

Câu 1: (2 điểm) Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + m$ (1)

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi $m = 1$
b) Tìm m để đồ thị hàm số đạt cực trị tại A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 4 (O là gốc tọa độ)

Câu 2: (2 điểm)

- a) Giải phương trình: $\sin 2x - \cos 2x = 2\sin x - 1$

- b) Tính tích phân: $I = \int_0^1 x^2(x-1)^2 dx$

Câu 3: (1 điểm)

- a) Từ một hộp đựng 4 viên bi đỏ và 5 viên bi xanh, chọn ngẫu nhiên hai viên bi. Tính xác suất để hai viên bi được chọn cùng màu.

- b) Giải phương trình: $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} - \left(\frac{1}{9}\right)^x = 2$.

Câu 4: (1 điểm) Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho điểm A(2;1;-1) và mặt phẳng (P): $x + 2y - 2z + 3 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua A và vuông góc với (P). Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng d sao cho $OM = \sqrt{3}$.

Câu 5 (1 điểm). Cho hình chóp SABCD có đáy là hình vuông, SA vuông góc với đáy, $SA = a$. Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAC) bằng 30° . Tính thể tích khối chóp SABCD và khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SBM), (M là trung điểm CD).

Câu 6 (1 điểm). Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm H(3;0) và trung điểm của BC là I(6; 1). Đường thẳng AH có phương trình $x + 2y - 3 = 0$. Gọi D, E lần lượt là chân đường cao kẻ từ B và C của tam giác ABC. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết phương trình đường thẳng DE là $x - 2 = 0$ và điểm D có tung độ dương.

Câu 7 (1 điểm)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2y^2 - 3y + 1 + \sqrt{y-1} = x^2 + \sqrt{x} + xy \\ \sqrt{2x+y} - \sqrt{-3x+2y+4} + 3x^2 - 14x - 8 = 0 \end{cases}$$

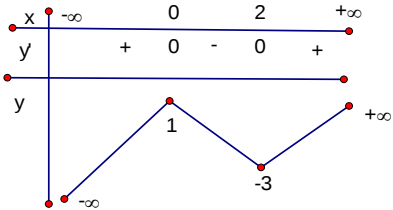
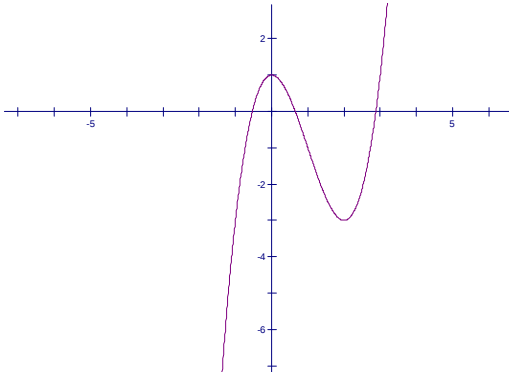
Câu 8 (1 điểm) Cho ba số không âm a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ac = 1$.

Chứng minh rằng:
$$\frac{2a}{a^2+1} + \frac{2b}{b^2+1} + \frac{c^2-1}{c^2+1} \leq \frac{3}{2}.$$

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm!

Họ và tên thí sinh:.....; Số báo danh:.....

Hướng dẫn giải và thang điểm

Câu	Hướng dẫn giải	Điểm
1a	Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ TXĐ $D = \mathbb{R}$ Sự biến thiên: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$; $y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 2$ BBT   Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$; Hàm số nghịch biến trên $(0; 2)$. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$; $y = 1$; đạt cực tiểu tại $x = 2$; $y = -3$ Đồ thị	0,5 0,5
1b	Ta có $y' = 3x^2 - 6mx \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}$ Với $m \neq 0$ hàm số có hai điểm cực trị $A(0; m); B(2m; -4m^3)$; $AB = \sqrt{4m^2(1 + 4m^4)}$ Phương trình đường thẳng AB: $2m^2x + y - m = 0$; Diện tích tam giác OAB: $S_{OAB} = \frac{1}{2} d(O; AB) AB = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{ m }{\sqrt{1 + 4m^4}} \sqrt{4m^2(1 + 4m^4)} = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2(TM)$	0,5 0,5
2a	$\sin 2x - \cos 2x = 2\sin x - 1 \Leftrightarrow \sin x(\sin x + \cos x - 1) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x + \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = k2\pi; x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$	0,5 0,5
2b	$I = \int_0^1 x^2(x^2 - 2x + 1)dx = \int_0^1 (x^4 - 2x^3 + x^2)dx$ $= (\frac{x^5}{5} - 2\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}) \Big _0^1 = \frac{1}{30}$	0,5 0,5
3.a	Không gian mẫu có: $\Omega = C_9^2 = 36$ Gọi A là biến cố lấy được hai viên bi cùng màu: $\Omega_A = C_4^2 + C_5^2 = 16$ Xác suất của biến cố: $P_A = \frac{ \Omega_A }{ \Omega } = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$	0,25 0,25
3.b	Đặt $t = (\frac{1}{3})^x (t > 0)$. Phương trình trở thành: $-t^2 + 3t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 1 \end{cases}$ Ta có $\begin{cases} (\frac{1}{3})^x = 2 \\ (\frac{1}{3})^x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_{1/3} 2 \\ x = 0 \end{cases}$	0,25 0,5
4	Phương trình đường thẳng d qua A và vuông góc với (P): $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-2}$ hoặc $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 1+2t \\ z = -1-2t \end{cases}$ Gọi $M(2+t; 1+2t; -1-2t)$; $OM = \sqrt{(2+t)^2 + (1+2t)^2 + (-1-2t)^2} = \sqrt{3} \Leftrightarrow 9t^2 + 12t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -\frac{1}{3} \end{cases}$ Vậy tọa độ M(1; -1; 1) hoặc $M(\frac{5}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{3})$	0,5 0,5

5	CM: $DB \perp (SAC) \Rightarrow$ hình chiếu vuông góc DS lên (SAC) là SO; Góc của SD và (SAC) là $\angle DSO = 30^\circ$. Đặt $DO = x$. Ta có $SO = x\sqrt{3}$ (O là giao của AC với BD) Từ $SO^2 = AO^2 + SA^2 \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = 2x^2 = a^2$. Thể tích khối chóp SABCD là $V = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} a^3$ Gọi N là trung điểm của AB $\Rightarrow DN \parallel BM$ Suy ra: $d(D; (SBM)) = d(N; (SBM)) = d(N; (SBM)) = \frac{1}{2} d(A; (SBM))$ Kẻ $AI \perp BM; AH \perp SM$. Từ đó CM được $AH \perp (SBM) \Rightarrow d(A; (SBM)) = AH$ Trong (ABCD): $S_{ABM} = S_{ABCD} - S_{ADM} - S_{BCM} = a^2/2$. Mà $S_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot AI \cdot BM$ suy ra $AI = 2/\sqrt{5} a$. Khi đó $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AI^2} + \frac{1}{SA^2} \Rightarrow AH = \frac{2}{3} a \Rightarrow d(D; (SBM)) = \frac{1}{3} a$	0,25 0,25 0,25 0,25
6	Gọi K là trung điểm AH. Tứ giác ADHE nội tiếp đường tròn tâm K và BCDE nội tiếp đường tròn tâm I Suy ra IK vuông góc DE $\Rightarrow$ PT đường thẳng IK: $y - 1 = 0$ Tọa độ K(1;1) $\Rightarrow A(-1;2)$. Gọi D(2; x) Ta có: $KA = KD$ $\Leftrightarrow 5 = 1 + (x-1)^2 \Leftrightarrow x = 3 \text{ hoặc } x = -1 \Rightarrow D(2;3)$ PT đường thẳng AC: $x - 3y + 7 = 0$; Phương trình BC: $2x - y - 11 = 0$ Tọa độ C(8;5) $\Rightarrow B(4;-3)$. Vậy A(-1;2) B(4;-3) C(8;5)	0,25 0,25 0,5
7	(1) $DK \geq 0; y \geq 1; -3x + 2y + 4 \geq 0$. Nhận thấy $x = 0; y = 1$ không là nghiệm của hệ Ta có: (1) $\Leftrightarrow \sqrt{y-1} - \sqrt{x} + (y-1)^2 - x^2 + y(y-1-x) = 0$ $\Leftrightarrow (y-1-x) \left(\frac{1}{\sqrt{y-1} + \sqrt{x}} + 2y-1+x \right) = 0 \Leftrightarrow y = x+1 \text{ (do } \frac{1}{\sqrt{y-1} + \sqrt{x}} + 2y-1+x > 0)$ Khi đó: (2) $\Leftrightarrow \sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{3x+1} - 4) + (1 - \sqrt{6-x}) + (x-5)(3x+1) = 0$ $\Leftrightarrow (x-5) \left(\frac{3}{\sqrt{3x+1} + 4} + \frac{1}{1 + \sqrt{6-x}} + 3x+1 \right) = 0 \Leftrightarrow x = 5 \Rightarrow y = 6$ Vậy hệ có nghiệm: $(x; y) = (5; 6)$	0,5 0,5
8	Từ gt: $ab + bc + ca = 1; \Rightarrow 1 + a^2 = a^2 + ab + bc + ca = (a+b)(a+c)$ Ta có: $\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} = \frac{a}{(a+b)(a+c)} + \frac{b}{(a+b)(b+c)} = \frac{1+ab}{(a+b)(a+c)(b+c)} = \frac{1+ab}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)} \cdot \sqrt{1+c^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}$ Suy ra: $VT \leq \frac{2}{\sqrt{1+c^2}} + \frac{c^2-1}{c^2+1} = f(c) \Rightarrow f'(c) = \frac{-2c(\sqrt{1+c^2}-2)}{(1+c^2)^2} \Rightarrow f'(c) = 0 \Leftrightarrow c = \sqrt{3}$ Từ đó ta CM được: $\max VT = \max f(c) = f(\sqrt{3}) = \frac{3}{2}$ khi $\begin{cases} c = \sqrt{3} \\ a = b \\ a^2 + 2\sqrt{3}a - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 2 - \sqrt{3} \\ c = \sqrt{3} \end{cases}$	0,5 0,25 0,25