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2$.

📌 **Lời giải.**

Ta có

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 2(x + \Delta x)^3 - 2x^3 = 6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3$$

Suy ra

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x^2 + 6x\Delta x + 2(\Delta x)^2.$$

Chọn đáp án (C)



Câu 28

Có bao nhiêu mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

- (1) Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x = x_0$ thì $f(x)$ liên tục tại x_0 .
- (2) Nếu hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x = x_0$ thì $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 .
- (3) Nếu hàm số $f(x)$ gián đoạn tại điểm $x = x_0$ thì $f(x)$ không có đạo hàm tại x_0 .

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

 **Lời giải.**

Hàm số liên tục tại một điểm có thể không có đạo hàm tại điểm đó. Như vậy, chỉ có hai mệnh đề đúng là mệnh đề (1) và (3).

Chọn đáp án (C) □

Câu 29

Cho các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định **đúng**?

- a) Một hàm số liên tục tại một điểm có thể không có đạo hàm tại điểm đó.
- b) Nếu hàm số liên tục tại x_0 thì nó có đạo hàm tại điểm đó.
- c) Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.
- d) Nếu hàm số $y = f(x)$ gián đoạn tại x_0 thì nó không có đạo hàm tại điểm đó.

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

 **Lời giải.**

Theo định lý về quan hệ giữa sự tồn tại của đạo hàm và tính liên tục của hàm số, khẳng định a), c), d) đúng.

Chọn đáp án (C) □

Câu 30

Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. (B) $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + f(x_0)}{x - x_0}$.
- (C) $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x - x_0}$. (D) $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

 **Lời giải.**

Chọn đáp án (A) □

Câu 31

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$. Giả sử các giới hạn (hữu hạn) sau tồn tại, giới hạn nào là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 ?

- (A) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. (B) $\lim_{\Delta x \rightarrow +\infty} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. (C) $\lim_{\Delta x \rightarrow x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. (D) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

**Lời giải.**

Theo định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm.

Chọn đáp án (A) □

Câu 32

Số gia Δy của hàm số $y = x^2 + 2x - 5$ tại điểm $x_0 = 1$ là

- (A) $(\Delta x)^2 - 4\Delta x$. (B) $(\Delta x)^2 + 4\Delta x$. (C) $(\Delta x)^2 - 2\Delta x$. (D) $(\Delta x)^2 + 2\Delta x - 5$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(1 + \Delta x) - f(1) = (1 + \Delta x)^2 + 2(1 + \Delta x) - 5 + 2 \\ &= (\Delta x)^2 + 4\Delta x.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 33

Có bao nhiêu mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

- (1) Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x = x_0$ thì $f(x)$ liên tục tại x_0 .
 (2) Nếu hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x = x_0$ thì $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 .
 (3) Nếu hàm số $f(x)$ gián đoạn tại điểm $x = x_0$ thì $f(x)$ không có đạo hàm tại x_0 .

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Hàm số liên tục tại một điểm có thể không có đạo hàm tại điểm đó. Như vậy, chỉ có hai mệnh đề đúng là mệnh đề (1) và (3).

Chọn đáp án (C) □

Câu 34

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$. Giả sử các giới hạn (hữu hạn) sau tồn tại, giới hạn nào là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 ?

- (A) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. (B) $\lim_{\Delta x \rightarrow +\infty} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. (C) $\lim_{\Delta x \rightarrow x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. (D) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Lời giải.

Theo định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm.

Chọn đáp án (A) □

Câu 35

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 2$. Kết quả đúng là

- (A) $f'(2) = 3$. (B) $f'(x) = 2$. (C) $f'(x) = 3$. (D) $f'(3) = 2$.

Lời giải.

Theo định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm ta có

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 2 = f'(3).$$

Chọn đáp án (D)



—————HẾT—————

§4. ÔN TẬP CHƯƠNG IX

A BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN – ĐỀ SỐ 1

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

1	(A) (B) (C) (D)	8	(A) (B) (C) (D)	15	(A) (B) (C) (D)	22	(A) (B) (C) (D)	29	(A) (B) (C) (D)
2	(A) (B) (C) (D)	9	(A) (B) (C) (D)	16	(A) (B) (C) (D)	23	(A) (B) (C) (D)	30	(A) (B) (C) (D)
3	(A) (B) (C) (D)	10	(A) (B) (C) (D)	17	(A) (B) (C) (D)	24	(A) (B) (C) (D)	31	(A) (B) (C) (D)
4	(A) (B) (C) (D)	11	(A) (B) (C) (D)	18	(A) (B) (C) (D)	25	(A) (B) (C) (D)	32	(A) (B) (C) (D)
5	(A) (B) (C) (D)	12	(A) (B) (C) (D)	19	(A) (B) (C) (D)	26	(A) (B) (C) (D)	33	(A) (B) (C) (D)
6	(A) (B) (C) (D)	13	(A) (B) (C) (D)	20	(A) (B) (C) (D)	27	(A) (B) (C) (D)	34	(A) (B) (C) (D)
7	(A) (B) (C) (D)	14	(A) (B) (C) (D)	21	(A) (B) (C) (D)	28	(A) (B) (C) (D)	35	(A) (B) (C) (D)

Câu 1

Quy tắc tính đạo hàm nào sau đây là đúng?

(A) $(u + v)' = u' - v'$.

(B) $(uv)' = u'v + uv'$.

(C) $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{1}{v^2}$.

(D) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v + uv'}{v^2}$.

👉 Lời giải.

Ta có

✔ $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$ nên $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{1}{v^2}$ sai.

✔ $(u + v)' = u' + v'$ nên $(u + v)' = u' - v'$ sai.

✔ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ nên $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v + uv'}{v^2}$ sai.

Chọn đáp án (B) □

Câu 2

Cho hàm số $f(x) = x^2 + \sin^3 x$. Khi đó $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng

(A) π .

(B) 2π .

(C) $\pi + 3$.

(D) $\pi - 3$.

👉 Lời giải.

Ta có $f'(x) = 2x + 3\sin^2 x \cdot \cos x \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} + 3\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 3

Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x) \leq 0$ là

(A) $[1; 3]$.

(B) $[-1; 3]$.

(C) $[-3; 1]$.

(D) $[-3; -1]$.

 Lời giải.

Ta có $f'(x) = x^2 - 2x - 3$.

Do đó $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 4

Cho hàm số $f(x) = \sqrt{4 + 3u(x)}$ với $u(1) = 7, u'(1) = 10$. Khi đó $f'(1)$ bằng

- (A) 1. (B) 6. (C) 3. (D) -3.

 Lời giải.

$$f'(x) = \frac{(4 + 3u(x))'}{2\sqrt{4 + 3u(x)}} = \frac{3u'(x)}{2\sqrt{4 + 3u(x)}} \Rightarrow f'(1) = \frac{3u'(1)}{2\sqrt{4 + 3u(1)}} = \frac{3 \cdot 10}{2\sqrt{4 + 3 \cdot 7}} = 3.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 5

Cho hàm số $f(x) = x^2 e^{-2x}$. Tập nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ là

- (A) $\{0; 1\}$. (B) $\{-1; 0\}$. (C) $\{0\}$. (D) $\{1\}$.

 Lời giải.

Ta có $f(x) = x^2 e^{-2x}$.

$$f'(x) = 2x \cdot e^{-2x} + (-2x)' \cdot x^2 \cdot e^{-2x} = 2x \cdot e^{-2x} - 2x^2 \cdot e^{-2x} = (2x - 2x^2) e^{-2x}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x(1 - x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1. \end{cases}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 6

Chuyển động của một vật có phương trình $s(t) = \sin\left(0,8\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ với s tính bằng centimet và thời gian t tính bằng giây. Tại các thời điểm vận tốc bằng 0, giá trị tuyệt đối của gia tốc của vật gần với giá trị nào sau đây nhất?

- (A) 4,5 (cm/s²). (B) 5,5 (cm/s²). (C) 6,3 (cm/s²). (D) 7,1 (cm/s²).

 Lời giải.

Ta có

$$s(t) = \sin\left(0,8\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$v(t) = s'(t) = 0,8\pi \cos\left(0,8\pi t + \frac{\pi}{3}\right).$$

$$a(t) = s''(t) = -(0,8\pi)^2 \sin\left(0,8\pi t + \frac{\pi}{3}\right).$$

$$v(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{24} + \frac{5}{4}k, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Khi đó } a\left(\frac{5}{24} + \frac{5}{4}k\right) = -(0,8\pi)^2 \sin\left[0,8\pi \cdot \left(\frac{5}{24} + \frac{5}{4}k\right) + \frac{\pi}{3}\right] = -(0,8\pi)^2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right).$$

$$\Rightarrow \left|a\left(\frac{5}{24} + \frac{5}{4}k\right)\right| \approx 6,3 \text{ (cm/s}^2\text{)}.$$

□

Câu 7

Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ có đồ thị là (C). Hệ số góc nhỏ nhất của tiếp tuyến tại một điểm M trên đồ thị (C) là

- (A) 1. (B) 2. (C) -1. (D) 3.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 4 = 3(x^2 - 2x + 1) + 1 = 3(x - 1)^2 + 1 \geq 1$.

Hệ số góc nhỏ nhất của tiếp tuyến bằng 1.

Chọn đáp án (A) □

Câu 8

Cho $u = u(x), v = v(x)$ là các hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- (A) $(uv)' = u'v'$. (B) $(uv)' = uv'$. (C) $(uv)' = u'v$. (D) $(uv)' = u'v + uv'$.

Lời giải.

Theo công thức tính đạo hàm của một tích ta có: $(uv)' = u'v + uv'$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 9

Cho $u = u(x), v = v(x)$ là các hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- (A) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'}{v'}$ với $v = v(x) \neq 0, v' = v'(x) \neq 0$.
(B) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v}$ với $v = v(x) \neq 0$.
(C) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ với $v = v(x) \neq 0$.
(D) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v'}$ với $v = v(x) \neq 0, v' = v'(x) \neq 0$.

Lời giải.

Theo công thức tính đạo hàm của một thương ta có: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ với $v = v(x) \neq 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 10

Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$. Tiếp tuyến với đồ thị của hàm số tại điểm $M(-1; -4)$ có hệ số góc bằng

- (A) -3. (B) 9. (C) -9. (D) 72.

Lời giải.

Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$ tại điểm $M(-1; -4)$ là

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

Nên $k = y'(-1) = 9$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 11

Hàm số $y = -x^2 + x + 7$ có đạo hàm tại $x = 1$ bằng

- (A) -1. (B) 7. (C) 1. (D) 6.

Lời giải.

Ta có $y' = -2x + 1$

Đạo hàm của hàm số tại $x = 1$ là $y'(1) = -1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 12

Cho hai hàm số $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3$ và $g(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} - 5$. Bất phương trình $f'(x) > g'(x)$ có tập nghiệm là

- (A) $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$. (B) $(0; 1)$.
(C) $[0; 1]$. (D) $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 6x^2 - 2x$ và $g'(x) = 3x^2 + x$.

Bất phương trình $f'(x) > g'(x)$

$$\Leftrightarrow 6x^2 - 2x > 3x^2 + x \Leftrightarrow 3x^2 - 3x > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < 0. \end{cases}$$

Vậy $S = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 13

Hàm số $y = \frac{x+3}{x+2}$ có đạo hàm là

- (A) $y' = \frac{1}{(x+2)^2}$. (B) $y' = \frac{5}{(x+2)^2}$. (C) $y' = \frac{-1}{(x+2)^2}$. (D) $y' = \frac{-5}{(x+2)^2}$.

Lời giải.

Đạo hàm hàm số $y = \frac{x+3}{x+2}$.

$$\text{Ta có } y' = \frac{(x+3)' \cdot (x+2) - (x+2)' \cdot (x+3)}{(x+2)^2} = \frac{-1}{(x+2)^2}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 14

Hàm số $y = \frac{1}{x+1}$ có đạo hàm cấp hai tại $x = 1$ là

- (A) $y''(1) = \frac{1}{2}$. (B) $y''(1) = -\frac{1}{4}$. (C) $y''(1) = 4$. (D) $y''(1) = \frac{1}{4}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } y' = \frac{-1}{(x+1)^2} \text{ và } y'' = \frac{2}{(x+1)^3}.$$

$$\text{Vậy } y''(1) = \frac{1}{4}.$$

Chọn đáp án (D)



B BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1

Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = \left(\frac{2x-1}{x+2}\right)^5;$

b) $y = \frac{2x}{x^2+1};$

c) $y = e^x \cdot \sin^2 x;$

d) $y = \log(x + \sqrt{x})$

📌 **Lời giải.**

a)

$$\begin{aligned} y' &= 5 \cdot \left(\frac{2x-1}{x+2}\right)^4 \cdot \left(\frac{2x-1}{x+2}\right)' \\ &= 5 \cdot \left(\frac{2x-1}{x+2}\right)^4 \cdot \frac{2(x+2) - (2x-1)}{(x+2)^2} \\ &= 5 \cdot \left(\frac{2x-1}{x+2}\right)^4 \cdot \frac{5}{(x+2)^2} \\ &= 25 \cdot \left(\frac{2x-1}{x+2}\right)^4 \cdot \frac{1}{(x+2)^2}; \end{aligned}$$

b) $y' = \frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2};$

c) $y' = e^x \cdot \sin^2 x + 2 \cdot e^x \cdot \sin x \cdot \cos x = e^x \cdot (\sin^2 x + \sin 2x);$

d) $y' = \frac{(x+\sqrt{x})'}{(x+\sqrt{x}) \ln 10} = \frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(x+\sqrt{x}) \ln 10} = \frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}(x+\sqrt{x}) \ln 10}.$



Bài 2

Xét hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ với α là số thực.

a) Tìm tập xác định của hàm số đã cho.

b) Bằng cách viết $y = x^\alpha = e^{\alpha \cdot \ln x}$, tính đạo hàm của hàm số đã cho.

📌 **Lời giải.**

- a) ☒ Với α nguyên dương. Khi đó tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
☒ Với α nguyên âm hoặc $\alpha = 0$. Khi đó tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
☒ Với α không nguyên $\mathcal{D} = (0; +\infty)$.

b) Bằng cách viết $y = x^\alpha = e^{\alpha \cdot \ln x}$, tính đạo hàm của hàm số đã cho.

$$y' = (\alpha \cdot \ln x)' \cdot e^{\alpha \cdot \ln x} = \alpha \cdot \frac{1}{x} \cdot e^{\alpha \cdot \ln x} = \frac{\alpha}{x} \cdot e^{\alpha \cdot \ln x} = \frac{\alpha}{x} \cdot x^\alpha.$$



Bài 3

Cho hàm số $f(x) = \sqrt{3x+1}$. Đặt $g(x) = f(1) + 4(x^2 - 1)f'(1)$. Tính $g(2)$.

 **Lời giải.**

$$f'(x) = \frac{(3x+1)'}{2\sqrt{3x+1}} = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}.$$

$$f(1) = \sqrt{3 \cdot 1 + 1} = 2.$$

$$f'(1) = \frac{3}{2\sqrt{3 \cdot 1 + 1}} = \frac{3}{4}.$$

$$g(x) = 2 + 4(x^2 - 1) \cdot \left(\frac{3}{4}\right).$$

$$\text{Do đó } g(2) = 2 + 4(2^2 - 1) \cdot \left(\frac{3}{4}\right) = 11. \quad \square$$

Bài 4

Cho hàm số $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Tính $f''(1)$.

 **Lời giải.**

$$f'(x) = \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}.$$

$$f''(x) = -\frac{-2 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{4}{(x-1)^3}.$$

Vì hàm số không xác định tại $x = 1$ nên không tồn tại $f''(1)$. $\square$

Bài 5

Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1) = 2$ và $f'(x) = x^2 f(x)$ với mọi x . Tính $f''(1)$.

 **Lời giải.**

$$\begin{aligned} f'(x) = x^2 f(x) &\Rightarrow f''(x) = 2x \cdot f(x) + x^2 \cdot f'(x) = 2x \cdot f(x) + x^2 \cdot x^2 \cdot f(x) \\ &\Rightarrow f''(1) = 2 \cdot 1 \cdot f(1) + f'(1) = 2 \cdot 2 + 1^4 \cdot 2 = 6. \end{aligned}$$

$\square$

Bài 6

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 1$ tại điểm có hoành độ bằng 1.

 **Lời giải.**

$$y' = 3x^2 + 6x.$$

$$y'(1) = 9.$$

$$y(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 1 = 3.$$

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 1$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là

$$y - 3 = 9(x - 1) \Leftrightarrow y = 9x - 6$$

$\square$

Bài 7

Đồ thị hàm số $y = \frac{a}{x}$ (a là hằng số dương) là một đường hyperbol. Chứng minh rằng tiếp tuyến tại một điểm bất kỳ của đường hyperbol đó tạo với các trục toạ độ một tam giác có diện tích không đổi.

Lời giải.

$$y = \frac{a}{x} \Rightarrow y' = -\frac{a}{x^2}.$$

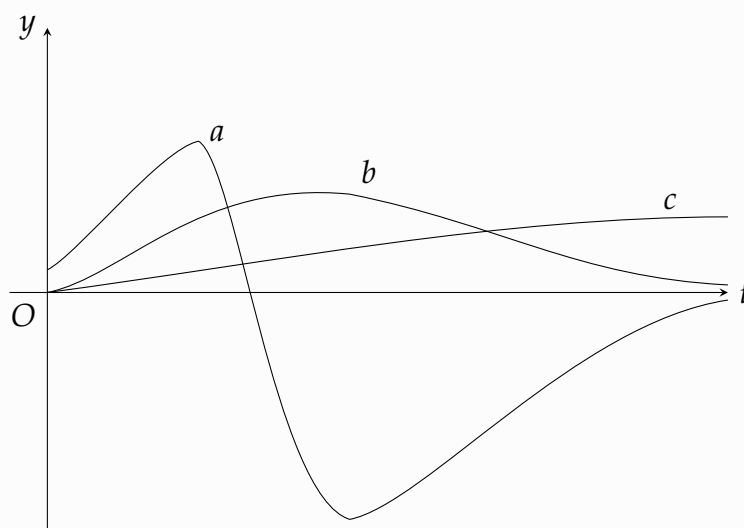
$$\text{Phương trình tiếp tuyến tại } M(x_0; y_0) \text{ là } y = -\frac{a}{x_0^2}(x - x_0) + \frac{a}{x_0} \Leftrightarrow y = -\frac{ax}{x_0^2} + \frac{2a}{x_0}.$$

$$\text{Suy ra diện tích tam giác } OAB \text{ là } S = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{2a}{x_0} \right| \cdot |2x_0| = 2a^2 \text{ (không đổi).}$$

□

Bài 8

Hình bên dưới biểu diễn đồ thị của ba hàm số. Hàm thứ nhất là hàm vị trí của một chiếc xe ô tô, hàm thứ hai là hàm biểu thị vận tốc và hàm thứ ba là hàm biểu thị gia tốc của ô tô đó. Hãy xác định đồ thị của mỗi hàm số này và giải thích?



Lời giải.

- ✓ Với hàm số a , ta có a có thể nhận giá trị âm hoặc dương (thể hiện tăng tốc hay giảm tốc) tùy thuộc vào thời gian t . Do đó a là hàm số biểu thị gia tốc của xe ô tô.
- ✓ Với hàm b , ta quan sát thấy b luôn nhận giá trị dương và có thời điểm b tăng có thời điểm b giảm do đó b là hàm số biểu thị vận tốc.
- ✓ Với hàm số c , ta quan sát thấy đồ thị hàm số luôn nhận giá trị dương và luôn đi lên theo thời gian t , do đó c là hàm số biểu thị quãng đường.

□

Bài 9

Vị trí của một vật chuyển động thẳng được cho bởi phương trình $s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét.

- a) Tính vận tốc của vật tại thời điểm $t = 2$ giây và $t = 4$ giây.
- b) Tại thời điểm nào vật đứng yên?
- c) Tìm gia tốc của vật tại thời điểm $t = 4$ giây.

- d) Tính tổng quãng đường vật đi được trong 5 giây đầu tiên.
e) Trong 5 giây đầu tiên, khi nào vật tăng tốc, khi nào vật giảm tốc?

 Lời giải.

$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t \Rightarrow v(t) = f'(t) = 3t^2 - 12t + 9 \Rightarrow a(t) = f''(t) = 6t - 12.$$

- a) Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 2$ giây là $v(2) = f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9 = -3$ (m/s).
Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 4$ giây là $v(4) = f'(4) = 3 \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 + 9 = 9$ (m/s).

b) Vật đứng yên khi $v(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 12t + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2. \end{cases}$

c) Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 4$ giây là $a(4) = 6 \cdot 4 - 12 = 12$ (m/s²).

d) Tổng quãng đường vật đi được trong 5 giây đầu tiên là $s = f(5) = 5^3 - 6 \cdot 5^2 + 9 \cdot 5 = 20$ (m)

- e) Trong 5 giây đầu tiên, khi nào vật tăng tốc, khi nào vật giảm tốc?

✔ $t = 0 \Rightarrow a(0) = -12 = -12$. Do đó vật giảm tốc.

✔ $t = 1 \Rightarrow a(1) = 6 - 12 = -6$. Do đó vật giảm tốc.

✔ $t = 3 \Rightarrow a(3) = 18 - 12 = 6$. Do đó vật tăng tốc.

□

Bài 10

Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2x + 3$ có đồ thị (C) và điểm $M(-1; 6) \in (C)$. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm M.

 Lời giải.

Ta có $f'(x) = 2x - 2$ nên $f'(-1) = -4$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(-1; 6)$ là

$$y = f'(-1)(x + 1) + 6 \Leftrightarrow y = -4x + 2.$$

□

Bài 11

Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = 3x^4 - 7x^3 + 3x^2 + 1$

b) $y = (x^2 - x)^3$

c) $y = \frac{4x - 1}{2x + 1}.$

 Lời giải.

Đạo hàm của các hàm số sau là

a) $y' = 12x^3 - 21x^2 + 6x.$

b) $y' = 3(x^2 - x)^2(x^2 - x)' = 3(x^2 - x)^2(2x - 1).$

$$c) y' = \frac{(4x-1)' \cdot (2x+1) - (2x+1)' \cdot (4x-1)}{(2x+1)^2} = \frac{6}{(2x+1)^2}.$$

**Bài 12**

Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = (x^2 + 3x - 1)e^x;$

b) $y = x^3 \log_2 x.$

Lời giải.

Đạo hàm của các hàm số sau là

a) $y' = (2x+3)e^x + (x^2+3x-1)e^x = e^x(x^2+5x-1).$

b) $y' = (x^3)' \cdot \log_2 x + x^3 \cdot (\log_2 x)' = 3x^2 \log_2 x + \frac{x^3}{x \ln 2}.$

**Bài 13**

Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = \tan(e^x + 1);$

b) $y = \sqrt{\sin 3x};$

c) $y = \cot(1 - 2^x).$

Lời giải.

Đạo hàm của các hàm số sau là

a) $y' = \frac{(e^x+1)'}{\cos^2(e^x+1)} = \frac{e^x}{\cos^2(e^x+1)}.$

b) $y' = \frac{(\sin 3x)'}{2\sqrt{\sin 3x}} = \frac{3 \cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}.$

c) $y' = \frac{(1-2^x)'}{\sin^2(1-2^x)} = \frac{2^x \ln 2}{\sin^2(1-2^x)}.$

**Bài 14**

Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau

a) $y = x^3 - 4x^2 + 2x - 3;$

b) $y = x^2 e^x.$

Lời giải.

Đạo hàm cấp 1 của các hàm số sau là

a) $y' = 3x^2 - 8x + 2.$

b) $y' = 2xe^x + x^2 e^x = e^x(2x + x^2).$

Đạo hàm cấp 2 của các hàm số trên là

a) $y'' = 6x - 8.$

b) $y'' = e^x(2x + x^2) + e^x(2 + 2x) = e^x(x^2 + 4x + 2).$



Bài 15

Một viên sỏi rơi từ độ cao 44,1 m thì quãng đường rơi được biểu diễn bởi công thức $s(t) = 4,9t^2$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và s tính bằng mét. Tính

- a) Vận tốc rơi của viên sỏi lúc $t = 2$; b) Vận tốc của viên sỏi khi chạm đất.

 **Lời giải.**

Ta có $s'(t) = 4,9 \cdot 2t$.

a) Vận tốc rơi của viên sỏi lúc $t = 2$ là $s'(2) = 4,9 \cdot 2 \cdot 2 = 19,6$ m/s.

b) Vận tốc của viên sỏi khi chạm đất.

Thời gian viên sỏi rơi từ độ cao 44,1 m đến lúc chạm đất

$$4,9t^2 = 44,1 \text{ suy ra } t = 3 \text{ (vì } t > 0).$$

Vận tốc của viên sỏi khi chạm đất là $s'(3) = 4,9 \cdot 2 \cdot 3 = 29,4$ m/s.

□

Bài 16

Một vật chuyển động trên một đường thẳng được xác định bởi công thức $s(t) = 2t^3 + 4t + 1$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và s tính bằng mét. Tính vận tốc và gia tốc của vật khi $t = 1$.

 **Lời giải.**

Ta có $s'(t) = 6t^2 + 4$, $s''(t) = 12t$.

Vận tốc của vật khi $t = 1$ là $s'(1) = 6 \cdot 1^2 + 4 = 10$ m/s.

Gia tốc của vật khi $t = 1$ là $s''(1) = 12 \cdot 1 = 12$ m/s².

□

Bài 17

Dân số P (tính theo nghìn người) của một thành phố nhỏ được tính theo công thức $P(t) = \frac{500t}{t^2 + 9}$, trong đó t là thời gian tính bằng năm. Tìm tốc độ tăng dân số tại thời điểm $t = 12$.

 **Lời giải.**

$$P'(t) = \left(\frac{500t}{t^2 + 9} \right)' = \frac{(500t)'(t^2 + 9) - 500t(t^2 + 9)'}{(t^2 + 9)^2} = \frac{500(t^2 + 9) - 100t \cdot 2t}{(t^2 + 9)^2} = \frac{-500t^2 + 4500}{(t^2 + 9)^2}.$$

Tốc độ tăng dân số tại thời điểm $t = 12$ là $P'(12) \simeq -2,88$ nghìn người/năm.

□

Bài 18

Hàm số $S(r) = \frac{1}{r^4}$ có thể được sử dụng để xác định sức cản S của dòng máu có bán kính r (tính theo milimét) (theo Bách khoa toàn thư Y học "Harrison's internal medicine 21st edition"). Tìm tốc độ thay đổi của S theo r khi $r = 0,8$.

 **Lời giải.**

$$\text{Ta có } S'(r) = \left(\frac{1}{r^4} \right)' = (r^{-4})' = -4r^{-5} = \frac{-4}{r^5}.$$

Tìm tốc độ thay đổi của S theo r khi $r = 0,8$ là $S'(0,8) \simeq -12,207$.

□

**Bài 19**

Nhiệt độ cơ thể của một người trong thời gian bị bệnh được cho bởi công thức $T(t) = -0,1t^2 + 1,2t + 98,6$, trong đó T là nhiệt độ (tính theo đơn vị đo nhiệt độ Fahrenheit) tại thời điểm t (tính theo ngày). Tìm tốc độ thay đổi của nhiệt độ ở thời điểm $t = 1,5$.

Lời giải.

Ta có $T'(t) = -0,2t + 1,2$.

Tốc độ thay đổi của nhiệt độ ở thời điểm $t = 1,5$ là $T'(1,5) = 0,9$. □

Bài 20

Hàm số $R(v) = \frac{600}{v}$ có thể dùng để xác định nhịp tim R của một người mà tim của người đó có thể lấy đi được 6000 ml máu trên mỗi phút và v ml máu trên mỗi nhịp đập (theo Bách khoa toàn thư Y học "Harrison's internal medicine 21st edition"). Tìm tốc độ thay đổi của nhịp tim khi lượng máu tim đẩy đi ở một nhịp là $v = 80$.

Lời giải.

Ta có $R'(v) = -\frac{600}{v^2}$.

Tốc độ thay đổi của nhịp tim khi lượng máu tim đẩy đi ở một nhịp $v = 80$ là $R'(80) = -0,09375$. □

Bài 21

Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau:

- a) $y = (x^2 + 2x)(x^3 - 3x)$; b) $y = \frac{1}{-2x + 5}$; c) $y = \sqrt{4x + 5}$;
d) $y = \sin x \cos x$; e) $y = xe^x$; f) $y = \ln^2 x$.

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} y' &= (x^2 + 2x)'(x^3 - 3x) + (x^2 + 2x)(x^3 - 3x)' \\ &= (2x + 2)(x^3 - 3x) + (x^2 + 2x)(3x^2 - 3) \\ &= 5x^4 + 8x^3 - 9x^2 - 12x. \end{aligned}$$

Vậy $y' = 5x^4 + 8x^3 - 9x^2 - 12x$.

b) Ta có

$$\begin{aligned} y' &= \frac{-(-2x + 5)'}{(-2x + 5)^2} \\ &= \frac{2}{(-2x + 5)^2}. \end{aligned}$$

Vậy $y' = \frac{2}{(-2x + 5)^2}$.



c) Ta có

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(4x+5)'}{2\sqrt{4x+5}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{4x+5}}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } y' = \frac{2}{\sqrt{4x+5}}.$$

d) Ta có

$$\begin{aligned} y' &= (\sin x)' \cdot \cos x + \sin x \cdot (\cos x)' \\ &= \cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot (-\sin x) \\ &= \cos 2x. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } y' = \cos 2x.$$

e) Ta có

$$\begin{aligned} y' &= (x)' \cdot e^x + x \cdot (e^x)' \\ &= e^x + x \cdot e^x \\ &= (1+x)e^x. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } y' = (1+x)e^x.$$

f) Ta có

$$\begin{aligned} y' &= 2 \cdot \ln x \cdot (\ln x)' \\ &= \frac{2 \ln x}{x}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } y' = \frac{2 \ln x}{x}.$$

□

Bài 22

Tìm đạo hàm cấp hai của mỗi hàm số sau:

a) $y = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2;$

c) $y = \sin 2x \cos x;$

e) $y = \ln(x+1);$

b) $y = \frac{2}{3-x};$

d) $y = e^{-2x+3};$

f) $y = \ln(e^x + 1).$

** Lời giải.**

a) Ta có

$$\begin{aligned} y' &= 2(x^4)' - 3(x^3)' + 5(x^2)' \\ &= 8x^3 - 9x^2 + 10x. \\ y'' &= 8(x^3)' - 9(x^2)' + 10(x)' \\ &= 24x^2 - 18x + 10. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } y'' = 24x^2 - 18x + 10.$$

b) Ta có

$$\begin{aligned} y' &= \frac{-2(3-x)'}{(3-x)^2} \\ &= \frac{2}{(3-x)^2} \\ y'' &= \frac{-2((3-x)^2)'}{(3-x)^4} \\ &= \frac{4}{(3-x)^3}. \end{aligned}$$

Vậy $y'' = \frac{4}{(3-x)^3}$.

c) Ta có

$$\begin{aligned} y' &= (\sin 2x)' \cos x + \sin 2x (\cos x)' \\ &= 2 \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x \\ y'' &= 2 [(\cos 2x)' \cos x + \cos 2x (\cos x)'] - [(\sin 2x)' \sin x + \sin 2x (\sin x)'] \\ &= 2 [-2 \sin 2x \cos x - \cos 2x \sin x] - [2 \cos 2x \sin x + \sin 2x \cos x] \\ &= -5 \sin 2x \cos x - 4 \cos 2x \sin x \end{aligned}$$

Vậy $y'' = -5 \sin 2x \cos x - 4 \cos 2x \sin x$.

d) Ta có

$$\begin{aligned} y' &= (-2x+3)'e^{-2x+3} \\ &= -2e^{-2x+3} \\ y'' &= (-2)(-2x+3)'e^{-2x+3} \\ &= 4e^{-2x+3}. \end{aligned}$$

Vậy $y'' = 4e^{-2x+3}$.

e) Ta có

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x+1)'}{x+1} \\ &= \frac{1}{x+1} \\ y'' &= \frac{-(x+1)'}{(x+1)^2} \\ &= \frac{-1}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

Vậy $y'' = \frac{-1}{(x+1)^2}$.

f) Ta có

$$y' = \frac{(e^x + 1)'}{e^x + 1}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{e^x}{e^x + 1} = 1 - \frac{1}{e^x + 1} \\
 y'' &= \frac{(e^x + 1)'}{(e^x + 1)^2} \\
 &= \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}.
 \end{aligned}$$

Vậy $y'' = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$.

**Bài 23**

Vận tốc của một chất điểm chuyển động được biểu thị bởi công thức $v(t) = 2t + t^2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $v(t)$ tính bằng m/s. Tìm gia tốc tức thời của chất điểm:

- Tại thời điểm $t = 3$ (s);
- Tại thời điểm mà vận tốc của chất điểm bằng 8 m/s.

 Lời giải.

Ta có gia tốc tức thời là $a = (v(t))' = 2t + 2$.

- Tại thời điểm $t = 3$ (s) ta được gia tốc tức thời là $a = (v(t))' = 2 \cdot 3 + 2 = 8(\text{m/s}^2)$.
- Tại thời điểm mà vận tốc của chất điểm bằng 8 (m/s) tức là $2t + t^2 \Leftrightarrow t = 2, t > 0$.
Khi đó gia tốc $a = (v(t))' = 2t + 2 = 2 \cdot 2 + 2 = 6(\text{m/s}^2)$.

**Bài 24**

Một con lắc lò xo dao động điều hoà theo phương ngang trên mặt phẳng không ma sát, có phương trình chuyển động $x = 4 \cos \left(\pi t - \frac{2\pi}{3} \right) + 3$, trong đó t tính bằng giây và x tính bằng centimet.

- Tìm vận tốc tức thời và gia tốc tức thời của con lắc tại thời điểm t (s).
- Tìm thời điểm mà vận tốc tức thời của con lắc bằng 0.

 Lời giải.

- Vận tốc tức thời và gia tốc tức thời của con lắc tại thời điểm t (s) là

$$\begin{aligned}
 v &= x' = -4\pi \sin \left(\pi t - \frac{2\pi}{3} \right) \\
 a &= v' = -4\pi^2 \cos \left(\pi t - \frac{2\pi}{3} \right)
 \end{aligned}$$

- Thời điểm mà vận tốc tức thời của con lắc bằng 0 là

$$v = x' = -4\pi \sin \left(\pi t - \frac{2\pi}{3} \right) = 0$$



$$\Leftrightarrow \sin\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{2}{3} + k(s), \text{ (với } k \in \mathbb{N}\text{)}$$

HẾT

