



MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP XỬ LÝ PHƯƠNG TRÌNH SAU KHI TRỰC

ThS. Nguyễn Văn Hoàng (0987698877)

GV Trường THPT Chuyên Quang Trung

Tài liệu dành cho các bạn đã biết cách nhằm nghiệm triệt để bằng máy tính, đã biết cách trực với số, với biến... và mong muốn tìm kiếm thêm kinh nghiệm trong việc xử lý phương trình còn lại sau khi trực.

PHẦN 1. TÌNH THẦN TRỰC VÀ BA ĐIỂM CẦN NẮM

Trước tiên, theo tôi cần nắm tình thần sau:

- Khi nhận thấy các phương pháp khác đều không thực hiện được thì ta mới nghĩ đến trực căn, bởi vì việc xử lý phương trình còn lại sau khi trực ta không định hướng trước được.
- Một số kĩ thuật xử lý phương trình còn lại có thể là: *Bỏ bớt căn và biểu thức không âm, làm chặt miền nghiệm, tách hạng tử (thêm bớt max min của biểu thức), bất đẳng thức, xét hàm số tìm GTLN và GTNN, sử dụng hệ tam, chia khoảng.* Có thể có thêm một vài kĩ thuật nữa, như trên cũng đã đủ dùng. Mỗi kĩ thuật có một lợi thế trong từng bài, rất nhiều bài phải kết hợp chúng với nhau. ***Việc sử dụng kĩ thuật nào nhiều khi còn tùy vào năng lực mỗi người.***

Thông thường, xử lý phương trình còn lại là chứng minh vô nghiệm bằng **đánh giá**: $VT < 0$, $VT > 0$ hoặc $VT > A$ và $VP < A$. Điều này có ba điểm cần nắm:

Thứ nhất: Làm cho miền nghiệm càng chặt càng dễ đánh giá.

Thứ hai: Trực nghiệm đơn thì trực với số cũng được, trực với biến cũng được, miễn là việc chứng minh phương trình còn lại vô nghiệm dễ dàng.

Thứ ba: Có thể có nhiều cách chứng minh vô nghiệm cho một phương trình, tùy năng lực mỗi người mà lựa chọn.

Sau đây là ba ví dụ minh họa cho ba điểm cần nắm ở trên.

Ví dụ mở đầu 1: Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - 2x + 4} + \sqrt{x^2 + 5} = 2x + 1$.

Cách 1. (Trực nghiệm đơn với số và không quan tâm việc làm chặt miền nghiệm)

Nhận thấy $x = 2$ là nghiệm của phương trình, nên ta biến đổi phương trình như sau:

$$PT \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 4} + \sqrt{x^2 + 5} = 2x + 1.$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2 - 2x + 4} - 2) + (\sqrt{x^2 + 5} - 3) = 2x - 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x}{\sqrt{x^2 - 2x + 4} + 2} + \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 5} + 3} = 2x - 4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2x + 4} + 2} + \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 5} + 3} = 2 \quad (*) \end{cases}$$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{(x-1)^2 + 3} + 2} + \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 5} + 3} = 2$$

Ta sẽ chứng minh mỗi hạng tử ở vế trái đều nhỏ hơn 1. Thật vậy:

$$\frac{x}{\sqrt{(x-1)^2 + 3} + 2} < 1 \Leftrightarrow x - 2 < \sqrt{(x-1)^2 + 3} \text{ điều này luôn đúng vì}$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + 3} > |x-1| \geq x-1 > x-2.$$

Tương tự, $\frac{x+2}{\sqrt{x^2 + 5} + 3} < 1 \Leftrightarrow x-1 < \sqrt{x^2 + 5}$ điều này cũng luôn đúng.

Bình luận. Việc tách hạng tử và chứng minh mỗi hạng tử đều nhỏ hơn 1 không phải em học sinh nào cũng làm được.

Cách 2. (Trực nghiệm đơn với biến và quan tâm việc làm chặt miền nghiệm)

Từ phương trình ta có đánh giá: $2x+1 > \sqrt{3} + \sqrt{5} \Leftrightarrow x > \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5} - 1}{2} \Rightarrow x > 1.$

Nhận thấy $x = 2$ là nghiệm của phương trình, nên ta biến đổi phương trình như sau:

$$PT \Leftrightarrow (\sqrt{x^2 - 2x + 4} - x) + (\sqrt{x^2 + 5} - (x+1)) = 0$$

$$\Leftrightarrow (4-2x) \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 4} - x} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 5} + (x+1)} \right) = 0$$

Với $x > 1$ thì biểu thức trong ngoặc dương, vậy $x = 2$ là nghiệm phương trình.

Bình luận: Làm chặt miền nghiệm + trực với biến thì lời giải đẹp hơn. Nhiều bạn chỉ làm chặt đến $x \geq -\frac{1}{2}$ thì vẫn khó khăn cho việc đánh giá.

Ví dụ mở đầu 2. Giải phương trình : $\sqrt[3]{x^2-1} + x = \sqrt{x^3-2}$.

Cách 1. Trục với số

ĐK. $x \geq \sqrt[3]{2}$.

Nhận thấy $x=3$ là nghiệm của phương trình , nên ta biến đổi phương trình

$$PT \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2-1} - 2 + x - 3 = \sqrt{x^3-2} - 5$$

$$\Leftrightarrow (x-3) \left[1 + \frac{x+3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2} + 2\sqrt[3]{x^2-1} + 4} \right] = \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{\sqrt{x^3-2} + 5}$$

$$\Leftrightarrow (x-3) \left[1 + \frac{x+3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2} + 2\sqrt[3]{x^2-1} + 4} - \frac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2} + 5} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ 1 + \frac{x+3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2} + 2\sqrt[3]{x^2-1} + 4} = \frac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2} + 5} \quad (2) \end{cases}$$

Xét phương trình (2):

Ta sẽ chứng minh: $VT < 2 < VP$. Việc chứng minh điều này có nhiều cách, dưới đây là dùng Cossi vì quan sát bậc của biểu thức, các bạn có thể quy đồng, đặt ẩn phụ để chứng minh biểu thức dương cũng được.

Ta có $\sqrt[3]{(x^2-1)^2} + 2\sqrt[3]{x^2-1} + 4 \geq 2\sqrt{2(x^2-1)} + 4$. Khi đó

$$\frac{x+3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2} + 2\sqrt[3]{x^2-1} + 4} \leq \frac{x+3}{2\sqrt{2(x^2-1)} + 4}$$

Ta sẽ chứng minh $\frac{x+3}{2\sqrt{2(x^2-1)} + 4} \leq 1$ (*) với mọi $x \geq \sqrt[3]{2}$. Thật vậy (*) $\Leftrightarrow 7x^2 + 2x - 9 \geq 0$

điều này đúng với mọi $x \geq \sqrt[3]{2}$.

Biểu thức còn lại: $\frac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5} > \frac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3}+5}$. Ta sẽ chứng minh $\frac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3}+5} \geq 2$ (**) với mọi

$x \geq \sqrt[3]{2}$. Thật vậy (**) $\Leftrightarrow x^2 + 3x \geq 2\sqrt{x^3} + 1$ với mọi $x \geq \sqrt[3]{2}$. Điều này đúng do sử dụng Cossi ở VP.

Bình luận. Cách này tương đối dài và nhiều bạn thấy phương trình còn lại “cồng kềnh” nên nản chí.

Cách 2. Trục với biến

ĐK. $x \geq \sqrt[3]{2}$.

Ta có:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x^2-1} + x &= \sqrt{x^3-2} \Leftrightarrow \left[\sqrt[3]{x^2-1} - (x-1) \right] - \left[\sqrt{x^3-2} - (2x-1) \right] = 0 \\ \Leftrightarrow (x-3) \left[\frac{-x^2+x}{\sqrt[3]{x^2-1} + (x-1)} - \frac{x^2-x+1}{\sqrt{x^3-2} + (2x-1)} \right] &= 0\end{aligned}$$

Để ý $-x^2+x = x(1-x) < 0$ với mọi $x \geq \sqrt[3]{2}$ và $-(x^2-x+1) < 0$ với mọi $x \geq \sqrt[3]{2}$ nên biểu thức trong ngoặc âm với mọi $x \geq \sqrt[3]{2}$.

Do đó $x = 3$ là nghiệm.

Ví dụ mở đầu 3. (Có nhiều cách chứng minh vô nghiệm cho một bài)

$$8x^3 - 13x^2 + 7x = (x+1)\sqrt[3]{3x^2-2}$$

Thi thử lần 3 năm 2016 – Chuyên Quang Trung

Hướng dẫn giải

Có thể trục như sau:

$$\begin{aligned}8x^3 - 13x^2 + 7x &= (x+1)\sqrt[3]{3x^2-2} \\ \Leftrightarrow (8x^3 - 15x^2 + 6x + 1) \left(1 + \frac{x+1}{(2x-1)^2 + (2x-1)\sqrt[3]{3x^2-2} + \sqrt[3]{(3x^2-2)^2}} \right) &= 0(*)\end{aligned}$$

Chứng minh phương trình còn lại có 3 cách:

Cách 1. (Quy đồng)

Đặt $\begin{cases} b = \sqrt[3]{3x^2-2} \\ a = 2x-1 \Rightarrow x = \frac{a+1}{2} \end{cases}$. Biểu thức trong ngoặc trở thành:

$$1 + \frac{a+3}{2a^2+2ab+2b^2} = \frac{(a+b)^2 + \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}}{2a^2+2ab+2b^2} > 0$$

Vậy $x = 1; x = -\frac{1}{8}$

Cách 2. (Xét khoảng)

Xét $x \geq -1$, biểu thức trong ngoặc luôn dương.

Xét $x < -1$ thì $x+1 < 0$, do đó

$$1 + \frac{x+1}{(2x-1)^2 + (2x-1)\sqrt[3]{3x^2-2} + \sqrt[3]{(3x^2-2)^2}} > 1 + \frac{x+1}{(2x-1)^2} > 1 + (-1) = 0$$

Cách 3. (Chặn miền nghiệm)

Xét phương trình:

$$1 + \frac{x+1}{(2x-1)^2 + (2x-1)\sqrt[3]{3x^2-2} + \sqrt[3]{(3x^2-2)^2}} = 0 (*)$$

Vì $(2x-1)^2 + (2x-1)\sqrt[3]{3x^2-2} + \sqrt[3]{(3x^2-2)^2} > 0$ nên suy ra $x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -1$.

Từ phương trình ban đầu

$$0 = 8x^3 - 13x^2 + 7x - (x+1)\sqrt[3]{3x^2-2} \leq 8x^3 - 13x^2 + 7x - (x-1)\frac{3x^2-2+1+1}{3} = 7x(x-1)^2$$

Điều này vô lý vì $x < -1$. Vậy (*) vô nghiệm.

Ví dụ mở đầu 4. (Vẻ đẹp của kỹ thuật trục)

$$\text{Giải phương trình: } 1 + \sqrt{x-1}(\sqrt{2x} - 3\sqrt{x-1})^3 \geq 0.$$

Đề thi thử lần 4 năm 2015– Chuyên ĐH Vinh

Bình luận. Lời giải tự nhiên cho phương pháp này là đặt ẩn phụ rồi đưa về đẳng cấp, các bạn có thể tham khảo đáp án trên mạng. Ở đây giới thiệu lời giải bằng trục mà ít ai nghĩ đến, tôi đã ngất ngây với lời giải này rất lâu.

ĐK: $x \geq 1$.

$$\begin{aligned} & \sqrt{x-1}(3\sqrt{x-1} - \sqrt{2x})^3 - 1 \leq 0 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{x-1} \left[(3\sqrt{x-1} - \sqrt{2x})^3 - 1 \right] + (\sqrt{x-1} - 1) \leq 0 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{x-1}(3\sqrt{x-1} - \sqrt{2x} - 1) \left[(3\sqrt{x-1} - \sqrt{2x})^2 + (3\sqrt{x-1} - \sqrt{2x}) + 1 \right] + (\sqrt{x-1} - 1) \leq 0 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{x-1} \left([3\sqrt{x-1} - 3] + [2 - \sqrt{2x}] \right) \left[(3\sqrt{x-1} - \sqrt{2x})^2 + 3\sqrt{x-1} - \sqrt{2x} + 1 \right] + (\sqrt{x-1} - 1) \leq 0 \end{aligned}$$

Khi trục nhân tử $x-2$ ta được

$$\Leftrightarrow (x-2) \left[\sqrt{x-1} \left(\frac{3}{\sqrt{x-1}+1} - \frac{2}{\sqrt{2x}+2} \right) \left[(3\sqrt{x-1} - \sqrt{2x})^2 + 3\sqrt{x-1} - \sqrt{2x} + 1 \right] + \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} \right] \leq 0$$

$$\text{Ta có } \sqrt{2x} > \sqrt{x-1} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2x}} < \frac{1}{\sqrt{x-1}} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{2x}+2} < \frac{3}{\sqrt{x-1}+1}$$

Vậy ta có $x \leq 2$ Kết hợp điều kiện ta được $1 \leq x \leq 2$.

PHẦN 2. MỘT SỐ VÍ DỤ MẪU

Dưới đây là một số ví dụ minh họa cho các kỹ thuật đã nói ở trên.

Ví dụ 1. (Bỏ bớt căn, bỏ bớt biểu thức không âm)

$$(x+1)\sqrt{x+2} + (x+6)\sqrt{x+7} \geq x^2 + 7x + 12.$$

Bình luận. Đây là đề thi D2014 không xa lạ với nhiều học sinh, tôi chọn ví dụ này để minh họa cho đánh giá sau:

$\frac{A}{\sqrt{B+C}} \leq \frac{A}{C}$, ta thường sử dụng khi $A \geq 0, C > 0$.

Nhớ rằng nguyên tắc đánh giá là làm cho mẫu đơn giản hơn và PP này thực hiện được điều này rất tốt.

Hướng dẫn giải.

ĐK. $x \geq -2$. Nhằm được nghiệm $x = 2$. Trục với số ta được:

$$(x+1)(\sqrt{x+2}-2) + (x+6)(\sqrt{x+7}-3) - (x^2 + 2x + 8) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (x-2) \left(\frac{x+1}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{x+6}{\sqrt{x+7}+3} - x - 4 \right) \geq 0$$

Chú ý. Muốn bỏ bớt căn dưới mẫu thì $x+1 \geq 0$, $x+6 \geq 0$, nhưng vì $x \geq -2$ thì chỉ có $x+6 \geq 0$. Do đó điều ta muốn là thay thế $x+1$ thành $x+2$, điều này thực hiện được khi ta thêm bớt như sau:

$$\frac{x+1}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{x+6}{\sqrt{x+7}+3} - x - 4 = \frac{x+2}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{x+6}{\sqrt{x+7}+3} - x - 4 - \frac{1}{\sqrt{x+2}+2}$$

Khi đó bỏ bớt căn ta được

$$\frac{x+1}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{x+6}{\sqrt{x+7}+3} - x - 4 \leq \frac{x+2}{2} + \frac{x+6}{2} - x - 4 - \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} = -\frac{1}{\sqrt{x+2}+2} < 0$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 2$.

Bình luận. Đây là bài rất dễ sai khi đánh giá vì nhiều bạn quên mất $\frac{A}{\sqrt{B+C}} \leq \frac{A}{C}$, ta thường sử dụng khi $A \geq 0, C > 0$. Chẳng hạn đáp án đầu tiên trên mạng năm 2014 khi các em mới thi xong. Bài này có thể xét hai khoảng, nhưng không tốt bằng, xin không đề cập ở đây.

Ví dụ 2. (Tách hạng tử và thêm bớt max min của mỗi biểu thức)

$$\text{Giải phương trình: } 2x + 14 + \sqrt{3x+1} > (x+8)\sqrt{x+3}.$$

Bình luận. Tách hạng tử có nghĩa là ta không đánh giá toàn bộ biểu thức mà tách ra từng biểu thức, tìm min hoặc max (Bằng lệnh TABLE CASIO) rồi thêm bớt, kỹ thuật này khá đơn giản, khả năng thành công cao, dành cho các bạn lười suy nghĩ và ít có kỹ năng đánh giá.

Hướng dẫn giải.

ĐK. $x \geq -\frac{1}{3}$.

Trục được $(x-1)\left(\frac{x+8}{\sqrt{x+3}+2} - \frac{3}{\sqrt{3x+1}+2}\right) < 0$ (1)

Biểu thức trong ngoặc dương (TABLE) , nhận thấy $\frac{3}{\sqrt{3x+1}+2} \leq \frac{3}{2}$ nên ta thêm bớt đại lượng này ta được:

$$(1) \Leftrightarrow (x-1)\left(\left[\frac{x+8}{\sqrt{x+3}+2} - \frac{3}{2}\right] + \left[\frac{3}{2} \frac{3}{\sqrt{3x+1}+2}\right]\right) < 0.$$

Việc chứng minh biểu thức trong dương đơn giản.

Vậy phương trình có nghiệm $x = 1$.

Ví dụ 3. (Tách hạng tử kết hợp bỏ bớt căn)

Giải phương trình: $(5x^2 - 5x + 10)\sqrt{x+7} + (2x+6)\sqrt{x+2} = x^3 + 13x^2 - 6x + 32$.

Hướng dẫn giải

ĐK. $x \geq -2$.

Trục với số ta được: $(5x^2 - 5x + 10)(\sqrt{x+7} - 3) + (2x+6)(\sqrt{x+2} - 2) = x^3 - 2x^2 + 5x - 10$

Trục xong ta được $x = 2$ hoặc

$$\frac{5x^2 - 5x + 10}{\sqrt{x+7} + 3} + \frac{2x+6}{\sqrt{x+2} + 2} = x^2 + 5 \quad (*)$$

Do $x \geq -2$ nên $\frac{5x^2 - 5x + 10}{\sqrt{x+7} + 3} < \frac{5x^2 - 5x + 10}{\sqrt{5} + 3} < \frac{5x^2 - 5x + 10}{2 + 3} = x^2 - x + 2$

Và $\frac{2x+6}{\sqrt{x+2} + 2} < \frac{2x+6}{2} = x + 3$.

Theo đánh giá trên thì VT(*) < $x^2 + 5$ = VP(*).

Vậy $x = 2$ là nghiệm của hệ.

Ví dụ 4. (Sử dụng hệ tạm)

Giải phương trình: $\sqrt{7x^2 + 20x - 86} + x\sqrt{31 - 4x - x^2} = 3x + 2$

Đề thi thử Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An - 2016

Bình luận. Bài này tương đối khó vì nhầm được 2 nghiệm vô tỷ mà không phải của cùng một phương trình bậc 2. Sử dụng CASIO lấy được hai phương trình bậc hai đó là: $x^2 + 4x - 15 = 0$ và $x^2 + 4x - 30 = 0$, ta nghĩ đến trục được bậc hai thứ nhất và sử dụng hệ tạm để tìm nhân tử bậc hai còn lại. Sử dụng hệ tạm tức là kết hợp với phương trình ban đầu.

Hướng dẫn giải.

$$\text{ĐK. } \begin{cases} 7x^2 + 20x - 86 \geq 0 \\ 31 - 4x - x^2 \geq 0 \end{cases}$$

Việc xét trường hợp LLH bằng 0 các bạn tự xét. Ta thêm bớt như sau:

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{7x^2 + 20x - 86} - (2 - x) \right) + x \left(\sqrt{31 - 4x - x^2} - 4 \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x^2 + 4x - 15 = 0 \quad (2) \\ \frac{6}{\sqrt{7x^2 + 20x - 86} + 2 - x} - \frac{x}{\sqrt{31 - 4x - x^2} + 4} = 0 \quad (*) \end{cases} \end{aligned}$$

Xử lý (*) bằng cách quy đồng ta được:

$$6\sqrt{31 - 4x - x^2} + 24 = x\sqrt{7x^2 + 20x - 86} + 2x - x^2$$

Thay $\sqrt{7x^2 + 20x - 86} = 3x + 2 - x\sqrt{31 - 4x - x^2} + 2x - x^2$ (từ phương trình đã cho) vào trên ta được:

$$(x^2 + 6)\sqrt{31 - 4x - x^2} = 2x^2 + 4x - 24$$

$$\Leftrightarrow 31 - 4x - x^2 + (x^2 + 6)\sqrt{31 - 4x - x^2} - x^2 - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{31 - 4x - x^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 30 = 0 \quad (3)$$

Giải (2) và (3) kết hợp điều kiện ta được: $x = -2 - \sqrt{19}, x = -2 + \sqrt{34}$.

Ví dụ 5. (Xét hàm số để tìm min max)

Giải phương trình: $x^3 - 3x + 1 = \sqrt{8 - 3x^2}$.

$$\text{HD 6.1. ĐK: } -\frac{2\sqrt{6}}{3} \leq x \leq \frac{2\sqrt{6}}{3},$$

Ta thêm bớt và trục được: $x^3 - 2x - 1 + 4 \frac{x^2 - x - 1}{\sqrt{8 - 3x^2} + 2 - x} = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x - 1) \left(x + 1 + \frac{4}{\sqrt{8-3x^2} + 2 - x} \right) = 0$$

Xét $f(x) = \sqrt{8-3x^2} + 2 - x$ ta có: $f'(x) = \frac{-3x}{\sqrt{8-3x^2}} - 1$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-3x}{\sqrt{8-3x^2}} = 1 \Leftrightarrow x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\frac{2\sqrt{6}}{3}$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\frac{2\sqrt{6}}{3}$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		$\frac{6+4\sqrt{6}}{3}$	



$$\Rightarrow f(x) \leq \frac{6+4\sqrt{6}}{3} \text{ kết hợp với } |x| \leq \frac{2\sqrt{6}}{3} \Rightarrow 0 < f(x) \leq \frac{6+4\sqrt{6}}{3}$$

$$\Rightarrow x + 1 + \frac{4}{\sqrt{8-3x^2} + 2 - x} = x + 1 + \frac{4}{f(x)} \geq -\frac{2\sqrt{6}}{3} + 1 + \frac{4}{\frac{6+4\sqrt{6}}{3}} > 0$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Cách 2. Có thể kết hợp PT ban đầu đưa về hệ tậm. Các bạn tự làm nhé.

Ví dụ 6. (Chia khoảng)

Giải phương trình $\sqrt{3x^2 - 2x + 3} + 2\sqrt{3x + 1} = x^3 - 2x^2 + 5x + 2$.

Bình luận. Đây là bài toán khá hay bởi lẽ dấu của biểu thức quá nhỏ làm cho việc đánh giá khó khăn, buộc lòng phải chia khoảng như dưới đây.

Hướng dẫn giải.

ĐK. $x \geq -\frac{1}{3}$.

Sau khi trục nghiệm $x = 1$ còn lại phương trình

$$\frac{3x+1}{\sqrt{3x^2-2x+3}+2} + \frac{6}{\sqrt{3x+1}+2} = x^2 - x + 4.$$

Khi đó ta xét hai trường hợp sau:

$$\frac{-1}{3} \leq x < 0 \vee x > 1 \Rightarrow VT < 3 + \frac{3x+1}{\sqrt{2(x^2+1)+(x-1)^2}+2} \leq 3 + \frac{3x+1}{x+3} < x^2 - x + 4$$

- $0 < x < 1$. Quay trở lại phương trình:

$$VT > x+1+2\sqrt{3x+1} > 3x+3 > x^3-2x^2+5x+2$$

Ví dụ 7. (Tách hạng tử và thêm bớt min max của biểu thức)

Giải phương trình:

$$2\sqrt{4x+5} + \sqrt{x^2-2x+5} = x^3 - 2x^2 + 5x + 4$$

Hướng dẫn giải

$$\text{ĐK. } x \geq -\frac{5}{4}$$

Ta thêm bớt như sau:

$$2(\sqrt{4x+5}-3) + (\sqrt{x^2-2x+5}-2) = x^3 - 2x^2 + 5x - 4$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \left(\frac{8}{\sqrt{4x+5}+3} + \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}+2} - x^2 + x - 4 \right) = 0$$

Cần chứng minh biểu thức trong ngoặc luôn âm trên TXĐ.

Nhận thấy $\frac{8}{\sqrt{4x+5}+3} \leq \frac{8}{3}$ và $\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}+2} \leq 1$ (CASIO) nên ta thêm bớt trong ngoặc là:

$$\left[\frac{8}{\sqrt{4x+5}+3} - \frac{8}{3} \right] + \left[\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}+2} - 1 \right] - (x^2 - x + \frac{1}{3}) = 0$$

Việc còn lại là chứng minh biểu thức $\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}+2} - 1 < 0$ (*). Thật vậy

Quy đồng ta được: $\sqrt{x^2-2x+5} > x-3$. Điều này đúng vì

$$\sqrt{x^2-2x+5} = \sqrt{(x-1)^2+4} > |x-1| > x-1 > x-3.$$

Ví dụ 8. (Bất đẳng thức)

$$\sqrt[3]{x+6} + \sqrt[3]{x-1} = 3 + \sqrt{x-2}$$

Bình luận. Khi trục với căn bậc ba, ta quan sát bậc của nó để sử dụng Cosi.

Hướng dẫn giải.

ĐK. $x \geq 2$.

Trục nghiệm $x = 2$ còn phương trình;

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(x+6)^2} + 2\sqrt[3]{x+6} + 4} + \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{x-1} + 1} = \frac{1}{\sqrt{x-2}} \quad (*)$$

Ta có đánh giá:

$$\sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{x-1} + 1 \geq 2\sqrt{x-1} + 1 \quad (\text{Cosi})$$

$$\sqrt[3]{(x+6)^2} + 2\sqrt[3]{x+6} + 4 \geq 2\sqrt{2(x+6)} + 4 > 2\sqrt{x-1} + 1$$

Do đó

$$VT(*) < \frac{2}{2\sqrt{x-1}} < VP(*). \text{ Vậy } (*) \text{ Vô nghiệm.}$$