



Tổng hợp lý thuyết

CHƯƠNG 02

LŨY THỪA - MŨ - LOGARIT

KHÓA 2023 - 2024

TÀI LIỆU DÀNH CHO KHỐI 12

Biên soạn

LÊ MINH TÂM





	Chủ đề 01. LŨY THỪA – HÀM SỐ LŨY THỪA	
	<i>Dạng 1.1.</i> Rút gọn và tính giá trị biểu thức	6
	<i>Dạng 1.2.</i> So sánh các biểu thức chứa lũy thừa	7
	<i>Dạng 1.3.</i> Tập xác định hàm số lũy thừa	8
	<i>Dạng 1.4.</i> Đạo hàm số lũy thừa	9
	<i>Dạng 1.5.</i> Đồ thị hàm số lũy thừa.....	10
	Chủ đề 02. LOGARIT	
	<i>Dạng 2.1.</i> Tính giá trị biểu thức.....	12
	<i>Dạng 2.2.</i> Biểu diễn logarit	13
	<i>Dạng 2.3.</i> Mệnh đề đúng – sai	14
	Chủ đề 03. HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LOGARIT	
	<i>Dạng 3.1.</i> Tập xác định của hàm số logarit	18
	<i>Dạng 3.2.</i> Đạo hàm hàm số mũ – logarit	20
	<i>Dạng 3.3.</i> Khảo sát hàm số mũ – logarit	21
	Chủ đề 04. BÀI TOÁN LÃI SUẤT	
	Chủ đề 05. PHƯƠNG TRÌNH MŨ	
	<i>Dạng 5.1.</i> Phương trình mũ cơ bản.....	31
	<i>Dạng 5.2.</i> Đưa về cùng cơ số.....	32
	<i>Dạng 5.3.</i> Logarit hóa	33
	<i>Dạng 5.4.</i> Đặt ẩn phụ dễ thấy.....	34
	<i>Dạng 5.5.</i> Đặt ẩn phụ với phương trình đẳng cấp.....	35
	<i>Dạng 5.6.</i> Đặt ẩn phụ với tích hai cơ số bằng 1.....	36
	<i>Dạng 5.7.</i> Phương pháp hàm số	37
	<i>Dạng 5.8.</i> Phương trình chứa tham số.....	39
	Chủ đề 06. PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT	
	<i>Dạng 6.1.</i> Phương trình logarit cơ bản	41
	<i>Dạng 6.2.</i> Đưa về cùng cơ số.....	42
	<i>Dạng 6.3.</i> Mũ hóa.....	43
	<i>Dạng 6.4.</i> Đặt ẩn phụ dễ thấy.....	44
	<i>Dạng 6.5.</i> Phương pháp hàm số	45
	<i>Dạng 6.6.</i> Phương trình chứa tham số.....	47

Chủ đề 07. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

➤ Dạng 7.1. Bất phương trình mũ cơ bản	50
➤ Dạng 7.2. Đưa về cùng cơ số	51
➤ Dạng 7.3. Đặt ẩn phụ.....	52
➤ Dạng 7.4. Logarit hóa	53
➤ Dạng 7.5. Chứa tham số	54

Chủ đề 08. BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

➤ Dạng 8.1. Bất phương trình logarit cơ bản	56
➤ Dạng 8.2. Đưa về cùng cơ số	57
➤ Dạng 8.3. Đặt ẩn phụ.....	58
➤ Dạng 8.4. Mũ hóa.....	59
➤ Dạng 8.5. Chứa tham số	60



Chương 02

Chủ đề 01

LŨY THỪA - MŨ - LOGARIT

LŨY THỪA – HÀM SỐ LŨY THỪA

A. LÝ THUYẾT CHUNG.

1. Lũy thừa:

1.1. Định nghĩa.

Cho số thực b và số nguyên dương $n (n \geq 2)$.

Số a được gọi là căn bậc n của số b nếu $a^n = b$.

Chú ý:

n lẻ	$b \in \mathbb{R}$	♦ Có duy nhất một căn bậc n của b , ký hiệu $\sqrt[n]{b}$.
n chẵn	$b < 0$	♦ Không tồn tại căn bậc n của b
	$b = 0$	♦ Có một căn bậc n của b là 0
	$b > 0$	♦ Có hai bậc n của a là hai số đối nhau, ♦ Căn có giá trị dương ký hiệu là $\sqrt[n]{b}$, căn có giá trị âm ký hiệu là $-\sqrt[n]{b}$.

1.2. Công thức.

Số mũ α	Cơ số a	Lũy thừa a^α
$\alpha = n \in \mathbb{N}^*$	$a \in \mathbb{R}$	$a^\alpha = a^n = a.a...a$ (n là thừa số a)
$\alpha = 0$	$a \neq 0$	$a^\alpha = a^0 = 1$
$\alpha = -n, (n \in \mathbb{N}^*)$	$a \neq 0$	$a^\alpha = a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
$\alpha = \frac{m}{n}, (m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*)$	$a > 0$	$a^\alpha = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, (\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a = b^n)$

1.3. Tính chất.

① $a^\alpha . a^\beta = a^{\alpha+\beta}$

② $\frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$

③ $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha.\beta}$

④ $(ab)^\alpha = a^\alpha . b^\alpha$

⑤ $\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$

⑥ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-\alpha} = \left(\frac{b}{a}\right)^\alpha$

⑦ Nếu $a > 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$.

⑧ Nếu $0 < a < 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$.

CHÚ Ý

Các tính chất trên đúng trong trường hợp số mũ nguyên hoặc không nguyên.

Khi xét lũy thừa với số mũ 0 và số mũ nguyên âm thì cơ số a phải khác 0.

Khi xét lũy thừa với số mũ không nguyên thì cơ số a phải dương.

1.4. Tính chất căn bậc n.

Với $a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$ ta có

- ① $\sqrt[n]{a^n} = a, \forall a$
- ② $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \forall a, b$
- ③ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \forall a, \forall b \neq 0$
- ④ $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m, \forall a > 0, n$ nguyên dương, m nguyên.
- ⑤ $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}, \forall a \geq 0, n, m$ nguyên dương.
- ⑥ Nếu $\frac{p}{n} = \frac{q}{m}$ thì $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[m]{a^q}, \forall a > 0, m, n$ nguyên dương, p, q nguyên.
Đặc biệt: $\sqrt[n]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a^m}}$.

2. Hàm số lũy thừa:

2.1. Khái niệm.

Hàm số $y = x^\alpha$ với $\alpha \in \mathbb{R}$ được gọi là hàm số lũy thừa.

2.2. Tập xác định.

Tập xác định của hàm số $y = x^\alpha$ là:

① Nếu α là số nguyên dương	$D = \mathbb{R}$
② Nếu α nguyên âm hoặc bằng 0.	$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
③ Nếu α không nguyên	$D = (0; +\infty)$

※ **Tổng quát:** Tập xác định của hàm số $y = (f(x))^\alpha$.

Khi α NGUYÊN DƯƠNG

Hàm số $y = (f(x))^\alpha$ xác định $\Leftrightarrow f(x)$ xác định.

Khi α NGUYÊN ÂM

Hàm số $y = (f(x))^\alpha$ xác định $\Leftrightarrow f(x) \neq 0$.

Khi α KHÔNG NGUYÊN

Hàm số $y = (f(x))^\alpha$ xác định $\Leftrightarrow f(x) > 0$

2.3. Đạo hàm.

Hàm số $y = x^\alpha, (\alpha \in \mathbb{R})$ có đạo hàm $\forall x > 0$ và $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$.

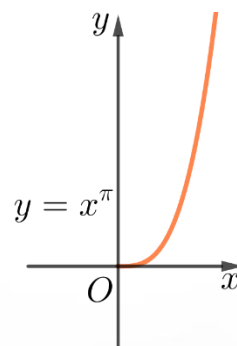
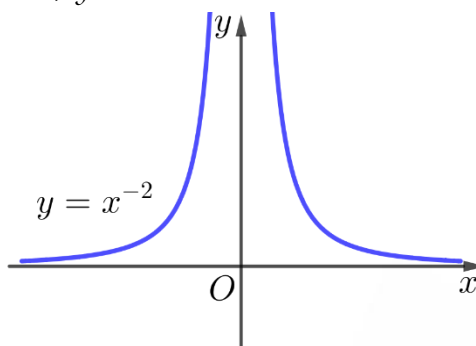
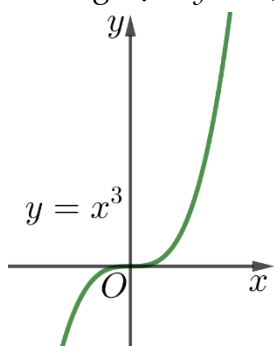
2.4. Khảo sát hàm số lũy thừa $y = x^\alpha, (\alpha \in \mathbb{R})$.

		$y = x^\alpha$ với $\alpha > 0$	$y = x^\alpha$ với $\alpha < 0$
Tập khảo sát		$(0; +\infty)$	$(0; +\infty)$
Sự biến thiên	Đạo hàm	$y' = \alpha x^{\alpha-1} > 0, \forall x > 0.$	$y' = \alpha x^{\alpha-1} < 0, \forall x > 0.$
	Giới hạn	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty.$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0.$
	Tiệm cận	Không có.	Nhận Ox là tiệm cận ngang. Nhận Oy là tiệm cận đứng.

Bảng biến thiên	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td></td><td>+</td></tr><tr><td>y</td><td></td><td></td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	0	$+\infty$	y'			+	y			$+\infty$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td></td><td>-</td></tr><tr><td>y</td><td></td><td></td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	0	$+\infty$	y'			-	y			$+\infty$
x	$-\infty$	0	$+\infty$																							
y'			+																							
y			$+\infty$																							
x	$-\infty$	0	$+\infty$																							
y'			-																							
y			$+\infty$																							
Đồ thị																										
	Đồ thị của hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ luôn đi qua điểm $I(1;1)$.																									

Lưu ý:

- ⌚ Khi khảo sát hàm số lũy thừa với số mũ cụ thể, ta phải xét hàm số đó trên toàn bộ tập xác định của nó.
- ⌚ Chẳng hạn: $y = x^3$, $y = x^{-2}$, $y = x^\pi$.



B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

➤ Dạng 1.1. Rút gọn và tính giá trị biểu thức

☑ Sử dụng phối hợp linh hoạt các tính chất của lũy thừa.

☑ Chọn $a; b$ là các số thực dương và $x; y$ là các số thực tùy ý, ta có:

① $a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$

② $\frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$

③ $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha \cdot \beta}$

④ $(ab)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha$

⑤ $\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$

⑥ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-\alpha} = \left(\frac{b}{a}\right)^\alpha$

⑦ Nếu $a > 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$. ⑧ Nếu $0 < a < 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$.

➤ Ví dụ 1.1.1

Đưa các biểu thức sau về dạng lũy thừa

① $\sqrt{a}\sqrt{a} \ (a > 0)$

② $\frac{\sqrt{2^3\sqrt{4}}}{16^{0,75}}$

③ $\sqrt[5]{\frac{b}{a}}\sqrt[3]{\frac{a}{b}} \ (a, b > 0).$

Lời giải

①

②

③

➤ Ví dụ 1.1.2

Rút gọn các biểu thức sau đây:

① $\sqrt{(a-5)^4}$

② $\sqrt{81a^4b^2} \ (b \leq 0)$

③ $\sqrt[4]{x^8(x+1)^4} \ (x \leq -1).$

Lời giải

①

②

③

➤ Ví dụ 1.1.3

Cho $a = (2 + \sqrt{3})^{-1}, b = (2 - \sqrt{3})^{-1}$. Tính $A = (a+1)^{-1} + (b+1)^{-1}$.

Lời giải

.....

Dạng 1.2. So sánh các biểu thức chứa lũy thừa

☑ Ta có hai cách làm như sau:

01

Đưa về cùng cơ số

Cho $a \in \mathbb{R} : m, n \in \mathbb{Z}$. Khi đó

① Với $a > 1 \longrightarrow a^m > a^n \Leftrightarrow m > n$;

② Với $0 < a < 1 \longrightarrow a^m > a^n \Leftrightarrow m < n$.

02

Đưa về cùng số mũ

Với $0 < a < b$ và m là số nguyên thì

① $a^m < b^m \Leftrightarrow m > 0$

② $a^m > b^m \Leftrightarrow m < 0$.

Ví dụ 1.2.1

So sánh các số sau:

① 7^{300} và 7^{400}

② $\left(\frac{1}{2}\right)^{5000}$ và $\left(\frac{1}{2}\right)^{8000}$.

Lời giải

① 7^{300} và 7^{400}

② $\left(\frac{1}{2}\right)^{5000}$ và $\left(\frac{1}{2}\right)^{8000}$

Ví dụ 1.2.2

So sánh các số sau:

① 20^{20} và 15^{30} .

② 2^{100} và 20^{30} .

③ $(\sqrt{3}-1)^7$ và $(\sqrt{3}-1)^8$.

④ π^{-34} và $(\pi+1)^{-34}$.

Lời giải

① 20^{20} và 15^{30} .

② 2^{100} và 20^{30} .

③ $(\sqrt{3}-1)^7$ và $(\sqrt{3}-1)^8$.

④ π^{-34} và $(\pi+1)^{-34}$.

Ví dụ 1.2.3

So sánh 2 số p và q biết:

① $\pi^p > \pi^q$.

② $(\sqrt{5}-1)^p < (\sqrt{5}-1)^q$.

Lời giải

① $\pi^p > \pi^q$.

② $(\sqrt{5}-1)^p < (\sqrt{5}-1)^q$.

Dạng 1.3. Tập xác định hàm số lũy thừa

☑ Tập xác định của hàm số $y = (f(x))^\alpha$ là:

① α là số nguyên dương	$f(x)$ xác định.
② α nguyên âm hoặc bằng 0.	$f(x) \neq 0$
③ α không nguyên	$f(x) > 0$

Ví dụ 1.3.1

Tìm tập xác định của hàm số $y = (x^2 - 1)^{-2}$

A. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

B. $\mathcal{D} = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

C. $\mathcal{D} = (-1; 1)$.

D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

Lời giải

.....

.....

.....

Ví dụ 1.3.2

Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = (x^2 - 5x + 6)^{-2019}$

A. $\mathcal{D} = (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$.

B. $\mathcal{D} = (2; 3)$.

C. $\mathcal{D} = (-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$.

D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$.

Lời giải

.....

.....

.....

Ví dụ 1.3.3

Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = (2x - 1)^e$

A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

B. $\mathcal{D} = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

C. $\mathcal{D} = \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

D. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Lời giải

.....

.....

.....

➤ Dạng 1.4. Đạo hàm số lũy thừa

☑ Hàm số $y = x^\alpha$, ($\alpha \in \mathbb{R}$) có đạo hàm $\forall x > 0$ và $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \longrightarrow (u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$.

☞ Ví dụ 1.4.1

Cho hàm số $f(x) = (2x-3)^{\frac{5}{6}}$. Tính $f'(2)$.

A. $\frac{5}{6}$.

B. $\frac{5}{3}$.

C. $-\frac{5}{6}$.

D. $-\frac{5}{3}$.

Lời giải

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 1.4.2

Tìm đạo hàm của hàm số $y = \sqrt[3]{(1-3x)^5}$ trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$.

A. $y' = -5(1-3x)^{\frac{2}{3}}$.

B. $y' = \frac{5}{3}(1-3x)^{\frac{4}{3}}$.

C. $y' = -5(1-3x)^{\frac{4}{3}}$.

D. $y' = \frac{5}{3}(1-3x)^{\frac{2}{3}}$.

Lời giải

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 1.4.3

Tìm đạo hàm của hàm số $y = \sqrt[4]{x+2}$, $x > -2$

A. $y' = \frac{1}{4\sqrt[4]{(x+2)^3}}$.

B. $y' = \frac{1}{4\sqrt[4]{x+2}}$.

C. $y' = \frac{1}{2\sqrt[4]{(x+2)^3}}$.

D. $y' = 4\sqrt[3]{x+2}$.

Lời giải

.....

.....

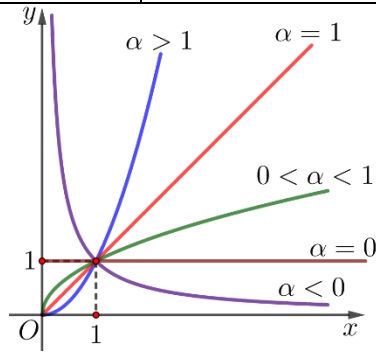
.....

➤ Dạng 1.5. Đồ thị hàm số lũy thừa

☑ Ta lưu ý các yếu tố trong sự biến thiên của hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ với

	$\alpha > 0$	$\alpha < 0$
Đạo hàm	$y' = \alpha x^{\alpha-1} > 0$	$y' = \alpha x^{\alpha-1} < 0, \forall x > 0.$
Giới hạn	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty.$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0.$
Tiệm cận	Không có.	Nhận Ox là tiệm cận ngang. Nhận Oy là tiệm cận đứng.

Đồ thị

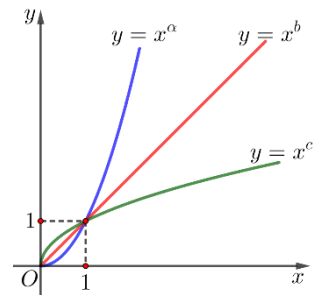


Đồ thị của hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ luôn đi qua điểm $I(1; 1)$.

➤ Ví dụ 1.5.1

Hình vẽ bên là đồ thị các hàm số $y = x^a$, $y = x^b$, $y = x^c$ trên miền $(0; +\infty)$. Hỏi số a , b , c số nào nhận giá trị trong khoảng $(0; 1)$?

- A. a . B. $a \& c$.
C. b . D. c



Lời giải

➤ Ví dụ 1.5.2

Cho hàm số $y = x^{-\sqrt{2023}}$. Mệnh đề nào đúng về đường tiệm cận của đồ thị hàm số?

- A. Có một tiệm cận ngang và một tiệm cận đứng.
B. Không có tiệm cận ngang và có một tiệm cận đứng.
C. Có một tiệm cận ngang và không có tiệm cận đứng.
D. Không có tiệm cận.

Lời giải

Chương 02

Chủ đề 02

LŨY THỪA - MŨ - LOGARIT

LOGARIT

A. LÝ THUYẾT CHUNG.

1. Định nghĩa.

Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$.

☞ Số α thỏa mãn đẳng thức $a^\alpha = b$ được gọi là lôgarit cơ số a của b và kí hiệu là $\log_a b$.

☞ Ta viết: $\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b$.

2. Tính chất.

TÍNH CHẤT

Cho $a, b > 0, a \neq 1$

$$\log_a a = 1, \log_a 1 = 0$$

$$a^{\log_a b} = b, \log_a (a^\alpha) = \alpha$$

3. Công thức.

☞ Cho 3 số dương a, b, c với $a \neq 1; c \neq 1$ và $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, ta có các công thức sau:

1

Tích tổng - Thương hiệu

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

Đặc biệt: với $a, b > 0, a \neq 1$ $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$

2

Lũy thừa

$$\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$$

Đặc biệt: $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$

3

Đổi cơ số

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Đặc biệt: $\log_a a = \frac{1}{\log_a a}; \log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b$

○ Logarit thập phân và Logarit tự nhiên

☞ Logarit thập phân là logarit cơ số 10. Viết: $\log_{10} b = \log b = \lg b$

☞ Logarit tự nhiên là logarit cơ số e . Viết: $\log_e b = \ln b$

➤ Dạng 2.2. Biểu diễn logarit

☐ Ta thực hiện theo các bước sau

- ☑ **Bước 01.** Biến đổi các biểu thức logarit phụ thuộc vào tham số a và b .
- ☑ **Bước 02.** Đặt các biểu thức logarit của các số nguyên tố là các ẩn $x, y, z, \dots$. Từ đó ta thu được phương trình hoặc hệ phương trình với các ẩn $x, y, z, \dots$. Ta tìm các ẩn này theo a, b
- ☑ **Bước 03.** Giải hệ tìm được tìm $x, y, z, \dots$ theo a, b . Từ đó tính được biểu thức theo các tham số a, b . Các công thức nền tảng là $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ và $\frac{1}{\log_a b} = \log_b a$

➤ Ví dụ 2.2.1

Cho $a = \log_2 14$. Biểu diễn $\log_{49} 16$ theo a

A. $\frac{2}{a-1}$.

B. $\frac{2}{a}$.

C. $a+3$.

D. $3a$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

➤ Ví dụ 2.2.2

Cho $a = \log_5 18$ và $b = \log_5 60$. Tính $\log_3 2$ theo a và b

A. $\frac{b-2}{2a-b}$.

B. $\frac{3a^2 - ab}{5a-4}$.

C. $\frac{-a+2b-2}{2a-b+1}$.

D. $\frac{a-2}{a+1}$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 2.3. Mệnh đề đúng - sai

☑ Ta lưu ý các công thức sau

01	Tính chất	① $\log_a a = 1, \log_a 1 = 0$ ② $a^{\log_a b} = b, \log_a (a^\alpha) = \alpha$ ③ $\log_a (b.c) = \log_a b + \log_a c$ (Tích – tổng) ④ $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ (Thương – hiệu) Đặc biệt : với $a, b > 0, a \neq 1$ $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$
02	Công thức bay	① $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$ ② $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b$ Đặc biệt: $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$
03	Đổi cơ số	① $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ ② $\log_a b = \log_a c . \log_c b$ Đặc biệt : $\log_a c = \frac{1}{\log_c a}$.

👉 Ví dụ 2.3.1

Cho $a, b, c > 0; a \neq 1; b \neq 1$, Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

B. $\log_a b.\log_b c = \log_a c.$

C. $\log_{a^c} b = c \log_a b$.

D. $\log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c.$

Lời giải

👉 Ví dụ 2.3.2

Cho $a, b, c > 0$ và $a, b \neq 1$, Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $a^{\log_a b} = b$.

B. $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$.

C. $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$.

D. $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c$.

Lời giải

👉 Ví dụ 2.3.3

Cho $a, b, c > 0$ và $a, b \neq 1$, Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\frac{1}{\log_a b} = \log_b a.$

B. $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$.

C. $\log_a(b.c)=\log_a(b+c)$.

D. $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$.

Lời giải

☞ Ví dụ 2.3.4

Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 = 7ab$. Mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau là:

A. $2(\log a + \log b) = \log(7ab)$.

B. $\log \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$.

C. $3\log(a+b) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$.

D. $\log(a+b) = \frac{3}{2}(\log a + \log b)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 2.3.5

Với mọi số $a, b > 0$ thỏa mãn $9a^2 + b^2 = 10ab$ thì đẳng thức đúng là.

A. $2\log(3a+b) = \log a + \log b$.

B. $\frac{\log(3a+b)}{4} = \frac{\log a + \log b}{2}$.

C. $\log a + \log(b+1) = 1$.

D. $\log \frac{3a+b}{4} = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Chương 02

Chủ đề 03

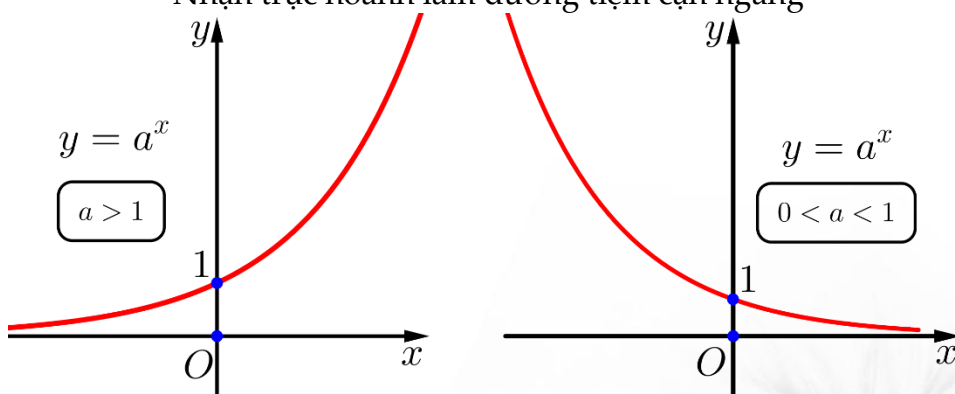
LŨY THỪA - MŨ - LOGARIT

HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

A. LÝ THUYẾT CHUNG.

1. Hàm số mũ.

Hàm số mũ $y = a^x$, ($a > 0, a \neq 1$)

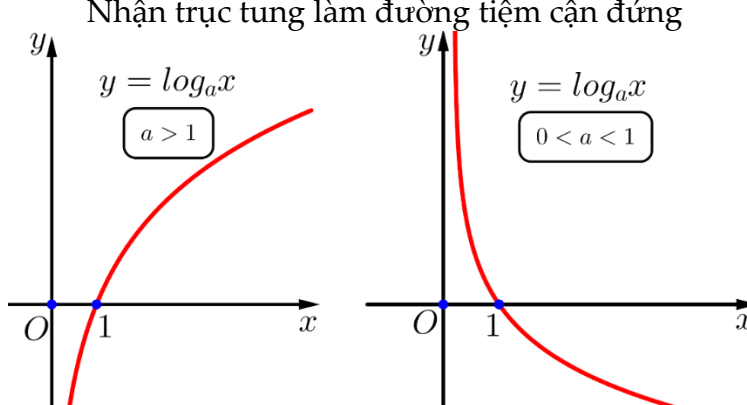
Tập xác định	$D = \mathbb{R}$.	
Tập giá trị	$T = (0; +\infty)$, nghĩa là khi giải phương trình mà đặt $t = a^{f(x)}$ thì $t > 0$.	
Đơn điệu	$a > 1$	Hàm số $y = a^x$ đồng biến, khi đó: $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$.
	$0 < a < 1$	Hàm số $y = a^x$ nghịch biến, khi đó: $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$.
Đạo hàm	$\begin{aligned} (a^x)' &= a^x \cdot \ln a \Rightarrow (a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \\ (e^x)' &= e^x \Rightarrow (e^u)' = e^u \cdot u' \\ (\sqrt[n]{u})' &= \frac{u'}{n \cdot \sqrt[n]{u^{n-1}}} \end{aligned}$	
Đồ thị	Nhận trục hoành làm đường tiệm cận ngang 	

○ Nhận xét:

Đồ thị hàm số $y = a^x$ ($a > 1$) đối xứng với đồ thị hàm số $y = a^x$ ($0 < a < 1$) qua Oy.

2. Hàm số logarit.

Hàm số logarit $y = \log_a x$, ($a > 0, a \neq 1; x > 0$)

Tập xác định	$D = (0; +\infty)$.	
Tập giá trị	$T = \mathbb{R}$, nghĩa là khi giải PT mà đặt $t = \log_a x$ thì t không có điều kiện.	
Đơn điệu	$a > 1$	Hàm số $y = \log_a x$ đồng biến trên D , khi đó: $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x)$.
	$0 < a < 1$	Hàm số $y = \log_a x$ nghịch biến trên D , khi đó: $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x)$.
Đạo hàm	$\left(\log_a x \right)' = \frac{1}{x \cdot \ln a} \Rightarrow \left(\log_a u \right)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \Rightarrow \boxed{\left(\ln^n u \right)' = n \cdot \frac{u'}{u} \cdot \ln^{n-1} u }$ $(\ln x) = \frac{1}{x}, (x > 0) \Rightarrow (\ln u)' = \frac{u'}{u}$	
Đồ thị	Nhận trục tung làm đường tiệm cận đứng 	

○ Nhận xét:

Đồ thị hàm số $y = \log_a x$ ($a > 1$) đối xứng với đồ thị hàm số $y = \log_a x$ ($0 < a < 1$) qua Ox .

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

➤ Dạng 3.1. Tập xác định của hàm số logarit

○ Điều kiện xác định của hàm số $y = \log_a f(x)$: $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ f(x) > 0 \end{cases}$.

○ Đặc biệt: với hàm số $y = \log_{g(x)} [f(x)]^n$ ta lưu ý “**mũ n**” của $f(x)$:

□ Nếu $n:2 \longrightarrow$ ĐKXĐ của hàm số $y = \log_{g(x)} [f(x)]^n$: $\begin{cases} g(x) > 0 \\ g(x) \neq 1 \\ f(x) \neq 0 \end{cases}$.

□ Nếu $n \nmid 2 \longrightarrow$ ĐKXĐ của hàm số $y = \log_{g(x)} [f(x)]^n$: $\begin{cases} g(x) > 0 \\ g(x) \neq 1 \\ f(x) > 0 \end{cases}$.

⇒ Tóm lại nếu $f(x)$ hoặc $g(x)$ có “**mũ n**” ta chú ý xem “**n**” chẵn hay lẻ.

➤ Ví dụ 3.1.1

Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_3(2x+1)$.

A. $D = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$. B. $D = \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. C. $D = (0; +\infty)$. D. $D = \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải

.....

.....

.....

➤ Ví dụ 3.1.2

Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log(x^2 + 3x + 2)$.

A. $D = [-2, -1]$. B. $D = (-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$.
C. $D = (-2, -1)$. D. $D = (-\infty, -2] \cup [-1, +\infty)$.

Lời giải

.....

.....

.....

➤ Ví dụ 3.1.3

Tập xác định của hàm số: $y = \log(x-2)^2$ là

A. $\mathbb{R}$ B. $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. C. $(2; +\infty)$. D. $[2; +\infty)$.

Lời giải

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 3.1.4

Tập xác định của hàm số: $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \frac{2-x}{x+2}}$ là

- A. $[0; 2)$ B. $(0; 2)$.
C. $(-\infty; -2) \cup [0; 2)$. D. $(-2; 2)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 3.1.5

Tập xác định của hàm số: $y = \log_{(x+1)^2} (x^2 - 3x + 2) + \ln(3-x)^{2021}$ là

- A. $D = (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (2; 3)$ B. $D = (-\infty; -1) \cup (2; 3)$.
C. $D = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (2; 3)$. D. $D = (-\infty; -1)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 3.1.6

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \ln(x^2 - 2mx + 4)$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$?

- A. $-2 \leq m \leq 2$ B. $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$.
C. $m > -2$. D. $-2 < m < 2$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

➤ Dạng 3.2. Đạo hàm hàm số mũ - logarit

○ Đạo hàm hàm số logarit:

$$\begin{aligned} (\log_a |x|)' &= \frac{1}{x \cdot \ln a} \Rightarrow (\log_a |u|)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \Rightarrow \boxed{(\ln^n |u|)' = n \cdot \frac{u'}{u} \cdot \ln^{n-1} |u|} \\ (\ln x)' &= \frac{1}{x}, (x > 0) \Rightarrow (\ln |u|)' = \frac{u'}{u} \end{aligned}$$

○ Đạo hàm hàm số mũ:

$$\begin{aligned} (a^x)' &= a^x \cdot \ln a \Rightarrow (a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \\ (e^x)' &= e^x \Rightarrow (e^u)' = e^u \cdot u' \\ (\sqrt[n]{u})' &= \frac{u'}{n \cdot \sqrt[n]{u^{n-1}}} \end{aligned}$$

➤ Ví dụ 3.2.1

Đạo hàm của hàm số $y = \log_3(4x+1)$ là

A. $y' = \frac{1}{(4x+1)\ln 3}$

B. $y' = \frac{4}{(4x+1)\ln 3}$

C. $y' = \frac{\ln 3}{4x+1}$

D. $y' = \frac{4\ln 3}{4x+1}$

Lời giải

.....

.....

.....

➤ Ví dụ 3.2.2

Hàm số $y = 2^{2x^2+x}$ có đạo hàm là

A. $y' = (4x+1)2^{2x^2+x} \ln 2$

B. $y' = 2^{2x^2+x} \ln 2$

C. $y' = (4x+1)2^{2x^2+x} \ln(2x^2+x)$

D. $y' = (2x^2+x)2^{2x^2+x} \ln 2$

Lời giải

.....

.....

➤ Ví dụ 3.2.3

Tính đạo hàm của hàm số $y = 2^{\sqrt{1-x}}$.

A. $y' = \frac{-\ln 2}{2\sqrt{1-x}} \cdot 2^{\sqrt{1-x}}$

B. $y' = \frac{\ln 2}{2\sqrt{1-x}} \cdot 2^{\sqrt{1-x}}$

C. $y' = \frac{-2^{\sqrt{1-x}}}{2\sqrt{1-x}}$

D. $y' = \frac{2^{\sqrt{1-x}}}{2\sqrt{1-x}}$

Lời giải

.....

.....

Dạng 3.3. Khảo sát hàm số mũ - logarit

○ Ta cần lưu ý các vấn đề sau:

		Hàm số Mũ $y = a^x (1 \neq a > 0)$	Hàm số Logarit $y = \log_a x (1 \neq a > 0)$
01	Đơn điệu	$a > 1 \rightarrow$ HS đồng biến. $0 < a < 1 \rightarrow$ HS nghịch biến.	$a > 1 \rightarrow$ HS đồng biến. $0 < a < 1 \rightarrow$ HS nghịch biến.
02	Tiệm cận	Nhận Ox làm TCN.	Nhận Oy làm TCD.
03	Đồ thị	Nằm bên trên Ox. Luôn đi qua điểm $(0;1)$. ĐTHS $y = a^x (1 \neq a > 0)$ đối xứng $y = \log_a x (1 \neq a > 0)$ qua $y = x$ (đường phân xác góc phần tư thứ nhất).	Nằm bên phải Oy. Luôn đi qua điểm $(1;0)$.

○ Với bài toán xét thứ tự cơ số ta nhớ như sau:

		Hàm số Mũ $y = a^x (1 \neq a > 0)$	Hàm số Logarit $y = \log_a x (1 \neq a > 0)$
Cơ số	> 1	Càng gần Oy cơ số càng lớn.	Càng gần Ox cơ số càng lớn.
	$0 < a < 1$	Càng gần Oy cơ số càng bé.	Càng gần Ox cơ số càng bé.
Hình minh họa			

Ví dụ 3.3.1

Cho hàm số $y = \log_{\sqrt{3}} x$. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề **sai**?

- A. Hàm số đã cho đồng biến trên tập xác định.
- B. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.
- C. Đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận đứng là trục Oy .
- D. Hàm số đã cho có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Lời giải

.....

.....

Ví dụ 3.3.2

Cho hàm số $y = \log_2 x$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- A. Đạo hàm của hàm số là $y' = x^2 \ln 2$.
- B. Đồ thị hàm số nhận trục Oy làm tiệm cận đứng.
- C. Tập xác định của hàm số là $(-\infty; +\infty)$.
- D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Lời giải

.....

.....

Ví dụ 3.3.3

Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

- A. Hàm số $y = \log_a x$ với $a > 1$ là một hàm số nghịch biến trên khoảng $(0, +\infty)$.
- B. Đồ thị hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ với $0 < a \neq 1$ đối xứng với nhau qua Ox .
- C. Hàm số $y = \log_a x$ với $0 < a \neq 1$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.
- D. Hàm số $y = \log_a x$ với $0 < a < 1$ là một hàm số đồng biến trên khoảng $(0, +\infty)$

Lời giải

Ví dụ 3.3.4

Đồ thị hàm số $y = \log(x+1)$ nhận đường thẳng nào dưới đây làm tiệm cận đứng ?

- A. $x = 1$
- B. $y = -1$.
- C. $x = -1$
- D. $x = 0$.

Lời giải

Ví dụ 3.3.5

Hàm số nào sau đây nghịch biến trên tập xác định của nó?

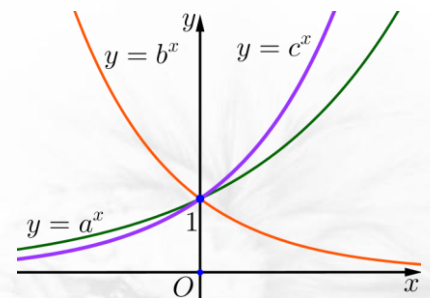
- A. $y = (\sqrt{5})^x$
- B. $y = \log_{2e} x$.
- C. $y = \left(\frac{5}{2}\right)^x$
- D. $y = \log_{\frac{\pi+1}{6}} x$.

Lời giải

Ví dụ 3.3.6

Cho các hàm số $y = a^x$, $y = b^x$ và $y = c^x$ lần lượt có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hãy so sánh a, b, c .

- A. $a > b > c$
- B. $a < b < c$.
- C. $a = b = c$
- D. $b < a < c$.



Lời giải

Chương 02

Chủ đề 04

LŨY THỪA - MŨ - LOGARIT

BÀI TOÁN LÃI SUẤT

A. LÝ THUYẾT CHUNG.

1. Lãi đơn.

- ☞ Số tiền lãi chỉ tính trên số tiền gốc mà không tính trên số tiền lãi do số tiền gốc sinh ra.
- ☞ Công thức tính lãi đơn:

$$V_n = V_0(1 + r.n)$$

☞ Trong đó:

- V_n : Số tiền cả vốn lẫn lãi sau n kỳ hạn;
- V_0 : Số tiền gửi ban đầu;
- n : Số kỳ hạn tính lãi;
- r : Lãi suất định kỳ, tính theo %.

2. Lãi kép.

- ☞ Số tiền lãi không chỉ tính trên số tiền gốc mà còn tính trên số tiền lãi do tiền gốc đó sinh ra thay đổi theo từng định kỳ.

☞ Ta có các loại lãi kép sau:

2.1. Lãi kép, gửi một lần:

$$T_n = T_0(1 + r)^n$$

☞ Trong đó:

- T_n : Số tiền cả vốn lẫn lãi sau n kỳ hạn;
- T_0 : Số tiền gửi ban đầu;
- n : Số kỳ hạn tính lãi;
- r : Lãi suất định kỳ, tính theo %.

2.2. Lãi kép liên tục:

$$T_n = T_0.e^{nr}$$

☞ Trong đó:

- T_n : Số tiền cả vốn lẫn lãi sau n kỳ hạn;
- T_0 : Số tiền gửi ban đầu;
- n : Số kỳ hạn tính lãi;
- r : Lãi suất định kỳ, tính theo %.

2.3. Lãi kép, gửi định kỳ.

2.3.1. Trường hợp gửi tiền định kì cuối tháng.

Bài toán 1

Cứ cuối mỗi tháng gửi vào ngân hàng m triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm).
Hỏi sau n (tháng hoặc năm) số tiền thu được là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tiền thu được là: $T_n = \frac{m}{r} \left[(1+r)^n - 1 \right]$.

☞ Chứng minh

Tháng	Đầu tháng	Cuối tháng
1	Chưa gửi	m
2	m	$m(1+r) + m$
3	$m(1+r) + m$	$m(1+r)^2 + m(1+r) + m$

...	...	...
n		$m(1+r)^{n-1} + \dots + m(1+r) + m$

- Vậy sau tháng n ta được số tiền $T_n = m(1+r)^{n-1} + \dots + m(1+r) + m = m \left[(1+r)^{n-1} + \dots + (1+r) + 1 \right]$,
- Ta thấy trong ngoặc là tổng n số hạng của cấp số nhân có $u_1 = 1$, $u_n = (1+r)^{n-1}$, $q = 1+r$
- Biết rằng: $S_n = u_1 + \dots + u_n = u_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ nên $T_n = \frac{m}{r} \left[(1+r)^n - 1 \right]$

Bài toán 2

Cứ cuối mỗi tháng gửi vào ngân hàng m triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Sau n (tháng hoặc năm) số tiền thu được là A triệu. Hỏi số tiền gửi mỗi tháng m là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tiền cần gửi mỗi tháng là: $m = \frac{Ar}{(1+r)^n - 1}$.

Chứng minh

- Áp dụng **bài toán 1** ta có số tiền thu được là $T_n = \frac{m}{r} \left[(1+r)^n - 1 \right]$,
- Mà đề cho số tiền đó chính là A nên $A = \frac{m}{r} \left[(1+r)^n - 1 \right] \Leftrightarrow m = \frac{Ar}{(1+r)^n - 1}$.

Bài toán 3

Cứ cuối mỗi tháng gửi vào ngân hàng m triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Sau n (tháng hoặc năm) số tiền thu được là A triệu. Hỏi số tháng hoặc năm n là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tháng thu được đề bài cho là: $n = \log_{1+r} \left(\frac{Ar}{m} + 1 \right)$.

Chứng minh

- Áp dụng **bài toán 1** ta có số tiền thu được là $T_n = \frac{m}{r} \left[(1+r)^n - 1 \right]$.
- Đề cho số tiền đó chính là A nên:

$$A = \frac{m}{r} \left[(1+r)^n - 1 \right] \Leftrightarrow m = \frac{Ar}{(1+r)^n - 1} \Leftrightarrow (1+r)^n = \frac{Ar}{m} + 1 \Leftrightarrow n = \log_{1+r} \left(\frac{Ar}{m} + 1 \right)$$

$\Rightarrow$ Như vậy trong **trường hợp 2.3.1** này ta cần nắm vững công thức **bài toán 1** từ đó có thể dễ dàng biến đổi ra các công thức ở **bài toán 2, bài toán 3**.

2.3.2. Trường hợp gửi tiền định kì đầu tháng.

Bài toán 4

Cứ đầu mỗi tháng gửi vào ngân hàng m triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Hỏi sau n (tháng hoặc năm) số tiền thu được là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tiền thu được là: $T_n = \frac{m}{r} \left[(1+r)^n - 1 \right] (1+r)$.

Chứng minh

- Ta xây dựng bảng sau:

Tháng	Đầu tháng	Cuối tháng
-------	-----------	------------

1	m	$m(1+r)$
2	$m(1+r) + m$	$m(1+r)^2 + m(1+r)$
3	$m(1+r)^2 + m(1+r) + m$	$m(1+r)^3 + m(1+r)^2 + m(1+r)$
...	...	...
n	...	$m(1+r)^n + \dots + m(1+r)$

- ♦ Vậy sau tháng n ta được số tiền:

$$T_n = m(1+r)^n + \dots + m(1+r) = m \left[(1+r)^n + \dots + (1+r) \right] = m(1+r) \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Bài toán 5

Cứ đầu mỗi tháng gửi vào ngân hàng m triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Sau n (tháng hoặc năm) số tiền thu được là A triệu. Hỏi số tiền gửi mỗi tháng m là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tiền cần gửi mỗi tháng là: $m = \frac{Ar}{(1+r) \left[(1+r)^n - 1 \right]}$.

Chứng minh

- ♦ Áp dụng **bài toán 4**. Ta có số tiền thu được là: $T_n = \frac{m}{r} \left[(1+r)^n - 1 \right] (1+r)$,
- ♦ Mà đề cho số tiền đó là A nên $A = \frac{m}{r} \left[(1+r)^n - 1 \right] (1+r) \Leftrightarrow m = \frac{Ar}{(1+r) \left[(1+r)^n - 1 \right]}$.

Bài toán 6

Cứ đầu mỗi tháng gửi vào ngân hàng m triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Sau n (tháng hoặc năm) số tiền thu được là A triệu. Hỏi số tháng hoặc năm n là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tháng thu được đề bài cho là: $n = \log_{1+r} \left[\frac{Ar}{m(1+r)} + 1 \right]$.

Chứng minh

- ♦ Áp dụng **bài toán 4**. Ta có: số tiền thu được là: $T_n = \frac{m}{r} \left[(1+r)^n - 1 \right] (1+r)$.
- ♦ Đề cho số tiền đó là A nên: $A = \frac{m}{r} \left[(1+r)^n - 1 \right] (1+r)$

$$\Leftrightarrow m = \frac{Ar}{(1+r) \left[(1+r)^n - 1 \right]} \Leftrightarrow (1+r)^n = \frac{Ar}{m(1+r)} + 1 \Rightarrow n = \log_{1+r} \left[\frac{Ar}{m(1+r)} + 1 \right].$$

$\Rightarrow$ Như vậy trong **trường hợp 2.3.2** ta cần nắm vững công thức **bài toán 4** từ đó có thể dễ dàng biến đổi ra các công thức ở **bài toán 5**, **bài toán 6**.

2.3.3. Trường hợp vay nợ và trả tiền định kì đầu tháng.

Bài toán 7

Vay ngân hàng A triệu đồng. Cứ đầu mỗi tháng (năm) trả ngân hàng m triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Hỏi sau n (tháng hoặc năm) số tiền còn nợ là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tiền còn nợ là: $T_n = A(1+r)^n - m(1+r) \frac{(1+r)^n - 1}{r}$.

Chứng minh

♦ Ta xây dựng bảng sau:

Tháng	Đầu tháng	Cuối tháng
1	$A - m$	$(A - m)(1+r) = A(1+r) - m(1+r)$
2	$A(1+r) - m(1+r) - m$	$A(1+r)^2 - m(1+r)^2 - m(1+r)$
3	$A(1+r)^2 - m(1+r)^2 - m(1+r) - m$	$A(1+r)^3 - m(1+r)^3 - m(1+r)^2 - m(1+r)$
...	...	...
n	...	$A(1+r)^n - m(1+r)^n - \dots - m(1+r)^2 - m(1+r)$

♦ Vậy sau tháng n ta còn nợ số tiền:

$$\begin{aligned} T_n &= A(1+r)^n - m(1+r)^n - \dots - m(1+r)^2 - m(1+r) \\ &= A(1+r)^n - m \left[(1+r)^n + \dots + (1+r) \right] = A(1+r)^n - m(1+r) \frac{(1+r)^n - 1}{r}. \end{aligned}$$

3. Bài toán tăng trưởng dân số.

☞ Công thức tính:

$$\begin{aligned} X_m &= X_n (1+r)^{m-n} \\ (m, n \in \mathbb{Z}^+; m \geq n) \end{aligned}$$

☞ Trong đó:

r : tỉ lệ tăng dân số từ năm n đến năm m.

X_m : dân số năm m.

X_n : dân số năm n.

☞ Từ đó ra có công thức tính tỉ lệ tăng dân số là $r = \sqrt[m-n]{\frac{X_m}{X_n}} - 1$.

Ví dụ 4.1

Bà Hoa gửi 0,45% triệu vào tài khoản định kỳ tính lãi kép với lãi suất là 8%/năm. Tính số tiền lãi thu được sau 10 năm.

Lời giải

♦ Áp dụng công thức tính lãi kép, sau 10 năm số tiền cả gốc và lãi bà Hoa thu về là

$$A(1+r)^n = 100(1+0,08)^{10} \approx 215,892 \text{ triệu đồng.}$$

♦ Suy ra số tiền lãi bà Hoa thu về sau 10 năm là $215,892 - 100 = 115,892$ triệu đồng.

Ví dụ 4.2

Một người muốn gửi tiết kiệm ở ngân hàng và hi vọng sau 4 năm có được 850 triệu đồng để mua nhà. Biết lãi suất ngân hàng mỗi tháng trong thời điểm hiện tại là 0,45%. Hỏi người đó mỗi tháng phải gửi vào ngân hàng tối thiểu bao nhiêu tiền để đủ số tiền mua nhà? (giả sử số tiền mỗi tháng là như nhau và lãi suất trong 4 năm là không thay đổi).

Lời giải

- ♦ Giả sử người này gửi tiền ở thời điểm t nào đó, kể từ thời điểm này sau 4 năm (48 tháng) ông muốn có số tiền 850 triệu.
- ♦ Như vậy rõ ràng ta có thể coi đây là bài toán gửi tiền định kì đầu tháng.
- ♦ Áp dụng bài toán 5 ta có số tiền phải gửi mỗi tháng là: $m = \frac{Ar}{(1+r)\left[(1+r)^n - 1\right]} (*)$.
- ♦ Theo bài ra $n = 48, r = 0,45\%, A = 850$.
- ♦ Thay vào (*) ta được $m = \frac{850 \cdot 0,45\%}{(1+0,45\%)\left[(1+0,45\%)^{48} - 1\right]} = 15,833$ triệu đồng.

☞ Ví dụ 4.3

Một bà mẹ Việt Nam anh hùng được hưởng số tiền là 4 triệu đồng trên một tháng (chuyển vào tài khoản của mẹ ở ngân hàng vào đầu tháng). Từ tháng 1 năm 2016 mẹ không đi rút tiền mà để lại ngân hàng và được tính lãi suất 1% trên một tháng. Đến tháng 12 năm 2016 mẹ rút toàn bộ số tiền (gồm số tiền của 12 tháng và số tiền đã gửi tháng 1). Hỏi khi đó mẹ lĩnh về bao nhiêu tiền? (kết quả làm tròn theo đơn vị nghìn đồng).

Lời giải

- ♦ Nếu ban đầu gửi vào a đồng, từ đầu tháng sau gửi thêm a đồng (không đổi) vào đầu mỗi tháng với lãi suất $r\%$ trong n tháng thì tổng số tiền thu được là:

$$A = a + \frac{a}{r}(1+r)\left[(1+r)^n - 1\right] = 4 + \frac{4}{1\%}(1+1\%)\left[(1+1\%)^{11} - 1\right] + 4 = 50,73 \text{ triệu đồng.}$$

- ♦ $n = 11$ là tính từ đầu tháng 2 đến cuối tháng 12.

☞ Ví dụ 4.4

Đầu năm 2016, anh Hùng có xe công nông trị giá 100 triệu đồng. Biết mỗi tháng thì xe công nông hao mòn mất 0,4% giá trị, đồng thời làm ra được 6 triệu đồng (số tiền làm ra mỗi tháng là không đổi). Hỏi sau một năm, tổng số tiền (bao gồm giá tiền xe công nông và tổng số tiền anh Hùng làm ra) anh Hùng có là bao nhiêu?

Lời giải

- ♦ Sau một năm số tiền anh Hùng làm ra là $6 \cdot 12 = 72$ triệu đồng
 - ♦ Sau một năm giá trị xe công nông còn $100(1 - 0,4\%)^{12} \approx 95,3042$ triệu đồng
- ⇒ Vậy sau một năm số tiền anh Hùng có là 167,3042 triệu đồng

☞ Ví dụ 4.5

Bác B gửi tiết kiệm số tiền ban đầu là 50 triệu đồng theo kỳ hạn 3 tháng với lãi suất 0,72% tháng. Sau một năm bác B rút cả vốn lẫn lãi và gửi theo kỳ hạn 6 tháng với lãi suất 0,78% tháng. Sau khi gửi đúng một kỳ hạn 6 tháng do gia đình có việc bác gửi thêm 3 tháng nữa thì phải rút tiền trước hạn cả gốc lẫn lãi được số tiền là 57.694.945,55 đồng (chưa làm tròn). Biết rằng khi rút tiền trước hạn lãi suất được tính theo lãi suất không kỳ hạn, tức tính theo hàng tháng. Trong số 3 tháng bác gửi thêm lãi suất là

Lời giải

- ♦ Số tiền bác B rút ra sau năm đầu: $T_1 = 50.000.000 * (1 + 0,0072 * 3)^4$
- ♦ Số tiền bác B rút ra sau sáu tháng tiếp theo: $T_2 = T_1 * (1 + 0,0078 * 6)$
- ♦ Số tiền bác B rút ra sau ba tháng tiếp theo:

$$T_3 = T_2 * (1+r)^3 = 57.694.945,55 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{57.694.945,55}{T_2}} - 1 \approx 0,004 = 0,4\%.$$

Ví dụ 4.6

Bạn Nam là sinh viên của một trường Đại học, muốn vay tiền ngân hàng với lãi suất ưu đãi trang trải kinh phí học tập hàng năm. Đầu mỗi năm học, bạn ấy vay ngân hàng số tiền 10 triệu đồng với lãi suất là 4%. Tính số tiền mà Nam nợ ngân hàng sau 4 năm, biết rằng trong 4 năm đó, ngân hàng không thay đổi lãi suất (kết quả làm tròn đến nghìn đồng).

Lời giải

- ♦ Tổng số tiền bạn Nam vay (gốc và lãi) sau 4 năm là:

$$A = 10^6(1+0,04)^4 + 10^6(1+0,04)^3 + 10^6(1+0,04)^2 + 10^6(1+0,04)$$

$$= 10^6(1+0,04) \left[1 + (1+0,04) + (1+0,04)^2 + (1+0,04)^3 \right] = 10^6(1+0,04) \cdot \frac{1-(1+0,04)^4}{1-(1+0,04)} = 44163256$$

- ♦ Nên $A = 44163000$ đồng

Ví dụ 4.7

Một giáo viên được nhận lương khởi điểm là 8.000.000 đồng/tháng. Cứ sau hai năm lương mỗi tháng của giáo viên đó được tăng thêm 10% so với mức lương hiện tại. Tính tổng số tiền T (đồng) giáo viên đó nhận được sau 6 năm làm việc.

Lời giải

- ♦ Lương 2 năm đầu tiên của giáo viên đó nhận được là $T_1 = 8 \cdot 10^6 \cdot 24 = 192 \cdot 10^6$ (đồng)
- ♦ Theo công thức tính lãi kép, lương 2 năm tiếp theo giáo viên đó nhận được:

$$T_2 = 24 \cdot 8 \cdot 10^6 \cdot (1+10\%)^1 = 212,2 \cdot 10^6 \text{ (đồng)}$$

- ♦ Lương 2 năm cuối cùng giáo viên đó nhận được:

$$T_3 = 24 \cdot 8 \cdot 10^6 \cdot (1+10\%)^2 = 232,32 \cdot 10^6 \text{ (đồng)}$$

- ♦ Tổng số tiền T (đồng) giáo viên đó nhận được sau 6 năm làm việc:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = 635,520,000 \text{ (đồng)}.$$

Ví dụ 4.8

Anh Hưng đi làm được lĩnh lương khởi điểm 4.000.000 đồng/tháng. Cứ 3 năm, lương của anh Hưng lại được tăng thêm 7%/1 tháng. Hỏi sau 36 năm làm việc anh Hưng nhận được tất cả bao nhiêu tiền? (Kết quả làm tròn đến hàng nghìn đồng).

Lời giải

- ♦ Gọi a là số tiền lương khởi điểm, r là lương được tăng thêm.

+ Số tiền lương trong ba năm đầu tiên: $36a$

+ Số tiền lương trong ba năm kế tiếp: $36[a + a \cdot r] = 36a(1+r)^1$

+ Số tiền lương trong ba năm kế tiếp: $36a(1+r)^2$

...

+ Số tiền lương trong ba năm cuối: $36a(1+r)^{11}$.

- ♦ Vậy sau 36 năm làm việc anh Hưng nhận được:

$$\left[1 + (1+r)^1 + (1+r)^2 + (1+r)^3 + \dots + (1+r)^{11} \right] \cdot a \cdot 36 = 2.575.936.983 \simeq 2.575.937.000 \text{ đồng}.$$

☞ Ví dụ 4.9

Một người đem gửi tiền tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất 1% một tháng. Biết rằng cứ sau mỗi quý (3 tháng) thì lãi sẽ được cộng dồn vào vốn gốc. Hỏi sau tối thiểu bao nhiêu năm thì người đó nhận lại được số tiền bao gồm cả vốn lẫn lãi gấp ba lần số tiền ban đầu

Lời giải

- ♦ Gọi a là số tiền người đó gửi ban đầu
- ♦ Số tiền nhận được cả gốc lẫn lãi sau N năm là

$$T = a(1 + 0,03)^{\frac{N}{4}}$$

$$\frac{T}{a} = 3 \Leftrightarrow (1 + 0,03)^{\frac{N}{4}} = 3 \Leftrightarrow 4N \cdot \ln(1,03) = \ln 3 \Rightarrow N = \frac{\ln 3}{4 \ln 1,03} \approx 9,29$$

☞ Ví dụ 4.10

Một người vay ngân hàng một tỷ đồng theo phương thức trả góp để mua nhà. Nếu cuối mỗi tháng, bắt đầu từ tháng thứ nhất người đó trả 40 triệu đồng và chịu lãi số tiền chưa trả là 0,65% mỗi tháng (biết lãi suất không thay đổi) thì sau bao lâu người đó trả hết số tiền trên?

Lời giải

- ♦ Gọi A là số tiền vay, a là số tiền gửi hàng tháng r là lãi suất mỗi tháng.
- ♦ Đến cuối tháng thứ n thì số tiền còn nợ là:

$$T = A(1+r)^n - a \left[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \dots + 1 \right] = A(1+r)^n - \frac{a \left[(1+r)^n - 1 \right]}{r}$$

- ♦ Hết nợ đồng nghĩa $T = 0$

$$\Leftrightarrow A(1+r)^n - \frac{a \left[(1+r)^n - 1 \right]}{r} = 0 \Leftrightarrow \frac{a - Ar}{r} (1+r)^n = \frac{a}{r} \Leftrightarrow n = \log_{1+r} \frac{a}{a - Ar}$$

- ♦ Áp dụng với $A = 1$ (tỷ), $a = 0,04$ (tỷ), $r = 0,0065$ ta được $n \approx 27,37$.

$\Rightarrow$ Vậy cần trả 28 tháng.

☞ Ví dụ 4.11

Năm 2014, một người đã tiết kiệm được x triệu đồng và dùng số tiền đó để mua nhà nhưng trên thực tế người đó phải cần $1,55x$ triệu đồng. Người đó quyết định gửi tiết kiệm vào ngân hàng với lãi suất là 6,9%/ năm theo hình thức lãi kép và không rút trước kỳ hạn. Hỏi năm nào người đó mua được căn nhà đó (giả sử rằng giá bán căn nhà đó không thay đổi).

Lời giải

- ♦ Số tiền người gửi tiết kiệm sau n năm là $x(1 + 6,9\%)^n$
 - ♦ Ta cần tìm n để $x(1 + 6,9\%)^n = 1,55x \Leftrightarrow (1 + 6,9\%)^n = 1,55 \Leftrightarrow n \approx 6,56 \dots$
 - ♦ Do đó, người gửi tiết kiệm cần gửi tròn 7 kỳ hạn, tức là 7 năm.
- $\Rightarrow$ Vậy đến năm 2021 người đó sẽ có đủ tiền cần thiết.

Ví dụ 4.12

Một người gửi ngân hàng 100 triệu đồng theo hình thức lãi kép, lãi suất 0,5% một tháng (kể từ tháng thứ 2, tiền lãi được tính theo phần trăm tổng tiền có được của tháng trước đó và tiền lãi của tháng sau đó). Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng, người đó có nhiều hơn 125 triệu đồng?

Lời giải

- ♦ Số tiền cả vốn lẫn lãi người gửi sau n tháng: $S = 100(1 + 0,005)^n = 100.1,005^n$ (triệu đồng)

$$\Rightarrow 1,005^n = \frac{S}{100} \Rightarrow n = \log_{1,005} \frac{S}{100}.$$

- ♦ Để có số tiền $S = 125$ (triệu đồng) thì phải sau thời gian

$$n = \log_{1,005} \frac{S}{100} = \log_{1,005} \frac{125}{100} \approx 44,74 \text{ (tháng)}$$

$\Rightarrow$ Vậy: sau ít nhất 45 tháng người đó có nhiều hơn 125 triệu đồng.

Ví dụ 4.13

Ông Nam gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn 1 năm với lãi suất là 12% một năm. Sau n năm ông Nam rút toàn bộ số tiền (cả vốn lẫn lãi). Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất để số tiền lãi nhận được lớn hơn 40 triệu đồng (giả sử lãi suất hàng năm không thay đổi)

Lời giải

- ♦ Gọi T_n là tiền vốn lẫn lãi sau t tháng, a là số tiền ban đầu

- ♦ Tháng 1 ($t = 1$): $T_1 = a(1+r)$

- ♦ Tháng 2 ($t = 2$): $T_2 = a(1+r)^2$

.....

- ♦ Tháng n ($t = n$): $T_n = a(1+r)^t$

$$T_n = a(1+r)^t \Rightarrow t = \frac{\ln \frac{T_n}{a}}{\ln(1+r)} = \frac{\ln \frac{140}{100}}{\ln(1+1\%)} \approx 33,815 \text{ (tháng)}$$

- ♦ Để số tiền lãi nhận được lớn hơn 40 triệu thì $n > \frac{t}{12} \approx 2,818$

$\Rightarrow$ Vậy $n = 3$.

Ví dụ 4.14

Tỉ lệ tăng dân số ở Việt Nam được duy trì ở mức 1,05%. Theo số liệu của Tổng cục thống kê, dân số Việt Nam năm 2014 có 90.728.900 người. Với tốc độ tăng dân số như thế đến năm 2030 thì dân số của Việt Nam là bao nhiêu?

Lời giải

- ♦ Từ năm 2014 đến năm 2030 cách nhau số năm là: $2030 - 2014 = 16$ năm.

- ♦ Dân số Việt Nam năm 2030: $A_{16} = 90728900(1+1,05\%)^{16} \approx 107232574$ (người).

Chương 02

Chủ đề 05

LŨY THỪA - MŨ - LOGARIT

PHƯƠNG TRÌNH MŨ

A. LÝ THUYẾT CHUNG.

☞ Phương trình mũ cơ bản: $a^x = b$ ($a > 0, a \neq 1$).

☞ Phương trình có một nghiệm duy nhất khi $b > 0$.

☞ Phương trình vô nghiệm khi $b \leq 0$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

☞ **Dạng 5.1. Phương trình mũ cơ bản**

☞ Giải phương trình mũ cơ bản: $a^x = b$ ($a > 0, a \neq 1$).

☞ Khi đó $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$

Lưu ý:

☞ Phương trình có một nghiệm duy nhất khi $b > 0$.

☞ Phương trình vô nghiệm khi $b \leq 0$.

☞ **Ví dụ 5.1.1**

Phương trình $3^{\frac{1}{x}} = 4$ có nghiệm là

A. $x = \log_2 3$. B. $x = \log_3 2$. C. $x = \log_4 3$. D. $x = \log_3 4$.

Lời giải

.....

.....

☞ **Ví dụ 5.1.2**

Nghiệm của phương trình $8^x = 4$ là

A. $x = \frac{2}{3}$. B. $x = -\frac{1}{2}$. C. $x = \frac{1}{2}$. D. $x = -2$.

Lời giải

.....

.....

☞ **Ví dụ 5.1.3**

Nghiệm của phương trình $2^x + 2^{x+1} = 3^x + 3^{x+1}$ là

A. $x = \log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{4}$. B. $x = 1$. C. $x = 0$. D. $x = \log_{\frac{4}{3}} \frac{2}{3}$.

Lời giải

.....

.....

➤ Dạng 5.2. Đưa về cùng cơ số

Với $a > 0, a \neq 1$: $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.

➤ Ví dụ 5.2.1

Phương trình $2^{2x-1} - \frac{1}{8} = 0$ có nghiệm là

- A. $x = -1$. B. $x = 2$. C. $x = -2$. D. $x = 1$.

Lời giải

.....

.....

➤ Ví dụ 5.2.2

Tìm tập nghiệm của phương trình $2^{(x-1)^2} = 4^x$.

- A. $\{4 + \sqrt{3}, 4 - \sqrt{3}\}$. B. $\{2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}\}$.
C. $\{-4 + \sqrt{3}, -4 - \sqrt{3}\}$. D. $\{-2 + \sqrt{3}, -2 - \sqrt{3}\}$.

Lời giải

.....

.....

.....

➤ Ví dụ 5.2.3

Nghiệm của phương trình $\left(\frac{1}{25}\right)^{x+1} = 125^x$ là

- A. $-\frac{2}{5}$. B. 4. C. $-\frac{1}{8}$. D. 1

Lời giải

.....

.....

.....

➤ Ví dụ 5.2.4

Tìm tập hợp tất cả các nghiệm của phương trình $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-1} = (2\sqrt{2})^{x+2}$.

- A. $\left\{\frac{11}{2}\right\}$. B. $\left\{\frac{2}{11}\right\}$. C. $\left\{-\frac{2}{11}\right\}$. D. $\left\{-\frac{11}{2}\right\}$

Lời giải

.....

.....

.....

➤ Dạng 5.3. Logarit hóa

○ Phương trình $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1, b > 0 \\ f(x) = \log_a b \end{cases}$.

○ Phương trình $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} = \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \cdot \log_a b$

hoặc $\log_b a^{f(x)} = \log_b b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \cdot \log_b a = g(x)$.

➤ Ví dụ 5.3.1

|| Tìm tập nghiệm S của phương trình $2^{x+1} = 8$.
 A. $S = \{-3\}$. B. $S = \{2\}$. C. $S = \{0; 2\}$. D. $S = \{12\}$

Lời giải

.....

.....

➤ Ví dụ 5.3.2

|| Tìm tập nghiệm S của phương trình $3^{4^x} = 4^{3^x}$.
 A. $S = \emptyset$. B. $S = \left\{ \frac{\log_4(\log_3 4)}{1 - \log_4 3} \right\}$.
 C. $S = \left\{ \frac{1 - \log_4 3}{\log_4(\log_3 4)} \right\}$. D. $S = \left\{ \frac{\log_4(\log_3 4)}{\log_4 3} \right\}$

Lời giải

.....

.....

➤ Ví dụ 5.3.3

|| Giải phương trình sau: $2^x \cdot 5^x = 0,2 \cdot (10^{x-1})^5$
 A. $x = \frac{3}{2}$. B. $x = 0$. C. $x = -1$. D. $x = \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \log 2$

Lời giải

.....

.....

.....

➤ Ví dụ 5.3.4

|| Cho phương trình $4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$. Khi đặt $t = 2^x$ ta được phương trình nào sau đây
 A. $2t^2 - 3t = 0$. B. $4t - 3 = 0$. C. $t^2 + t - 3 = 0$. D. $t^2 + 2t - 3 = 0$

Lời giải

.....

.....

.....

➤ Dạng 5.4. Đặt ẩn phụ dễ thấy

○ Biến đổi quy về dạng: $f[a^{g(x)}] = 0 (0 < a \neq 1) \Leftrightarrow \begin{cases} t = a^{g(x)} > 0 \\ f(t) = 0 \end{cases}$.

○ Thông thường sẽ gặp các cơ số: $\begin{cases} 9^x \longrightarrow t = 3^x \\ 4^x \longrightarrow t = 2^x ; t > 0. \\ 25^x \longrightarrow t = 5^x \end{cases}$

➤ Ví dụ 5.4.1

Tập nghiệm của phương trình $9^x - 5 \cdot 3^x + 6 = 0$ là
A. $S = \{1; \log_3 2\}$. **B.** $S = \{\log_3 2\}$. **C.** $S = \{1\}$. **D.** $S = \{\emptyset\}$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

➤ Ví dụ 5.4.2

Số nghiệm của phương trình $4 \cdot 4^x - 9 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$ (*) là:
A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

➤ Ví dụ 5.4.3

Giải phương trình $2^{1+2x} + 15 \cdot 2^x - 8 = 0$ (*).
A. $x = \frac{3}{2}$. **B.** $x = 0$. **C.** $x = -1$. **D.** $x = 5$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 5.5. Đặt ẩn phụ với phương trình đẳng cấp

○ Phương trình đẳng cấp có dạng: $m.X^2 + n.XY + p.Y^2 = 0$.

○ Khi đó với phương trình mũ đẳng cấp có dạng: $m.a^{2f(x)} + n.(a.b)^{f(x)} + p.b^{2f(x)} = 0$

○ Phương pháp làm như sau:

01	Chia 2 vế cho $b^{2f(x)}$, đặt $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = t > 0$.	$m.\frac{a^{2f(x)}}{b^{2f(x)}} + n.\frac{(a.b)^{f(x)}}{b^{2f(x)}} + p.\frac{b^{2f(x)}}{b^{2f(x)}} = 0$ $\Leftrightarrow m.\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}\right]^2 + n.\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} + p = 0$ $\Leftrightarrow m.t^2 + n.t + p = 0.$
02	Chia 2 vế cho $a^{2f(x)}$, đặt $\left(\frac{b}{a}\right)^{f(x)} = t > 0$.	$m.\frac{a^{2f(x)}}{a^{2f(x)}} + n.\frac{(a.b)^{f(x)}}{a^{2f(x)}} + p.\frac{b^{2f(x)}}{a^{2f(x)}} = 0$ $\Leftrightarrow m + n.\left(\frac{b}{a}\right)^{f(x)} + p.\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{f(x)}\right]^2 = 0$ $\Leftrightarrow m + n.t + p.t^2 = 0.$

Lưu ý:

Đây là dạng sẽ có trong bài “Bất phương trình mũ”, lúc giải BPT mũ ta cần chú ý đến cơ số lớn hay bé hơn 1. Để giảm sai sót chúng ta hãy “chia 2 vế” cho **cơ số bé nhất** !!!

Ví dụ 5.5.1

Giải phương trình sau: $8^x + 18^x = 2.27^x$ (*)

A. $x=1$.

B. $x=\log_3 2$.

C. $x=-1$.

D. $x=0$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 5.5.2

Số nghiệm của phương trình: $25^x + 15^x = 2.9^x$ (*) là:

A. 0.

B. 3.

C. 1.

D. 2

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Dạng 5.6. Đặt ẩn phụ với tích hai cơ số bằng 1

○ Phương trình đẳng cấp có dạng: $m.X^2 + n.XY + p.Y^2 = 0$.

○ Phương trình mũ ta xét có dạng: $m.a^{f(x)} + n.b^{f(x)} + p = 0$ (*) trong đó $a.b = 1$.

○ Phương pháp làm như sau:

$$\text{Vì } a.b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{a} \longrightarrow \text{Đặt } t = a^{f(x)}, t > 0 \Rightarrow b^{f(x)} = \frac{1}{t}.$$

$$\text{Khi đó (*)} \Leftrightarrow m.t + n.\frac{1}{t} + p = 0 \Leftrightarrow m.t^2 + n + p.t = 0.$$

Ví dụ 5.6.1

Tìm tích các nghiệm của phương trình $(\sqrt{2}-1)^x + (\sqrt{2}+1)^x - 2\sqrt{2} = 0$.

A. 2.

B. -1.

C. 0.

D. 1

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 5.6.2

Phương trình $(3+\sqrt{5})^x + (3-\sqrt{5})^x = 3.2^x$ có tổng các nghiệm là

A. 0.

B. 1.

C. -1.

D. 2

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

➤ Dạng 5.7. Phương pháp hàm số

❑ **Định lý.** Nếu hàm số $y = f(x)$ là hàm số liên tục và đồng biến trên $(a; b)$, $y = g(x)$ là hàm số liên tục và nghịch biến trên $(a; b)$ thì phương trình $f(x) = g(x)$ có tối đa một nghiệm trên $(a; b)$.

○ Phương pháp làm như sau:

01

- ⇒ Biến đổi phương trình đã cho về dạng $f(x) = k$, với k là hằng số
- ♦ Chứng minh $f(x)$ là hàm đồng biến (nghịch biến) trên tập xác định.
 - ♦ Tìm x_0 sao cho $f(x_0) = k$
 - ♦ Kết luận x_0 là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x) = k$.

02

- ⇒ Biến đổi phương trình đã cho về dạng $f(x) = g(x)$, với D_1, D_2 lần lượt là tập xác định của hai hàm số $f(x), g(x)$
- ♦ Chứng minh $f(x)$ là hàm đồng biến và $g(x)$ nghịch biến trên tập $D_1 \cap D_2$ (hay ngược lại)
 - ♦ Tìm x_0 sao cho $f(x_0) = g(x_0)$
 - ♦ Kết luận x_0 là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x) = g(x)$.

03

- ⇒ Biến đổi phương trình đã cho về dạng $f(u) = f(v)$, với hàm số $f(t)$ là hàm đồng biến (hay nghịch biến).
- ♦ Phương trình $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$.

✍ **Lưu ý:**

- ① Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là hàm đồng biến (nghịch biến) trên $(a; b)$ thì $f(x) + g(x)$ cũng là hàm đồng biến (nghịch biến) trên $(a; b)$.
- ② Hàm số $y = a^x$ đồng biến khi $a > 1$ và nghịch biến khi $0 < a < 1$.

➤ **Ví dụ 5.7.1**

Phương trình $2016^x + 2x - 2018 = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4

Lời giải

.....

.....

.....

➤ **Ví dụ 5.7.2**

Tổng các nghiệm của phương trình $3^{x^2-x} - 3^{x+15} = 15 + 2x - x^2$ là:

A. -6.

B. -1.

C. 5.

D. 2.

Lời giải

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 5.7.3

Phương trình $(x-1).2^x = x+1$ có bao nhiêu nghiệm thực

A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 5.7.3

Phương trình $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^x + (\sqrt{3}+\sqrt{2})^x = (\sqrt{10})^x$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực?

A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Dạng 5.8. Phương trình chứa tham số

Để giải bài toán tìm tham số m trong phương trình mũ ta có hai cách phổ biến:

01

⇒ Cô lập được tham số m .

♦ Ta dùng đồ thị hàm số để biện luận số nghiệm (bài toán tương giao).

02

⇒ Không cô lập được tham số m và có liên quan đến Vi-ét.

♦ Đặt ẩn phụ đưa về phương trình bậc hai/bậc ba.

♦ Kết hợp định lý Vi-ét để giải quyết yêu cầu bài toán

Ví dụ 5.8.1

Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình

$$16^x - 2 \cdot 12^x + (m-2) \cdot 9^x = 0 \text{ có nghiệm dương?}$$

A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 5.8.2

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$$9^{\sqrt{4x-x^2}} - 4 \cdot 3^{\sqrt{4x-x^2}} + 2m - 1 = 0 \text{ có nghiệm?}$$

A. 27.

B. 25.

C. 23.

D. 24.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 5.8.3

Gọi $(a;b)$ là tập các giá trị của tham số m để phương trình $2e^{2x} - 8e^x - m = 0$ có đúng hai nghiệm thuộc khoảng $(0; \ln 5)$. Tổng $a+b$ là

A. 2.

B. 4.

C. -6.

D. -14.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 5.8.4

Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $25^x - m \cdot 5^{x+1} + 7m^2 - 7 = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Hỏi S có bao nhiêu phần tử.

A. 7.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 5.8.5

Gọi S là tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m^2 - 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Hỏi S có bao nhiêu phần tử.

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Chương 02

LŨY THỪA - MŨ - LOGARIT

Chủ đề 06

PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

A. LÝ THUYẾT CHUNG.

☞ Phương trình logarit cơ bản: $\log_a f(x) = b$ ($a > 0, a \neq 1$).

☞ **Lưu ý:** khi giải phương trình logarit cần phải có điều kiện để logarit tồn tại.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

☞ Dạng 6.1. Phương trình logarit cơ bản

☞ Giải phương trình logarit cơ bản: $\log_a x = b$

☞ Khi đó $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$ ($a > 0, a \neq 1$)

☞ Ví dụ 6.1.1

Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_4(x-2) = 2$.

A. $S = \{16\}$.

B. $S = \{18\}$.

C. $S = \{10\}$.

D. $S = \{14\}$.

Lời giải

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 6.1.2

Phương trình $\log_2|x-1| = 3$ có bao nhiêu nghiệm ?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 6.1.3

Phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x^2-2)^2 = 8$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 8.

Lời giải

.....

.....

.....

Dạng 6.2. Đưa về cùng cơ số

Cho $1 \neq a > 0$. Với điều kiện các biểu thức $f(x)$ và $g(x)$ xác định, ta thường đưa các phương trình logarit về các dạng cơ bản sau:

Loại 1: $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = a^b \end{cases}$

Loại 2: $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$

Ví dụ 6.2.1

Phương trình $\ln(x+1) + \ln(x+3) = \ln(x+7)$ có bao nhiêu nghiệm ?
A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4

Lời giải

.....

.....

.....

Ví dụ 6.2.2

Giải phương trình $2\log_2(x^2 - x - 1) = \log_{\sqrt{2}}(x - 1)$.
A. vô nghiệm. **B.** $x = 2$. **C.** $x = 0, x = 2$. **D.** $x = 3$.

Lời giải

.....

.....

.....

Ví dụ 6.2.3

Số nghiệm của phương trình $\log_4(x+12) \cdot \log_x 2 = 1$ là:
A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1

Lời giải

.....

.....

.....

Ví dụ 6.2.4

Tập nghiệm của phương trình $\log_3(x+4) + 2\log_9(14-x) = 4$ là
A. $S = \{5\}$. **B.** $S = \{\pm 5\}$. **C.** $S = \{-5\}$. **D.** $S = \{\emptyset\}$.

Lời giải

.....

.....

.....

➤ **Dạng 6.3. Mũ hóa**

○ Với điều kiện các biểu thức $f(x)$ và $g(x)$ xác định, ta thường đưa các phương trình logarit về các dạng cơ bản sau:

$$\log_a f(x) = g(x) \quad (0 < a \neq 1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = a^{g(x)} \end{cases}$$

➤ **Ví dụ 6.3.1**

Tập nghiệm của phương trình $\log_2(5^{x+1} - 25^x) = 2$ là:

A. $S = \{1\}$.

B. $S = \{\log_3 5\}$.

C. $S = \left\{0; \frac{1}{\log_4 5}\right\}$.

D. $S = \left\{\frac{1}{\log_5 4}\right\}$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

➤ **Ví dụ 6.3.2**

Số nghiệm của phương trình $\log(25^x - 2^{2x+1}) = x$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 6.4. Đặt ẩn phụ dễ thấy

○ Giải phương trình $f(\log_a g(x)) = 0$, ($0 < a \neq 1$).

☑ **Bước 01.** Đặt $t = \log_a g(x)$ (*)

☑ **Bước 02.** Tìm điều kiện của t (nếu có)

☑ **Bước 03.** Đưa về giải phương trình $f(t) = 0$ đã biết cách giải.

☑ **Bước 04.** Thay vào (*) để tìm x .

Ví dụ 6.4.1

Giải phương trình $\log_3^2 x - 4\log_3 x + 3 = 0$.

A. $S = \{1\}$.

B. $S = \{27\}$.

C. $S = \{3; 27\}$.

D. $S = \{3\}$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 6.4.2

Số nghiệm của phương trình $\log_2 x - \log_x 64 = 1$ là

A. 0.

B. 3.

C. 2.

D. 1

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 6.4.3

Tích các nghiệm phương trình $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 5 = 0$ là

A. 0.

B. 3.

C. 2.

D. 1

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

➤ Dạng 6.5. Phương pháp hàm số

❑ **Định lý.** Nếu hàm số $y = f(x)$ là hàm số liên tục và đồng biến trên $(a; b)$, $y = g(x)$ là hàm số liên tục và nghịch biến trên $(a; b)$ thì phương trình $f(x) = g(x)$ có tối đa một nghiệm trên $(a; b)$.

○ Phương pháp làm như sau:

01

- ⇒ Biến đổi phương trình đã cho về dạng $f(x) = k$, với k là hằng số
- ♦ Chứng minh $f(x)$ là hàm đồng biến (nghịch biến) trên tập xác định.
 - ♦ Tìm x_0 sao cho $f(x_0) = k$
 - ♦ Kết luận x_0 là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x) = k$.

02

- ⇒ Biến đổi phương trình đã cho về dạng $f(x) = g(x)$, với D_1, D_2 lần lượt là tập xác định của hai hàm số $f(x), g(x)$
- ♦ Chứng minh $f(x)$ là hàm đồng biến và $g(x)$ nghịch biến trên tập $D_1 \cap D_2$ (hay ngược lại)
 - ♦ Tìm x_0 sao cho $f(x_0) = g(x_0)$
 - ♦ Kết luận x_0 là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x) = g(x)$.

03

- ⇒ Biến đổi phương trình đã cho về dạng $f(u) = f(v)$, với hàm số $f(t)$ là hàm đồng biến (hay nghịch biến).
- ♦ Phương trình $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$.

✍ **Lưu ý:**

- ① Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là hàm đồng biến (nghịch biến) trên $(a; b)$ thì $f(x) + g(x)$ cũng là hàm đồng biến (nghịch biến) trên $(a; b)$.
- ② Hàm số $y = a^x$ đồng biến khi $a > 1$ và nghịch biến khi $0 < a < 1$.

➤ **Ví dụ 6.5.1**

Phương trình $\log_2(x-2) = \log_3(x-1)$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 6.5.2

Giải phương trình $\log_3(x+2) + \log_7(3x+4) = 2$.

A. $x=5$.

B. $x=1$

C. $x=3$.

D. $x=-1$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 6.5.3

Giải phương trình $\log_2(x^2 - x - 6) + x = \log_2(x+2) + 4$.

A. $x = \frac{5}{2}$.

B. $x = -1$

C. $x = 4$.

D. $x = 3$

Lời giải

.....

.....

.....

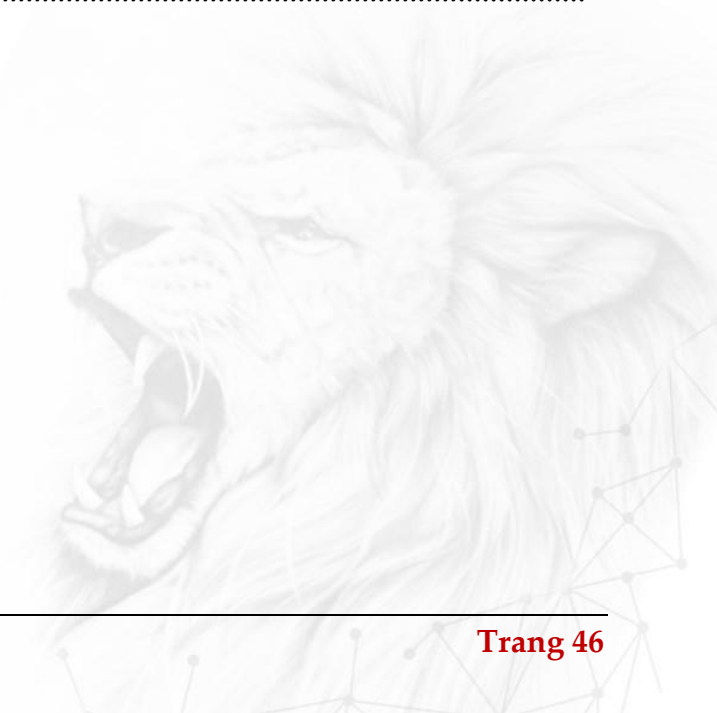
.....

.....

.....

.....

.....



Dạng 6.6. Phương trình chứa tham số

Để giải bài toán tìm tham số m trong phương trình logarit ta có hai cách phổ biến:

01

⇒ Cô lập được tham số m .

♦ Ta dùng đồ thị hàm số để biện luận số nghiệm (bài toán tương giao).

02

⇒ Không cô lập được tham số m và có liên quan đến Vi-ét.

♦ Đặt ẩn phụ đưa về phương trình bậc hai/bậc ba.

♦ Kết hợp định lý Vi-ét để giải quyết yêu cầu bài toán

Ví dụ 6.6.1

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình

$$\log_{\sqrt{3}}^2 x - m \log_{\sqrt{3}} x + 1 = 0 \text{ có nghiệm duy nhất nhỏ hơn } 1.$$

A. $m = -2$.

B. $m = -1$.

C. $m = 2$.

D. $m = 1$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 6.6.2

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình

$$\log_3^2 x - m \log_3 x + 2m - 7 = 0 \text{ có hai nghiệm } x_1, x_2 \text{ thỏa mãn } x_1 \cdot x_2 = 81.$$

A. $m = 12$.

B. $m = 0$.

C. $m = 2$.

D. $m = 4$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 6.6.3

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình
 $\log(mx) = 2\log(x+1)$ có nghiệm duy nhất.

- A. $\begin{cases} m = 4 \\ m < 0 \end{cases}$ B. $m > -1$. C. $m = 2$. D. $\begin{cases} m > 4 \\ m < 0 \end{cases}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 6.6.4

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình
 $\log_2 \frac{4^x - 1}{4^x + 1} - m = 0$ có nghiệm.

- A. $\begin{cases} m = 4 \\ m < 0 \end{cases}$ B. $m > -1$. C. $m = 2$. D. $\begin{cases} m > 4 \\ m < 0 \end{cases}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 6.6.5

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình
 $(m-1)\log_{\frac{1}{2}}^2(x-2) - (m-5)\log_{\frac{1}{2}}(x-2) + m-1 = 0$ có nghiệm thuộc $(2;4)$.

- A. $\begin{cases} m > 1 \\ m < -3 \end{cases}$. B. $-3 \leq m < \frac{7}{3}$. C. $-1 \leq m < 7$. D. $\begin{cases} m > 1 \\ m < 0 \end{cases}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 6.6.6

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình
 $\log_5[(m+1)x] = \log_{\sqrt{5}}(x+2)$ có nghiệm duy nhất.

- A. $\begin{cases} m > 1 \\ m < -3 \end{cases}$. B. $1 \leq m < 3$. C. $\begin{cases} m < -1 \\ m = 7 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m < -1 \\ m = 1 \end{cases}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Chương 02

Chủ đề 07

LŨY THỪA - MŨ - LOGARIT

BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

A. LÝ THUYẾT CHUNG.

Dạng 01. $a^x > b \ (a > 0; a \neq 1).$	$b \leq 0$	Tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R}$.	
	$b > 0$	$a > 1$	$a^x > b \Leftrightarrow x > \log_a b.$
		$0 < a < 1$	$a^x > b \Leftrightarrow x < \log_a b.$
Dạng 02. $a^x < b \ (a > 0; a \neq 1).$	$b \leq 0$	Tập nghiệm của bất phương trình là $\emptyset$.	
	$b > 0$	$a > 1$	$a^x < b \Leftrightarrow x < \log_a b.$
		$0 < a < 1$	$a^x < b \Leftrightarrow x > \log_a b.$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

Dạng 7.1. Bất phương trình mũ cơ bản

☞ Xem lại mục “Lý thuyết chung”

☞ Bất phương trình mũ cơ bản: $a^x > b \ (a > 0; a \neq 1)$. Chú ý đến cơ số.

Ví dụ 7.1.1

Tập nghiệm của bất phương trình $3^x \geq 9$ là

A. $S = (2; +\infty)$. B. $S = [-2; +\infty)$. C. $S = [2; +\infty)$. D. $S = (-1; 2)$.

Lời giải

.....

.....

Ví dụ 7.1.2

Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 4$ là

A. $S = (-2; 2)$. B. $S = [-2; +\infty)$. C. $S = (0; +\infty)$. D. $S = (0; 1)$.

Lời giải

.....

.....

Ví dụ 7.1.3

Tập nghiệm của bất phương trình $2^x > 3^{x+1}$ là

A. $(-\infty; \log_2 3]$. B. $\left(-\infty; \log_{\frac{2}{3}} 3\right)$. C. $\emptyset$. D. $(0; 1)$.

Lời giải

.....

.....

Dạng 7.2. Đưa về cùng cơ số

Ta có hai chú ý như sau:

- ① Với $a > 1$, $a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$
 ② Với $0 < a < 1$, $a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$

Ví dụ 7.2.1

Tìm tập nghiệm của bất phương trình: $5^{x^2+x} \leq 25^{x+1}$

- A. $S = (-\infty; 1)$. B. $S = [-1; 2]$. C. $S = (-1; 2)$. D. $S = (-\infty; 0)$.

Lời giải

.....

.....

.....

Ví dụ 7.2.2

Tìm tập nghiệm của bất phương trình: $2^{x-1} > \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{x}}$

- A. $S = (2; +\infty)$. B. $S = (-\infty; 0)$. C. $S = (0; +\infty)$. D. $S = (-\infty; +\infty)$.

Lời giải

.....

.....

.....

Ví dụ 7.2.3

Tìm số nghiệm nguyên dương của bất phương trình $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-2x} \geq \frac{1}{125}$.

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Lời giải

.....

.....

.....

Ví dụ 7.2.4

Giải bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3x^2} < 3^{2x+1}$ ta được tập nghiệm:

- A. $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$. B. $(1; +\infty)$. C. $\left(-\frac{1}{3}; 1\right)$. D. $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Lời giải

.....

.....

.....

➤ Dạng 7.3. Đặt ẩn phụ

○ Phương pháp đặt ẩn phụ ta thường sử dụng một số phương pháp sau:

Ở đây ta xét bất phương trình dạng $f(x) \geq 0$, các trường hợp khác tiến hành tương tự.

① Bất phương trình dạng $A_n a^{nx} + A_{n-1} a^{(n-1)x} + \dots + A_1 a^x + A_0 \geq 0$.

Đặt $t = a^x$ ($t > 0$), ta thu được bất phương trình dạng $A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \dots + A_1 t + A_0 \geq 0$.

② Bất phương trình dạng $Aa^{2x} + B(ab)^x + Cb^{2x} \geq 0$.

Chia cả hai vế cho b^{2x} rồi đặt $t = \left(\frac{a}{b}\right)^x$, $t > 0$, ta được $A.t^2 + B.t + C \geq 0$.

③ Bất phương trình dạng $Aa^{f(x)} + Bb^{g(x)} + C \geq 0$, trong đó $a^{f(x)}b^{g(x)} = k$.

Đặt $a^{f(x)} = t$ ($t > 0$) $\Rightarrow b^{g(x)} = k$, ta thu được bất phương trình mới $At + \frac{Bk}{t} + C \geq 0$.

➤ Ví dụ 7.3.1

Nghiệm của bất phương trình $e^x + e^{-x} < \frac{5}{2}$ là

A. $x < \frac{1}{2}$ hoặc $x > 2$.

B. $\frac{1}{2} < x < 2$.

C. $-\ln 2 < x < \ln 2$.

D. $x < -\ln 2$.

Lời giải

.....

.....

.....

➤ Ví dụ 7.3.2

Bất phương trình $9^x - 3^x - 6 < 0$ có tập nghiệm là

A. $(-\infty; 1)$.

B. $(-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$.

C. $(1; +\infty)$.

D. $(-2; 3)$.

Lời giải

.....

.....

.....

➤ Ví dụ 7.3.3

Tập hợp nghiệm của bất phương trình $3^{3x-2} + \frac{1}{27^x} \leq \frac{2}{3}$ là

A. $(0; 1)$.

B. $(1; 2)$.

C. $\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

D. $(2; 3)$.

Lời giải

.....

.....

.....

➤ Dạng 7.4. Logarit hóa

○ Phương trình $a^{f(x)} > b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1, b > 0 \\ f(x) > \log_a b \end{cases}$.

○ Phương trình $a^{f(x)} > b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} > \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x) \cdot \log_a b$
hoặc $\log_b a^{f(x)} > \log_b b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \cdot \log_b a > g(x)$.

➤ Ví dụ 7.4.1

|| Tìm tập S của bất phương trình: $3^x \cdot 5^{x^2} < 1$
A. $(-\log_5 3; 0]$. B. $[\log_3 5; 0)$. C. $(-\log_5 3; 0)$. D. $(\log_3 5; 0)$.

Lời giải

.....

.....

.....

➤ Ví dụ 7.4.2

|| Tìm tập S của bất phương trình: $4^{\log_{0.5}(3x-1)} < \frac{1}{9}$
A. $(5; +\infty)$. B. $\left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$. C. $(-\infty; 2)$. D. $(1; +\infty)$.

Lời giải

.....

.....

.....

➤ Ví dụ 7.4.3

|| Giải bất phương trình: $27^{\frac{x-1}{x}} \cdot 2^x > 72$
A. $(-\log_2 3; 0) \cup (3; +\infty)$. B. $[1; 2)$.
C. $(-2; 2)$. D. $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 7.5. Chứa tham số

- Sử dụng PP giải BPT logarit kết hợp công thức, tính chất của mũ, lũy thừa, logarit.
- Khai thác điều kiện bài toán.
- Xử lý bài toán và chọn giá trị m thỏa ĐK bài toán (cách “mò”).

Ví dụ 7.5.1

Cho bất phương trình: $9^x + (m-1).3^x + m > 0$ (1). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình (1) nghiệm đúng $\forall x > 1$.

A. $m \geq -\frac{3}{2}$.

B. $m > -\frac{3}{2}$.

C. $m > 3 + 2\sqrt{2}$.

D. $m \geq 3 + 2\sqrt{2}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 7.5.2

Tìm m để bất phương trình $m.9^x - (2m+1).6^x + m.4^x \leq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0;1)$.

A. $0 \leq m \leq 6$

B. $m \leq 6$

C. $m \geq 6$

D. $m \leq 0$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 7.5.3

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình sau có tập nghiệm là $(-\infty; 0]$: $m2^{x+1} + (2m+1)(1-\sqrt{5})^x + (3+\sqrt{5})^x < 0$.

A. $m \leq -\frac{1}{2}$

B. $m \leq \frac{1}{2}$

C. $m < \frac{1}{2}$

D. $m < -\frac{1}{2}$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 7.5.4

Tất cả các giá trị của m để bất phương trình $(3m+1)12^x + (2-m)6^x + 3^x < 0$ có nghiệm đúng $\forall x > 0$ là:

A. $(-2; +\infty)$

B. $(-\infty; -2]$

C. $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$

D. $\left(-2; -\frac{1}{3}\right)$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Chương 02

Chủ đề 08

LŨY THỪA - MŨ - LOGARIT

BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

A. LÝ THUYẾT CHUNG.

Dạng 01.	$a > 1$	$\log_a x > b \Leftrightarrow x > a^b$
$\log_a x > b \ (a > 0; a \neq 1).$	$0 < a < 1$	$\log_a x > b \Leftrightarrow x < a^b.$
Dạng 02.	$a > 1$	$\log_a x < b \Leftrightarrow x < a^b$
$\log_a x < b \ (a > 0; a \neq 1).$	$0 < a < 1$	$\log_a x < b \Leftrightarrow x > a^b.$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

➤ Dạng 8.1. Bất phương trình logarit cơ bản

○ Ta có hai chú ý sau:

$$\boxed{\log_a u < b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < u < a^b & \text{khi } a > 1 \\ u > a^b & \text{khi } 0 < a < 1 \end{cases}} \quad \boxed{\log_a u > b \Leftrightarrow \begin{cases} u > a^b & \text{khi } a > 1 \\ 0 < u < a^b & \text{khi } 0 < a < 1 \end{cases}}$$

➤ Ví dụ 8.1.1

Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) > -1$ là:

A. $\left(1; \frac{3}{2}\right)$. B. $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$. C. $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$. D. $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$.

Lời giải

.....

.....

.....

➤ Ví dụ 8.1.2

Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{3}{4}}(2x-1) > 2$ là:

A. $\frac{1}{2} < x < \frac{25}{32}$. B. $x > \frac{25}{32}$. C. $x > \frac{1}{2}$. D. $x < \frac{1}{2}$.

Lời giải

.....

.....

.....

➤ Dạng 8.2. Đưa về cùng cơ số

☞ Dùng biến đổi logarit để đưa về cùng cơ số $\log_a u < \log_a v \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < u < v & \text{khi } a > 1 \\ u > v > 0 & \text{khi } 0 < a < 1 \end{cases}$.

☞ Ví dụ 8.2.1

Bất phương trình $\log_{\frac{3}{4}}(2x+1) \geq \log_{\frac{3}{4}}(x+2)$ có tập nghiệm S là

A. $S = \left(-\frac{1}{2}; 1\right]$. B. $S = (-2; 1)$. C. $S = \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$. D. $S = \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$.

Lời giải

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 8.2.2

Xác định tập nghiệm S của bất phương trình $\ln x^2 > \ln(4x-4)$.

A. $S = (1; +\infty) \setminus \{2\}$. B. $S = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
C. $S = (2; +\infty)$. D. $S = (1; +\infty)$.

Lời giải

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 8.2.3

Tập nghiệm của bất phương trình $\log_4(2x^2+3x+1) > \log_2(2x+1)$ là:

A. $S = \left(\frac{1}{2}; 1\right)$ B. $S = \left(0; \frac{1}{2}\right)$ C. $S = \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$ D. $S = \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Dạng 8.3. Đặt ẩn phụ

○ Tìm một $\log_a f(x)$ chung, đặt làm ẩn phụ t để đưa bất phương trình về bất phương trình ẩn t giải bất phương trình tìm t sau đó tìm x .

★ **Chú ý:** Nếu đặt $t = \log_a x \Rightarrow \log_{\frac{1}{a}} x = -t, \log_{a^2} x = \frac{1}{2}t, \log_a^2 x = (\log_a x)^2 = t^2, \log_x a = \frac{1}{t}$.

Ví dụ 8.3.1

Bất phương trình $\log_{0,2}^2 x - 5\log_{0,2} x < -6$ có tập nghiệm là:

- A. $S = \left(\frac{1}{125}; \frac{1}{25}\right)$ B. $S = (2; 3)$. C. $S = \left(0; \frac{1}{25}\right)$. D. $S = (0; 3)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 8.3.2

Nghiệm nguyên nhỏ nhất của bất phương trình $\log_x 3 - \log_{\frac{x}{3}} 3 < 0$ là:

- A. $x = 3$ B. $x = 1$. C. $x = 2$. D. $x = 4$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 8.3.3

Nếu đặt $t = \log_2 x$ thì bất phương trình

$\log_2^4 x - \log_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{x^3}{8}\right) + 9\log_2 \left(\frac{32}{x^2}\right) < 4\log_{2^{-1}}(x)$ trở thành bất phương trình nào?

- A. $t^4 + 13t^2 + 36 < 0$ B. $t^4 - 5t^2 + 9 < 0$.
C. $t^4 - 13t^2 + 36 < 0$. D. $t^4 - 13t^2 - 36 < 0$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

➤ Dạng 8.4. **Mũ hóa**

○ Với điều kiện các biểu thức $f(x)$ và $g(x)$ xác định, ta thường đưa các bất phương trình logarit về các dạng cơ bản sau:

$$\log_a f(x) > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) > a^{g(x)} \end{cases} & \text{khi } a > 1 \\ \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < a^{g(x)} \end{cases} & \text{khi } 0 < a < 1 \end{cases}.$$

➤ Ví dụ 8.4.1

Bất phương trình $\log_x (\log_3 (9^x - 72)) \leq 1$ có tập nghiệm là:

A. $S = [\log_3 \sqrt{73}; 2]$.

B. $S = (\log_3 \sqrt{72}; 2]$.

C. $S = (\log_3 \sqrt{73}; 2]$.

D. $S = (-\infty; 2]$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

➤ Ví dụ 8.4.2

Nghiệm nguyên lớn nhất của bất phương trình $\log_3 (4 \cdot 3^{x-1}) > 2x - 1$ là:

A. $x = 3$.

B. $x = 2$.

C. $x = 1$.

D. $x = -1$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 8.5. Chứa tham số

- Sử dụng PP giải BPT logarit kết hợp công thức, tính chất của mũ, lũy thừa, logarit.
- Khai thác điều kiện bài toán.
- Xử lý bài toán và chọn giá trị m thỏa ĐK bài toán (cách “mò”).

Ví dụ 8.5.1

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2(5^x - 1) \leq m$ có nghiệm $x \geq 1$?

- A. $m \geq 2$. B. $m > 2$. C. $m \leq 2$. D. $m < 2$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 8.5.2

Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_3(x^2 + 4x + m) \geq 1$ nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$?

- A. $m > 7$. B. $m \geq 7$. C. $m < 4$. D. $4 < m \leq 7$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 8.5.3

Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để $\log_{\frac{1}{5}}(mx - x^2) \leq \log_{\frac{1}{5}} 4$ vô nghiệm?

- A. $-4 \leq m \leq 4$. B. $\begin{cases} m > 4 \\ m < -4 \end{cases}$. C. $m < 4$. D. $-4 < m < 4$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 8.5.4

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho khoảng $(2;3)$ thuộc tập nghiệm của bất phương trình $\log_5(x^2+1) > \log_5(x^2+4x+m)-1$ (1).

- A. $m \in [-12;13]$. B. $m \in [12;13]$. C. $m \in [-13;12]$. D. $m \in [-13;-12]$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 8.5.5

Tìm m để bất phương trình $1+\log_5(x^2+1) \geq \log_5(mx^2+4x+m)$ thỏa mãn $\forall x \in \mathbb{R}$

- A. $-1 < m \leq 0$. B. $-1 < m < 0$. C. $2 < m \leq 3$. D. $2 < m < 3$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

☞ Ví dụ 8.5.6

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình

$$\log_{0,02}(\log_2(3^x+1)) > \log_{0,02} m \text{ có nghiệm với mọi } x \in (-\infty;0)$$

- A. $0 < m < 1$. B. $m > 1$. C. $m < 2$. D. $m \geq 1$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Tổng hợp lý thuyết

CHƯƠNG 02

LŨY THỪA - MŨ - LOGARIT

KHÓA 2023 - 2024

TÀI LIỆU DÀNH CHO KHỐI 12

Biên soạn

LÊ MINH TÂM



Mục lục

Chương 02

	Chủ đề 01. LŨY THỪA – HÀM SỐ LŨY THỪA	
	Dạng 1.1. Rút gọn và tính giá trị biểu thức	6
	Dạng 1.2. So sánh các biểu thức chứa lũy thừa	7
	Dạng 1.3. Tập xác định hàm số lũy thừa	8
	Dạng 1.4. Đạo hàm số lũy thừa	9
	Dạng 1.5. Đồ thị hàm số lũy thừa.....	10
	Chủ đề 02. LOGARIT	
	Dạng 2.1. Tính giá trị biểu thức.....	12
	Dạng 2.2. Biểu diễn logarit	13
	Dạng 2.3. Mệnh đề đúng – sai	14
	Chủ đề 03. HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LOGARIT	
	Dạng 3.1. Tập xác định của hàm số logarit	18
	Dạng 3.2. Đạo hàm hàm số mũ – logarit	20
	Dạng 3.3. Khảo sát hàm số mũ – logarit	21
	Chủ đề 04. BÀI TOÁN LÃI SUẤT	
	Chủ đề 05. PHƯƠNG TRÌNH MŨ	
	Dạng 5.1. Phương trình mũ cơ bản.....	31
	Dạng 5.2. Đưa về cùng cơ số.....	32
	Dạng 5.3. Logarit hóa	33
	Dạng 5.4. Đặt ẩn phụ dễ thấy.....	34
	Dạng 5.5. Đặt ẩn phụ với phương trình đẳng cấp.....	35
	Dạng 5.6. Đặt ẩn phụ với tích hai cơ số bằng 1.....	36
	Dạng 5.7. Phương pháp hàm số	37
	Dạng 5.8. Phương trình chứa tham số.....	39
	Chủ đề 06. PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT	
	Dạng 6.1. Phương trình logarit cơ bản	41
	Dạng 6.2. Đưa về cùng cơ số.....	42
	Dạng 6.3. Mũ hóa.....	43
	Dạng 6.4. Đặt ẩn phụ dễ thấy.....	44
	Dạng 6.5. Phương pháp hàm số	45
	Dạng 6.6. Phương trình chứa tham số.....	47

Chủ đề 07. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

➤ Dạng 7.1. Bất phương trình mũ cơ bản	50
➤ Dạng 7.2. Đưa về cùng cơ số	51
➤ Dạng 7.3. Đặt ẩn phụ.....	52
➤ Dạng 7.4. Logarit hóa	53
➤ Dạng 7.5. Chứa tham số	54

Chủ đề 08. BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

➤ Dạng 8.1. Bất phương trình logarit cơ bản	56
➤ Dạng 8.2. Đưa về cùng cơ số	57
➤ Dạng 8.3. Đặt ẩn phụ.....	58
➤ Dạng 8.4. Mũ hóa.....	59
➤ Dạng 8.5. Chứa tham số	60

Chương 02

Chủ đề 01

LŨY THỪA - MŨ - LOGARIT

LŨY THỪA – HÀM SỐ LŨY THỪA

A. LÝ THUYẾT CHUNG.

1. Lũy thừa:

1.1. Định nghĩa.

Cho số thực b và số nguyên dương $n (n \geq 2)$.

Số a được gọi là căn bậc n của số b nếu $a^n = b$.

Chú ý:

n lẻ	$b \in \mathbb{R}$	♦ Có duy nhất một căn bậc n của b , ký hiệu $\sqrt[n]{b}$.
n chẵn	$b < 0$	♦ Không tồn tại căn bậc n của b
	$b = 0$	♦ Có một căn bậc n của b là 0
	$b > 0$	♦ Có hai bậc n của a là hai số đối nhau, ♦ Căn có giá trị dương ký hiệu là $\sqrt[n]{b}$, căn có giá trị âm ký hiệu là $-\sqrt[n]{b}$.

1.2. Công thức.

Số mũ α	Cơ số a	Lũy thừa a^α
$\alpha = n \in \mathbb{N}^*$	$a \in \mathbb{R}$	$a^\alpha = a^n = a.a...a$ (n là thừa số a)
$\alpha = 0$	$a \neq 0$	$a^\alpha = a^0 = 1$
$\alpha = -n, (n \in \mathbb{N}^*)$	$a \neq 0$	$a^\alpha = a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
$\alpha = \frac{m}{n}, (m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*)$	$a > 0$	$a^\alpha = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, (\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a = b^n)$

1.3. Tính chất.

- ① $a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$
- ② $\frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$
- ③ $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha \cdot \beta}$
- ④ $(ab)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha$
- ⑤ $\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$
- ⑥ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-\alpha} = \left(\frac{b}{a}\right)^\alpha$
- ⑦ Nếu $a > 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$.
- ⑧ Nếu $0 < a < 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$.

CHÚ Ý

Các tính chất trên đúng trong trường hợp số mũ nguyên hoặc không nguyên.

Khi xét lũy thừa với số mũ 0 và số mũ nguyên âm thì cơ số a phải khác 0.

Khi xét lũy thừa với số mũ không nguyên thì cơ số a phải dương.

1.4. Tính chất căn bậc n.

Với $a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$ ta có

- ① $\sqrt[n]{a^n} = a, \forall a$
- ② $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \forall a, b$
- ③ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \forall a, \forall b \neq 0$
- ④ $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m, \forall a > 0, n$ nguyên dương, m nguyên.
- ⑤ $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}, \forall a \geq 0, n, m$ nguyên dương.
- ⑥ Nếu $\frac{p}{n} = \frac{q}{m}$ thì $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[m]{a^q}, \forall a > 0, m, n$ nguyên dương, p, q nguyên.
Đặc biệt: $\sqrt[n]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a^m}}$.

2. Hàm số lũy thừa:

2.1. Khái niệm.

Hàm số $y = x^\alpha$ với $\alpha \in \mathbb{R}$ được gọi là hàm số lũy thừa.

2.2. Tập xác định.

Tập xác định của hàm số $y = x^\alpha$ là:

① Nếu α là số nguyên dương	$D = \mathbb{R}$
② Nếu α nguyên âm hoặc bằng 0.	$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
③ Nếu α không nguyên	$D = (0; +\infty)$

※ **Tổng quát:** Tập xác định của hàm số $y = (f(x))^\alpha$.

Khi α NGUYÊN DƯƠNG

Hàm số $y = (f(x))^\alpha$ xác định $\Leftrightarrow f(x)$ xác định.

Khi α NGUYÊN ÂM

Hàm số $y = (f(x))^\alpha$ xác định $\Leftrightarrow f(x) \neq 0$.

Khi α KHÔNG NGUYÊN

Hàm số $y = (f(x))^\alpha$ xác định $\Leftrightarrow f(x) > 0$

2.3. Đạo hàm.

Hàm số $y = x^\alpha, (\alpha \in \mathbb{R})$ có đạo hàm $\forall x > 0$ và $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$.

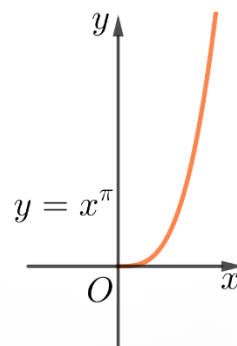
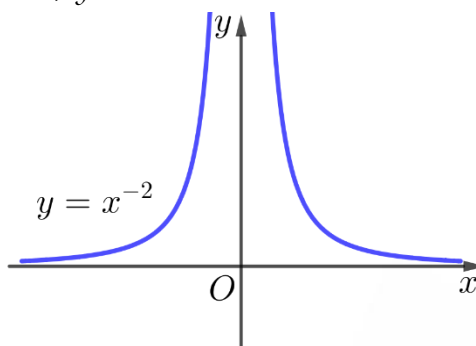
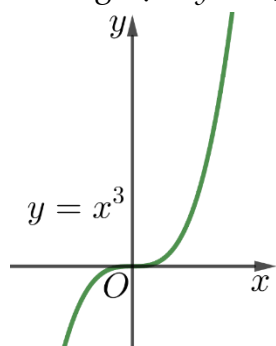
2.4. Khảo sát hàm số lũy thừa $y = x^\alpha, (\alpha \in \mathbb{R})$.

		$y = x^\alpha$ với $\alpha > 0$	$y = x^\alpha$ với $\alpha < 0$
Tập khảo sát		$(0; +\infty)$	$(0; +\infty)$
Sự biến thiên	Đạo hàm	$y' = \alpha x^{\alpha-1} > 0, \forall x > 0.$	$y' = \alpha x^{\alpha-1} < 0, \forall x > 0.$
	Giới hạn	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty.$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0.$
	Tiệm cận	Không có.	Nhận Ox là tiệm cận ngang. Nhận Oy là tiệm cận đứng.

Bảng biến thiên	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td></td><td>+</td></tr><tr><td>y</td><td></td><td></td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	0	$+\infty$	y'			+	y			$+\infty$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td></td><td>-</td></tr><tr><td>y</td><td></td><td></td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	0	$+\infty$	y'			-	y			$+\infty$
x	$-\infty$	0	$+\infty$																							
y'			+																							
y			$+\infty$																							
x	$-\infty$	0	$+\infty$																							
y'			-																							
y			$+\infty$																							
Đồ thị	Đồ thị của hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ luôn đi qua điểm $I(1;1)$.																									

Lưu ý:

- ⌚ Khi khảo sát hàm số lũy thừa với số mũ cụ thể, ta phải xét hàm số đó trên toàn bộ tập xác định của nó.
- ⌚ Chẳng hạn: $y = x^3$, $y = x^{-2}$, $y = x^\pi$.



B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

➤ Dạng 1.1. Rút gọn và tính giá trị biểu thức

☑ Sử dụng phối hợp linh hoạt các tính chất của lũy thừa.

☑ Chọn $a; b$ là các số thực dương và $x; y$ là các số thực tùy ý, ta có:

$$\textcircled{1} a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$$

$$\textcircled{2} \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$$

$$\textcircled{3} (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha \cdot \beta}$$

$$\textcircled{4} (ab)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha$$

$$\textcircled{5} \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$$

$$\textcircled{6} \left(\frac{a}{b}\right)^{-\alpha} = \left(\frac{b}{a}\right)^\alpha$$

$\textcircled{7}$ Nếu $a > 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$. $\textcircled{8}$ Nếu $0 < a < 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$.

➤ Ví dụ 1.1.1

Đưa các biểu thức sau về dạng lũy thừa

$$\textcircled{1} \sqrt{a}\sqrt{a} \quad (a > 0)$$

$$\textcircled{2} \frac{\sqrt{2^3\sqrt{4}}}{16^{0,75}}$$

$$\textcircled{3} \sqrt[5]{\frac{b}{a}} \sqrt[3]{\frac{a}{b}} \quad (a, b > 0).$$

Lời giải

$$\textcircled{1} \sqrt{a}\sqrt{a} = \left(a \cdot a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{4}}.$$

$$\textcircled{2} \frac{\sqrt{2^3\sqrt{4}}}{16^{0,75}} = \frac{\left[2 \cdot (2^2)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}}{(2^4)^{\frac{3}{4}}} = \frac{2^{\frac{5}{6}}}{2^3} = 2^{\frac{-13}{6}}.$$

$$\textcircled{3} \sqrt[5]{\frac{b}{a}} \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{b^{\frac{1}{5}}}{a^{\frac{1}{5}}} \cdot \frac{a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}} = a^{\frac{-2}{15}} \cdot b^{\frac{2}{15}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{15}}.$$

➤ Ví dụ 1.1.2

Rút gọn các biểu thức sau đây:

$$\textcircled{1} \sqrt{(a-5)^4}$$

$$\textcircled{2} \sqrt{81a^4b^2} \quad (b \leq 0)$$

$$\textcircled{3} \sqrt[4]{x^8(x+1)^4} \quad (x \leq -1).$$

Lời giải

$$\textcircled{1} \sqrt{(a-5)^4} = (a-5)^2$$

$$\textcircled{2} \sqrt{81a^4b^2} = 9a^2|b| = -9a^2b \quad (\text{do } b \leq 0).$$

$$\textcircled{3} \sqrt[4]{x^8(x+1)^4} = x^2 \cdot |x+1| = -x^2(x+1) \quad (\text{do } x \leq -1 \Leftrightarrow x+1 \leq 0).$$

➤ Ví dụ 1.1.3

Cho $a = (2 + \sqrt{3})^{-1}$, $b = (2 - \sqrt{3})^{-1}$. Tính $A = (a+1)^{-1} + (b+1)^{-1}$.

Lời giải

$$\text{♦ Ta có: } \begin{cases} a = (2 + \sqrt{3})^{-1} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3} \\ b = (2 - \sqrt{3})^{-1} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3} \end{cases}.$$

$$\longrightarrow A = (a+1)^{-1} + (b+1)^{-1}$$

$$= (2 - \sqrt{3} + 1)^{-1} + (2 + \sqrt{3} + 1)^{-1} = (3 - \sqrt{3})^{-1} + (3 + \sqrt{3})^{-1} = \frac{1}{3 - \sqrt{3}} + \frac{1}{3 + \sqrt{3}} = \frac{6}{9 - 3} = 1.$$

Dạng 1.2. So sánh các biểu thức chứa lũy thừa

☑ Ta có hai cách làm như sau:

01	<i>Đưa về cùng cơ số</i> Cho $a \in \mathbb{R} : m, n \in \mathbb{Z}$. Khi đó ① Với $a > 1 \longrightarrow a^m > a^n \Leftrightarrow m > n$; ② Với $0 < a < 1 \longrightarrow a^m > a^n \Leftrightarrow m < n$.
	<i>Đưa về cùng số mũ</i> Với $0 < a < b$ và m là số nguyên thì ① $a^m < b^m \Leftrightarrow m > 0$ ② $a^m > b^m \Leftrightarrow m < 0$.

Ví dụ 1.2.1

So sánh các số sau:

① 7^{300} và 7^{400}

② $\left(\frac{1}{2}\right)^{5000}$ và $\left(\frac{1}{2}\right)^{8000}$.

Lời giải

① 7^{300} và 7^{400}

Ta có $7 > 1$ và $300 < 400$ nên $7^{300} < 7^{400}$.

② $\left(\frac{1}{2}\right)^{5000}$ và $\left(\frac{1}{2}\right)^{8000}$

Ta có $\frac{1}{2} < 1$ và $5000 < 8000$ nên $\left(\frac{1}{2}\right)^{5000} > \left(\frac{1}{2}\right)^{8000}$

Ví dụ 1.2.2

So sánh các số sau:

① 20^{20} và 15^{30} .

② 2^{100} và 20^{30} .

③ $(\sqrt{3}-1)^7$ và $(\sqrt{3}-1)^8$.

④ π^{-34} và $(\pi+1)^{-34}$.

Lời giải

① 20^{20} và 15^{30} .

$15^3 = 3375 > 400 = 20^2$.

Do đó $15^{30} = (15^3)^{10} > (20^2)^{10} = 20^{20}$.

② 2^{100} và 20^{30} .

$2^{10} = 1024 < 8000 = 20^3$.

Do đó $2^{100} = (2^{10})^{10} < (20^3)^{10} = 20^{30}$.

③ $(\sqrt{3}-1)^7$ và $(\sqrt{3}-1)^8$.

$\sqrt{3}-1 < 1$ và $7 < 8$ nên $(\sqrt{3}-1)^7 > (\sqrt{3}-1)^8$.

④ π^{-34} và $(\pi+1)^{-34}$.

$\pi < \pi+1$ và $-34 < 0$ nên $\pi^{-34} > (\pi+1)^{-34}$.

Ví dụ 1.2.3

So sánh 2 số p và q biết:

① $\pi^p > \pi^q$.

② $(\sqrt{5}-1)^p < (\sqrt{5}-1)^q$.

Lời giải

① $\pi^p > \pi^q$.

Ta có $\pi > 1$ nên $p > q$.

② $(\sqrt{5}-1)^p < (\sqrt{5}-1)^q$.

Ta có $\sqrt{5}-1 > 1$ nên $p < q$.

➤ **Dạng 1.3. Tập xác định hàm số lũy thừa**

☑ Tập xác định của hàm số $y = (f(x))^\alpha$ là:

① α là số nguyên dương	$f(x)$ xác định.
② α nguyên âm hoặc bằng 0.	$f(x) \neq 0$
③ α không nguyên	$f(x) > 0$

☞ **Ví dụ 1.3.1**

Tìm tập xác định của hàm số $y = (x^2 - 1)^{-2}$

A. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

B. $\mathcal{D} = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

C. $\mathcal{D} = (-1; 1)$.

D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

Lời giải

Chọn D

♦ Hàm số $y = (x^2 - 1)^{-2}$ xác định khi $x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$.

$\Rightarrow$ Vậy $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ là tập xác định của hàm số đã cho.

☞ **Ví dụ 1.3.2**

Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = (x^2 - 5x + 6)^{-2019}$

A. $\mathcal{D} = (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$.

B. $\mathcal{D} = (2; 3)$.

C. $\mathcal{D} = (-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$.

D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$.

Lời giải

Chọn C

♦ Hàm số $y = (x^2 - 5x + 6)^{-2019}$ xác định khi và chỉ khi $x^2 - 5x + 6 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq 3 \end{cases}$.

$\Rightarrow$ Vậy tập xác định của hàm số $y = (x^2 - 5x + 6)^{-2019}$ là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$.

☞ **Ví dụ 1.3.3**

Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = (2x - 1)^e$

A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

B. $\mathcal{D} = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

C. $\mathcal{D} = \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

D. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C

♦ Điều kiện xác định: $2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$.

$\Rightarrow$ Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$

➤ Dạng 1.4. Đạo hàm số lũy thừa

☑ Hàm số $y = x^\alpha$, ($\alpha \in \mathbb{R}$) có đạo hàm $\forall x > 0$ và $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \longrightarrow (u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$.

☞ Ví dụ 1.4.1

Cho hàm số $f(x) = (2x-3)^{\frac{5}{6}}$. Tính $f'(2)$.

A. $\frac{5}{6}$.

B. $\frac{5}{3}$.

C. $-\frac{5}{6}$.

D. $-\frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn B

♦ Tập xác định $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$

♦ Ta có $f(x) = (2x-3)^{\frac{5}{6}} \Rightarrow f'(x) = \frac{5}{3}(2x-3)^{-\frac{1}{6}} \Rightarrow f'(2) = \frac{5}{3}$.

☞ Ví dụ 1.4.2

Tìm đạo hàm của hàm số $y = \sqrt[3]{(1-3x)^5}$ trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$.

A. $y' = -5(1-3x)^{\frac{2}{3}}$.

B. $y' = \frac{5}{3}(1-3x)^{\frac{4}{3}}$.

C. $y' = -5(1-3x)^{\frac{4}{3}}$.

D. $y' = \frac{5}{3}(1-3x)^{\frac{2}{3}}$.

Lời giải

Chọn A

♦ Với điều kiện $x < \frac{1}{3}$, ta có $y = \sqrt[3]{(1-3x)^5} = (1-3x)^{\frac{5}{3}}$.

♦ Khi đó: $y' = \left[(1-3x)^{\frac{5}{3}}\right]' = \frac{5}{3} \cdot (1-3x)' \cdot (1-3x)^{\frac{2}{3}} = -5(1-3x)^{\frac{2}{3}}$

☞ Ví dụ 1.4.3

Tìm đạo hàm của hàm số $y = \sqrt[4]{x+2}$, $x > -2$

A. $y' = \frac{1}{4^4 \sqrt[4]{(x+2)^3}}$.

B. $y' = \frac{1}{4^4 \sqrt{x+2}}$.

C. $y' = \frac{1}{2^4 \sqrt[4]{(x+2)^3}}$.

D. $y' = 4^3 \sqrt{x+2}$.

Lời giải

Chọn A

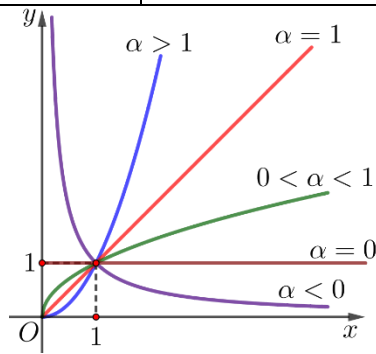
♦ Có $y' = \frac{(x+2)'}{4^4 \sqrt[4]{(x+2)^3}} = \frac{1}{4^4 \sqrt[4]{(x+2)^3}}$.

➤ Dạng 1.5. Đồ thị hàm số lũy thừa

☑ Ta lưu ý các yếu tố trong sự biến thiên của hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ với

	$\alpha > 0$	$\alpha < 0$
Đạo hàm	$y' = \alpha x^{\alpha-1} > 0$	$y' = \alpha x^{\alpha-1} < 0, \forall x > 0.$
Giới hạn	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty.$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0.$
Tiệm cận	Không có.	Nhận Ox là tiệm cận ngang. Nhận Oy là tiệm cận đứng.

Đồ thị

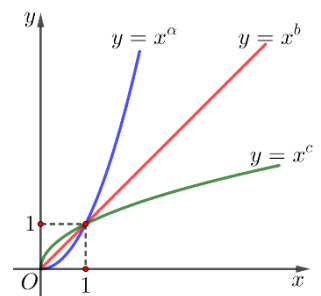


Đồ thị của hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ luôn đi qua điểm $I(1; 1)$.

☞ Ví dụ 1.5.1

Hình vẽ bên là đồ thị các hàm số $y = x^a$, $y = x^b$, $y = x^c$ trên miền $(0; +\infty)$. Hỏi số a , b , c số nào nhận giá trị trong khoảng $(0; 1)$?

- A. a . B. $a \& c$.
C. b . D. c



Lời giải

Chọn D

- ♦ Nhìn vào hình vẽ, ta thấy đồ thị hàm số x^b là đường thẳng nên ta có được $b = 1$.
- ♦ Khi $x > 1$ thì $x = x^b > x^c$. Do đó $0 < c < 1$.

☞ Ví dụ 1.5.2

Cho hàm số $y = x^{-\sqrt{2023}}$. Mệnh đề nào đúng về đường tiệm cận của đồ thị hàm số?

- A. Có một tiệm cận ngang và một tiệm cận đứng.
B. Không có tiệm cận ngang và có một tiệm cận đứng.
C. Có một tiệm cận ngang và không có tiệm cận đứng.
D. Không có tiệm cận.

Lời giải

Chọn A

- ♦ Tập xác định: $D = (0; +\infty)$.
- ♦ Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{\sqrt{2023}}} = +\infty$ nên đồ thị có một tiệm cận đứng $x = 0$
- ♦ Mặt khác $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{\sqrt{2023}}} = 0$ nên đồ thị có tiệm cận ngang $y = 0$

Chương 02

Chủ đề 02

LŨY THỪA - MŨ - LOGARIT

LOGARIT

A. LÝ THUYẾT CHUNG.

1. Định nghĩa.

Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$.

☞ Số α thỏa mãn đẳng thức $a^\alpha = b$ được gọi là lôgarit cơ số a của b và kí hiệu là $\log_a b$.

☞ Ta viết: $\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b$.

2. Tính chất.

TÍNH CHẤT

Cho $a, b > 0, a \neq 1$

$$\log_a a = 1, \log_a 1 = 0$$

$$a^{\log_a b} = b, \log_a (a^\alpha) = \alpha$$

3. Công thức.

☞ Cho 3 số dương a, b, c với $a \neq 1; c \neq 1$ và $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, ta có các công thức sau:

1

Tích tổng - Thương hiệu

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

Đặc biệt: với $a, b > 0, a \neq 1$ $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$

2

Lũy thừa

$$\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$$

Đặc biệt: $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$

3

Đổi cơ số

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Đặc biệt: $\log_a c = \frac{1}{\log_c a}; \log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b$

○ Logarit thập phân và Logarit tự nhiên

☞ Logarit thập phân là logarit cơ số 10. Viết: $\log_{10} b = \log b = \lg b$

☞ Logarit tự nhiên là logarit cơ số e . Viết: $\log_e b = \ln b$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

➤ Dạng 2.1. Tính giá trị biểu thức

☑ Áp dụng các tính chất – công thức để biến đổi:

01	Tính chất	① $\log_a a = 1, \log_a 1 = 0$ ② $a^{\log_a b} = b, \log_a (a^\alpha) = \alpha$ ③ $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$ (Tích – tổng) ④ $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ (Thương – hiệu) Đặc biệt : với $a, b > 0, a \neq 1$ $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$
02	Công thức bay	① $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$ Đặc biệt: $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$ ② $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b$
03	Đổi cơ số	① $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ Đặc biệt : $\log_a c = \frac{1}{\log_c a}$ ② $\log_a b = \log_a c \cdot \log_c b$

➤ Ví dụ 2.1.1

Cho $0 < a \neq 1$. Tính giá trị của biểu thức $a^{\log_{\sqrt{a}} 4}$.

A. 16.

B. $\sqrt{2}$.

C. 4.

D. 12

Lời giải

Chọn A

Ta có $a^{\log_{\sqrt{a}} 4} = a^{2 \log_a 4} = a^{\log_a 4^2} = 4^2 = 16$.

➤ Ví dụ 2.1.2

Tính giá trị của biểu thức $A = 2 \log_2 12 + 3 \log_2 5 - \log_2 15 - \log_2 150$.

A. -2.

B. $2\sqrt{3}$.

C. 3.

D. $3\sqrt{2}$

Lời giải

Chọn C

$A = \log_2 12^2 + \log_2 5^3 - (\log_2 15 + \log_2 150) = \log_2 12^2 \cdot 5^3 - \log_2 15 \cdot 150 = \log_2 \frac{18000}{2250} = \log_2 8 = 3$

➤ Ví dụ 2.1.3

Rút gọn biểu thức $K = \log_a b^2 + 2 \log_{a^2} b^4 + 3 \log_{a^3} b^6 - 4 \log_{a^4} b^8$ ta được

A. $4 \log_a b$.

B. $-\log_a b$.

C. $3 \log_a b$.

D. $\frac{1}{2} \log_b a$

Lời giải

Chọn A

$K = \log_a b^2 + 2 \log_{a^2} b^4 + 3 \log_{a^3} b^6 - 4 \log_{a^4} b^8 = 2 \log_a b + 4 \log_a b + 6 \log_a b - 8 \log_a b = 4 \log_a b$

➤ Dạng 2.2. Biểu diễn logarit

☐ Ta thực hiện theo các bước sau

- ☑ **Bước 01.** Biến đổi các biểu thức logarit phụ thuộc vào tham số a và b .
- ☑ **Bước 02.** Đặt các biểu thức logarit của các số nguyên tố là các ẩn $x, y, z, \dots$. Từ đó ta thu được phương trình hoặc hệ phương trình với các ẩn $x, y, z, \dots$. Ta tìm các ẩn này theo a, b .
- ☑ **Bước 03.** Giải hệ tìm được tìm $x, y, z, \dots$ theo a, b . Từ đó tính được biểu thức theo các tham số a, b . Các công thức nền tảng là $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ và $\frac{1}{\log_a b} = \log_b a$.

☞ Ví dụ 2.2.1

Cho $a = \log_2 14$. Biểu diễn $\log_{49} 16$ theo a

- A. $\frac{2}{a-1}$. B. $\frac{2}{a}$. C. $a+3$. D. $3a$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \log_{49} 16 = \log_{7^2} 2^4 = 2 \log_7 2 = 2 \cdot \frac{1}{\log_2 7} = \frac{2}{\log_2 \left(\frac{14}{2}\right)} = \frac{2}{\log_2 14 - \log_2 2} = \frac{2}{a-1}.$$

☞ Ví dụ 2.2.2

Cho $a = \log_5 18$ và $b = \log_5 60$. Tính $\log_3 2$ theo a và b

- A. $\frac{b-2}{2a-b}$. B. $\frac{3a^2-ab}{5a-4}$. C. $\frac{-a+2b-2}{2a-b+1}$. D. $\frac{a-2}{a+1}$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đầu tiên ta có hệ } \begin{cases} a = \log_5 18 = \log_5 2 + 2\log_5 3 \\ b = \log_5 60 = 2\log_5 2 + \log_5 3 + 1 \end{cases}$$

Đặt $x = \log_5 2$ và $y = \log_5 3$ từ đó ta có hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

$$\begin{cases} x + 2y = a \\ 2x + y = b - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_5 2 = \frac{-a+2b-2}{3} \\ y = \log_5 3 = \frac{2a-b+1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Nên } \log_3 2 = \frac{\log_5 2}{\log_5 3} = \frac{-a+2b-2}{2a-b+1}.$$

➤ Dạng 2.3. Mệnh đề đúng - sai

☑ Ta lưu ý các công thức sau

01	Tính chất	① $\log_a a = 1, \log_a 1 = 0$ ② $a^{\log_a b} = b, \log_a (a^\alpha) = \alpha$ ③ $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$ (Tích - tổng) ④ $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ (Thương - hiệu) Đặc biệt : với $a, b > 0, a \neq 1$ $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$
02	Công thức bay	① $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$ ② $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b$ Đặc biệt: $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$
03	Đổi cơ số	① $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ ② $\log_a b = \log_a c \cdot \log_c b$ Đặc biệt : $\log_a c = \frac{1}{\log_c a}$

➤ Ví dụ 2.3.1

Cho $a, b, c > 0; a \neq 1; b \neq 1$, Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

B. $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$

C. $\log_{a^c} b = c \log_a b$

D. $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

Lời giải

Chọn C

Câu C sai, vì $\log_{a^c} b = \frac{1}{c} \log_a b$

➤ Ví dụ 2.3.2

Cho $a, b, c > 0$ và $a, b \neq 1$, Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $a^{\log_a b} = b$

B. $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$

C. $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$

D. $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c$

Lời giải

Chọn D

Câu D sai, vì khẳng định đó chỉ đúng khi $a > 1$, còn khi $0 < a < 1 \Rightarrow \log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b < c$

➤ Ví dụ 2.3.3

Cho $a, b, c > 0$ và $a, b \neq 1$, Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\frac{1}{\log_a b} = \log_b a$

B. $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$

C. $\log_a (b \cdot c) = \log_a (b + c)$

D. $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$

Lời giải

Chọn C

Câu C sai, vì $\log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c$

Ví dụ 2.3.4

Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 = 7ab$. Mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau là:

A. $2(\log a + \log b) = \log(7ab)$.

B. $\log \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$.

C. $3\log(a+b) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$.

D. $\log(a+b) = \frac{3}{2}(\log a + \log b)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $a^2 + b^2 = 7ab$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2 = 9ab \Leftrightarrow \frac{(a+b)^2}{9} = ab$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{a+b}{3}\right)^2 = \log(ab) \Leftrightarrow 2\log\frac{a+b}{3} = \log a + \log b$$

Ví dụ 2.3.5

Với mọi số $a, b > 0$ thỏa mãn $9a^2 + b^2 = 10ab$ thì đẳng thức đúng là.

A. $2\log(3a+b) = \log a + \log b$.

B. $\frac{\log(3a+b)}{4} = \frac{\log a + \log b}{2}$.

C. $\log a + \log(b+1) = 1$.

D. $\log \frac{3a+b}{4} = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $9a^2 + b^2 = 10ab$

$$\Leftrightarrow 9a^2 + 6ab + b^2 = 16ab$$

$$\Leftrightarrow (3a+b)^2 = 16ab$$

$$\Leftrightarrow \log \frac{(3a+b)^2}{16} = \log(ab) \Leftrightarrow 2\log \frac{3a+b}{4} = \log a + \log b \Leftrightarrow \log \frac{3a+b}{4} = \frac{1}{2}(\log a + \log b).$$

Chương 02

Chủ đề 03

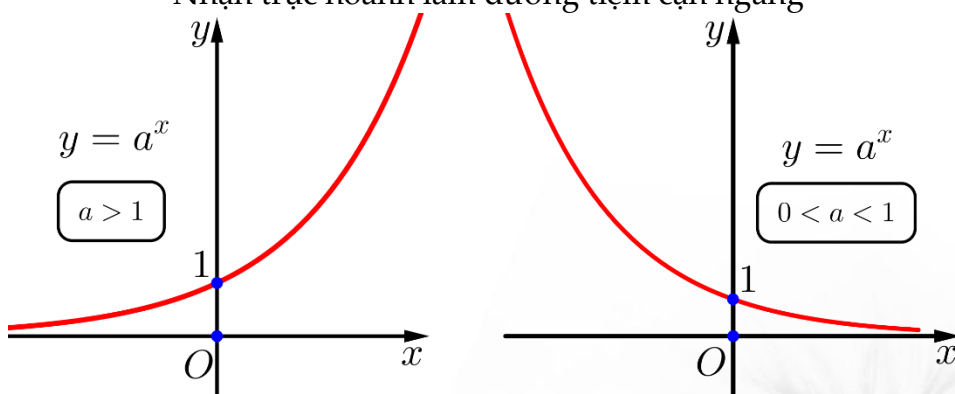
LŨY THỪA - MŨ - LOGARIT

HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

A. LÝ THUYẾT CHUNG.

1. Hàm số mũ.

Hàm số mũ $y = a^x$, ($a > 0, a \neq 1$)

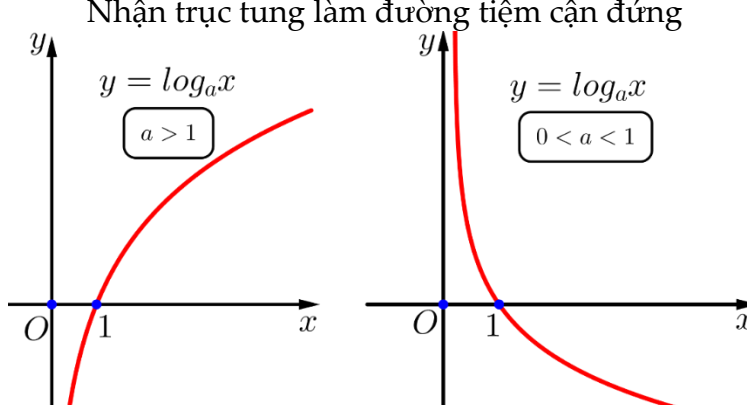
Tập xác định	$D = \mathbb{R}$.	
Tập giá trị	$T = (0; +\infty)$, nghĩa là khi giải phương trình mà đặt $t = a^{f(x)}$ thì $t > 0$.	
Đơn điệu	$a > 1$	Hàm số $y = a^x$ đồng biến, khi đó: $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$.
	$0 < a < 1$	Hàm số $y = a^x$ nghịch biến, khi đó: $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$.
Đạo hàm	$\begin{aligned} (a^x)' &= a^x \cdot \ln a \Rightarrow (a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \\ (e^x)' &= e^x \Rightarrow (e^u)' = e^u \cdot u' \\ (\sqrt[n]{u})' &= \frac{u'}{n \cdot \sqrt[n]{u^{n-1}}} \end{aligned}$	
Đồ thị	Nhận trục hoành làm đường tiệm cận ngang 	

○ Nhận xét:

Đồ thị hàm số $y = a^x$ ($a > 1$) đối xứng với đồ thị hàm số $y = a^x$ ($0 < a < 1$) qua Oy .

2. Hàm số logarit.

Hàm số logarit $y = \log_a x$, ($a > 0, a \neq 1; x > 0$)

Tập xác định	$D = (0; +\infty)$.	
Tập giá trị	$T = \mathbb{R}$, nghĩa là khi giải PT mà đặt $t = \log_a x$ thì t không có điều kiện.	
Đơn điệu	$a > 1$	Hàm số $y = \log_a x$ đồng biến trên D , khi đó: $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x)$.
	$0 < a < 1$	Hàm số $y = \log_a x$ nghịch biến trên D , khi đó: $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x)$.
Đạo hàm	$\left(\log_a x \right)' = \frac{1}{x \cdot \ln a} \Rightarrow \left(\log_a u \right)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \Rightarrow \boxed{\left(\ln^n u \right)' = n \cdot \frac{u'}{u} \cdot \ln^{n-1} u }$ $(\ln x) = \frac{1}{x}, (x > 0) \Rightarrow (\ln u)' = \frac{u'}{u}$	
Đồ thị	Nhận trục tung làm đường tiệm cận đứng 	

○ Nhận xét:

Đồ thị hàm số $y = \log_a x$ ($a > 1$) đối xứng với đồ thị hàm số $y = \log_a x$ ($0 < a < 1$) qua Ox .

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

➤ Dạng 3.1. Tập xác định của hàm số logarit

○ Điều kiện xác định của hàm số $y = \log_a f(x)$: $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ f(x) > 0 \end{cases}$.

○ Đặc biệt: với hàm số $y = \log_{g(x)} [f(x)]^n$ ta lưu ý “**mũ n**” của $f(x)$:

□ Nếu $n:2 \longrightarrow$ ĐKXĐ của hàm số $y = \log_{g(x)} [f(x)]^n$: $\begin{cases} g(x) > 0 \\ g(x) \neq 1 \\ f(x) \neq 0 \end{cases}$.

□ Nếu $n \nmid 2 \longrightarrow$ ĐKXĐ của hàm số $y = \log_{g(x)} [f(x)]^n$: $\begin{cases} g(x) > 0 \\ g(x) \neq 1 \\ f(x) > 0 \end{cases}$.

⇒ Tóm lại nếu $f(x)$ hoặc $g(x)$ có “**mũ n**” ta chú ý xem “**n**” chẵn hay lẻ.

➤ Ví dụ 3.1.1

⎧ Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_3(2x+1)$.
 A. $D = (-\infty; -\frac{1}{2})$. B. $D = (\frac{1}{2}; +\infty)$. C. $D = (0; +\infty)$. D. $D = (-\frac{1}{2}; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y = \log_3(2x+1)$ có nghĩa khi $2x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$

Vậy TXĐ là $D = (-\frac{1}{2}; +\infty)$

➤ Ví dụ 3.1.2

⎧ Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log(x^2 + 3x + 2)$.
 A. $D = [-2, -1]$. B. $D = (-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$.
 C. $D = (-2, -1)$. D. $D = (-\infty, -2] \cup [-1, +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $x^2 + 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x > -1 \end{cases} \Rightarrow D = (-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$.

➤ Ví dụ 3.1.3

⎧ Tập xác định của hàm số: $y = \log(x-2)^2$ là
 A. $\mathbb{R}$ B. $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. C. $(2; +\infty)$. D. $[2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = \log(x-2)^2$ xác định nếu $(x-2)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 2$.

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

☞ Ví dụ 3.1.4

Tập xác định của hàm số: $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \frac{2-x}{x+2}}$ là

- A. $[0; 2)$ B. $(0; 2)$.
C. $(-\infty; -2) \cup [0; 2)$. D. $(-2; 2)$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{ĐKXĐ: } \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} \frac{2-x}{x+2} \geq 0 \\ \frac{2-x}{x+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2-x}{x+2} \leq 1 \\ \frac{2-x}{x+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -2] \cup [0; +\infty) \\ x \in (-2; 2) \end{cases} \Leftrightarrow x \in [0; 2).$$

☞ Ví dụ 3.1.5

Tập xác định của hàm số: $y = \log_{(x+1)^2} (x^2 - 3x + 2) + \ln(3-x)^{2021}$ là

- A. $D = (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (2; 3)$ B. $D = (-\infty; -1) \cup (2; 3)$.
C. $D = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (2; 3)$. D. $D = (-\infty; -1)$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{ĐKXĐ: } \begin{cases} x+1 \neq 0 \\ x+1 \neq 1 \\ x^2 - 3x + 2 > 0 \\ 3-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 0 \\ \begin{cases} x > 2 \\ x < 1 \end{cases} \\ x < 3 \end{cases} \Rightarrow D = (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (2; 3).$$

☞ Ví dụ 3.1.6

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \ln(x^2 - 2mx + 4)$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$?

- A. $-2 \leq m \leq 2$ B. $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$.
C. $m > -2$. D. $-2 < m < 2$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$

➤ Dạng 3.2. Đạo hàm hàm số mũ - logarit

○ Đạo hàm hàm số logarit:

$$\left(\log_a |x| \right)' = \frac{1}{x \cdot \ln a} \Rightarrow \left(\log_a |u| \right)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \Rightarrow \boxed{\left(\ln^n |u| \right)' = n \cdot \frac{u'}{u} \cdot \ln^{n-1} |u|}$$

$$\left(\ln x \right)' = \frac{1}{x}, \quad (x > 0) \Rightarrow \left(\ln |u| \right)' = \frac{u'}{u}$$

○ Đạo hàm hàm số mũ:

$$\left(a^x \right)' = a^x \cdot \ln a \Rightarrow \left(a^u \right)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$$

$$\left(e^x \right)' = e^x \Rightarrow \left(e^u \right)' = e^u \cdot u'$$

$$\left(\sqrt[n]{u} \right)' = \frac{u'}{n \cdot \sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

➤ Ví dụ 3.2.1

Đạo hàm của hàm số $y = \log_3(4x+1)$ là

A. $y' = \frac{1}{(4x+1)\ln 3}$

B. $y' = \frac{4}{(4x+1)\ln 3}$

C. $y' = \frac{\ln 3}{4x+1}$

D. $y' = \frac{4\ln 3}{4x+1}$

Lời giải

Chọn D

Với $x > -\frac{1}{4}$. Áp dụng công thức $\left(\log_a u \right)' = \frac{u'}{u \ln a}$ ta có $y' = \frac{4}{(4x+1)\ln 3}$.

➤ Ví dụ 3.2.2

Hàm số $y = 2^{2x^2+x}$ có đạo hàm là

A. $y' = (4x+1)2^{2x^2+x}\ln 2$

B. $y' = 2^{2x^2+x}\ln 2$

C. $y' = (4x+1)2^{2x^2+x}\ln(2x^2+x)$

D. $y' = (2x^2+x)2^{2x^2+x}\ln 2$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = \left(2^{2x^2+x} \right)' = 2^{2x^2+x} \cdot \ln 2 \cdot (2x^2+x)' = (4x+1)2^{2x^2+x}\ln 2$.

➤ Ví dụ 3.2.3

Tính đạo hàm của hàm số $y = 2^{\sqrt{1-x}}$.

A. $y' = \frac{-\ln 2}{2\sqrt{1-x}} \cdot 2^{\sqrt{1-x}}$

B. $y' = \frac{\ln 2}{2\sqrt{1-x}} \cdot 2^{\sqrt{1-x}}$

C. $y' = \frac{-2^{\sqrt{1-x}}}{2\sqrt{1-x}}$

D. $y' = \frac{2^{\sqrt{1-x}}}{2\sqrt{1-x}}$

Lời giải

Chọn D

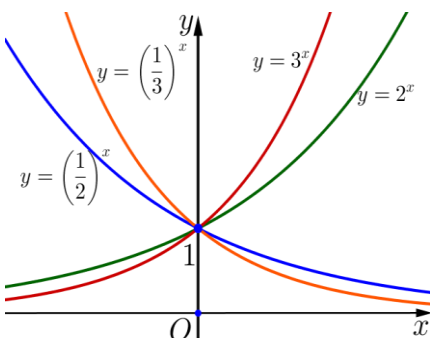
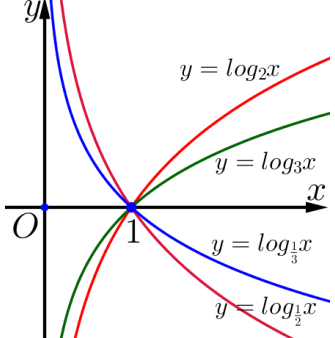
$y' = 2^{\sqrt{1-x}} \cdot \ln 2 \cdot \left(\sqrt{1-x} \right)' = 2^{\sqrt{1-x}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{(-1)}{2\sqrt{1-x}}$ hay $y' = \frac{-\ln 2}{2\sqrt{1-x}} \cdot 2^{\sqrt{1-x}}$

Dạng 3.3. Khảo sát hàm số mũ - logarit

○ Ta cần lưu ý các vấn đề sau:

		Hàm số Mũ $y = a^x (1 \neq a > 0)$	Hàm số Logarit $y = \log_a x (1 \neq a > 0)$
01	Đơn điệu	$a > 1 \rightarrow$ HS đồng biến. $0 < a < 1 \rightarrow$ HS nghịch biến.	$a > 1 \rightarrow$ HS đồng biến. $0 < a < 1 \rightarrow$ HS nghịch biến.
02	Tiệm cận	Nhận Ox làm TCN.	Nhận Oy làm TCD.
03	Đồ thị	Nằm bên trên Ox. Luôn đi qua điểm $(0;1)$. ĐTHS $y = a^x (1 \neq a > 0)$ đối xứng $y = \log_a x (1 \neq a > 0)$ qua $y = x$ (đường phân xác góc phần tư thứ nhất).	Nằm bên phải Oy. Luôn đi qua điểm $(1;0)$.

○ Với bài toán xét thứ tự cơ số ta nhớ như sau:

		Hàm số Mũ $y = a^x (1 \neq a > 0)$	Hàm số Logarit $y = \log_a x (1 \neq a > 0)$
Cơ số	> 1	Càng gần Oy cơ số càng lớn.	Càng gần Ox cơ số càng lớn.
	$0 < a < 1$	Càng gần Oy cơ số càng bé.	Càng gần Ox cơ số càng bé.
Hình minh họa			

Ví dụ 3.3.1

Cho hàm số $y = \log_{\sqrt{3}} x$. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề **sai**?

- A. Hàm số đã cho đồng biến trên tập xác định.
- B. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.
- C. Đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận đứng là trục Oy .
- D. Hàm số đã cho có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x > 0$ nên TXĐ $D = (0; +\infty)$.

Ví dụ 3.3.2

Cho hàm số $y = \log_2 x$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- A. Đạo hàm của hàm số là $y' = x^2 \ln 2$.
- B. Đồ thị hàm số nhận trục Oy làm tiệm cận đứng.
- C. Tập xác định của hàm số là $(-\infty; +\infty)$.
- D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = \log_2 x$ xác định trên khoảng $(0; +\infty)$.

Ví dụ 3.3.3

Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

- A. Hàm số $y = \log_a x$ với $a > 1$ là một hàm số nghịch biến trên khoảng $(0, +\infty)$.
- B. Đồ thị hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ với $0 < a \neq 1$ đối xứng với nhau qua Ox .
- C. Hàm số $y = \log_a x$ với $0 < a \neq 1$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.
- D. Hàm số $y = \log_a x$ với $0 < a < 1$ là một hàm số đồng biến trên khoảng $(0, +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y = \log_{\frac{1}{a}} x = \log_{a^{-1}} x = -\log_a x \Rightarrow$ Đồ thị các hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ với $0 < a \neq 1$ đối xứng với nhau qua trục hoành.

Ví dụ 3.3.4

Đồ thị hàm số $y = \log(x+1)$ nhận đường thẳng nào dưới đây làm tiệm cận đứng?

- A. $x = 1$
- B. $y = -1$.
- C. $x = -1$
- D. $x = 0$.

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số $y = \log(x+1)$ có đường tiệm cận đứng là $x = -1$.

Ví dụ 3.3.5

Hàm số nào sau đây nghịch biến trên tập xác định của nó?

- A. $y = (\sqrt{5})^x$
- B. $y = \log_{2e} x$.
- C. $y = \left(\frac{5}{2}\right)^x$
- D. $y = \log_{\frac{\pi+1}{6}} x$.

Lời giải

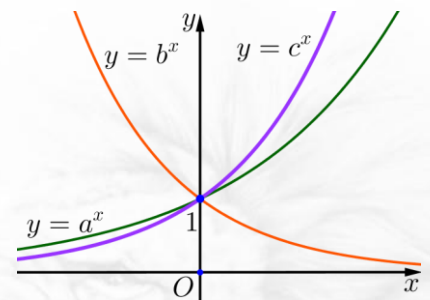
Chọn D

Hàm số $y = \log_{\frac{\pi+1}{6}} x$ có cơ số $\frac{\pi+1}{6} < 1$ nên hàm số $y = \log_{\frac{\pi+1}{6}} x$ nghịch biến trên TXĐ.

Ví dụ 3.3.6

Cho các hàm số $y = a^x$, $y = b^x$ và $y = c^x$ lần lượt có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hãy so sánh a, b, c .

- A. $a > b > c$
- B. $a < b < c$.
- C. $a = b = c$
- D. $b < a < c$.



Lời giải

Chọn D

Ta thấy $y = b^x$ là hàm số mũ nghịch biến nên $0 < b < 1$.

$y = a^x, y = c^x$ là hàm số mũ đồng biến nên $a, c > 1$.

Và đồ thị $y = c^x$ gần trục Oy hơn $y = a^x$ nên $a > c$.

Từ đó $c > a > b$.

Chương 02

Chủ đề 04

LŨY THỪA - MŨ - LOGARIT

BÀI TOÁN LÃI SUẤT

A. LÝ THUYẾT CHUNG.

1. Lãi đơn.

- ☞ Số tiền lãi chỉ tính trên số tiền gốc mà không tính trên số tiền lãi do số tiền gốc sinh ra.
- ☞ Công thức tính lãi đơn:

$$V_n = V_0(1 + r.n)$$

☞ Trong đó:

- V_n : Số tiền cả vốn lẫn lãi sau n kỳ hạn;
- V_0 : Số tiền gửi ban đầu;
- n : Số kỳ hạn tính lãi;
- r : Lãi suất định kỳ, tính theo %.

2. Lãi kép.

- ☞ Số tiền lãi không chỉ tính trên số tiền gốc mà còn tính trên số tiền lãi do tiền gốc đó sinh ra thay đổi theo từng định kỳ.

☞ Ta có các loại lãi kép sau:

2.1. Lãi kép, gửi một lần:

$$T_n = T_0(1 + r)^n$$

☞ Trong đó:

- T_n : Số tiền cả vốn lẫn lãi sau n kỳ hạn;
- T_0 : Số tiền gửi ban đầu;
- n : Số kỳ hạn tính lãi;
- r : Lãi suất định kỳ, tính theo %.

2.2. Lãi kép liên tục:

$$T_n = T_0.e^{nr}$$

☞ Trong đó:

- T_n : Số tiền cả vốn lẫn lãi sau n kỳ hạn;
- T_0 : Số tiền gửi ban đầu;
- n : Số kỳ hạn tính lãi;
- r : Lãi suất định kỳ, tính theo %.

2.3. Lãi kép, gửi định kỳ.

2.3.1. Trường hợp gửi tiền định kì cuối tháng.

Bài toán 1

Cứ cuối mỗi tháng gửi vào ngân hàng m triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm).
Hỏi sau n (tháng hoặc năm) số tiền thu được là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tiền thu được là: $T_n = \frac{m}{r} \left[(1+r)^n - 1 \right]$.

☞ Chứng minh

Tháng	Đầu tháng	Cuối tháng
1	Chưa gửi	m
2	m	$m(1+r) + m$
3	$m(1+r) + m$	$m(1+r)^2 + m(1+r) + m$

...	...	...
n		$m(1+r)^{n-1} + \dots + m(1+r) + m$

- Vậy sau tháng n ta được số tiền $T_n = m(1+r)^{n-1} + \dots + m(1+r) + m = m \left[(1+r)^{n-1} + \dots + (1+r) + 1 \right]$,
- Ta thấy trong ngoặc là tổng n số hạng của cấp số nhân có $u_1 = 1$, $u_n = (1+r)^{n-1}$, $q = 1+r$
- Biết rằng: $S_n = u_1 + \dots + u_n = u_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ nên $T_n = \frac{m}{r} \left[(1+r)^n - 1 \right]$

Bài toán 2

Cứ cuối mỗi tháng gửi vào ngân hàng m triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Sau n (tháng hoặc năm) số tiền thu được là A triệu. Hỏi số tiền gửi mỗi tháng m là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tiền cần gửi mỗi tháng là: $m = \frac{Ar}{(1+r)^n - 1}$.

Chứng minh

- Áp dụng **bài toán 1** ta có số tiền thu được là $T_n = \frac{m}{r} \left[(1+r)^n - 1 \right]$,
- Mà đề cho số tiền đó chính là A nên $A = \frac{m}{r} \left[(1+r)^n - 1 \right] \Leftrightarrow m = \frac{Ar}{(1+r)^n - 1}$.

Bài toán 3

Cứ cuối mỗi tháng gửi vào ngân hàng m triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Sau n (tháng hoặc năm) số tiền thu được là A triệu. Hỏi số tháng hoặc năm n là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tháng thu được đề bài cho là: $n = \log_{1+r} \left(\frac{Ar}{m} + 1 \right)$.

Chứng minh

- Áp dụng **bài toán 1** ta có số tiền thu được là $T_n = \frac{m}{r} \left[(1+r)^n - 1 \right]$.
- Đề cho số tiền đó chính là A nên:

$$A = \frac{m}{r} \left[(1+r)^n - 1 \right] \Leftrightarrow m = \frac{Ar}{(1+r)^n - 1} \Leftrightarrow (1+r)^n = \frac{Ar}{m} + 1 \Leftrightarrow n = \log_{1+r} \left(\frac{Ar}{m} + 1 \right)$$

$\Rightarrow$ Như vậy trong **trường hợp 2.3.1** này ta cần nắm vững công thức **bài toán 1** từ đó có thể dễ dàng biến đổi ra các công thức ở **bài toán 2, bài toán 3**.

2.3.2. Trường hợp gửi tiền định kì đầu tháng.

Bài toán 4

Cứ đầu mỗi tháng gửi vào ngân hàng m triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Hỏi sau n (tháng hoặc năm) số tiền thu được là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tiền thu được là: $T_n = \frac{m}{r} \left[(1+r)^n - 1 \right] (1+r)$.

Chứng minh

- Ta xây dựng bảng sau:

Tháng	Đầu tháng	Cuối tháng
-------	-----------	------------

1	m	$m(1+r)$
2	$m(1+r) + m$	$m(1+r)^2 + m(1+r)$
3	$m(1+r)^2 + m(1+r) + m$	$m(1+r)^3 + m(1+r)^2 + m(1+r)$
...	...	...
n	...	$m(1+r)^n + \dots + m(1+r)$

- ♦ Vậy sau tháng n ta được số tiền:

$$T_n = m(1+r)^n + \dots + m(1+r) = m \left[(1+r)^n + \dots + (1+r) \right] = m(1+r) \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Bài toán 5

Cứ đầu mỗi tháng gửi vào ngân hàng m triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Sau n (tháng hoặc năm) số tiền thu được là A triệu. Hỏi số tiền gửi mỗi tháng m là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tiền cần gửi mỗi tháng là: $m = \frac{Ar}{(1+r) \left[(1+r)^n - 1 \right]}$.

Chứng minh

- ♦ Áp dụng **bài toán 4**. Ta có số tiền thu được là: $T_n = \frac{m}{r} \left[(1+r)^n - 1 \right] (1+r)$,
- ♦ Mà đề cho số tiền đó là A nên $A = \frac{m}{r} \left[(1+r)^n - 1 \right] (1+r) \Leftrightarrow m = \frac{Ar}{(1+r) \left[(1+r)^n - 1 \right]}$.

Bài toán 6

Cứ đầu mỗi tháng gửi vào ngân hàng m triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Sau n (tháng hoặc năm) số tiền thu được là A triệu. Hỏi số tháng hoặc năm n là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tháng thu được đề bài cho là: $n = \log_{1+r} \left[\frac{Ar}{m(1+r)} + 1 \right]$.

Chứng minh

- ♦ Áp dụng **bài toán 4**. Ta có: số tiền thu được là: $T_n = \frac{m}{r} \left[(1+r)^n - 1 \right] (1+r)$.
- ♦ Đề cho số tiền đó là A nên: $A = \frac{m}{r} \left[(1+r)^n - 1 \right] (1+r)$

$$\Leftrightarrow m = \frac{Ar}{(1+r) \left[(1+r)^n - 1 \right]} \Leftrightarrow (1+r)^n = \frac{Ar}{m(1+r)} + 1 \Rightarrow n = \log_{1+r} \left[\frac{Ar}{m(1+r)} + 1 \right].$$

$\Rightarrow$ Như vậy trong **trường hợp 2.3.2** ta cần nắm vững công thức **bài toán 4** từ đó có thể dễ dàng biến đổi ra các công thức ở **bài toán 5**, **bài toán 6**.

2.3.3. Trường hợp vay nợ và trả tiền định kì đầu tháng.

Bài toán 7

Vay ngân hàng A triệu đồng. Cứ đầu mỗi tháng (năm) trả ngân hàng m triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Hỏi sau n (tháng hoặc năm) số tiền còn nợ là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tiền còn nợ là: $T_n = A(1+r)^n - m(1+r) \frac{(1+r)^n - 1}{r}$.

Chứng minh

♦ Ta xây dựng bảng sau:

Tháng	Đầu tháng	Cuối tháng
1	$A - m$	$(A - m)(1+r) = A(1+r) - m(1+r)$
2	$A(1+r) - m(1+r) - m$	$A(1+r)^2 - m(1+r)^2 - m(1+r)$
3	$A(1+r)^2 - m(1+r)^2 - m(1+r) - m$	$A(1+r)^3 - m(1+r)^3 - m(1+r)^2 - m(1+r)$
...	...	...
n	...	$A(1+r)^n - m(1+r)^n - \dots - m(1+r)^2 - m(1+r)$

♦ Vậy sau tháng n ta còn nợ số tiền:

$$T_n = A(1+r)^n - m(1+r)^n - \dots - m(1+r)^2 - m(1+r)$$

$$= A(1+r)^n - m \left[(1+r)^n + \dots + (1+r) \right] = A(1+r)^n - m(1+r) \frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

3. Bài toán tăng trưởng dân số.

☞ Công thức tính:

$$X_m = X_n (1+r)^{m-n}$$

$$(m, n \in \mathbb{Z}^+; m \geq n)$$

☞ Trong đó:

r : tỉ lệ tăng dân số từ năm n đến năm m.

X_m : dân số năm m.

X_n : dân số năm n.

☞ Từ đó ra có công thức tính tỉ lệ tăng dân số là $r = m-n \sqrt[n]{\frac{X_m}{X_n}} - 1$.

Ví dụ 4.1

Bà Hoa gửi 0,45% triệu vào tài khoản định kỳ tính lãi kép với lãi suất là 8%/năm. Tính số tiền lãi thu được sau 10 năm.

Lời giải

♦ Áp dụng công thức tính lãi kép, sau 10 năm số tiền cả gốc và lãi bà Hoa thu về là

$$A(1+r)^n = 100(1+0,08)^{10} \approx 215,892 \text{ triệu đồng.}$$

♦ Suy ra số tiền lãi bà Hoa thu về sau 10 năm là $215,892 - 100 = 115,892$ triệu đồng.

Ví dụ 4.2

Một người muốn gửi tiết kiệm ở ngân hàng và hi vọng sau 4 năm có được 850 triệu đồng để mua nhà. Biết lãi suất ngân hàng mỗi tháng trong thời điểm hiện tại là 0,45%. Hỏi người đó mỗi tháng phải gửi vào ngân hàng tối thiểu bao nhiêu tiền để đủ số tiền mua nhà? (giả sử số tiền mỗi tháng là như nhau và lãi suất trong 4 năm là không thay đổi).

Lời giải

- ♦ Giả sử người này gửi tiền ở thời điểm t nào đó, kể từ thời điểm này sau 4 năm (48 tháng) ông muốn có số tiền 850 triệu.
- ♦ Như vậy rõ ràng ta có thể coi đây là bài toán gửi tiền định kì đầu tháng.
- ♦ Áp dụng bài toán 5 ta có số tiền phải gửi mỗi tháng là: $m = \frac{Ar}{(1+r)\left[(1+r)^n - 1\right]} (*)$.
- ♦ Theo bài ra $n = 48, r = 0,45\%, A = 850$.
- ♦ Thay vào (*) ta được $m = \frac{850 \cdot 0,45\%}{(1+0,45\%)\left[(1+0,45\%)^{48} - 1\right]} = 15,833$ triệu đồng.

☞ Ví dụ 4.3

Một bà mẹ Việt Nam anh hùng được hưởng số tiền là 4 triệu đồng trên một tháng (*chuyển vào tài khoản của mẹ ở ngân hàng vào đầu tháng*). Từ tháng 1 năm 2016 mẹ không đi rút tiền mà để lại ngân hàng và được tính lãi suất 1% trên một tháng. Đến tháng 12 năm 2016 mẹ rút toàn bộ số tiền (*gồm số tiền của 12 tháng và số tiền đã gửi tháng 1*). Hỏi khi đó mẹ lĩnh về bao nhiêu tiền? (kết quả làm tròn theo đơn vị nghìn đồng).

Lời giải

- ♦ Nếu ban đầu gửi vào a đồng, từ đầu tháng sau gửi thêm a đồng (không đổi) vào đầu mỗi tháng với lãi suất $r\%$ trong n tháng thì tổng số tiền thu được là:

$$A = a + \frac{a}{r}(1+r)\left[(1+r)^n - 1\right] = 4 + \frac{4}{1\%}(1+1\%)\left[(1+1\%)^{11} - 1\right] + 4 = 50,73 \text{ triệu đồng.}$$

- ♦ $n = 11$ là tính từ đầu tháng 2 đến cuối tháng 12.

☞ Ví dụ 4.4

Đầu năm 2016, anh Hùng có xe công nông trị giá 100 triệu đồng. Biết mỗi tháng thì xe công nông hao mòn mất 0,4% giá trị, đồng thời làm ra được 6 triệu đồng (*số tiền làm ra mỗi tháng là không đổi*). Hỏi sau một năm, tổng số tiền (*bao gồm giá tiền xe công nông và tổng số tiền anh Hùng làm ra*) anh Hùng có là bao nhiêu?

Lời giải

- ♦ Sau một năm số tiền anh Hùng làm ra là $6 \cdot 12 = 72$ triệu đồng
 - ♦ Sau một năm giá trị xe công nông còn $100(1 - 0,4\%)^{12} \approx 95,3042$ triệu đồng
- ⇒ Vậy sau một năm số tiền anh Hùng có là 167,3042 triệu đồng

☞ Ví dụ 4.5

Bác B gửi tiết kiệm số tiền ban đầu là 50 triệu đồng theo kỳ hạn 3 tháng với lãi suất 0,72% tháng. Sau một năm bác B rút cả vốn lẫn lãi và gửi theo kỳ hạn 6 tháng với lãi suất 0,78% tháng. Sau khi gửi đúng một kỳ hạn 6 tháng do gia đình có việc bác gửi thêm 3 tháng nữa thì phải rút tiền trước hạn cả gốc lẫn lãi được số tiền là 57.694.945,55 đồng (chưa làm tròn). Biết rằng khi rút tiền trước hạn lãi suất được tính theo lãi suất không kỳ hạn, tức tính theo hàng tháng. Trong số 3 tháng bác gửi thêm lãi suất là

Lời giải

- ♦ Số tiền bác B rút ra sau năm đầu: $T_1 = 50.000.000 * (1 + 0,0072 * 3)^4$
- ♦ Số tiền bác B rút ra sau sáu tháng tiếp theo: $T_2 = T_1 * (1 + 0,0078 * 6)$
- ♦ Số tiền bác B rút ra sau ba tháng tiếp theo:

$$T_3 = T_2 * (1+r)^3 = 57.694.945,55 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{57.694.945,55}{T_2}} - 1 \approx 0,004 = 0,4\%.$$

Ví dụ 4.6

Bạn Nam là sinh viên của một trường Đại học, muốn vay tiền ngân hàng với lãi suất ưu đãi trang trải kinh phí học tập hàng năm. Đầu mỗi năm học, bạn ấy vay ngân hàng số tiền 10 triệu đồng với lãi suất là 4%. Tính số tiền mà Nam nợ ngân hàng sau 4 năm, biết rằng trong 4 năm đó, ngân hàng không thay đổi lãi suất (kết quả làm tròn đến nghìn đồng).

Lời giải

- ♦ Tổng số tiền bạn Nam vay (gốc và lãi) sau 4 năm là:

$$A = 10^6(1+0,04)^4 + 10^6(1+0,04)^3 + 10^6(1+0,04)^2 + 10^6(1+0,04)$$

$$= 10^6(1+0,04) \left[1 + (1+0,04) + (1+0,04)^2 + (1+0,04)^3 \right] = 10^6(1+0,04) \cdot \frac{1-(1+0,04)^4}{1-(1+0,04)} = 44163256$$

- ♦ Nên $A = 44163000$ đồng

Ví dụ 4.7

Một giáo viên được nhận lương khởi điểm là 8.000.000 đồng/tháng. Cứ sau hai năm lương mỗi tháng của giáo viên đó được tăng thêm 10% so với mức lương hiện tại. Tính tổng số tiền T (đồng) giáo viên đó nhận được sau 6 năm làm việc.

Lời giải

- ♦ Lương 2 năm đầu tiên của giáo viên đó nhận được là $T_1 = 8.10^6 \cdot 24 = 192.10^6$ (đồng)
- ♦ Theo công thức tính lãi kép, lương 2 năm tiếp theo giáo viên đó nhận được:

$$T_2 = 24.8.10^6 \cdot (1+10\%)^1 = 212,2.10^6 \text{ (đồng)}$$

- ♦ Lương 2 năm cuối cùng giáo viên đó nhận được:

$$T_3 = 24.8.10^6 \cdot (1+10\%)^2 = 232,32.10^6 \text{ (đồng)}$$

- ♦ Tổng số tiền T (đồng) giáo viên đó nhận được sau 6 năm làm việc:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = 635,520,000 \text{ (đồng)}.$$

Ví dụ 4.8

Anh Hưng đi làm được lĩnh lương khởi điểm 4.000.000 đồng/tháng. Cứ 3 năm, lương của anh Hưng lại được tăng thêm 7%/1 tháng. Hỏi sau 36 năm làm việc anh Hưng nhận được tất cả bao nhiêu tiền? (Kết quả làm tròn đến hàng nghìn đồng).

Lời giải

- ♦ Gọi a là số tiền lương khởi điểm, r là lương được tăng thêm.

+ Số tiền lương trong ba năm đầu tiên: $36a$

+ Số tiền lương trong ba năm kế tiếp: $36[a + a.r] = 36a(1+r)^1$

+ Số tiền lương trong ba năm kế tiếp: $36a(1+r)^2$

...

+ Số tiền lương trong ba năm cuối: $36a(1+r)^{11}$.

- ♦ Vậy sau 36 năm làm việc anh Hưng nhận được:

$$\left[1 + (1+r)^1 + (1+r)^2 + (1+r)^3 + \dots + (1+r)^{11} \right] \cdot a \cdot 36 = 2.575.936.983 \simeq 2.575.937.000 \text{ đồng}.$$

☞ Ví dụ 4.9

Một người đem gửi tiền tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất 1% một tháng. Biết rằng cứ sau mỗi quý (3 tháng) thì lãi sẽ được cộng dồn vào vốn gốc. Hỏi sau tối thiểu bao nhiêu năm thì người đó nhận lại được số tiền bao gồm cả vốn lẫn lãi gấp ba lần số tiền ban đầu

Lời giải

- ♦ Gọi a là số tiền người đó gửi ban đầu
- ♦ Số tiền nhận được cả gốc lẫn lãi sau N năm là

$$T = a(1 + 0,03)^{\frac{N}{4}}$$

$$\frac{T}{a} = 3 \Leftrightarrow (1 + 0,03)^{\frac{N}{4}} = 3 \Leftrightarrow 4N \cdot \ln(1,03) = \ln 3 \Rightarrow N = \frac{\ln 3}{4 \ln 1,03} \approx 9,29$$

☞ Ví dụ 4.10

Một người vay ngân hàng một tỷ đồng theo phương thức trả góp để mua nhà. Nếu cuối mỗi tháng, bắt đầu từ tháng thứ nhất người đó trả 40 triệu đồng và chịu lãi số tiền chưa trả là 0,65% mỗi tháng (biết lãi suất không thay đổi) thì sau bao lâu người đó trả hết số tiền trên?

Lời giải

- ♦ Gọi A là số tiền vay, a là số tiền gửi hàng tháng r là lãi suất mỗi tháng.
- ♦ Đến cuối tháng thứ n thì số tiền còn nợ là:

$$T = A(1+r)^n - a \left[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \dots + 1 \right] = A(1+r)^n - \frac{a \left[(1+r)^n - 1 \right]}{r}$$

- ♦ Hết nợ đồng nghĩa $T = 0$

$$\Leftrightarrow A(1+r)^n - \frac{a \left[(1+r)^n - 1 \right]}{r} = 0 \Leftrightarrow \frac{a - Ar}{r} (1+r)^n = \frac{a}{r} \Leftrightarrow n = \log_{1+r} \frac{a}{a - Ar}$$

- ♦ Áp dụng với $A = 1$ (tỷ), $a = 0,04$ (tỷ), $r = 0,0065$ ta được $n \approx 27,37$.

$\Rightarrow$ Vậy cần trả 28 tháng.

☞ Ví dụ 4.11

Năm 2014, một người đã tiết kiệm được x triệu đồng và dùng số tiền đó để mua nhà nhưng trên thực tế người đó phải cần $1,55x$ triệu đồng. Người đó quyết định gửi tiết kiệm vào ngân hàng với lãi suất là 6,9%/ năm theo hình thức lãi kép và không rút trước kỳ hạn. Hỏi năm nào người đó mua được căn nhà đó (giả sử rằng giá bán căn nhà đó không thay đổi).

Lời giải

- ♦ Số tiền người gửi tiết kiệm sau n năm là $x(1 + 6,9\%)^n$
 - ♦ Ta cần tìm n để $x(1 + 6,9\%)^n = 1,55x \Leftrightarrow (1 + 6,9\%)^n = 1,55 \Leftrightarrow n \approx 6,56 \dots$
 - ♦ Do đó, người gửi tiết kiệm cần gửi tròn 7 kỳ hạn, tức là 7 năm.
- $\Rightarrow$ Vậy đến năm 2021 người đó sẽ có đủ tiền cần thiết.

Ví dụ 4.12

Một người gửi ngân hàng 100 triệu đồng theo hình thức lãi kép, lãi suất 0,5% một tháng (kể từ tháng thứ 2, tiền lãi được tính theo phần trăm tổng tiền có được của tháng trước đó và tiền lãi của tháng sau đó). Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng, người đó có nhiều hơn 125 triệu đồng?

Lời giải

- ♦ Số tiền cả vốn lẫn lãi người gửi sau n tháng: $S = 100(1 + 0,005)^n = 100.1,005^n$ (triệu đồng)

$$\Rightarrow 1,005^n = \frac{S}{100} \Rightarrow n = \log_{1,005} \frac{S}{100}.$$

- ♦ Để có số tiền $S = 125$ (triệu đồng) thì phải sau thời gian

$$n = \log_{1,005} \frac{S}{100} = \log_{1,005} \frac{125}{100} \approx 44,74 \text{ (tháng)}$$

$\Rightarrow$ Vậy: sau ít nhất 45 tháng người đó có nhiều hơn 125 triệu đồng.

Ví dụ 4.13

Ông Nam gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn 1 năm với lãi suất là 12% một năm. Sau n năm ông Nam rút toàn bộ số tiền (cả vốn lẫn lãi). Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất để số tiền lãi nhận được lớn hơn 40 triệu đồng (giả sử lãi suất hàng năm không thay đổi)

Lời giải

- ♦ Gọi T_n là tiền vốn lẫn lãi sau t tháng, a là số tiền ban đầu

- ♦ Tháng 1 ($t = 1$): $T_1 = a(1 + r)$

- ♦ Tháng 2 ($t = 2$): $T_2 = a(1 + r)^2$

.....

- ♦ Tháng n ($t = n$): $T_n = a(1 + r)^t$

$$T_n = a(1 + r)^t \Rightarrow t = \frac{\ln \frac{T_n}{a}}{\ln(1 + r)} = \frac{\ln \frac{140}{100}}{\ln(1 + 1\%)} \approx 33,815 \text{ (tháng)}$$

- ♦ Để số tiền lãi nhận được lớn hơn 40 triệu thì $n > \frac{t}{12} \approx 2,818$

$\Rightarrow$ Vậy $n = 3$.

Ví dụ 4.14

Tỉ lệ tăng dân số ở Việt Nam được duy trì ở mức 1,05%. Theo số liệu của Tổng cục thống kê, dân số Việt Nam năm 2014 có 90.728.900 người. Với tốc độ tăng dân số như thế đến năm 2030 thì dân số của Việt Nam là bao nhiêu?

Lời giải

- ♦ Từ năm 2014 đến năm 2030 cách nhau số năm là: $2030 - 2014 = 16$ năm.

- ♦ Dân số Việt Nam năm 2030: $A_{16} = 90728900(1 + 1,05\%)^{16} \approx 107232574$ (người).

Chương 02

Chủ đề 05

LŨY THỪA - MŨ - LOGARIT

PHƯƠNG TRÌNH MŨ

A. LÝ THUYẾT CHUNG.

☞ Phương trình mũ cơ bản: $a^x = b$ ($a > 0, a \neq 1$).

☞ Phương trình có một nghiệm duy nhất khi $b > 0$.

☞ Phương trình vô nghiệm khi $b \leq 0$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

☞ Dạng 5.1. Phương trình mũ cơ bản

☞ Giải phương trình mũ cơ bản: $a^x = b$ ($a > 0, a \neq 1$).

☞ Khi đó $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$

Lưu ý:

☞ Phương trình có một nghiệm duy nhất khi $b > 0$.

☞ Phương trình vô nghiệm khi $b \leq 0$.

☞ Ví dụ 5.1.1

Phương trình $3^{\frac{1}{x}} = 4$ có nghiệm là

- A. $x = \log_2 3$. B. $x = \log_3 2$. C. $x = \log_4 3$. D. $x = \log_3 4$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $3^{\frac{1}{x}} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \log_3 4 \Leftrightarrow x = \log_4 3$.

☞ Ví dụ 5.1.2

Nghiệm của phương trình $8^x = 4$ là

- A. $x = \frac{2}{3}$. B. $x = -\frac{1}{2}$. C. $x = \frac{1}{2}$. D. $x = -2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $8^x = 4 \Leftrightarrow x = \log_8 4 \Leftrightarrow x = \log_{2^3} 2^2 = \frac{2}{3}$

☞ Ví dụ 5.1.3

Nghiệm của phương trình $2^x + 2^{x+1} = 3^x + 3^{x+1}$ là

- A. $x = \log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{4}$. B. $x = 1$. C. $x = 0$. D. $x = \log_{\frac{4}{3}} \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

$2^x + 2^{x+1} = 3^x + 3^{x+1} \Leftrightarrow 3.2^x = 4.3^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{4}$

Dạng 5.2. Đưa về cùng cơ số

Với $a > 0, a \neq 1$: $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.

Ví dụ 5.2.1

Phương trình $2^{2x-1} - \frac{1}{8} = 0$ có nghiệm là

- A. $x = -1$. B. $x = 2$. C. $x = -2$. D. $x = 1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $2^{2x-1} - \frac{1}{8} = 0 \Leftrightarrow 2^{2x-1} = 2^{-3} \Leftrightarrow x = -1$

Ví dụ 5.2.2

Tìm tập nghiệm của phương trình $2^{(x-1)^2} = 4^x$.

- A. $\{4 + \sqrt{3}, 4 - \sqrt{3}\}$. B. $\{2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}\}$.
C. $\{-4 + \sqrt{3}, -4 - \sqrt{3}\}$. D. $\{-2 + \sqrt{3}, -2 - \sqrt{3}\}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $2^{(x-1)^2} = 4^x \Leftrightarrow 2^{(x-1)^2} = 2^{2x} \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{3} \\ x = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$.

Ví dụ 5.2.3

Nghiệm của phương trình $\left(\frac{1}{25}\right)^{x+1} = 125^x$ là

- A. $-\frac{2}{5}$. B. 4. C. $-\frac{1}{8}$. D. 1

Lời giải

Chọn A

Ta có $\left(\frac{1}{25}\right)^{x+1} = 125^x \Leftrightarrow 5^{-2(x+1)} = 5^{3x} \Leftrightarrow -2(x+1) = 3x \Leftrightarrow x = -\frac{2}{5}$.

Ví dụ 5.2.4

Tìm tập hợp tất cả các nghiệm của phương trình $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-1} = (2\sqrt{2})^{x+2}$.

- A. $\left\{\frac{11}{2}\right\}$. B. $\left\{\frac{2}{11}\right\}$. C. $\left\{-\frac{2}{11}\right\}$. D. $\left\{-\frac{11}{2}\right\}$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-1} = (2\sqrt{2})^{x+2}$
 $\Leftrightarrow (2^{-2})^{2x-1} = \left(2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^{x+2} \Leftrightarrow 2^{-4x+2} = 2^{\frac{3(x+2)}{2}} \Leftrightarrow -4x+2 = \frac{3(x+2)}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{2}{11}$

➤ Dạng 5.3. Logarit hóa

○ Phương trình $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1, b > 0 \\ f(x) = \log_a b \end{cases}$.

○ Phương trình $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} = \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \cdot \log_a b$

hoặc $\log_b a^{f(x)} = \log_b b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \cdot \log_b a = g(x)$.

➤ Ví dụ 5.3.1

|| Tìm tập nghiệm S của phương trình $2^{x+1} = 8$.
 A. $S = \{-3\}$. B. $S = \{2\}$. C. $S = \{0; 2\}$. D. $S = \{12\}$

Lời giải

Chọn B

$2^{x+1} = 8 \Leftrightarrow x+1 = \log_2 8 \Leftrightarrow x+1 = 3 \Leftrightarrow x = 2$.

➤ Ví dụ 5.3.2

|| Tìm tập nghiệm S của phương trình $3^{4^x} = 4^{3^x}$.
 A. $S = \emptyset$. B. $S = \left\{ \frac{\log_4(\log_3 4)}{1 - \log_4 3} \right\}$.
 C. $S = \left\{ \frac{1 - \log_4 3}{\log_4(\log_3 4)} \right\}$. D. $S = \left\{ \frac{\log_4(\log_3 4)}{\log_4 3} \right\}$

Lời giải

Chọn B

$3^{4^x} = 4^{3^x} \Leftrightarrow 4^x = 3^x \cdot \log 4$

$\Leftrightarrow x = \log_4(3^x \cdot \log_3 4) \Leftrightarrow x = x \cdot \log_4 3 + \log_4(\log_3 4) \Leftrightarrow x = \frac{\log_4(\log_3 4)}{1 - \log_4 3}$.

➤ Ví dụ 5.3.3

|| Giải phương trình sau: $2^x \cdot 5^x = 0,2 \cdot (10^{x-1})^5$
 A. $x = \frac{3}{2}$. B. $x = 0$. C. $x = -1$. D. $x = \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \log 2$

Lời giải

Chọn D

PT $\Leftrightarrow (2.5)^x = 0,2 \cdot 10^{5x-5} \Leftrightarrow x = \log 0,2 + 5x - 5 \Leftrightarrow 4x = 6 - \log 2 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \cdot \log 2$.

➤ Ví dụ 5.3.4

|| Cho phương trình $4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$. Khi đặt $t = 2^x$ ta được phương trình nào sau đây
 A. $2t^2 - 3t = 0$. B. $4t - 3 = 0$. C. $t^2 + t - 3 = 0$. D. $t^2 + 2t - 3 = 0$

Lời giải

Chọn D

Phương trình $\Leftrightarrow 4^x + 2 \cdot 2^x - 3 = 0$

➤ Dạng 5.4. Đặt ẩn phụ dễ thấy

○ Biến đổi quy về dạng: $f[a^{g(x)}] = 0 (0 < a \neq 1) \Leftrightarrow \begin{cases} t = a^{g(x)} > 0 \\ f(t) = 0 \end{cases}$.

○ Thông thường sẽ gặp các cơ sở: $\begin{cases} 9^x \longrightarrow t = 3^x \\ 4^x \longrightarrow t = 2^x ; t > 0. \\ 25^x \longrightarrow t = 5^x \end{cases}$

➤ Ví dụ 5.4.1

Tập nghiệm của phương trình $9^x - 5 \cdot 3^x + 6 = 0$ là
A. $S = \{1; \log_3 2\}$. **B.** $S = \{\log_3 2\}$. **C.** $S = \{1\}$. **D.** $S = \{\emptyset\}$

Lời giải

Chọn A

$$9^x - 5 \cdot 3^x + 6 = 0 \Leftrightarrow (3^2)^x - 5 \cdot 3^x + 6 = 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 - 5 \cdot 3^x + 6 = 0 (**)$$

$$\text{Đặt } t = 3^x > 0. \text{ Khi đó: } (**) \Leftrightarrow t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 (\mathbb{N}) \\ t = 3 (\mathbb{N}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3^x = 2 \\ t = 3^x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_3 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 1 \vee x = \log_3 2$.

➤ Ví dụ 5.4.2

Số nghiệm của phương trình $4 \cdot 4^x - 9 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$ (*) là:
A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0

Lời giải

Chọn C

$$(*) \Leftrightarrow 4 \cdot 2^{2x} - 18 \cdot 2^x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2^x > 0 \\ 4t^2 - 18t + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 4 \\ 2^x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = -1$ và $x = 2$.

➤ Ví dụ 5.4.3

Giải phương trình $2^{1+2x} + 15 \cdot 2^x - 8 = 0$ (*).
A. $x = \frac{3}{2}$. **B.** $x = 0$. **C.** $x = -1$. **D.** $x = 5$

Lời giải

Chọn C

$$(*) \Leftrightarrow 2 \cdot 2^{2x} + 15 \cdot 2^x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot (2^x)^2 + 15 \cdot 2^x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2^x > 0 \\ 2t^2 + 15t - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = -8 \end{cases} \Leftrightarrow 2^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -1$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -1$.

Dạng 5.5. Đặt ẩn phụ với phương trình đẳng cấp

○ Phương trình đẳng cấp có dạng: $m.X^2 + n.XY + p.Y^2 = 0$.

○ Khi đó với phương trình mũ đẳng cấp có dạng: $m.a^{2f(x)} + n.(a.b)^{f(x)} + p.b^{2f(x)} = 0$

○ Phương pháp làm như sau:

01	Chia 2 vế cho $b^{2f(x)}$, đặt $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = t > 0$.	$m.\frac{a^{2f(x)}}{b^{2f(x)}} + n.\frac{(a.b)^{f(x)}}{b^{2f(x)}} + p.\frac{b^{2f(x)}}{b^{2f(x)}} = 0$ $\Leftrightarrow m.\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}\right]^2 + n.\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} + p = 0$ $\Leftrightarrow m.t^2 + n.t + p = 0.$
02	Chia 2 vế cho $a^{2f(x)}$, đặt $\left(\frac{b}{a}\right)^{f(x)} = t > 0$.	$m.\frac{a^{2f(x)}}{a^{2f(x)}} + n.\frac{(a.b)^{f(x)}}{a^{2f(x)}} + p.\frac{b^{2f(x)}}{a^{2f(x)}} = 0$ $\Leftrightarrow m + n.\left(\frac{b}{a}\right)^{f(x)} + p.\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{f(x)}\right]^2 = 0$ $\Leftrightarrow m + n.t + p.t^2 = 0.$

Lưu ý:

Đây là dạng sẽ có trong bài “Bất phương trình mũ”, lúc giải BPT mũ ta cần chú ý đến cơ số lớn hay bé hơn 1. Để giảm sai sót chúng ta hãy “chia 2 vế” cho **cơ số bé nhất** !!!

Ví dụ 5.5.1

Giải phương trình sau: $8^x + 18^x = 2.27^x$ (*)

A. $x=1$.

B. $x=\log_3 2$.

C. $x=-1$.

D. $x=0$

Lời giải

Chọn D

$$(*) \Leftrightarrow 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{3x} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \left(\frac{3}{2}\right)^x > 0 \\ 2t^3 - t^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=0$.

Ví dụ 5.5.2

Số nghiệm của phương trình: $25^x + 15^x = 2.9^x$ (*) là:

A. 0.

B. 3.

C. 1.

D. 2

Lời giải

Chọn C

$$(*) \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{5}{3}\right)^x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \left(\frac{5}{3}\right)^x > 0 \\ t^2 + t - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \left(\frac{5}{3}\right)^x > 0 \\ t = 1 \\ t = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=0$.

Dạng 5.6. Đặt ẩn phụ với tích hai cơ số bằng 1

○ Phương trình đẳng cấp có dạng: $m.X^2 + n.XY + p.Y^2 = 0$.

○ Phương trình mũ ta xét có dạng: $m.a^{f(x)} + n.b^{f(x)} + p = 0$ (*) trong đó $a.b = 1$.

○ Phương pháp làm như sau:

$$\text{Vì } a.b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{a} \longrightarrow \text{Đặt } t = a^{f(x)}, t > 0 \Rightarrow b^{f(x)} = \frac{1}{t}.$$

$$\text{Khi đó (*)} \Leftrightarrow m.t + n.\frac{1}{t} + p = 0 \Leftrightarrow m.t^2 + n + p.t = 0.$$

Ví dụ 5.6.1

Tìm tích các nghiệm của phương trình $(\sqrt{2}-1)^x + (\sqrt{2}+1)^x - 2\sqrt{2} = 0$.

A. 2. B. -1. C. 0. D. 1

Lời giải

Chọn B

Ta có: $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 1$

Đặt $t = (\sqrt{2}+1)^x$, điều kiện $t > 0$. Suy ra $(\sqrt{2}-1)^x = \frac{1}{t}$

Phương trình trở thành: $\frac{1}{t} + t - 2\sqrt{2} = 0$

$$\Leftrightarrow t^2 - 2\sqrt{2}t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{2} + 1 \Rightarrow (\sqrt{2}+1)^x = \sqrt{2} + 1 \Leftrightarrow x = 1 \\ t = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow (\sqrt{2}+1)^x = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow (\sqrt{2}+1)^x = (\sqrt{2}+1)^{-1} \Leftrightarrow x = -1 \end{cases}$$

Vậy tích của hai nghiệm $x_1 x_2 = 1 \cdot (-1) = -1$

Ví dụ 5.6.2

Phương trình $(3+\sqrt{5})^x + (3-\sqrt{5})^x = 3.2^x$ có tổng các nghiệm là

A. 0. B. 1. C. -1. D. 2

Lời giải

Chọn A

$$(3+\sqrt{5})^x + (3-\sqrt{5})^x = 3.2^x \Leftrightarrow \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x = 3 \quad (*)$$

$$\text{Thấy } \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \Rightarrow \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{-x}$$

$$\text{Đặt } t = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x > 0 \Rightarrow \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x = \frac{1}{t}$$

$$(*) \Leftrightarrow t + \frac{1}{t} = 3 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ t = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

➤ Dạng 5.7. Phương pháp hàm số

❑ **Định lý.** Nếu hàm số $y = f(x)$ là hàm số liên tục và đồng biến trên $(a; b)$, $y = g(x)$ là hàm số liên tục và nghịch biến trên $(a; b)$ thì phương trình $f(x) = g(x)$ có tối đa một nghiệm trên $(a; b)$.

○ Phương pháp làm như sau:

01

- ⇒ Biến đổi phương trình đã cho về dạng $f(x) = k$, với k là hằng số
- ♦ Chứng minh $f(x)$ là hàm đồng biến (nghịch biến) trên tập xác định.
 - ♦ Tìm x_0 sao cho $f(x_0) = k$
 - ♦ Kết luận x_0 là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x) = k$.

02

- ⇒ Biến đổi phương trình đã cho về dạng $f(x) = g(x)$, với D_1, D_2 lần lượt là tập xác định của hai hàm số $f(x), g(x)$
- ♦ Chứng minh $f(x)$ là hàm đồng biến và $g(x)$ nghịch biến trên tập $D_1 \cap D_2$ (hay ngược lại)
 - ♦ Tìm x_0 sao cho $f(x_0) = g(x_0)$
 - ♦ Kết luận x_0 là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x) = g(x)$.

03

- ⇒ Biến đổi phương trình đã cho về dạng $f(u) = f(v)$, với hàm số $f(t)$ là hàm đồng biến (hay nghịch biến).
- ♦ Phương trình $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$.

✍ **Lưu ý:**

- ① Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là hàm đồng biến (nghịch biến) trên $(a; b)$ thì $f(x) + g(x)$ cũng là hàm đồng biến (nghịch biến) trên $(a; b)$.
- ② Hàm số $y = a^x$ đồng biến khi $a > 1$ và nghịch biến khi $0 < a < 1$.

☞ **Ví dụ 5.7.1**

Phương trình $2016^x + 2x - 2018 = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số: $f(x) = 2016^x + 2x - 2018$. Tập xác định: $\mathbb{R}$

Khi đó $f'(x) = 2016^x \ln 2016 + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mà $f(1) = 0$ nên $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

☞ **Ví dụ 5.7.2**

Tổng các nghiệm của phương trình $3^{x^2-x} - 3^{x+15} = 15 + 2x - x^2$ là:

A. -6.

B. -1.

C. 5.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Phương trình $\Leftrightarrow 3^{x^2-x} + x^2 - x = 3^{x+15} + x + 15$ (1)

Xét hàm số: $f(t) = 3^t + t, \forall t \in \mathbb{R}$.

Khi đó $f'(t) = 3^t \ln 3 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Do đó hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó phương trình (1) $\Leftrightarrow f(x^2 - x) = f(x + 15) \Leftrightarrow x^2 - x = x + 15 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 5 \end{cases}$.

Vậy $x = -3, x = 5$ là của phương trình.

Ví dụ 5.7.3

Phương trình $(x-1).2^x = x+1$ có bao nhiêu nghiệm thực

A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Vì $x=1$ không là nghiệm của phương trình nên ta có $(x-1).2^x = x+1 \Leftrightarrow 2^x = \frac{x+1}{x-1}$

Hàm số $y = 2^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$,

Hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ nghịch biến trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Do đó phương trình đã cho có hai nghiệm.

Ví dụ 5.7.3

Phương trình $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^x + (\sqrt{3}+\sqrt{2})^x = (\sqrt{10})^x$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực?

A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

$$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^x + (\sqrt{3}+\sqrt{2})^x = (\sqrt{10})^x \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{10}}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{10}}\right)^x = 1$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{10}}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{10}}\right)^x$$

Ta có: $f(2) = 1$

Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ do các cơ số $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{10}} < 1; \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{10}} < 1$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 2$.

➤ Dạng 5.8. Phương trình chứa tham số

○ Để giải bài toán tìm tham số m trong phương trình mũ ta có hai cách phổ biến:

01

⇒ Cô lập được tham số m .

♦ Ta dùng đồ thị hàm số để biện luận số nghiệm (bài toán tương giao).

02

⇒ Không cô lập được tham số m và có liên quan đến Vi-ét.

♦ Đặt ẩn phụ đưa về phương trình bậc hai/bậc ba.

♦ Kết hợp định lý Vi-ét để giải quyết yêu cầu bài toán

➤ Ví dụ 5.8.1

Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình

$$16^x - 2 \cdot 12^x + (m-2) \cdot 9^x = 0 \text{ có nghiệm dương?}$$

A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

Phương trình $16^x - 2 \cdot 12^x + (m-2) \cdot 9^x = 0$ có nghiệm $\forall x \in (0; +\infty)$

Phương trình tương đương $\left(\frac{4}{3}\right)^{2x} - 2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^x + (m-2) = 0$ (*) có nghiệm $\forall x \in (0; +\infty)$

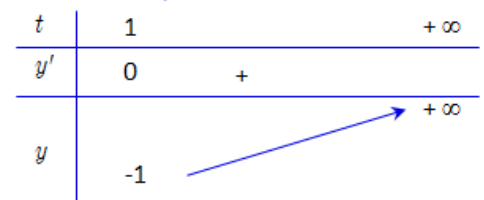
Đặt $t = \left(\frac{4}{3}\right)^x, t \in (1; +\infty)$

(*) $\Rightarrow t^2 - 2t + (m-2) = 0, \forall t \in (1; +\infty)$

$\Leftrightarrow t^2 - 2t = 2 - m, \forall t \in (1; +\infty)$

Xét $y = t^2 - 2t$

Phương trình có nghiệm $\forall t \in (1; +\infty)$ khi $2 - m > -1 \Leftrightarrow m < 3$



➤ Ví dụ 5.8.2

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$$9^{\sqrt{4x-x^2}} - 4 \cdot 3^{\sqrt{4x-x^2}} + 2m - 1 = 0 \text{ có nghiệm?}$$

A. 27.

B. 25.

C. 23.

D. 24.

Lời giải

Chọn B

ĐKXĐ: $x \in [0; 4]$.

Đặt $t = \sqrt{4x-x^2}$ với $x \in [0; 4]$ thì $t \in [0; 2]$

Đặt $u = 3^t$ với $t \in [0; 2]$ thì $u \in [1; 9]$

Khi đó, tìm m để phương trình $u^2 - 4u + 2m - 1 = 0$ có nghiệm thuộc đoạn $[1; 9]$.

$\Leftrightarrow 2m = -u^2 + 4u + 1$, với $u \in [1; 9]$

Xét hàm số $f(u) = -u^2 + 4u + 1 \rightarrow f'(u) = -2u + 4 = 0 \Leftrightarrow u = 2$.

Ta có, $f(1) = 4, f(2) = 5, f(9) = -44$.

Do đó, phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-44 \leq 2m \leq 5 \Leftrightarrow -22 \leq m \leq \frac{5}{2}$.

Vậy có 25 số nguyên của tham số m .

☞ Ví dụ 5.8.3

Gọi $(a; b)$ là tập các giá trị của tham số m để phương trình $2e^{2x} - 8e^x - m = 0$ có đúng hai nghiệm thuộc khoảng $(0; \ln 5)$. Tổng $a + b$ là

A. 2.

B. 4.

C. -6.

D. -14.

Lời giải

Chọn D

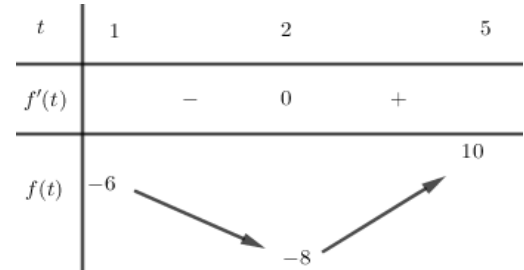
Đặt $t = e^x$; $x \in (0; \ln 5)$ tương ứng $t \in (1; 5)$.

Phương trình thành $2t^2 - 8t = m$.

Xét $f(t) = 2t^2 - 8t$ với $t \in (1; 5)$ có $f'(t) = 4t - 8$

Phương trình đã cho có 2 nghiệm pb thuộc $(0; \ln 5)$

Khi $f(t) = m$ có hai nghiệm $t \in (1; 5) \Leftrightarrow -8 < m < -6$



☞ Ví dụ 5.8.4

Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $25^x - m \cdot 5^{x+1} + 7m^2 - 7 = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Hỏi S có bao nhiêu phần tử.

A. 7.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Xét $25^x - m \cdot 5^{x+1} + 7m^2 - 7 = 0$ (1). Đặt $t = 5^x$ ($t > 0$). (1) $\Leftrightarrow t^2 - 5mt + 7m^2 - 7 = 0$ (2).

YCBT $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt $t_1, t_2 > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25m^2 - 4(7m^2 - 7) > 0 \\ 5m > 0 \\ 7m^2 - 7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < \frac{2\sqrt{21}}{3}.$$

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{2; 3\}$. Vậy có 2 giá trị nguyên của tham số m .

☞ Ví dụ 5.8.5

Gọi S là tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m^2 - 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Hỏi S có bao nhiêu phần tử.

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

$4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow 4^x - 2m \cdot 2^x + 2m^2 - 5 = 0$ (1)

Đặt $t = 2^x$, $t > 0$. Phương trình (1) thành: $t^2 - 2mt + 2m^2 - 5 = 0$ (2)

YCBT $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m^2 + 5 > 0 \\ 2m > 0 \\ 2m^2 - 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{5} < m < \sqrt{5} \\ m > 0 \\ m < -\sqrt{\frac{5}{2}} \text{ hoặc } m > \sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{10}}{2} < m < \sqrt{5}.$$

Do m nguyên nên $m = 2$. Vậy S chỉ có một phần tử

Chương 02

LŨY THỪA - MŨ - LOGARIT

Chủ đề 06

PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

A. LÝ THUYẾT CHUNG.

☞ Phương trình logarit cơ bản: $\log_a f(x) = b$ ($a > 0, a \neq 1$).

☞ **Lưu ý:** khi giải phương trình logarit cần phải có điều kiện để logarit tồn tại.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

☞ Dạng 6.1. Phương trình logarit cơ bản

☞ Giải phương trình logarit cơ bản: $\log_a x = b$

☞ Khi đó $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$ ($a > 0, a \neq 1$)

☞ Ví dụ 6.1.1

☞ Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_4(x-2) = 2$.

A. $S = \{16\}$.

B. $S = \{18\}$.

C. $S = \{10\}$.

D. $S = \{14\}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \log_4(x-2) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 > 0 \\ \log_4(x-2) = \log_4 4^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x-2 = 4^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x = 18 \end{cases} \Leftrightarrow x = 18.$$

☞ Ví dụ 6.1.2

☞ Phương trình $\log_2|x-1| = 3$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$.

$$\text{Phương trình tương đương với } \begin{cases} x-1=8 \\ x-1=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9 \\ x=-7 \end{cases}$$

☞ Ví dụ 6.1.3

☞ Phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x^2-2)^2 = 8$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 8.

Lời giải

Chọn B

$$\log_{\sqrt{2}}(x^2-2)^2 = 8 \quad (1)$$

$$\Rightarrow \text{ĐK: } x^2-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm\sqrt{2}$$

$$(1) \Rightarrow (x^2-2)^2 = (\sqrt{2})^8 \Leftrightarrow (x^2-2)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=4 \\ x^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \vee x=2 \\ x=0. \end{cases}$$

Dạng 6.2. Đưa về cùng cơ số

Cho $1 \neq a > 0$. Với điều kiện các biểu thức $f(x)$ và $g(x)$ xác định, ta thường đưa các phương trình logarit về các dạng cơ bản sau:

Loại 1: $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = a^b \end{cases}$

Loại 2: $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$

Ví dụ 6.2.1

Phương trình $\ln(x+1) + \ln(x+3) = \ln(x+7)$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0. B. 2. C. 1. D. 4

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $x > -1$, phương trình $\Leftrightarrow (x+1)(x+3) = x+7 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -4 \end{cases}$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm của phương trình là $x=1$.

Ví dụ 6.2.2

Giải phương trình $2\log_2(x^2 - x - 1) = \log_{\sqrt{2}}(x-1)$.

A. vô nghiệm. B. $x=2$. C. $x=0, x=2$. D. $x=3$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình $\Leftrightarrow \log_2(x^2 - x - 1) = \log_2(x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ x^2 - x - 1 = x-1 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$.

Ví dụ 6.2.3

Số nghiệm của phương trình $\log_4(x+12) \cdot \log_x 2 = 1$ là:

A. 0. B. 2. C. 3. D. 1

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $0 < x \neq 1$

$\log_4(x+12) \cdot \log_x 2 = 1 \Leftrightarrow \log_2(x+12) = \log_2 x^2 \Leftrightarrow -x^2 + x + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \text{ (L)} \\ x = 4 \text{ (N)} \end{cases}$

Ví dụ 6.2.4

Tập nghiệm của phương trình $\log_3(x+4) + 2\log_9(14-x) = 4$ là

A. $S = \{5\}$. B. $S = \{\pm 5\}$. C. $S = \{-5\}$. D. $S = \{\emptyset\}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $-4 < x < 14$.

Ta có: $\log_3(x+4) + 2\log_9(14-x) = 4$

$\Leftrightarrow \log_3(x+4) + \log_3(14-x) = 4 \Leftrightarrow \log_3(x+4)(14-x) = 4 \Leftrightarrow -x^2 + 10x + 56 = 3^4 \Leftrightarrow x = 5$.

So với điều kiện ta được $S = \{5\}$.

Dạng 6.3. Mũ hóa

Với điều kiện các biểu thức $f(x)$ và $g(x)$ xác định, ta thường đưa các phương trình logarit về các dạng cơ bản sau:

$$\log_a f(x) = g(x) \quad (0 < a \neq 1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = a^{g(x)} \end{cases}$$

Ví dụ 6.3.1

Tập nghiệm của phương trình $\log_2(5^{x+1} - 25^x) = 2$ là:

A. $S = \{1\}$.

B. $S = \{\log_3 5\}$.

C. $S = \left\{0; \frac{1}{\log_4 5}\right\}$.

D. $S = \left\{\frac{1}{\log_5 4}\right\}$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $5^{x+1} - 25^x > 0$.

$$\log_2(5^{x+1} - 25^x) = 2 \Leftrightarrow 5^{x+1} - 25^x = 4 \Leftrightarrow 5^{2x} - 5 \cdot 5^x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x = 1 \\ 5^x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \log_5 4 \end{cases}.$$

Kết hợp với điều kiện, ta được tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{0; \log_5 4\}$.

Ví dụ 6.3.2

Số nghiệm của phương trình $\log(25^x - 2^{2x+1}) = x$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $25^x - 2^{2x+1} > 0$.

$$\log(25^x - 2^{2x+1}) = x$$

$$\Leftrightarrow 25^x - 2^{2x+1} = 10^x$$

$$\Leftrightarrow 25^x - 2 \cdot 4^x = 10^x \Leftrightarrow 1 - 2\left(\frac{4}{25}\right)^x - \left(\frac{10}{25}\right)^x = 0 \Leftrightarrow 2\left(\frac{2}{5}\right)^{2x} + \left(\frac{2}{5}\right)^x - 1 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Đặt } \left(\frac{2}{5}\right)^x = t \quad (t > 0). \text{ Khi đó } (*) \text{ trở thành } 2t^2 + t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = \frac{1}{2} \text{ (thỏa)} \end{cases}.$$

$$t = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \log_{\frac{2}{5}} \frac{1}{2} = \log_{\frac{5}{2}} 2.$$

Kết hợp với điều kiện, ta được tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \left\{\log_{\frac{5}{2}} 2\right\}$.

➤ Dạng 6.4. Đặt ẩn phụ dễ thấy

○ Giải phương trình $f(\log_a g(x)) = 0, (0 < a \neq 1)$.

☑ **Bước 01.** Đặt $t = \log_a g(x)$ (*)

☑ **Bước 02.** Tìm điều kiện của t (nếu có)

☑ **Bước 03.** Đưa về giải phương trình $f(t) = 0$ đã biết cách giải.

☑ **Bước 04.** Thay vào (*) để tìm x .

➤ Ví dụ 6.4.1

Giải phương trình $\log_3^2 x - 4\log_3 x + 3 = 0$.

A. $S = \{1\}$.

B. $S = \{27\}$.

C. $S = \{3; 27\}$.

D. $S = \{3\}$

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x > 0$. Đặt $\log_3 x = t$.

$$PT \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_3 x = 1 \\ \log_3 x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 27 \end{cases} \Rightarrow S = \{3; 27\}.$$

➤ Ví dụ 6.4.2

Số nghiệm của phương trình $\log_2 x - \log_x 64 = 1$ là

A. 0.

B. 3.

C. 2.

D. 1

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $0 < x \neq 1$.

Phương trình $\Leftrightarrow \log_2 x - 6\log_x 2 = 1$. Đặt $t = \log_2 x, (t \neq 0)$

$$PT \Leftrightarrow t - \frac{6}{t} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - t - 6 = 0 \\ t \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_2 x = 3 \\ \log_2 x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

Kết hợp điều kiện, suy ra phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = \left\{8; \frac{1}{4}\right\}$.

➤ Ví dụ 6.4.3

Tích các nghiệm phương trình $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 5 = 0$ là

A. 0.

B. 3.

C. 2.

D. 1

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x > 0$. Đặt $\sqrt{\log_3^2 x + 1} = t, (t \geq 1)$.

$$PT \Leftrightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2(N) \\ t = -3(L) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\log_3^2 x + 1} = 2 \Leftrightarrow \log_3^2 x + 1 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = \sqrt{3} \\ \log_3 x = -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3^{\sqrt{3}} \\ x = 3^{-\sqrt{3}} \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện, suy ra phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = \{3^{\sqrt{3}}; 3^{-\sqrt{3}}\}$.

➤ Dạng 6.5. Phương pháp hàm số

❑ **Định lý.** Nếu hàm số $y = f(x)$ là hàm số liên tục và đồng biến trên $(a; b)$, $y = g(x)$ là hàm số liên tục và nghịch biến trên $(a; b)$ thì phương trình $f(x) = g(x)$ có tối đa một nghiệm trên $(a; b)$.

○ Phương pháp làm như sau:

01

- ⇒ Biến đổi phương trình đã cho về dạng $f(x) = k$, với k là hằng số
- ♦ Chứng minh $f(x)$ là hàm đồng biến (nghịch biến) trên tập xác định.
 - ♦ Tìm x_0 sao cho $f(x_0) = k$
 - ♦ Kết luận x_0 là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x) = k$.

02

- ⇒ Biến đổi phương trình đã cho về dạng $f(x) = g(x)$, với D_1, D_2 lần lượt là tập xác định của hai hàm số $f(x), g(x)$
- ♦ Chứng minh $f(x)$ là hàm đồng biến và $g(x)$ nghịch biến trên tập $D_1 \cap D_2$ (hay ngược lại)
 - ♦ Tìm x_0 sao cho $f(x_0) = g(x_0)$
 - ♦ Kết luận x_0 là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x) = g(x)$.

03

- ⇒ Biến đổi phương trình đã cho về dạng $f(u) = f(v)$, với hàm số $f(t)$ là hàm đồng biến (hay nghịch biến).
- ♦ Phương trình $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$.

✍ **Lưu ý:**

- ① Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là hàm đồng biến (nghịch biến) trên $(a; b)$ thì $f(x) + g(x)$ cũng là hàm đồng biến (nghịch biến) trên $(a; b)$.
- ② Hàm số $y = a^x$ đồng biến khi $a > 1$ và nghịch biến khi $0 < a < 1$.

☞ **Ví dụ 6.5.1**

Phương trình $\log_2(x-2) = \log_3(x-1)$ có bao nhiêu nghiệm?
A. 1. B. 2. C. 3. D. 4

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $\begin{cases} x-1 > 0 \\ x-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$. Đặt $\log_2(x-2) = \log_3(x-1) = t$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2 = 2^t \\ x-1 = 3^t \end{cases} \Rightarrow 3^t - 2^t = 1 \Leftrightarrow 3^t = 1 + 2^t \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^t + \left(\frac{2}{3}\right)^t = 1 \quad (*)$$

Dễ thấy $t=1$ là một nghiệm của $(*)$.

Xét $f(t) = \left(\frac{1}{3}\right)^t + \left(\frac{2}{3}\right)^t \Rightarrow f'(t) = \left(\frac{1}{3}\right)^t \ln \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^t \ln \frac{2}{3} < 0, \rightarrow f(t)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$,

$g(t) = 1$ là hàm hằng $\rightarrow (*)$ có một nghiệm duy nhất $t=1 \Rightarrow x=4$.

Kết hợp với điều kiện, ta được nghiệm của phương trình đã cho là $x=4$.

☞ Ví dụ 6.5.2

Giải phương trình $\log_3(x+2) + \log_7(3x+4) = 2$.

A. $x=5$.

B. $x=1$

C. $x=3$.

D. $x=-1$

Lời giải

Chọn B

Điều kiện của phương trình là $\begin{cases} x > -2 \\ x > -\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x > -\frac{4}{3}$.

Phương trình có một nghiệm $x=1$

Xét $f(x) = \log_3(x+2) + \log_7(3x+4)$ trên $\left(-\frac{4}{3}; +\infty\right)$

Ta có : $f'(x) = \frac{1}{(x+2)\ln 3} + \frac{3}{(3x+4)\ln 7} > 0$.

$\rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\left(-\frac{4}{3}; +\infty\right)$; $g(x) = 2$ là hàm hằng.

Nên phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất $x=1$.

☞ Ví dụ 6.5.3

Giải phương trình $\log_2(x^2 - x - 6) + x = \log_2(x+2) + 4$.

A. $x = \frac{5}{2}$.

B. $x = -1$

C. $x = 4$.

D. $x = 3$

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - x - 6 > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3$.

PT $\Leftrightarrow \log_2(x^2 - x - 6) - \log_2(x+2) = 4 - x$

$\Leftrightarrow \log_2 \frac{x^2 - x - 6}{x+2} = 4 - x \Leftrightarrow \log_2(x-3) + x = 4$ (2).

Vì $\log_2(4-3) + 4 = 4$ nên phương trình (2) có một nghiệm $x = 4 \in (3; +\infty)$.

Xét hàm số $f(x) = \log_2(x-3) + x$,

Ta có $f'(x) = \frac{1}{(x-3)\ln 2} + 1 > 0, \forall x \in (3; +\infty)$ nên $f(x)$ đồng biến trên tập xác định.

Do đó phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất $x = 4$.

Dạng 6.6. Phương trình chứa tham số

Để giải bài toán tìm tham số m trong phương trình logarit ta có hai cách phổ biến:

01

⇒ Cô lập được tham số m .

♦ Ta dùng đồ thị hàm số để biện luận số nghiệm (bài toán tương giao).

02

⇒ Không cô lập được tham số m và có liên quan đến Vi-ét.

♦ Đặt ẩn phụ đưa về phương trình bậc hai/bậc ba.

♦ Kết hợp định lý Vi-ét để giải quyết yêu cầu bài toán

Ví dụ 6.6.1

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình

$$\log_{\sqrt{3}}^2 x - m \log_{\sqrt{3}} x + 1 = 0 \text{ có nghiệm duy nhất nhỏ hơn } 1.$$

A. $m = -2$.

B. $m = -1$.

C. $m = 2$.

D. $m = 1$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x > 0$. Vì phương trình có nghiệm nhỏ hơn 1 nên suy ra $0 < x < 1$.

Đặt $\log_{\sqrt{3}} x = t$, với $0 < x < 1 \Rightarrow t < 0$. Phương trình $\Leftrightarrow t^2 - mt + 1 = 0 \Leftrightarrow t + \frac{1}{t} = m$ (*).

Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất nhỏ hơn 1

$\Leftrightarrow$ (*) có nghiệm duy nhất trên $(-\infty; 0)$.

Xét $f(t) = t + \frac{1}{t}$ trên $(-\infty; 0)$, ta có: $f'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \notin (-\infty; 0) \\ t = -1 \in (-\infty; 0) \end{cases}$.

t	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$
$f(t)$	$+\infty$	-2	$+\infty$	

Dựa vào bảng biến thiên ta được $m = -2$ thỏa mãn đề bài toán.

Ví dụ 6.6.2

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình

$$\log_3^2 x - m \log_3 x + 2m - 7 = 0 \text{ có hai nghiệm } x_1, x_2 \text{ thỏa mãn } x_1 \cdot x_2 = 81.$$

A. $m = 12$.

B. $m = 0$.

C. $m = 2$.

D. $m = 4$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x > 0$. Giả sử phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 .

Đặt $t = \log_3 x$, phương trình $\Leftrightarrow t^2 - mt + 2m - 7 = 0$ (*).

Phương trình đã cho có 2 nghiệm $x_1, x_2 \Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm t_1, t_2

$$\Leftrightarrow m^2 - 8m + 28 > 0 \quad \forall m \in \mathbb{R}.$$

Theo Vi-et: $t_1 + t_2 = \log_3 x_1 + \log_3 x_2 = m \Leftrightarrow \log_3 (x_1 x_2) = m \Leftrightarrow \log_3 81 = m \Leftrightarrow 4 = m$ (thỏa).

Vậy với $m = 4$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 6.6.3

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log(mx) = 2\log(x+1)$ có nghiệm duy nhất.

- A. $\begin{cases} m = 4 \\ m < 0 \end{cases}$. B. $m > -1$. C. $m = 2$. D. $\begin{cases} m > 4 \\ m < 0 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x > -1$. Ta có

$$\log(mx) = 2\log(x+1) \Leftrightarrow mz = (x+1)^2 \Leftrightarrow m = \frac{(x+1)^2}{x} \quad (\text{vì } x=0 \text{ không thỏa}).$$

Xét $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x}$ trên $(-1; +\infty) \setminus \{0\}$. Ta có: $f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in (-1; +\infty) \\ x = -1 \notin (-1; +\infty) \end{cases}$.

x	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	0	$+\infty$	4	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m < 0 \end{cases}$.

Ví dụ 6.6.4

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình

$$\log_2 \frac{4^x - 1}{4^x + 1} - m = 0 \text{ có nghiệm.}$$

- A. $\begin{cases} m = 4 \\ m < 0 \end{cases}$. B. $m > -1$. C. $m = 2$. D. $\begin{cases} m > 4 \\ m < 0 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $4^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

Đặt $t = 4^x$, với $x > 0 \Rightarrow t > 1$. Phương trình trở thành $m = \log_2 \frac{t-1}{t+1}$ (*).

Xét $f(t) = \log_2 \frac{t-1}{t+1}$ trên $(1; +\infty)$. Ta có $f'(t) = \frac{2}{(t^2 - 1)\ln 2} > 0, \forall t > 1$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

t	1	$+\infty$
$f'(t)$		+
$f(t)$	$-\infty$	0

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m < 0$

Ví dụ 6.6.5

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình

$$(m-1)\log_{\frac{1}{2}}^2(x-2) - (m-5)\log_{\frac{1}{2}}(x-2) + m-1 = 0 \text{ có nghiệm thuộc } (2;4).$$

- A. $\begin{cases} m > 1 \\ m < -3 \end{cases}$. B. $-3 \leq m < \frac{7}{3}$. C. $-1 \leq m < 7$. D. $\begin{cases} m > 1 \\ m < 0 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$, do $2 < x < 4 \Rightarrow 0 < x-2 < 2 \Rightarrow t > -1$.

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow (m-1)t^2 - (m-5)t + m-1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{t^2 - 5t + 1}{t^2 - t + 1} (*)$$

Để phương trình đã cho có nghiệm thuộc $(2;4)$

$\Leftrightarrow (*)$ có nghiệm thuộc khoảng $(-1; +\infty)$.

$$\text{Xét } f(t) = \frac{t^2 - 5t + 1}{t^2 - t + 1}, \text{ với } t > -1. \text{ Ta có } f'(t) = \frac{4t^2 - 4}{(t^2 - t + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \in (-1; +\infty) \\ t = -1 \notin (-1; +\infty) \end{cases}$$

t	-1	1	$+\infty$
$f'(t)$		-	0
		-	+
$f(t)$	$\frac{7}{3}$	-3	1

Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra $-3 \leq m < \frac{7}{3}$.

Ví dụ 6.6.6

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình

$$\log_5[(m+1)x] = \log_{\sqrt{5}}(x+2) \text{ có nghiệm duy nhất.}$$

- A. $\begin{cases} m > 1 \\ m < -3 \end{cases}$. B. $1 \leq m < 3$. C. $\begin{cases} m < -1 \\ m = 7 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m < -1 \\ m = 1 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{PT} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)x = (x+2)^2 \\ x > -2 \end{cases} \quad (1). \text{ Do } x=0 \text{ không thỏa (1)} \rightarrow (1) \Leftrightarrow m = \frac{(x+2)^2}{x} - 1.$$

$$\text{Xét } f(x) = \frac{(x+2)^2}{x} - 1 \text{ trên } (-2; 0) \cup (0; +\infty) \text{ có: } f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

x	-2	0	2	$+\infty$
y'		-	0	+
		-	+	
y	-1	$+\infty$	7	$+\infty$

Từ vào bảng biến thiên, ta thấy $f(x) = m$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m = 7 \end{cases}$.

Chương 02

Chủ đề 07

LŨY THỪA - MŨ - LOGARIT

BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

A. LÝ THUYẾT CHUNG.

Dạng 01. $a^x > b \ (a > 0; a \neq 1).$	$b \leq 0$	Tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R}$.	
	$b > 0$	$a > 1$	$a^x > b \Leftrightarrow x > \log_a b.$
		$0 < a < 1$	$a^x > b \Leftrightarrow x < \log_a b.$
Dạng 02. $a^x < b \ (a > 0; a \neq 1).$	$b \leq 0$	Tập nghiệm của bất phương trình là $\emptyset$.	
	$b > 0$	$a > 1$	$a^x < b \Leftrightarrow x < \log_a b.$
		$0 < a < 1$	$a^x < b \Leftrightarrow x > \log_a b.$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

➤ Dạng 7.1. Bất phương trình mũ cơ bản

☞ Xem lại mục “Lý thuyết chung”

☞ Bất phương trình mũ cơ bản: $a^x > b \ (a > 0; a \neq 1)$. Chú ý đến cơ số.

☞ Ví dụ 7.1.1

Tập nghiệm của bất phương trình $3^x \geq 9$ là

A. $S = (2; +\infty)$. B. $S = [-2; +\infty)$. C. $S = [2; +\infty)$. D. $S = (-1; 2)$.

Lời giải

Chọn C

$3^x \geq 9 \Leftrightarrow x \geq \log_3 9 \Leftrightarrow x \geq 2$. Vậy tập nghiệm là $S = [2; +\infty)$.

☞ Ví dụ 7.1.2

Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 4$ là

A. $S = (-2; 2)$. B. $S = [-2; +\infty)$. C. $S = (0; +\infty)$. D. $S = (0; 1)$.

Lời giải

Chọn B

$\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 4 \Leftrightarrow x \geq \log_{\frac{1}{2}} 4 \Leftrightarrow x \geq -2$. Vậy tập nghiệm là $S = [-2; +\infty)$.

☞ Ví dụ 7.1.3

Tập nghiệm của bất phương trình $2^x > 3^{x+1}$ là

A. $(-\infty; \log_2 3]$. B. $\left(-\infty; \log_{\frac{2}{3}} 3\right)$. C. $\emptyset$. D. $(0; 1)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $2^x > 3^{x+1} \Leftrightarrow 2^x > 3 \cdot 3^x \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x > 3 \Leftrightarrow x < \log_{\frac{2}{3}} 3$.

➤ Dạng 7.2. Đưa về cùng cơ số

☞ Ta có hai chú ý như sau:

① Với $a > 1$, $a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$

② Với $0 < a < 1$, $a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$

☞ Ví dụ 7.2.1

|| Tìm tập nghiệm của bất phương trình: $5^{x^2+x} \leq 25^{x+1}$
A. $S = (-\infty; 1)$. **B.** $S = [-1; 2]$. **C.** $S = (-1; 2)$. **D.** $S = (-\infty; 0)$.

Lời giải

Chọn B

$$5^{x^2+x} \leq 25^{x+1} \Leftrightarrow 5^{x^2+x} \leq 5^{2x+2} \Leftrightarrow x^2+x \leq 2x+2 \Leftrightarrow x^2-x-2 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2 \rightarrow S = [-1; 2].$$

☞ Ví dụ 7.2.2

|| Tìm tập nghiệm của bất phương trình: $2^{x-1} > \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{x}}$
A. $S = (2; +\infty)$. **B.** $S = (-\infty; 0)$. **C.** $S = (0; +\infty)$. **D.** $S = (-\infty; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

$$2^{x-1} > \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x-1} > 2^{-\frac{4}{x}} \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > -\frac{4}{x} \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2-x+4}{x} > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0.$$

☞ Ví dụ 7.2.3

|| Tìm số nghiệm nguyên dương của bất phương trình $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-2x} \geq \frac{1}{125}$.
A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-2x} \geq \frac{1}{125} \Leftrightarrow x^2-2x \leq 3 \Leftrightarrow (x+1)(x-3) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$$

Vì phương trình tìm nghiệm nguyên dương nên các nghiệm là $x = \{1; 2; 3\}$.

☞ Ví dụ 7.2.4

|| Giải bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3x^2} < 3^{2x+1}$ ta được tập nghiệm:
A. $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$. **B.** $(1; +\infty)$. **C.** $\left(-\frac{1}{3}; 1\right)$. **D.** $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \left(\frac{1}{3}\right)^{-3x^2} < 3^{2x+1} \Leftrightarrow 3x^2 < 2x+1 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < x < 1.$$

➤ Dạng 7.3. Đặt ẩn phụ

○ Phương pháp đặt ẩn phụ ta thường sử dụng một số phương pháp sau:

Ở đây ta xét bất phương trình dạng $f(x) \geq 0$, các trường hợp khác tiến hành tương tự.

① Bất phương trình dạng $A_n a^{nx} + A_{n-1} a^{(n-1)x} + \dots + A_1 a^x + A_0 \geq 0$.

Đặt $t = a^x$ ($t > 0$), ta thu được bất phương trình dạng $A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \dots + A_1 t + A_0 \geq 0$.

② Bất phương trình dạng $Aa^{2x} + B(ab)^x + Cb^{2x} \geq 0$.

Chia cả hai vế cho b^{2x} rồi đặt $t = \left(\frac{a}{b}\right)^x$, $t > 0$, ta được $A.t^2 + B.t + C \geq 0$.

③ Bất phương trình dạng $Aa^{f(x)} + Bb^{g(x)} + C \geq 0$, trong đó $a^{f(x)} b^{g(x)} = k$.

Đặt $a^{f(x)} = t$ ($t > 0$) $\Rightarrow b^{g(x)} = k$, ta thu được bất phương trình mới $At + \frac{Bk}{t} + C \geq 0$.

☞ Ví dụ 7.3.1

Nghiệm của bất phương trình $e^x + e^{-x} < \frac{5}{2}$ là

A. $x < \frac{1}{2}$ hoặc $x > 2$.

B. $\frac{1}{2} < x < 2$.

C. $-\ln 2 < x < \ln 2$.

D. $x < -\ln 2$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } e^x + e^{-x} < \frac{5}{2} \Leftrightarrow e^x + \frac{1}{e^x} < \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2(e^x)^2 - 5e^x + 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < e^x < 2 \Leftrightarrow -\ln 2 < x < \ln 2.$$

☞ Ví dụ 7.3.2

Bất phương trình $9^x - 3^x - 6 < 0$ có tập nghiệm là

A. $(-\infty; 1)$.

B. $(-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$.

C. $(1; +\infty)$.

D. $(-2; 3)$.

Lời giải

Chọn D

$$9^x - 3^x - 6 < 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 - 3^x - 6 < 0 \Leftrightarrow -2 < 3^x < 3 \Leftrightarrow x < 1.$$

☞ Ví dụ 7.3.3

Tập hợp nghiệm của bất phương trình $3^{3x-2} + \frac{1}{27^x} \leq \frac{2}{3}$ là

A. $(0; 1)$.

B. $(1; 2)$.

C. $\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

D. $(2; 3)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } 3^{3x-2} + \frac{1}{27^x} \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{3^{3x}}{9} + \frac{1}{3^{3x}} \leq \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow (3^{3x})^2 - 6 \cdot 3^{3x} + 9 \leq 0 \Leftrightarrow (3^{3x} - 3)^2 \leq 0 \Leftrightarrow 3^{3x} - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$$

Dạng 7.4. Logarit hóa

○ Phương trình $a^{f(x)} > b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1, b > 0 \\ f(x) > \log_a b \end{cases}$.

○ Phương trình $a^{f(x)} > b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} > \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x) \cdot \log_a b$
hoặc $\log_b a^{f(x)} > \log_b b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \cdot \log_b a > g(x)$.

Ví dụ 7.4.1

Tìm tập S của bất phương trình: $3^x \cdot 5^{x^2} < 1$
A. $(-\log_5 3; 0]$. B. $[\log_3 5; 0)$. C. $(-\log_5 3; 0)$. D. $(\log_3 5; 0)$.

Lời giải

Chọn C

$$3^x \cdot 5^{x^2} < 1 \Leftrightarrow \log_5 (3^x \cdot 5^{x^2}) < 0 \Leftrightarrow x^2 + x \log_5 3 < 0 \Leftrightarrow -\log_5 3 < x < 0 \text{ nên } S = (-\log_5 3; 0).$$

Ví dụ 7.4.2

Tìm tập S của bất phương trình: $4^{\log_{0.5}(3x-1)} < \frac{1}{9}$
A. $(5; +\infty)$. B. $(\frac{4}{3}; +\infty)$. C. $(-\infty; 2)$. D. $(1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $3x - 1 > 0$.

$$\log_4 4^{\log_{0.5}(3x-1)} < \log_4 \frac{1}{9} \Leftrightarrow \log_{0.5}(3x-1) < \log_{0.5} 3 \Leftrightarrow 3x-1 > 3 \Leftrightarrow x > \frac{4}{3}.$$

Ví dụ 7.4.3

Giải bất phương trình: $27^{\frac{x-1}{x}} \cdot 2^x > 72$
A. $(-\log_2 3; 0) \cup (3; +\infty)$. B. $[1; 2)$.
C. $(-2; 2)$. D. $(-\frac{1}{2}; 2)$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $x \neq 0$.

$$\begin{aligned} \text{Bất phương trình } &\Leftrightarrow 3^{\frac{x-1}{x}} \cdot 2^x > 3^2 \cdot 2^3 \Leftrightarrow \frac{3^{\frac{x-1}{x}}}{3^2} > \frac{2^3}{2^x} \Leftrightarrow 3^{\frac{x-3}{x}} > 2^{3-x} \\ &\Leftrightarrow \log_3 3^{\frac{x-3}{x}} > \log_3 2^{3-x} \Leftrightarrow \frac{x-3}{x} > -(x-3) \log_3 2 \Leftrightarrow (x-3) \left(\frac{1}{x} + \log_3 2 \right) > 0. \end{aligned}$$

$$\text{Xét } (x-3) \left(\frac{1}{x} + \log_3 2 \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ -\log_3 2 = \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3(N) \\ x=-\log_2 3(N) \end{cases}.$$

x	$-\infty$	$-\log_2 3$	0	3	$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(-\log_2 3; 0) \cup (3; +\infty)$.

➤ Dạng 7.5. Chứa tham số

- Sử dụng PP giải BPT logarit kết hợp công thức, tính chất của mũ, lũy thừa, logarit.
- Khai thác điều kiện bài toán.
- Xử lý bài toán và chọn giá trị m thỏa ĐK bài toán (cách “mò”).

➤ Ví dụ 7.5.1

Cho bất phương trình: $9^x + (m-1) \cdot 3^x + m > 0$ (1). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình (1) nghiệm đúng $\forall x > 1$.

A. $m \geq -\frac{3}{2}$.

B. $m > -\frac{3}{2}$.

C. $m > 3 + 2\sqrt{2}$.

D. $m \geq 3 + 2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = 3^x$. Vì $x > 1 \Rightarrow t > 3$

Bất phương trình $t^2 + (m-1)t + m > 0 \quad \forall t \geq 3 \Leftrightarrow \frac{t^2 - t}{t+1} > -m$ nghiệm đúng $\forall t > 3$.

Xét $g(t) = t - 2 + \frac{2}{t+1}, \forall t > 3, g'(t) = 1 - \frac{2}{(t+1)^2} > 0, \forall t > 3$. Hàm số đồng biến trên $[3; +\infty)$

và $g(3) = \frac{3}{2}$.

Yêu cầu bài toán tương đương $-m \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow m \geq -\frac{3}{2}$.

➤ Ví dụ 7.5.2

Tìm m để bất phương trình $m \cdot 9^x - (2m+1) \cdot 6^x + m \cdot 4^x \leq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 1)$.

A. $0 \leq m \leq 6$

B. $m \leq 6$

C. $m \geq 6$

D. $m \leq 0$

Lời giải

Chọn B

Ta có $m \cdot 9^x - (2m+1) \cdot 6^x + m \cdot 4^x \leq 0 \Leftrightarrow m \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^x - (2m+1) \left(\frac{3}{2}\right)^x + m \leq 0$.

Đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x$. Vì $x \in (0; 1)$ nên $1 < t < \frac{3}{2}$

Khi đó bất phương trình trở thành $m \cdot t^2 - (2m+1)t + m \leq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{t}{(t-1)^2}$.

Đặt $f(t) = \frac{t}{(t-1)^2} \rightarrow f'(t) = \frac{-t-1}{(t-1)^3}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -1$.

t	-1	1	$\frac{3}{2}$
$f'(t)$	+ 0 -		-
$f(t)$		$+\infty$	6

Dựa vào bảng biến thiên ta có $m \leq \lim_{t \rightarrow \frac{3}{2}} f(t) = 6$.

Ví dụ 7.5.3

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình sau có tập nghiệm là $(-\infty; 0]$: $m2^{x+1} + (2m+1)(1-\sqrt{5})^x + (3+\sqrt{5})^x < 0$.

- A. $m \leq -\frac{1}{2}$ B. $m \leq \frac{1}{2}$ C. $m < \frac{1}{2}$ D. $m < -\frac{1}{2}$

Lời giải

Chọn D

Phương trình đã cho tương đương $2m + (2m+1)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^x + \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x < 0$ (1).

Đặt $t = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x > 0$, ta được:

$$2m + (2m+1)\frac{1}{t} + t < 0 \Leftrightarrow f(t) = t^2 + 2mt + 2m + 1 < 0 \quad (2)$$

BPT nghiệm đúng $\forall x \leq 0$ nên BPT có nghiệm $0 < t \leq 1$,

—→ Phương trình $f(t) = 0$ có 2 nghiệm t_1, t_2 thỏa $t_1 \leq 0 < 1 < t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(0) \leq 0 \\ f(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+1 \leq 0 \\ 4m+2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -0,5 \\ m < -0,5 \end{cases}. \text{ Vậy } m < -\frac{1}{2} \text{ thỏa Ycbt.}$$

Ví dụ 7.5.4

Tất cả các giá trị của m để bất phương trình $(3m+1)12^x + (2-m)6^x + 3^x < 0$ có nghiệm đúng $\forall x > 0$ là:

- A. $(-2; +\infty)$ B. $(-\infty; -2]$ C. $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$ D. $\left(-2; -\frac{1}{3}\right)$

Lời giải

Chọn D

Đặt $2^x = t$. Do $x > 0 \Rightarrow t > 1$.

Khi đó ta có: $(3m+1)t^2 + (2-m)t + 1 < 0, \forall t > 1$

$$\Leftrightarrow (3t^2 - t)m < -t^2 - 2t - 1 \quad \forall t > 1 \Leftrightarrow m < \frac{-t^2 - 2t - 1}{3t^2 - t} \quad \forall t > 1$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{-t^2 - 2t - 1}{3t^2 - t}$ trên $(1; +\infty) \Rightarrow f'(t) = \frac{7t^2 + 6t - 1}{(3t^2 - t)^2} > 0 \quad \forall t \in (1; +\infty)$

t	1	$+\infty$
$f'(t)$		+
$f(t)$	-2	$-\frac{1}{3}$

Do đó $m \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = -\frac{1}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Ghi chú:

Sử dụng $\begin{cases} + m \geq f(x) \forall x \in D \Leftrightarrow m \geq \max f(x) \forall x \in D \\ + m \leq f(x) \forall x \in D \Leftrightarrow m \leq \min f(x) \forall x \in D \end{cases}$

Chương 02

Chủ đề 08

LŨY THỪA - MŨ - LOGARIT

BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

A. LÝ THUYẾT CHUNG.

Dạng 01.	$a > 1$	$\log_a x > b \Leftrightarrow x > a^b$
$\log_a x > b \ (a > 0; a \neq 1).$	$0 < a < 1$	$\log_a x > b \Leftrightarrow x < a^b.$
Dạng 02.	$a > 1$	$\log_a x < b \Leftrightarrow x < a^b$
$\log_a x < b \ (a > 0; a \neq 1).$	$0 < a < 1$	$\log_a x < b \Leftrightarrow x > a^b.$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

➤ Dạng 8.1. Bất phương trình logarit cơ bản

○ Ta có hai chú ý sau:

$$\begin{aligned} \checkmark \log_a u < b &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < u < a^b & \text{khi } a > 0 \\ u > a^b & \text{khi } 0 < a < 1 \end{cases} \\ \checkmark \log_a u > b &\Leftrightarrow \begin{cases} u > a^b & \text{khi } a > 1 \\ 0 < u < a^b & \text{khi } 0 < a < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

➤ Ví dụ 8.1.1

Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) > -1$ là:

A. $\left(1; \frac{3}{2}\right).$ B. $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right).$ C. $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right).$ D. $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right).$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \log_{\frac{1}{2}}(2x-1) > -1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 < 2 \\ 2x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}.$$

➤ Ví dụ 8.1.2

Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{3}{4}}(2x-1) > 2$ là:

A. $\frac{1}{2} < x < \frac{25}{32}.$ B. $x > \frac{25}{32}.$ C. $x > \frac{1}{2}.$ D. $x < \frac{1}{2}.$

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $x > \frac{1}{2}$

$$\log_{\frac{3}{4}}(2x-1) > \log_{\frac{3}{4}} \frac{9}{16} \Leftrightarrow 2x-1 < \frac{9}{16} \Leftrightarrow x < \frac{25}{32}. \text{ Kết hợp với điều kiện ta được } \frac{1}{2} < x < \frac{25}{32}$$

➤ Dạng 8.2. Đưa về cùng cơ số

☞ Dùng biến đổi logarit để đưa về cùng cơ số $\log_a u < \log_a v \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < u < v & \text{ khi } a > 1 \\ u > v > 0 & \text{ khi } 0 < a < 1 \end{cases}$.

☞ Ví dụ 8.2.1

Bất phương trình $\log_{\frac{3}{4}}(2x+1) \geq \log_{\frac{3}{4}}(x+2)$ có tập nghiệm S là

A. $S = \left(-\frac{1}{2}; 1\right]$. B. $S = (-2; 1)$. C. $S = \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$. D. $S = \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$.

Lời giải

Chọn A

Bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow 0 < 2x+1 \leq x+2 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x \leq 1$.

Tập nghiệm là : $S = \left(-\frac{1}{2}; 1\right]$.

☞ Ví dụ 8.2.2

Xác định tập nghiệm S của bất phương trình $\ln x^2 > \ln(4x-4)$.

A. $S = (1; +\infty) \setminus \{2\}$. B. $S = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
C. $S = (2; +\infty)$. D. $S = (1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\ln x^2 > \ln(4x-4) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 4x-4 \\ 4x-4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x > 1 \end{cases}$

☞ Ví dụ 8.2.3

Tập nghiệm của bất phương trình $\log_4(2x^2+3x+1) > \log_2(2x+1)$ là:

A. $S = \left(\frac{1}{2}; 1\right)$ B. $S = \left(0; \frac{1}{2}\right)$ C. $S = \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$ D. $S = \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} 2x^2+3x+1 > 0 \\ 2x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \vee x > -\frac{1}{2} \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$.

Ta có: $\log_4(2x^2+3x+1) > \log_2(2x+1)$

$\Leftrightarrow \log_4(2x^2+3x+1) > \log_4(2x+1)^2$

$\Leftrightarrow 2x^2+3x+1 > 4x^2+4x+1 \Leftrightarrow 2x^2+x < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < 0$. (thỏa mãn điều kiện)

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

Dạng 8.3. Đặt ẩn phụ

○ Tìm một $\log_a f(x)$ chung, đặt làm ẩn phụ t để đưa bất phương trình về bất phương trình ẩn t giải bất phương trình tìm t sau đó tìm x .

★ **Chú ý:** Nếu đặt $t = \log_a x \Rightarrow \log_{\frac{1}{a}} x = -t, \log_{a^2} x = \frac{1}{2}t, \log_a^2 x = (\log_a x)^2 = t^2, \log_x a = \frac{1}{t}$.

Ví dụ 8.3.1

Bất phương trình $\log_{0,2}^2 x - 5\log_{0,2} x < -6$ có tập nghiệm là:

- A. $S = \left(\frac{1}{125}; \frac{1}{25}\right)$ B. $S = (2; 3)$. C. $S = \left(0; \frac{1}{25}\right)$. D. $S = (0; 3)$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x > 0$

$$\log_{0,2}^2 x - 5\log_{0,2} x < -6 \Leftrightarrow 2 < \log_{0,2} x < 3 \Leftrightarrow \frac{1}{125} < x < \frac{1}{25}$$

Ví dụ 8.3.2

Nghiệm nguyên nhỏ nhất của bất phương trình $\log_x 3 - \log_{\frac{x}{3}} 3 < 0$ là:

- A. $x = 3$ B. $x = 1$. C. $x = 2$. D. $x = 4$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x > 0; x \neq 1; x \neq 3$

$$\log_x 3 - \log_{\frac{x}{3}} 3 < 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{\log_3 x \cdot (\log_3 x - 1)} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x < 0 \\ \log_3 x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x > 3 \end{cases}$$

Ví dụ 8.3.3

Nếu đặt $t = \log_2 x$ thì bất phương trình

$$\log_2^4 x - \log_2^2 \left(\frac{x^3}{8}\right) + 9\log_2 \left(\frac{32}{x^2}\right) < 4\log_2^2(x) \text{ trở thành bất phương trình nào?}$$

- A. $t^4 + 13t^2 + 36 < 0$ B. $t^4 - 5t^2 + 9 < 0$.
C. $t^4 - 13t^2 + 36 < 0$. D. $t^4 - 13t^2 - 36 < 0$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x > 0$

$$\log_2^4 x - \log_2^2 \left(\frac{x^3}{8}\right) + 9\log_2 \left(\frac{32}{x^2}\right) < 4\log_2^2(x)$$

$$\Leftrightarrow \log_2^4 x - (3\log_2 x - 3)^2 + 9(5 - 2\log_2 x) - 4\log_2^2 x < 0 \Leftrightarrow \log_2^4 x - 13\log_2^2 x + 36 < 0$$

➤ **Dạng 8.4. Mũ hóa**

○ Với điều kiện các biểu thức $f(x)$ và $g(x)$ xác định, ta thường đưa các bất phương trình logarit về các dạng cơ bản sau:

$$\log_a f(x) > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) > a^{g(x)} \end{cases} \text{ khi } a > 1$$

$$\log_a f(x) > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < a^{g(x)} \end{cases} \text{ khi } 0 < a < 1$$

☞ **Ví dụ 8.4.1**

Bất phương trình $\log_x (\log_3 (9^x - 72)) \leq 1$ có tập nghiệm là:

A. $S = [\log_3 \sqrt{73}; 2]$.

B. $S = (\log_3 \sqrt{72}; 2]$.

C. $S = (\log_3 \sqrt{73}; 2]$.

D. $S = (-\infty; 2]$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $x > \log_3 \sqrt{73}$

$$\log_x (\log_3 (9^x - 72)) \leq 1 \Leftrightarrow \log_3 (9^x - 72) \leq x \Leftrightarrow 9^x - 3^x - 72 \leq 0 \Leftrightarrow 3^x \leq 9 \Leftrightarrow x \leq 2$$

☞ **Ví dụ 8.4.2**

Nghiệm nguyên lớn nhất của bất phương trình $\log_3 (4 \cdot 3^{x-1}) > 2x - 1$ là:

A. $x = 3$.

B. $x = 2$.

C. $x = 1$.

D. $x = -1$.

Lời giải

Chọn C

$$\log_3 (4 \cdot 3^{x-1}) > 2x - 1 \Leftrightarrow 4 \cdot 3^{x-1} > 3^{2x-1} \Leftrightarrow 3^{2x} - 4 \cdot 3^x < 0 \Leftrightarrow 0 < 3^x < 4 \Leftrightarrow x < \log_3 4$$

Dạng 8.5. Chứa tham số

- Sử dụng PP giải BPT logarit kết hợp công thức, tính chất của mũ, lũy thừa, logarit.
- Khai thác điều kiện bài toán.
- Xử lý bài toán và chọn giá trị m thỏa ĐK bài toán (cách “mò”).

Ví dụ 8.5.1

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2(5^x - 1) \leq m$ có nghiệm $x \geq 1$?

- A. $m \geq 2$. B. $m > 2$. C. $m \leq 2$. D. $m < 2$.

Lời giải

Chọn A

$$x \geq 1 \Leftrightarrow 5^x - 1 \geq 4 \Leftrightarrow \log_2(5^x - 1) \geq 2 \Leftrightarrow m \geq 2$$

Ví dụ 8.5.2

Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_3(x^2 + 4x + m) \geq 1$ nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$?

- A. $m > 7$. B. $m \geq 7$. C. $m < 4$. D. $4 < m \leq 7$.

Lời giải

Chọn B

$$\log_3(x^2 + 4x + m) \geq 1 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 + 4x + m - 3 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 7$$

Ví dụ 8.5.3

Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để $\log_{\frac{1}{5}}(mx - x^2) \leq \log_{\frac{1}{5}} 4$ vô nghiệm?

- A. $-4 \leq m \leq 4$. B. $\begin{cases} m > 4 \\ m < -4 \end{cases}$. C. $m < 4$. D. $-4 < m < 4$.

Lời giải

Chọn A

$$\log_{\frac{1}{5}}(mx - x^2) \leq \log_{\frac{1}{5}} 4 \Leftrightarrow mx - x^2 \geq 4 \Leftrightarrow x^2 - mx + 4 \leq 0$$

$$x^2 - mx + 4 \leq 0 \text{ vô nghiệm} \Leftrightarrow x^2 - mx + 4 > 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow -4 < m < 4$$

Ví dụ 8.5.4

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho khoảng $(2;3)$ thuộc tập nghiệm của bất phương trình $\log_5(x^2 + 1) > \log_5(x^2 + 4x + m) - 1$ (1).

- A. $m \in [-12;13]$. B. $m \in [12;13]$. C. $m \in [-13;12]$. D. $m \in [-13;-12]$.

Lời giải

Chọn A

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 > \frac{x^2 + 4x + m}{5} \\ x^2 + 4x + m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -x^2 - 4x = f(x) \\ m < 4x^2 - 4x + 5 = g(x) \end{cases}$$

$$\text{Hệ trên thỏa mãn } \forall x \in (2;3) \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \max_{2 < x < 3} f(x) = -12 \text{ khi } x = 2 \\ m \leq \min_{2 < x < 3} g(x) = 13 \text{ khi } x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow -12 \leq m \leq 13.$$

Ví dụ 8.5.5

|| Tìm m để bất phương trình $1 + \log_5(x^2 + 1) \geq \log_5(mx^2 + 4x + m)$ thỏa mãn $\forall x \in \mathbb{R}$
A. $-1 < m \leq 0$. **B.** $-1 < m < 0$. **C.** $2 < m \leq 3$. **D.** $2 < m < 3$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{BPT thỏa mãn } \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} mx^2 + 4x + m > 0 \\ 5(x^2 + 1) \geq mx^2 + 4x + m \end{cases} \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} mx^2 + 4x + m > 0 \\ (5-m)x^2 - 4x + 5-m \geq 0 \end{cases} \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 16-4m^2 < 0 \\ 5-m > 0 \\ 16-4(5-m)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < -2 \\ m > 2 \\ m < 5 \\ m \leq 3 \\ m \geq 7 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m \leq 3.$$

Ví dụ 8.5.6

|| Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình
 $\log_{0,02}(\log_2(3^x + 1)) > \log_{0,02} m$ có nghiệm với mọi $x \in (-\infty; 0)$
A. $0 < m < 1$. **B.** $m > 1$. **C.** $m < 2$. **D.** $m \geq 1$.

Lời giải

Chọn D

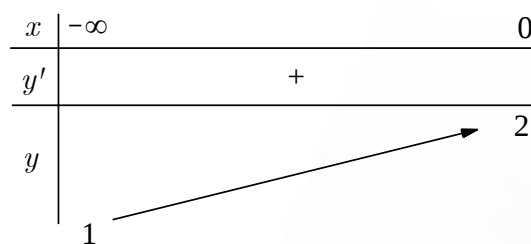
Đk: $x \in \mathbb{R}; m > 0$.

Ta có: $\log_{0,02}(\log_2(3^x + 1)) > \log_{0,02} m, \forall x \in (-\infty; 0)$.

$$\Leftrightarrow \log_2(3^x + 1) < m, \forall x \in (-\infty; 0).$$

$$\Leftrightarrow 3^x + 1 < 2^m, \forall x \in (-\infty; 0).$$

Xét hàm $f(x) = 3^x + 1$ trên $(-\infty; 0)$. Ta có $f'(x) = 3^x \cdot \ln 3 > 0, \forall x \in (-\infty; 0)$.



Để phương trình có nghiệm với mọi $x \in (-\infty; 0)$ ta phải có $2^m \geq 2 \Leftrightarrow m \geq 1$.

