

Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh:

Mã đề: 101

Câu 1: Hàm số $y = -x^3 + 3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-1;1)$ B. $(-\infty;-1)$ C. $(0;\sqrt{3})$ D. $(1;+\infty)$

Câu 2: Cho 2 đường tròn nằm trên 2 mặt phẳng phân biệt và có chung dây cung AB. Có bao nhiêu mặt cầu chứa cả 2 đường tròn đó?

- A. 0 B. 1 C. 2 D. vô số

Câu 3: Trong không gian Oxyz cho $M(1;2;-3)$, khoảng cách từ M đến mặt phẳng (Oxy) bằng:

- A. 6 B. 3 C. 10 D. $\sqrt{5}$

Câu 4: Cho khối trụ có chiều cao $h = 8$, bán kính đường tròn đáy bằng 6, cắt khối trụ bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng 4. Diện tích thiết diện tạo thành là:

- A. $16\sqrt{3}$ B. $32\sqrt{3}$ C. $32\sqrt{5}$ D. $16\sqrt{5}$

Câu 5: Tìm tập xác định của hàm số: $y = \log(x+2) + 3\log x^2$.

- A. $(-2;0) \cup (0;+\infty)$ B. $(0;+\infty)$ C. $(-2;+\infty)$ D. $[-2;+\infty)$

Câu 6: Số điểm cực trị của hàm số: $y = \frac{-4}{3}x^3 - 2x^2 - x - 3$ là:

- A. 0 B. 2 C. 1 D. 3

Câu 7: Cho biểu thức $P = \sqrt[4]{a^2 \sqrt[3]{a}}$, ($a > 0$). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $P = a^{\frac{5}{12}}$ B. $P = a^{\frac{7}{12}}$ C. $P = a^{\frac{3}{4}}$ D. $P = a^{\frac{3}{2}}$

Câu 8: Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$?

- A. $y = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{-x}$ B. $y = (1,5)^x$ C. $y = \left(\frac{2}{e}\right)^x$ D. $y = (\sqrt{3}+1)^x$

Câu 9: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \sin 2x$ và $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. Tính $F\left(\frac{\pi}{6}\right)$?

- A. $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5}{4}$ B. $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}$ C. $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$ D. $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

Câu 10: Đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang:

- A. 4 B. 2 C. 3 D. 1

Câu 11: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x.e^x$ trên $[-2;-1]$ bằng:

- A. $\frac{1}{e}$ B. $\frac{-1}{e}$ C. $\frac{2}{e^2}$ D. $\frac{-2}{e^2}$

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Tìm x để $f\left(\frac{1}{x}\right) > f(2)$

- A. $(-\infty;0) \cup \left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ B. $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$ C. $(-\infty;0) \cup \left(0;\frac{1}{2}\right)$ D. $\left(0;\frac{1}{2}\right)$

Câu 13: Cho khối tứ diện ABCD có thể tích bằng 60cm^3 và điểm K trên cạnh AB sao cho $AB = 4KB$. Tính thể tích V của khối tứ diện BKCD.

- A. $V = 20\text{cm}^3$ B. $V = 12\text{cm}^3$ C. $V = 30\text{cm}^3$ D. $V = 15\text{cm}^3$

Câu 14: Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $4^{3x-2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-x^2}$ bằng:

A. 5

B. 2

C. 3

D. 9

Câu 15: Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 6x + 5) + \log_2(x - 1) > 0$ là:

A. $S = (1; +\infty)$ B. $S = [5; 6)$ C. $S = (1; 6)$ D. $S = (5; 6)$

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-1)(x^2-4) \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị.

A. 2

B. 4

C. 5

D. 3

Câu 17: Cho hình chóp SABC có ΔABC đều cạnh $a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với đáy. Góc tạo bởi cạnh SB và mặt phẳng (ABC) bằng 30° . Thể tích khối chóp SABC là:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{9a^3}{8}$ C. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Câu 18: Cho hình nón có đỉnh S, tâm đáy là O, bán kính đáy bằng a, đường sinh l, góc tạo bởi đường sinh và đáy bằng 60° . Tìm kết luận **sai**?

A. $l = 2a$ B. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{3}$ C. $S_{xq} = 2\pi a^2$ D. $S_{TP} = 4\pi a^2$

Câu 19: Phương trình $2\log_{25} x = \log_2 25 \cdot \log_5 2 - \log_5(26 - x)$ có hai nghiệm. Tích của hai nghiệm đó bằng:

A. $\sqrt{5}$

B. 25

C. 5

D. 4

Câu 20: Trong hệ tọa độ Oxyz, cho $\vec{a}(1; m; -1)$ và $\vec{b}(2; 1; 3)$. Tìm giá trị của m để $\vec{a} \perp \vec{b}$.

A. $m = -2$ B. $m = 2$ C. $m = -1$ D. $m = 1$

Câu 21: Cho hình lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh đều bằng $a\sqrt{3}$. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ đó.

A. $V = 2a^3\sqrt{3}$ B. $V = \frac{9a^3}{4}$ C. $V = \frac{3a^3}{4}$ D. $V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{3}$

Câu 22: Bảng biến thiên sau đây là của hàm số nào?

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+		+
y	2	$+\infty$	2

A. $y = \frac{2x+1}{x-1}$ B. $y = \frac{x+21}{1+x}$ C. $y = \frac{2x+1}{x+1}$ D. $y = \frac{x-1}{2x+1}$

Câu 23: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào đúng?

A. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 + 1} = -3$ B. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 - x + 1}{2 - x^2 - x^4} = 2$ C. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 - x - 1} = 3$ D. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x + 1} = -1$

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-3; 2]$ và có bảng biến thiên như sau. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$. Giá trị của $2M + m$ bằng:

x	-3	-1	0	1	2
f'(x)	+	0	-	0	-
f(x)	-2	3	0	2	1

A. 7

B. 8.

C. 6.

D. 4.

Câu 25: Tìm tập xác định của hàm số: $y = \left(\frac{2x-1}{x}\right)^{10}$.

- A. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ B. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ C. $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ D. $\mathbb{R}$

Câu 26: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a , M là điểm trên cạnh AA' sao cho $AM = \frac{3a}{4}$. Tang của góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và (MBC) là:

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. 2 C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

Câu 27: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	4	-2	$+\infty$	

Số nghiệm của phương trình là $f(x^2-2) = 4$ là:

- A. 4 B. 1 C. 3 D. 2

Câu 28: Hàm số nào dưới đây *không phải* là nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3$.

- A. $y = \frac{x^4}{4} + 2$ B. $y = \frac{x^4}{4}$ C. $y = 3x^2$ D. $y = \frac{x^4}{4} - 2^{2019}$

Câu 29: Một mặt cầu có bán kính $R = 4$. Diện tích mặt cầu đó bằng:

- A. 16π B. $\frac{64}{3}\pi$ C. 128π D. 64π

Câu 30: Một hình hộp đứng có hai đáy là hình thoi (không phải là hình vuông) có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

- A. 3 B. 2 C. 1 D. 4

Câu 31: Bạn An trúng tuyển đại học nhưng vì không đủ tiền nộp học phí nên An quyết định vay ngân hàng trong 4 năm, mỗi năm 10 triệu đồng với lãi suất 3%/năm (thủ tục vay một năm một lần vào thời điểm đầu năm học). Khi ra trường An thất nghiệp chưa trả được tiền cho ngân hàng nhưng phải chịu lãi suất 8%/năm. Số tiền An nợ ngân hàng bốn năm đại học và một năm thất nghiệp xấp xỉ bằng:

- A. 46.538.000 đồng B. 45.188.000 đồng C. 43.091.000 đồng D. 48.621.000 đồng

Câu 32: Cho hình chóp $SABC$ có $SA = a$, $SB = 3a\sqrt{2}$, $SC = 2a\sqrt{3}$, $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = 60^\circ$. Thể tích khối chóp $SABC$ là:

- A. $2a^3\sqrt{3}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ C. $a^3\sqrt{3}$ D. $3a^3\sqrt{3}$

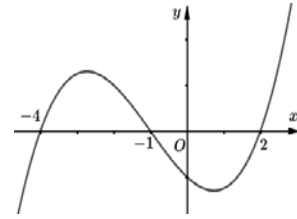
Câu 33: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng a , đáy ABC là tam giác vuông tại B , $\widehat{BCA} = 60^\circ$, góc giữa AA' và (ABC) bằng 60° . Hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) trùng với trọng tâm ΔABC . Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

- A. $V = \frac{73a^3}{208}$ B. $V = \frac{27a^3}{802}$ C. $V = \frac{27a^3}{208}$ D. $V = \frac{27a^3}{280}$

Câu 34: Tập hợp các giá trị thực của m để phương trình $2^x + 3 = m\sqrt{4^x + 1}$ có nghiệm là $(a; b]$. Tính $a^2 + 2b^2$?

- A. 22 B. 18. C. 21 D. 20.

Câu 35: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây:



Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2 - 5)$ nghịch biến trên khoảng nào?

- A. $(-4; -1)$ B. $(2; \frac{5}{2})$ C. $(-1; 1)$ D. $(1; 2)$

Câu 36: Cho hàm số $y = \frac{3x+1}{x-4}$ có đồ thị (C), với mọi điểm M thuộc (C) thì tích các khoảng cách từ M tới 2 đường tiệm cận của (C) bằng:

- A. 11 B. 12 C. 14 D. 13

Câu 37: Gọi X là tập các số tự nhiên gồm 9 chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số từ X, tính xác suất để chọn được một số có mặt bốn chữ số lẻ và chữ số 0 luôn đứng giữa hai chữ số lẻ.

- A. $\frac{5}{54}$ B. $\frac{1}{7776}$ C. $\frac{45}{54}$ D. $\frac{49}{54}$

Câu 38: Trong tất cả các hình chóp tứ giác đều nội tiếp mặt cầu có bán kính bằng 9. Khối chóp có thể tích V lớn nhất bằng:

- A. $V = 144$ B. $V = 144\sqrt{6}$ C. $V = 576\sqrt{2}$ D. $V = 576$

Câu 39: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số: $y = \frac{-1}{3}x^3 - 2mx^2 + mx + 1$ có 2 điểm cực trị x_1, x_2 nằm về 2 phía trục Oy.

- A. $m < 0$ B. $m > 0$ C. $-\frac{1}{4} < m < 0$ D. $\begin{cases} m < -\frac{1}{4} \\ m > 0 \end{cases}$

Câu 40: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để bất phương trình $\left[(m-1)4^x - \frac{2}{4^x} + 2m+1 \right] (x - 4^{1-x}) \geq 0$ nghiệm đúng với mọi x thuộc $[0; 1)$.

- A. 3 B. 2 C. 5 D. 0.

Câu 41: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số: $y = \log_3(9^x - 3^x + m)$ có tập xác định là R.

- A. $m > \frac{1}{4}$ B. $m > 0$ C. $m < \frac{1}{4}$ D. $m \geq \frac{1}{4}$

Câu 42: Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) cắt Ox, Oy lần lượt tại A, B. Có bao nhiêu điểm M có tọa độ nguyên thuộc (C) sao cho $S_{\Delta MAB} = 3$.

- A. 0 B. 2 C. 3 D. 1

Câu 43: Cho hàm số $y = f(x)$ là một hàm đa thức có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
f'(x)	+	0	-	0	+

Hàm số $g(x) = f(x^2 - |x|)$ có số điểm cực trị là:

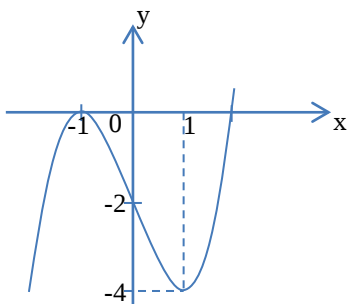
- A. 1 B. 4 C. 7 D. 5

Câu 44: Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ đối xứng với đồ thị của hàm số $y = a^x$, ($a > 0$, $a \neq 1$) qua điểm $M(1; 1)$.

Giá trị của hàm số $y = f(x)$ tại $x = 2 + \log_a \frac{1}{2020}$ bằng:

- A. -2020 B. -2018 C. 2020 D. 2019

Câu 45: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm m để phương trình $f(\sin x) = m$ có nghiệm $x \in (0; \pi)$



- A. $m \in [-4; -2]$ B. $m \in (-4; -2)$ C. $m \in [-4; -2)$ D. $m \in [-4; 0] \setminus \{-2\}$

Câu 46: Xét các số thực a, b sao cho $b > 1$, $\sqrt{a} \leq b < a$, $P = \log_a a + 2 \log_{\sqrt{b}} \left(\frac{a}{b} \right)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi:

- A. $a^2 = b^3$ B. $a = b^2$ C. $a^2 = b$ D. $a^3 = b^2$

Câu 47: Hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và $SA = SB = SC = a$, $\widehat{SAB} = 30^\circ$, $\widehat{SBC} = 60^\circ$, $\widehat{SCA} = 45^\circ$. Tính khoảng cách d giữa 2 đường thẳng AB và SD ?

- A. $\frac{4a\sqrt{11}}{11}$ B. $\frac{a\sqrt{22}}{22}$ C. $\frac{a\sqrt{22}}{11}$ D. $\frac{2a\sqrt{22}}{11}$

Câu 48: Cho các số thực x, y thay đổi thỏa mãn $x^2 + 2y^2 + 2xy = 1$ và hàm số $f(t) = t^4 - t^2 + 2$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $Q = f\left(\frac{x+y+1}{x+2y-2}\right)$. Tính $M + m$?

- A. $8\sqrt{3} - 2$ B. $\frac{303}{2}$ C. $\frac{303}{4}$ D. $4\sqrt{3} + 2$

Câu 49: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a , $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng đáy là trọng tâm của tam giác ABC . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, SD . Biết cosin góc giữa hai đường thẳng CN và SM bằng $\frac{2\sqrt{26}}{13}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng:

- A. $\frac{\sqrt{38}a^3}{24}$ B. $\frac{\sqrt{19}a^3}{12}$ C. $\frac{\sqrt{2}a^3}{12}$ D. $\frac{\sqrt{38}a^3}{12}$

Câu 50: Một công ty dự kiến chi 1 tỷ đồng để sản xuất các thùng đựng sơn hình trụ có dung tích 5 lít. Biết rằng chi phí để làm mặt xung quanh của thùng đó là 100.000 đ/m^2 , chi phí để làm mỗi mặt đáy của thùng là 120.000 đ/m^2 . Hãy tính số thùng sơn tối đa mà công ty đó sản xuất được (Giả sử chi phí cho các mối nối không đáng kể).

- A. 18.209 thùng. B. 57.582 thùng. C. 12.525 thùng. D. 58.135 thùng.

----- HẾT -----

ĐÁP ÁN ĐỀ THI

1.A	2.B	3.B	4.C	5.A	6.A	7.B	8.C	9.B	10.C
11.B	12.A	13.D	14.A	15.D	16.D	17.A	18.D	19.B	20.D
21.B	22.C	23.D	24.C	25.A	26.A	27.C	28.C	29.D	30.A
31.A	32.C	33.C	34.C	35.B	36.D	37.A	38.D	39.B	40.D
41.A	42.B	43.D	44.B	45.C	46.A	47.C	48.C	49.D	50.D

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn A

$$y = -x^3 + 3x.$$

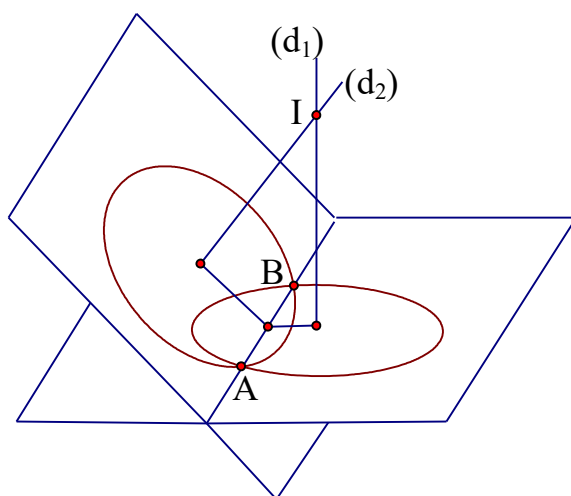
$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R}.$$

$$y' = -3x^2 + 3.$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	-	0	+	0	-

Hàm số $y = -x^3 + 3x$ đồng biến trong khoảng $(-1; 1)$.

Câu 2: Chọn B



Gọi (d_1) và (d_2) lần lượt là trục của hai đường tròn. Suy ra tất cả các điểm trên (d_1) và (d_2) luôn cách đều A và B . Do đó cả hai đường thẳng (d_1) và (d_2) đều nằm trong mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB .

Vì hai đường tròn đã cho nằm trong hai mặt phẳng phân biệt nên (d_1) và (d_2) là hai đường thẳng phân biệt không song song với nhau. Từ đó suy ra (d_1) và (d_2) cắt nhau tại một điểm duy nhất.

Gọi I là tâm của mặt cầu chứa cả hai đường tròn đã cho. Khi đó I cách đều tất cả các điểm thuộc hai đường tròn đó. Suy ra I là giao điểm của (d_1) và (d_2) .

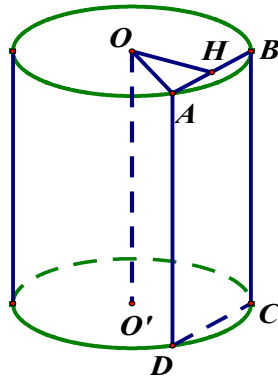
Ta lại có (d_1) và (d_2) cắt nhau tại một điểm duy nhất nên có duy nhất một điểm I . Từ đó có duy nhất một mặt cầu thỏa mãn yêu cầu của đề bài là mặt cầu tâm I , bán kính IA .

Câu 3: Chọn B

Ta có phương trình mặt phẳng (Oxy) : $z = 0$.

Khoảng cách từ $M(1; 2; -3)$ đến mặt phẳng (Oxy) bằng: $d_{(M; (Oxy))} = \frac{|-3|}{\sqrt{1^2}} = 3$.

Câu 4: Chọn C



Khi cắt khối trụ bởi mặt phẳng song song với trục ta được thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$ với $AD = h$. Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow OH \perp AB, OH = 4$.

Xét $\triangle AHO$ vuông tại H có: $AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = \sqrt{36 - 16} = 2\sqrt{5}$.

$$\Rightarrow AB = 2AH = 4\sqrt{5}.$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = AB \cdot AD = 8 \cdot 4\sqrt{5} = 32\sqrt{5}.$$

Câu 5: Chọn A

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x+2 > 0 \\ x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x \neq 0 \end{cases}.$

Vậy tập xác định của hàm số $y = \log(x+2) + 3\log x^2$ là $(-2; 0) \cup (0; +\infty)$.

Câu 6: Chọn A

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = -4x^2 - 4x - 1 = -(2x+1)^2 \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Hàm số y nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số y không có cực trị.

Câu 7: Chọn B

$$\text{Ta có } P = \sqrt[4]{a^2 \sqrt[3]{a}} = (a^2 \cdot a^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{4}} = (a^{\frac{7}{3}})^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{7}{12}}.$$

Câu 8: Chọn C

Hàm số $y = \left(\frac{2}{e}\right)^x$ có $y' = \left(\frac{2}{e}\right)^x \ln\left(\frac{2}{e}\right) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Nên hàm số $y = \left(\frac{2}{e}\right)^x$ luôn nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$.

Câu 9: Chọn B

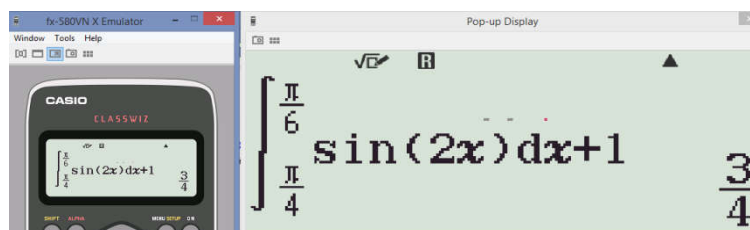
Cách 1: $\int f(x) dx = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + C.$

Mặt khác, ta lại có $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ nên $-\frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2} + C = 1 \Leftrightarrow C = 1.$

$$\text{Từ đó: } F(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x + 1.$$

$$\text{Vậy: } F\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{3} + 1 = \frac{3}{4}.$$

Cách 2: Theo định nghĩa tích phân ta có (Đơn vị Radian): $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x dx + F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{4}.$



Câu 10: Chọn C

Tập xác định của hàm số đã cho là: $D = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty$; Đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = -1$. Đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang.

Vậy tổng số tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số là 3.

Câu 11: Chọn B

Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-2; -1]$ và có đạo hàm $f'(x) = (1+x)e^x < 0, \forall x \in (-2; -1)$

$\Rightarrow$ Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $[-2; -1]$.

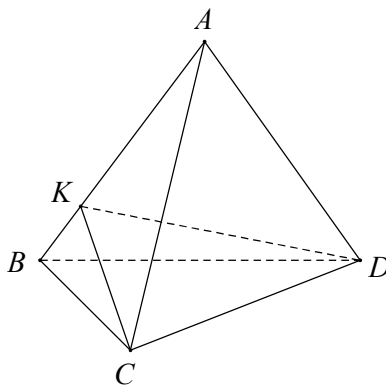
Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên $[-2; -1]$ là $\min_{[-2; -1]} f(x) = f(-1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$.

Câu 12: Chọn A

Từ giả thiết ta có $f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$, do đó hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Đề $f\left(\frac{1}{x}\right) > f(2)$ thì $\frac{1}{x} < 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Câu 13: Chọn D



Ta có $V = V_{BKCD} = V_{KBCD}$.

Áp dụng công thức tỷ số thể tích tứ diện: $\frac{V_{KBCD}}{V_{ABCD}} = \frac{KB}{AB} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow V_{KBCD} = \frac{1}{4} V_{ABCD} = 15 \text{cm}^3$.

Câu 14: Chọn A

Ta có

$$4^{3x-2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-x^2} \Leftrightarrow 4^{3x-2} = 4^{x^2} \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Như vậy tổng bình phương các nghiệm của phương trình bằng 5.

Câu 15: Chọn D

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 6x + 5) + \log_2(x - 1) > 0 \quad (*)$$

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 6x + 5 > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 5.$

(*) $\Leftrightarrow \log_2(x-1) > \log_2(x^2 - 6x + 5)$
 $\Leftrightarrow x - 1 > x^2 - 6x + 5$
 $\Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 6.$

Kết hợp điều kiện ta có tập nghiệm: $S = (5; 6).$

Câu 16: Chọn D

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$

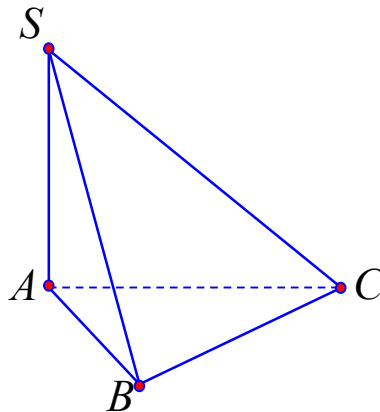
Bảng xét dấu $f'(x)$:

x	$-\infty$	-2	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

Nhận xét: Phương trình $f'(x) = 0$ có $x = 0$ là nghiệm bội 2 nên $x = 0$ không phải là điểm cực trị.

Câu 17: Chọn A



Diện tích ΔABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{(a\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{4}.$

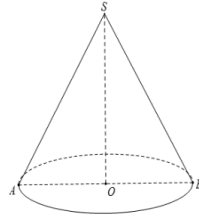
$SA \perp (ABC)$ nên AB là hình chiếu của SB lên $(ABC).$

$\Rightarrow \widehat{(SB, (ABC))} = \widehat{(SB, AB)} = \widehat{SBA} = 30^\circ.$

ΔSAB vuông tại A có $SA = AB \cdot \tan \widehat{SBA} = a\sqrt{3} \cdot \tan 30^\circ = a.$

Thể tích khối chóp là $V = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot a = \frac{a^3 \sqrt{3}}{4}.$

Câu 18: Chọn D



Xét $\triangle SBO$ vuông tại O có $\widehat{SBO} = 60^\circ$; $OB = a \Rightarrow l = SB = \frac{OB}{\cos 60^\circ} = 2a \Rightarrow$ **A đúng**.

Ta có: $h = SO = OB \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$. Hình nón đã cho có:

$$V = \frac{1}{3}B.h = \frac{1}{3}\pi a^2 \cdot a\sqrt{3} = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{3} \Rightarrow \text{B đúng.}$$

$$S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot a \cdot 2a = 2\pi a^2 \Rightarrow \text{C đúng.}$$

$$S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy} = 2\pi a^2 + \pi a^2 = 3\pi a^2 \Rightarrow \text{D sai.}$$

Câu 19: Chọn B

Điều kiện xác định: $0 < x < 26$.

Với điều kiện đó ta có:

$$2\log_{25} x = \log_2 25 \cdot \log_5 2 - \log_5 (26 - x)$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1}{2} \log_5 x = 2\log_2 5 \cdot \log_5 2 - \log_5 (26 - x)$$

$$\Leftrightarrow \log_5 x = 2 - \log_5 (26 - x)$$

$$\Leftrightarrow \log_5 [x \cdot (26 - x)] = 2$$

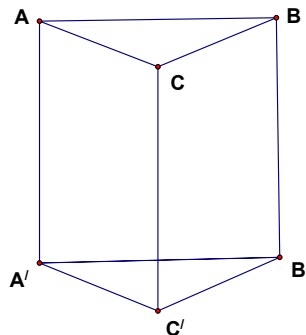
$$\Leftrightarrow -x^2 + 26x - 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 25 \end{cases} \text{ (Thỏa mãn điều kiện xác định). Vậy phương trình có hai nghiệm là: } \begin{cases} x = 1 \\ x = 25 \end{cases}.$$

Tích hai nghiệm bằng 25.

Câu 20: Chọn D. $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot 2 + m \cdot 1 + (-1) \cdot 3 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Câu 21: Chọn B



Do lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng $a\sqrt{3}$ nên:

$$\text{chiều cao } h = AA' = a\sqrt{3} \text{ và diện tích đáy } S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2}a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}.$$

$$\text{Thể tích lăng trụ: } V = h \cdot S_{\triangle ABC} = a\sqrt{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}a^2}{4} = \frac{9a^3}{4}.$$

Câu 22: Chọn C

Từ bảng biến thiên ta thấy:

Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ nên loại A, D.

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = -1$, tiệm cận ngang $y = 2$ nên loại B.

Câu 23: Chọn D

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 3.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 - x + 1}{2 - x^2 - x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}}{\frac{2}{x^4} - \frac{1}{x^2} - 1} = -2.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}}{1 + \frac{1}{x}} = -1.$$

Câu 24: Chọn C

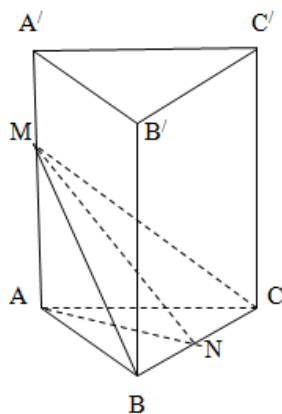
Từ bảng biến thiên của hàm số suy ra $\max_{[-1;2]} f(x) = 3 \Rightarrow M = 3$ và $\min_{[-1;2]} f(x) = 0 \Rightarrow m = 0$

Từ đó suy ra $2M + m = 6$.

Câu 25: Chọn A

Ta có $10 \in \mathbb{N}$ nên hàm số xác định khi $\frac{2x-1}{x}$ xác định hay khi $x \neq 0$.

Suy ra tập xác định của hàm số $y = \left(\frac{2x-1}{x}\right)^{10}$ là $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Câu 26: Chọn A

Gọi N là trung điểm BC

$$\begin{cases} AM \perp BC \\ AN \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AMN) \Rightarrow BC \perp MN$$

Ta có:

$$\begin{cases} BC = (MBC) \cap (ABC) \\ AN \subset (ABC), AN \perp BC \\ MN \subset (MBC), MN \perp BC \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Góc hợp bởi hai mặt phẳng (ABC) và (MBC) là $\widehat{MNA}$.

Xét $\triangle AMN$ vuông tại A có: $\tan \widehat{MNA} = \frac{AM}{AN} = \frac{\frac{3a}{4}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 27: Chọn C

Đặt $t = x^2 - 2, t \geq -2$

Phương trình $f(x^2 - 2) = 4$ chuyển về $f(t) = 4$ với $t \geq -2$.

Từ bảng biến thiên của hàm số ta có $\begin{cases} f(t) = 4 \\ t \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = a \ (a > 3) \end{cases}$

+) Với $t = -2 \Rightarrow x^2 - 2 = -2 \Leftrightarrow x = 0$

+) Với $t = a \ (a > 3) \Leftrightarrow x^2 - 2 = a \Leftrightarrow x^2 = 2 + a$ do $2 + a > 5$ nên phương trình này có 2 nghiệm phân biệt khác 0.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 28: Chọn C

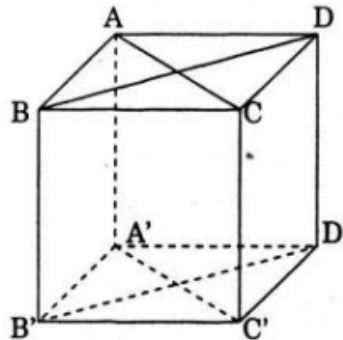
Theo định nghĩa nguyên hàm ta chọn C, vì: $y = 3x^2 \Rightarrow y' = (3x^2)' \neq f(x) = x^3$.

Câu 29: Chọn D

Diện tích mặt cầu được tính theo công thức: $S = 4\pi R^2$ (trong đó R : là bán kính mặt cầu).

Áp dụng công thức trên ta có, diện tích mặt cầu đó là: $S = 4\pi \cdot 4^2 = 64\pi$ (đvdt).

Câu 30: Chọn A



Do hình hộp đứng có hai đáy là hình thoi nên có 3 mặt phẳng đối xứng là:

+) Mặt phẳng $ACC'A'$;

+) Mặt phẳng $BDD'B'$

+) Mặt phẳng đi qua trung điểm 4 cạnh bên

Câu 31: Chọn A

Đầu năm thứ nhất, An vay: $P_1 = 10$ (triệu đồng)

Đầu năm thứ hai, An vay: $P_2 = P_1 \cdot (1 + 0,03) + 10 = 10 \cdot (1 + 0,03)^1 + 10$ (triệu đồng)

Đầu năm thứ ba, An vay: $P_3 = P_2 \cdot (1 + 0,03) + 10 = 10 \cdot (1 + 0,03)^2 + 10 \cdot (1 + 0,03)^1 + 10$ (triệu đồng)

Đầu năm thứ tư, An vay:

$P_4 = P_3 \cdot (1 + 0,03) + 10 = 10 \cdot (1 + 0,03)^3 + 10 \cdot (1 + 0,03)^2 + 10 \cdot (1 + 0,03)^1 + 10$ (triệu đồng)

Hết năm thứ tư, số tiền nợ là:

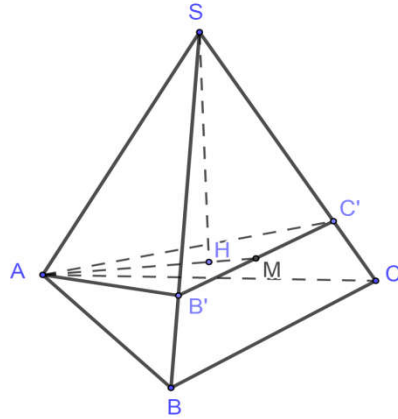
$$P_5 = P_4 \cdot (1 + 0.03) = 10 \cdot (1 + 0.03)^4 + 10 \cdot (1 + 0.03)^3 + 10 \cdot (1 + 0.03)^2 + 10 \cdot (1 + 0.03) \\ = 10 \cdot (1 + 0.03) \cdot [(1 + 0.03)^3 + (1 + 0.03)^2 + (1 + 0.03)^1 + 1]$$

$$= 10 \cdot (1 + 0.03) \cdot \frac{(1 + 0.03)^4 - 1}{(1 + 0.03) - 1} \text{ (triệu đồng).}$$

Sau 1 năm thất nghiệp, số tiền nợ là:

$$P = P_5 \cdot (1 + 0.08) \cdot 10^6 = 10 \cdot (1 + 0.03) \cdot \frac{(1 + 0.03)^4 - 1}{(1 + 0.03) - 1} \cdot (1 + 0.08) \cdot 10^6 \approx 46\,538\,000 \text{ (đồng)}$$

Câu 32: Chọn C



Trên các tia SB, SC lần lượt lấy các điểm B', C' sao cho $SB' = SC' = a$. Khi đó, $SAB'C'$ là tứ diện đều cạnh a . Gọi M là trung điểm $B'C'$, H là trọng tâm $\triangle AB'C' \Rightarrow SH \perp (AB'C')$.

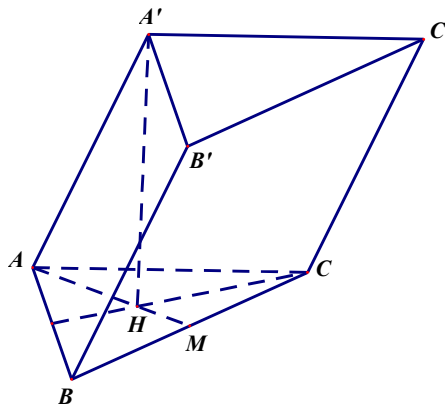
$$AH = \frac{2}{3} AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}, SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$S_{\triangle AB'C'} = \frac{1}{2} AM \cdot B'C' = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, V_{SAB'C'} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{\triangle AB'C'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

Áp dụng công thức tỉ số thể tích :

$$\frac{V_{SABC}}{V_{SAB'C'}} = \frac{SB}{SB'} \cdot \frac{SC}{SC'} = 3\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{3} = 6\sqrt{6} \Rightarrow V_{SABC} = 6\sqrt{6} \cdot V_{SAB'C'} = 6\sqrt{6} \cdot \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = a^3\sqrt{3}.$$

Câu 33: Chọn C



Gọi H là hình chiếu của A' lên (ABC) , M là trung điểm của BC . Ta có:

$$\text{Xét } \triangle AHA' \Rightarrow \widehat{A'AH} = 60^\circ \Rightarrow \begin{cases} \sin 60^\circ = \frac{A'H}{AA'} \Rightarrow A'H = \frac{\sqrt{3}}{2}a \\ \cos 60^\circ = \frac{AH}{AA'} \Rightarrow AH = \frac{a}{2} \Rightarrow AM = \frac{3a}{4} \end{cases}$$

$$\text{Đặt } BC = 2x \Rightarrow AC = 4x \Rightarrow AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = 2\sqrt{3}x$$

$$\text{Xét } \triangle ABM \Rightarrow AB^2 + BM^2 = AM^2 \Leftrightarrow x = \frac{3a}{4\sqrt{13}}$$

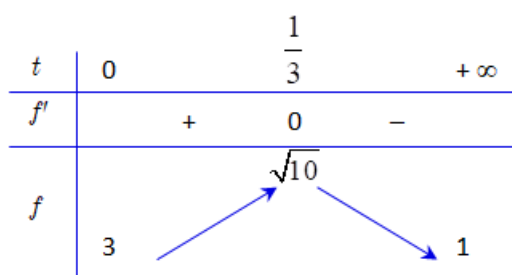
$$\text{Ta có: } S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{9a^2\sqrt{3}}{104} \Rightarrow V = A'H \cdot S_{ABC} = \frac{27a^3}{208}.$$

Câu 34: Chọn C

$$\text{Đặt } t = 2^x (t > 0), \text{ phương trình trở thành: } t + 3 = m\sqrt{t^2 + 1} \Leftrightarrow \frac{t+3}{\sqrt{t^2+1}} = m$$

$$\text{Đặt } f(t) = \frac{t+3}{\sqrt{t^2+1}}, t > 0.$$

$$f'(t) = \frac{1-3t}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$$



Phương trình có nghiệm khi $m \in (1; \sqrt{10}]$.

Do đó $a = 1, b = \sqrt{10}$. Từ đó suy ra $a^2 + 2b^2 = 21$.

Câu 35: Chọn B

Ta có: $g'(x) = 2xf'(x^2 - 5)$

Hàm số $y = g(x)$ nghịch biến khi $g'(x) < 0 \Leftrightarrow 2xf'(x^2 - 5) < 0$.

$$\text{TH1: } \begin{cases} x < 0 \\ f'(x^2 - 5) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ -4 < x^2 - 5 < -1 \\ x^2 - 5 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 1 < x^2 < 4 \\ x^2 > 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < -1 \\ x < -\sqrt{7} \end{cases}$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} x > 0 \\ f'(x^2 - 5) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 5 < -4 \\ -1 < x^2 - 5 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 4 < x^2 < 7 \\ x^2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < \sqrt{7} \\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

Câu 36: Chọn D

Với mọi điểm M thuộc (C) , ta có: $M\left(m; \frac{3m+1}{m-4}\right)$.

Hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số (C) là: $x = 4; y = 3$ hay $x - 4 = 0; y - 3 = 0$.

Khoảng cách từ M tới đường tiệm cận đứng là: $|m-4|$.

Khoảng cách từ M tới đường tiệm cận ngang là: $\left| \frac{3m+1}{m-4} - 3 \right| = \left| \frac{13}{m-4} \right| = \frac{13}{|m-4|}$.

Tích các khoảng cách từ M tới hai đường tiệm cận của (C) bằng:

$$|m-4| \cdot \frac{13}{|m-4|} = 13.$$

Câu 37: Chọn A

Không gian mẫu $n(\Omega) = 9!.9$.

Coi hai số lẻ và số 0 đứng giữa hai số đó là một nhóm.

Chọn hai số lẻ từ 5 số lẻ sắp xếp vào hai bên số 0 có A_5^2 cách.

Chọn hai số lẻ từ 3 số lẻ còn lại có C_3^2 cách.

Chọn bốn số chẵn có 1 cách.

Vậy tổng cộng số cách chọn thỏa mãn là $n(A) = 7!.C_3^2.A_5^2$

$$\text{Xác suất cần tính là } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{7!.C_3^2.A_5^2}{9!.9} = \frac{5}{54}.$$

Cách khác:

Không gian mẫu $n(\Omega) = 9!.9$.

Xét các số thỏa mãn đề bài:

Có C_5^4 cách chọn 4 chữ số lẻ.

Có 7 cách chọn chữ số 0 (do chữ số 0 không thể đứng đầu và cuối)

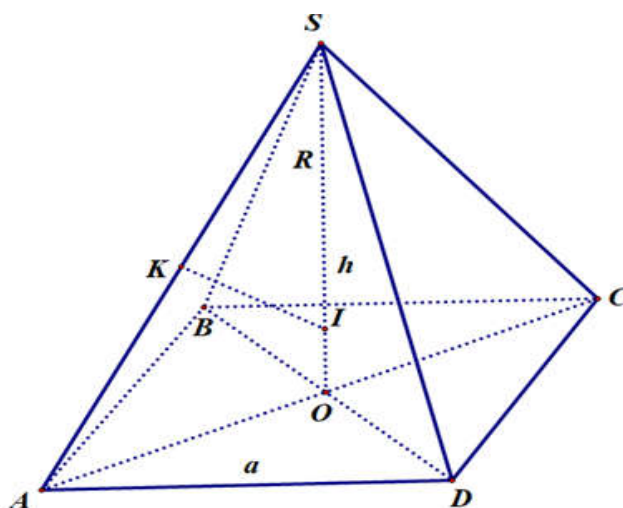
Có A_4^2 cách chọn và xếp hai chữ số lẻ đứng hai bên số 0.

Có $6!$ cách xếp 6 chữ số còn lại vào 6 vị trí còn lại.

Khi đó $n(A) = C_5^4.7.A_4^2.6! = 302400$.

$$\text{Xác suất cần tính là } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{5}{54}.$$

Câu 38: Chọn D



Đặt cạnh hình vuông $AD = a$, đường cao $SO = h$. Gọi K là trung điểm SA , trong mặt phẳng (SAO) đường trung trực của đoạn SA cắt SO tại I .

Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đều $S.ABCD$ và bán kính $R = SI$.

$$\text{Ta có } AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}, SA = \sqrt{\frac{a^2}{2} + h^2}, SK = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^2}{2} + h^2}.$$

$$\text{Mặt khác } \triangle SKI \text{ đồng dạng với } \triangle SOA \text{ nên } \frac{SK}{SO} = \frac{SI}{SA} \Leftrightarrow R = SI = \frac{SK \cdot SA}{SO} = \frac{\frac{a^2}{2} + h^2}{2h}.$$

$$\text{Theo giả thiết } R = 9 \Leftrightarrow \frac{\frac{a^2}{2} + h^2}{2h} = 9 \Leftrightarrow a^2 = 36h - 2h^2.$$

$$\text{Ta có } V = \frac{1}{3} a^2 h = \frac{1}{3} (36h - 2h^2) h = \frac{1}{3} (36 - 2h) \cdot h \cdot h \stackrel{\text{Così}}{\leq} \frac{1}{3} \left(\frac{36 - 2h + h + h}{3} \right)^3 = 576.$$

Vậy $V_{\max} = 576$ đạt được khi $a = h = 12$.

Câu 39: Chọn B

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } y' = -x^2 - 4mx + m.$$

Để hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 nằm về hai phía trục Oy thì phương trình

$$-x^2 - 4mx + m = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt } x_1, x_2 \text{ trái dấu } \Leftrightarrow -m < 0 \Leftrightarrow m > 0.$$

Câu 40: Chọn D

Với mọi x thuộc $[0; 1)$, $0 < 1 - x \leq 1 \Leftrightarrow 1 < 4^{1-x} \leq 4 \Rightarrow x < 1 < 4^{1-x} \Rightarrow x - 4^{1-x} < 0$.

$$\text{Ta có } \left[(m-1)4^x - \frac{2}{4^x} + 2m + 1 \right] (x - 4^{1-x}) \geq 0 \Leftrightarrow \left[(m-1)4^x - \frac{2}{4^x} + 2m + 1 \right] \leq 0 \quad (1), \forall x \in [0; 1)$$

Đặt $t = 4^x, t \in [1; 4)$.

$$(1) \Leftrightarrow (m-1)t - \frac{2}{t} + 2m + 1 \leq 0 \Leftrightarrow (m-1)t^2 + (2m+1)t - 2 \leq 0 \Leftrightarrow (t^2 + 2t)m \leq t^2 - t + 2$$

$$\Leftrightarrow m \leq \frac{t^2 - t + 2}{t^2 + 2t} = f(t), t \in [1; 4) \quad (2)$$

$$\text{Xét } f(t) = \frac{t^2 - t + 2}{t^2 + 2t}, t \in [1; 4), f'(t) = \frac{3t^2 - 4t - 4}{(t^2 + 2t)^2}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

t	1	2	4
$f'(t)$		- 0 +	
$f(t)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{12}$

Dựa vào bảng biến thiên, $(2) \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{2}$. Vì m nguyên dương nên không tồn tại giá trị nào của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 41: Chọn A

Hàm số $y = \log_3(9^x - 3^x + m)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow 9^x - 3^x + m > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (*)$$

Đặt $t = 3^x$ (điều kiện $t > 0$)

$$\text{Khi đó, } (*) \Leftrightarrow t^2 - t + m > 0 \quad \forall t > 0 \Leftrightarrow m > -t^2 + t \quad \forall t > 0$$

Xét hàm số $f(t) = -t^2 + t$ với $t > 0$

$$f'(t) = -2t + 1$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$

Bảng biến thiên

t	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(t)$		0	
		+	-
$f(t)$	0	$\frac{1}{4}$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có $m > f(t) \quad \forall t > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{4}$.

Câu 42: Chọn B

Từ giả thiết ta có $A(1;0), B(0;-1) \Rightarrow AB = \sqrt{2}$

Phương trình đoạn thẳng $AB: x - y - 1 = 0$.

Gọi $M\left(x_M; \frac{x_M - 1}{x_M + 1}\right) \in (C) \quad (x_M \neq -1)$.

$$\text{Vì } S_{\Delta MAB} = 3 \Leftrightarrow \frac{d(M; AB)}{2} \cdot AB = 3 \Leftrightarrow d(M; AB) \cdot AB = 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left|x_M - \frac{x_M - 1}{x_M + 1} - 1\right|}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = 6 \Leftrightarrow \left|\frac{x_M^2 - x_M}{x_M + 1}\right| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x_M^2 - x_M}{x_M + 1} = 6 \\ \frac{x_M^2 - x_M}{x_M + 1} = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M^2 - 7x_M - 6 = 0 \\ x_M^2 + 5x_M + 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{7 + \sqrt{73}}{2} (l) \\ x_M = \frac{7 - \sqrt{73}}{2} (l) \end{cases} \quad .$$

$$\begin{cases} x_M = -2 \Rightarrow y_M = 3 \text{ (TM)} \\ x_M = -3 \Rightarrow y_M = 2 \text{ (TM)} \end{cases}$$

Vậy có 2 điểm M có tọa độ nguyên.

Câu 43: Chọn D

- Với $x > 0$, ta có $g(x) = f(x^2 - x)$, $g'(x) = (2x - 1)f'(x^2 - x)$.

$$\text{Ta có: } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 2x - 1 = 0 \\ f'(x^2 - x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 2x - 1 = 0 \\ x^2 - x = 1 \\ x^2 - x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ VN \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}.$$

- Với $x < 0$, ta có $g(x) = f(x^2 + x)$, $g'(x) = (2x + 1)f'(x^2 + x)$.

$$\text{Ta có: } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 2x + 1 = 0 \\ f'(x^2 + x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 2x + 1 = 0 \\ x^2 + x = 1 \\ x^2 + x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x = \frac{-1}{2} \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ VN \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{2} \\ x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}.$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$			
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$	0	$-$	0	$+$

Từ BBT ta suy ra hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 44: Chọn B

Gọi đồ thị hai hàm số $y = f(x)$ và $y = a^x$ lần lượt là $(C), (C')$.

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ đối xứng với đồ thị hàm số $y = a^x$ qua $M(1;1)$, nghĩa là với bất kì điểm G nào thuộc đồ thị (C) , lấy G' đối xứng với G qua $M(1;1)$ thì G' phải thuộc đồ thị (C') .

Suy ra M là trung điểm GG'

Ta có $x = 2 + \log_a \frac{1}{2020} = 2 - \log_a 2020$.

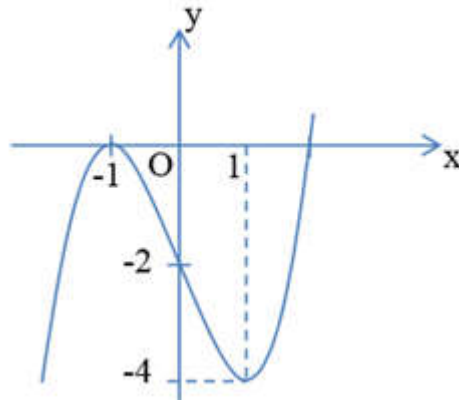
Suy ra $x_G = 2 - \log_a 2020$.

G' đối xứng với G qua $M(1;1)$ thì $x_{G'} = \log_a 2020 \Rightarrow y_{G'} = a^{\log_a 2020} = 2020$.

$\Rightarrow y_G = -2018$.

Vậy giá trị cần tìm là -2018 .

Câu 45: Chọn C



Đặt $t = \sin x$

Với $x \in (0; \pi) \Rightarrow t \in (0; 1]$

Phương trình $f(\sin x) = m$ có nghiệm $x \in (0; \pi) \Leftrightarrow$ phương trình $f(t) = m$ có nghiệm $t \in (0; 1]$

Dựa vào đồ thị, phương trình $f(t) = m$ có nghiệm $t \in (0; 1] \Leftrightarrow m \in [-4; -2)$.

Câu 46: Chọn A

Với $b > 1, \sqrt{a} \leq b < a$, ta có $P = \frac{1}{\log_a \frac{a}{b}} + 4 \log_b \left(\frac{a}{b} \right) = \frac{1}{1 - \log_a b} + \frac{4}{\log_a b} - 4$.

Đặt $t = \log_a b$. Vì $a > b > 1$ nên từ $\sqrt{a} \leq b < a$ suy ra $\log_a \sqrt{a} \leq \log_a b < \log_a a$, nghĩa là $\frac{1}{2} \leq t < 1$.

Như vậy $P = P(t) = \frac{1}{1-t} + \frac{4}{t} - 4$ với $t \in \left[\frac{1}{2}; 1 \right)$.

Ta có $P'(t) = \frac{1}{(1-t)^2} - \frac{4}{t^2} = \frac{-3t^2 + 8t - 4}{t^2(1-t)^2}$.

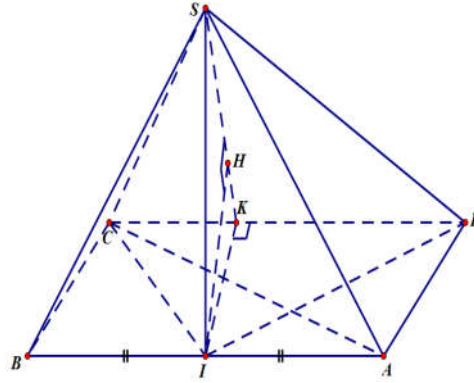
$$P'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \notin \left[\frac{1}{2}; 1 \right) \\ t = \frac{2}{3} \in \left[\frac{1}{2}; 1 \right) \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên $P(t)$:

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1
$P'(t)$	-	0	+
$P(t)$		5	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta kết luận được P đạt giá trị nhỏ nhất bằng 5 tại $t = \frac{2}{3}$, khi đó $\log_a b = \frac{2}{3} \Leftrightarrow a^2 = b^3$.

Câu 47: Chọn C



+) Ta có:

$$\Delta SAB \text{ cân tại } S \text{ có } \widehat{SAB} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{ASB} = 180^\circ - 2.30^\circ = 120^\circ.$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{SA^2 + SB^2 - 2.SA.SB.\cos 120^\circ} = \sqrt{a^2 + a^2 - 2a^2.\left(-\frac{1}{2}\right)} = a\sqrt{3}.$$

$$\Delta SBC \text{ cân tại } S \text{ có } \widehat{SBC} = 60^\circ \text{ nên } \Delta SBC \text{ đều suy ra } BC = a.$$

$$\Delta SCA \text{ cân tại } S \text{ có } \widehat{SCA} = 45^\circ \text{ nên } \Delta SCA \text{ vuông cân tại } S \text{ suy ra } AC = a\sqrt{2}.$$

Nhận thấy $AC^2 + CB^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2 = AB^2$ nên ΔABC vuông tại C .

+) Gọi I là hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$. Ta có $SA = SB = SC$ suy ra $IA = IB = IC$, do đó I là trung điểm của AB (vì ΔABC vuông tại C).

Gọi K là hình chiếu của I trên CD , gọi H là hình chiếu của I trên SK .

Ta có $SI \perp (ABCD) \Rightarrow SI \perp CD$, mà $IK \perp CD$ suy ra $CD \perp (SIK) \Rightarrow CD \perp IH$.

$$\text{Như vậy } \begin{cases} IH \perp CD \\ IH \perp SK \end{cases} \Rightarrow IH \perp (SCD).$$

Lại có $AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel (SCD)$ mà $SD \subset (SCD)$ suy ra:

$$d = d(AB, SD) = d(AB, (SCD)) = d(I, (SCD)) = IH.$$

$$+) \text{ Ta có } IK = d(AB, CD) = d(C, AB) = \frac{2S_{\Delta ABC}}{AB} = \frac{AC.BC}{AB} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$IS = \sqrt{SA^2 - IA^2} = \sqrt{a^2 - \frac{AB^2}{4}} = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2}.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{IH^2} = \frac{1}{IK^2} + \frac{1}{IS^2} = \frac{11}{2a^2} \Rightarrow IH = \frac{a\sqrt{22}}{11}. \text{ Vậy } d = IH = \frac{a\sqrt{22}}{11}.$$

Câu 48: Chọn C

Ta có:

$$x^2 + 2y^2 + 2xy = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow (x+y)^2 + y^2 = 1.$$

$$\text{Do đó ta có thể đặt: } \begin{cases} x+y = \sin \alpha \\ y = \cos \alpha \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó xét } t = \frac{x+y+1}{x+y+y-2} = \frac{\sin \alpha + 1}{\sin \alpha + \cos \alpha - 2}$$

$$\Leftrightarrow t \sin \alpha + t \cos \alpha - 2t = \sin \alpha + 1 \text{ (do } \sin \alpha + \cos \alpha - 2 = \sqrt{2} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - 2 \leq \sqrt{2} - 2 < 0)$$

$$\Leftrightarrow (t-1)\sin \alpha + t \cos \alpha = 2t + 1.$$

Phương trình có nghiệm (ẩn α) khi và chỉ khi $(t-1)^2 + t^2 \geq (2t+1)^2$

$$\Leftrightarrow 2t^2 + 6t \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq t \leq 0.$$

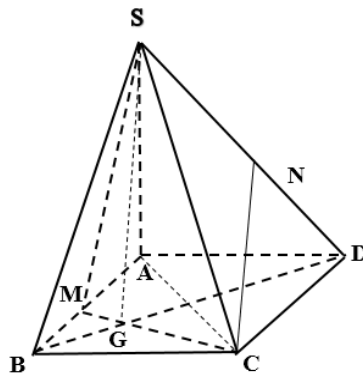
Bài toán quy về tìm GTLN, GTNN của $Q = f\left(\frac{x+y+1}{x+2y-2}\right) = f(t) = t^4 - t^2 + 2$ trên đoạn $[-3; 0]$.

$$\text{Có } f'(t) = 4t^3 - 2t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{\sqrt{2}}{2} (L) \\ t = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$f(-3) = 74; f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{7}{4}; f(0) = 2.$$

$$\text{Vậy } M = 74, m = \frac{7}{4} \text{ nên } M + m = 74 + \frac{7}{4} = \frac{303}{4}.$$

Câu 49: Chọn D



+) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC , ta có $SG \perp (ABCD)$.

Từ giả thiết suy ra các tam giác ABC, ACD là các tam giác đều cạnh a , do đó ta tính được

$$CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}; CG = \frac{a\sqrt{3}}{3}; MG = \frac{a\sqrt{3}}{6}; GD = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Ta có: } CM \perp AB \Rightarrow CM \perp CD \Rightarrow DM = \sqrt{CM^2 + CD^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$$

$$\begin{cases} CD \perp CM \\ CD \perp SG \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SCM) \Rightarrow CD \perp SM \Rightarrow \overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{DC} = 0.$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{SM} \cdot (\overrightarrow{ND} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{DC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{SD}.$$

$$\text{+) Đặt } SG = x \ (x > 0). \text{ Khi đó } \begin{cases} SM = \sqrt{MG^2 + SG^2} = \sqrt{\frac{a^2}{12} + x^2} \\ SC = \sqrt{CG^2 + SG^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} + x^2} \\ SD = \sqrt{DG^2 + SG^2} = \sqrt{\frac{4a^2}{3} + x^2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Nên ta có } \overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{NC} &= \frac{1}{2} \overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{SD} = \frac{1}{2} SM \cdot SD \cdot \cos(\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{SD}) = \frac{1}{2} SM \cdot SD \cdot \cos \widehat{MSD} \\ &= \frac{1}{2} SM \cdot SD \cdot \frac{SM^2 + SD^2 - DM^2}{2SM \cdot SD} = \frac{1}{4} (SM^2 + SD^2 - DM^2) = \frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{12}. \quad (1) \end{aligned}$$

$$+) \text{ Mặt khác, áp dụng công thức đường trung tuyến ta có } CN^2 = \frac{CS^2 + CD^2}{2} - \frac{SD^2}{4} = \frac{a^2}{3} + \frac{x^2}{4}.$$

$$\text{Ta cũng có } \cos(\widehat{SM, CN}) = |\cos(\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{NC})| \Rightarrow [\cos(\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{NC})]^2 = [\cos(\widehat{SM, CN})]^2 = \frac{8}{13}.$$

$$\text{Do đó } (\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{NC})^2 = [SM \cdot CN \cdot \cos(\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{NC})]^2 = \frac{8}{13} \left(\frac{a^2}{12} + x^2 \right) \left(\frac{a^2}{3} + \frac{x^2}{4} \right). \quad (2)$$

$$+) \text{ Từ (1) và (2) suy ra } \frac{8}{13} \left(\frac{a^2}{12} + x^2 \right) \left(\frac{a^2}{3} + \frac{x^2}{4} \right) = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{12} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{13} \left(\frac{1}{12} + \frac{x^2}{a^2} \right) \left(\frac{1}{3} + \frac{x^2}{4a^2} \right) = \left(\frac{x^2}{2a^2} - \frac{1}{12} \right)^2. \quad (*)$$

$$\text{Đặt } y = \frac{x^2}{a^2} \quad (y > 0). \text{ Khi đó } (*) \text{ trở thành } \frac{8}{13} \left(\frac{1}{12} + y \right) \left(\frac{1}{3} + \frac{y}{4} \right) = \left(\frac{y}{2} - \frac{1}{12} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow 180y^2 - 564y - 19 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{19}{6} \\ y = -\frac{1}{30} \quad (L) \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } SG = x = \sqrt{ya^2} = \frac{a\sqrt{114}}{6} \text{ nên } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot AB \cdot CM \cdot SG = \frac{\sqrt{38}a^3}{12}.$$

Câu 50: Chọn D

□ Gọi bán kính và chiều cao của mỗi thùng sơn lần lượt là R, h (đơn vị decimet).

□ Theo giả thiết thể tích mỗi thùng sơn là 5 lít nên: $\pi R^2 h = 5 \Rightarrow h = \frac{5}{\pi R^2}.$

□ Diện tích xung quanh của 1 thùng sơn là: $S_{xq} = 2\pi Rh = 2\pi R \frac{5}{\pi R^2} = \frac{10}{R} (dm^2) = \frac{1}{10R} (m^2).$

□ Tổng diện tích 2 đáy thùng sơn là: $S_d = 2\pi R^2 (dm^2) = \frac{2\pi R^2}{100} (m^2).$

□ Chi phí để sản xuất một thùng sơn là:

$$T = 100000 \cdot S_{xq} + 120000 \cdot S_d = 100000 \cdot \frac{1}{10R} + 120000 \cdot \frac{2\pi R^2}{100} = \frac{10000}{R} + 2400\pi R^2.$$

□ Để có được nhiều thùng sơn nhất với số tiền 1 tỷ đồng ban đầu, ta cần chi phí làm ra một thùng là thấp nhất, tức đi tìm giá trị nhỏ nhất của T .

$$\text{Ta có: } T = \frac{10000}{R} + 2400\pi R^2 = \frac{5000}{R} + \frac{5000}{R} + 2400\pi R^2$$

$$\geq 3\sqrt[3]{\frac{5000}{R} \cdot \frac{5000}{R} \cdot 2400\pi R^2} = 3000\sqrt[3]{60\pi} \text{ (đồng)}.$$

$$\text{Vậy số thùng sơn tối đa sản xuất được là: } \left\lceil \frac{10^9}{3000\sqrt[3]{60\pi}} \right\rceil = 58135 \text{ (thùng)}.$$