

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi có 01 trang)

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1 (1,0 điểm). Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{3x-1}{2x-1}$.

Câu 2 (1,0 điểm). Tìm cực trị của hàm số $f(x) = x^4 - 2$.

Câu 3 (1,0 điểm).

a) Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 - 6z + 13 = 0$. Tính $|z_1 - z_2|$.

b) Giải phương trình $4.9^{x+1} - 13.6^{x+1} + 9.4^{x+1} = 0$.

Câu 4 (1,0 điểm). Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{1}{x\sqrt{3\ln x + 1}} dx$.

Câu 5 (1,0 điểm).

a) Chứng minh $\frac{\cos 3a + \cos a}{\sin 3a + \sin a} \cdot \tan 2a - 8 \sin^2 a \cdot \cos^2 a = \cos 4a$, với $a \neq k\frac{\pi}{4}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

b) Để tìm nguyên nhân làm cho cá chết hàng loạt ở bờ biển của các tỉnh miền Trung, người ta chọn ngẫu nhiên 4 mẫu nước biển trong số 6 mẫu chứa trong hộp A, 7 mẫu chứa trong hộp B và 8 mẫu chứa trong hộp C gửi đi phân tích. Tính xác suất để trong 4 mẫu được chọn có đủ mẫu của cả ba hộp A, B và C.

Câu 6 (1,0 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -1; 1)$, $B(-3; 0; 3)$ và đường

thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-2}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A và vuông góc với

đường thẳng d . Tìm tọa độ điểm M thuộc d sao cho tam giác MAB vuông tại A.

Câu 7 (1,0 điểm). Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là một tam giác đều cạnh bằng a , hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh BC và góc giữa đường thẳng $A'A$ với mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $(ACC'A')$.

Câu 8 (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (T) có phương trình $4x^2 + 4y^2 - 58x - 5y + 54 = 0$. Trên cạnh AB lấy điểm M (M khác với A, B) và trên cạnh AC lấy điểm N (N khác với A, C) sao cho $BM = CN$. Gọi D, E theo thứ tự là trung điểm của BC và MN . Đường thẳng DE cắt các đường thẳng AB, AC theo thứ tự tại P, Q . Tìm tọa độ các điểm A, B, C

biết $P\left(\frac{3}{2}; 1\right)$, $Q\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ và tung độ của A là một số nguyên.

Câu 9 (1,0 điểm).

a) Do nắng nóng kéo dài và nước biển xâm nhập nên người dân của một số tỉnh miền Tây thiếu nước ngọt sinh hoạt trầm trọng, trong đó có gia đình anh Nam. Vì vậy, anh Nam thuê khoan một giếng sâu 50 mét để lấy nước sinh hoạt và được hai cơ sở khoan giếng báo giá như sau: Cơ sở A, giá của mét khoan đầu tiên là 80.000 đồng và kể từ mét khoan thứ hai, giá của mỗi mét khoan sau tăng thêm 15.000 đồng so với giá của mét khoan ngay trước đó; cơ sở B, giá của mét khoan đầu tiên là 60.000 đồng và kể từ mét khoan thứ hai, giá của mỗi mét khoan sau tăng thêm 7% so với giá của mét khoan ngay trước đó. Anh Nam chọn cơ sở nào để thuê khoan giếng sao cho tiền thuê là thấp nhất?

b) Giải bất phương trình $9x^4 - 31x^3 + 34x^2 - 11x + 5 < 5\sqrt{x^3 + 1}$.

Câu 10 (1,0 điểm). Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$ và $a + b > 2c$. Tìm giá trị

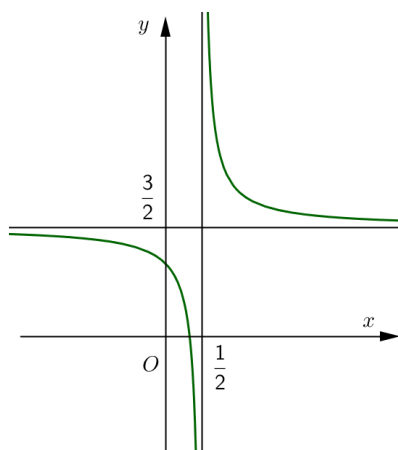
nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \frac{6\sqrt{15}}{25(a+b)}$.

-----HẾT-----

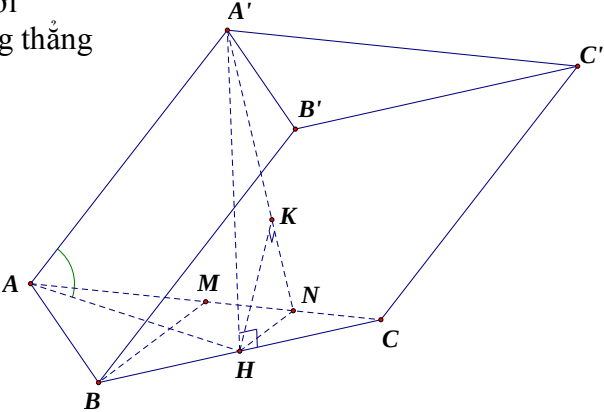
Ghi chú: Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

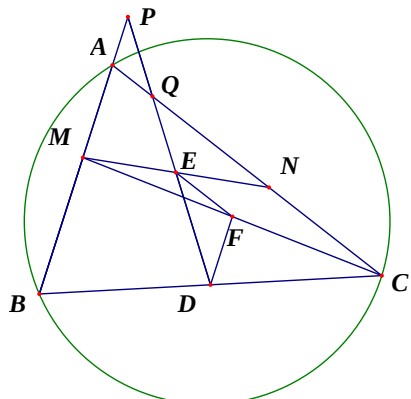
Họ và tên thí sinh.....Số báo danh.....

HƯỚNG DẪN CHẤM – MÔN TOÁN

Câu	Đáp án – cách giải	Điểm												
Câu 1 1,0 điểm	Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{3x - 1}{2x - 1}$	1,0 điểm												
	Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ Tiệm cận ngang: $y = \frac{3}{2}$ vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \frac{3}{2}$ Tiệm cận đứng: $x = \frac{1}{2}$ vì $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-} y = -\infty$.	0,25												
	$y' = -\frac{1}{(2x - 1)^2} < 0, \forall x \in D$.	0,25												
	Bảng biến thiên: <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td colspan="2">-</td><td>-</td></tr><tr><td>y</td><td>$\frac{3}{2}$</td><td>$+\infty$</td><td>$\frac{3}{2}$</td></tr></table> Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ và $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$	x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	y'	-		-	y	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	$\frac{3}{2}$	0,25
	x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$										
y'	-		-											
y	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	$\frac{3}{2}$											
Đồ thị: 	0,25													
Câu 2 1,0 điểm	Tìm cực trị của hàm số $f(x) = x^4 - 2$.	1,0 điểm												
	Tập xác định $\mathbb{R}$. Ta có $f'(x) = 4x^3$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.	0,25												
	Bảng biến thiên: <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$+\infty$</td><td>-2</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	0	$+\infty$	$f'(x)$	-	0	+	$f(x)$	$+\infty$	-2	$+\infty$	0,5
	x	$-\infty$	0	$+\infty$										
$f'(x)$	-	0	+											
$f(x)$	$+\infty$	-2	$+\infty$											
Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0, y_{CT} = -2$.	0,25													

Câu 3 1,0 điểm	a) Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 - 6z + 13 = 0$. Tính $ z_1 - z_2 $.	0,5 điểm
	Ta có: $z^2 - 6z + 13 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3 + 2i \\ z = 3 - 2i \end{cases}$	0,25
	Do đó $ z_1 - z_2 = 4$.	0,25
	b) Giải phương trình $4.9^{x+1} - 13.6^{x+1} + 9.4^{x+1} = 0(*)$	0,5 điểm
	$(*) \Leftrightarrow 4\left(\frac{3}{2}\right)^{2(x+1)} - 13\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} + 9 = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = 1 \\ \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = \frac{9}{4} \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$	0,25
Câu 4 1,0 điểm	Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{1}{x\sqrt{3\ln x + 1}} dx$	1,0 điểm
	Đặt $t = \sqrt{3\ln x + 1} \Rightarrow \frac{2}{3} t dt = \frac{1}{x} dx$	0,25
	$x = 1 \Rightarrow t = 1; x = e \Rightarrow t = 2$.	0,25
	Khi đó $I = \frac{2}{3} \int_1^2 dt$	0,25
	$= \frac{2}{3} t \Big _1^2 = \frac{2}{3}$	0,25
Câu 5 1,0 điểm	a) Chứng minh $\frac{\cos 3a + \cos a}{\sin 3a + \sin a} \cdot \tan 2a - 8 \sin^2 a \cdot \cos^2 a = \cos 4a$, với $a \neq k \frac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z})$.	0,5 điểm
	Ta có	
	$\frac{\cos 3a + \cos a}{\sin 3a + \sin a} \cdot \tan 2a - 8 \sin^2 a \cdot \cos^2 a = \frac{2 \cos 2a \cdot \cos a}{2 \sin 2a \cdot \cos a} \cdot \frac{\sin 2a}{\cos 2a} - 8 \sin^2 a \cdot \cos^2 a$	0,25
	$= 1 - 2 \sin^2 2a = \cos 4a$ (đpcm)	0,25
	b) Để tìm nguyên nhân làm cho cá chết hàng loạt ở bờ biển của các tỉnh miền Trung, người ta chọn ngẫu nhiên 4 mẫu nước biển trong số 6 mẫu chứa trong hộp A, 7 mẫu chứa trong hộp B và 8 mẫu chứa trong hộp C gửi đi phân tích. Tính xác suất để trong 4 mẫu được chọn có đủ mẫu của cả ba hộp A, B và C.	0,5 điểm
	Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{21}^4 = 5985$	0,25
	Gọi X là biến cố “chọn được 4 mẫu nước biển có đủ mẫu của cả ba hộp”. Suy ra $n(X) = C_6^1 \cdot C_7^1 \cdot C_8^2 + C_6^2 \cdot C_7^2 \cdot C_8^1 + C_6^3 \cdot C_7^1 \cdot C_8^1 = 3024$ Xác suất cần tính: $p = \frac{3024}{5985} = \frac{48}{95}$.	0,25
	Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(2; -1; 1)$, $B(-3; 0; 3)$ và	1,0 điểm

Câu 6 1,0 điểm	đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-2}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A và vuông góc với đường thẳng d. Tìm tọa độ điểm M thuộc d sao cho tam giác MAB vuông tại A.	
	Mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng d nên nhận vectơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (1; -3; 2)$ làm vectơ pháp tuyến.	0,25
	Phương trình của mặt phẳng (P) là $(x-2) - 3(y+1) + 2(z-1) = 0$ Hay $x - 3y + 2z - 7 = 0$.	0,25
	Vì $M \in d$ nên $M(2+t; 1-3t; 2+2t)$.	0,25
	Tam giác MAB vuông tại A nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ $\Leftrightarrow -5t + 2 - 3t + 2(1+2t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$ Vậy $M(3; -2; 4)$.	0,25
Câu 7 1,0 điểm	Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là một tam giác đều cạnh bằng a, hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh BC và góc giữa đường thẳng A'A với mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $(ACC'A')$.	1,0 điểm
	Ta có góc giữa đường thẳng A'A với mặt phẳng (ABC) là góc giữa đường thẳng A'A với đường thẳng AH. Suy ra $\angle A'AH = 60^\circ$ Do đó $A'H = AH \cdot \tan 60^\circ = \frac{3a}{2}$	0,25
		
	Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$: $V = S_{ABC} \cdot A'H = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3a}{2} = \frac{3a^3 \sqrt{3}}{8}$.	0,25
	Trong mp(ABC) dựng $HN \perp AC$ tại N. Suy ra $HN \parallel BM$ (M là trung điểm của AC) và $HN = \frac{1}{2} BM = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. Trong mp(A'HN) dựng $HK \perp A'N$ tại K. Khi đó ta có $\begin{cases} AC \perp HN \\ AC \perp A'H \end{cases} \Rightarrow AC \perp (A'HN) \Rightarrow AC \perp HK$ Suy ra $HK \perp (ACC'A')$. Do đó $d(H, (ACC'A')) = HK$.	0,25
	Ta có $\frac{d(B, (ACC'A'))}{d(H, (ACC'A'))} = \frac{CB}{CH} = 2$. Suy ra $d(B, (ACC'A')) = 2d(H, (ACC'A'))$ $= 2HK = 2 \cdot \frac{HN \cdot A'H}{\sqrt{HN^2 + A'H^2}} = 2 \cdot \frac{\frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3a}{2}}{\sqrt{\frac{3a^2}{16} + \frac{9a^2}{4}}} = \frac{3a\sqrt{13}}{13}$	0,25
	Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (T) có	1,0 điểm

Câu 8 1,0 điểm	phương trình $4x^2 + 4y^2 - 58x - 5y + 54 = 0$. Trên cạnh AB lấy điểm M (M khác với A, B) và trên cạnh AC lấy điểm N (N khác với A, C) sao cho $BM = CN$. Gọi D, E theo thứ tự là trung điểm của BC và MN. Đường thẳng DE cắt các đường thẳng AB, AC theo thứ tự tại P, Q. Tìm tọa độ các điểm A, B, C biết $P\left(\frac{3}{2}; 1\right)$, $Q\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ và tung độ của A là một số nguyên.	
		
	Gọi F là trung điểm của MC. Khi đó DF, EF lần lượt là đường trung bình của các tam giác BCM và CMN. Mà theo giả thiết $BM = CN$ nên suy ra $DF = FE$ hay $\triangle DEF$ cân tại F. Mặt khác ta có: $\triangle FDE \sim \triangle APQ$ (g.g) nên $\triangle APQ$ cân tại A. Vậy A thuộc đường trung trực đoạn PQ.	0,25
	Ta có phương trình đường trung trực của PQ: $x = 1$ Suy ra tọa độ A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 4x^2 + 4y^2 - 58x - 5y + 54 = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ y = \frac{5}{4} \end{cases}$ Do $y_A \in \mathbb{Z}$ nên ta chỉ nhận $A(1; 0)$	0,25
	AB đi qua $A(1; 0)$ và $P\left(\frac{3}{2}; 1\right)$ nên phương trình AB: $2x - y - 2 = 0$ AC đi qua $A(1; 0)$ và $Q\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ nên phương trình AC: $2x + y - 2 = 0$ Suy ra tọa độ B là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 4x^2 + 4y^2 - 58x - 5y + 54 = 0 \\ 2x - y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(4; 6)$.	0,25
	Tọa độ C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 4x^2 + 4y^2 - 58x - 5y + 54 = 0 \\ 2x + y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(3; -4)$.	0,25
Câu 9 1,0 điểm	a) Do nắng nóng kéo dài và nước biển xâm nhập nên người dân của một số tỉnh miền Tây thiếu nước ngọt sinh hoạt trầm trọng, trong đó có gia đình anh Nam. Vì vậy, anh Nam thuê khoan một giếng sâu 50 mét để lấy nước sinh hoạt và được hai cơ sở khoan giếng báo giá như sau: Cơ sở A, giá của mét khoan đầu tiên là 80.000 đồng và kể từ mét khoan thứ hai, giá của mỗi mét khoan sau tăng thêm 15.000 đồng so với giá của mét khoan ngay trước đó; cơ sở B, giá của mét khoan đầu tiên là 60.000 đồng và kể từ mét khoan thứ hai, giá của mỗi mét khoan sau tăng thêm 7% so với giá của mét khoan ngay trước đó. Anh Nam chọn cơ sở nào để thuê khoan giếng sao cho tiền thuê là thấp nhất? Tổng số tiền thuê khoan giếng khi chọn cơ sở A:	0,5 điểm 0,25

	$T_1 = \frac{50}{2}[2 \times 80.000 + (50 - 1)15.000] = 22.375.000$ đồng.	
	Tổng số tiền thuê khoan giếng khi chọn cơ sở B: $T_2 = 60.000 \times \frac{1 - 1,07^{50}}{1 - 1,07} \approx 24.391.736$ đồng Vậy, anh Nam chọn cơ sở A để thuê khoan giếng.	0,25
	Giải bất phương trình $9x^4 - 31x^3 + 34x^2 - 11x + 5 < 5\sqrt{x^3 + 1}$	0,5 điểm
	Điều kiện $x \geq -1$. Khi đó, bất phương trình đã cho tương đương với $(3x^2 - x + 5)^2 + (3x^2 - x + 5) < 5\sqrt{x^3 + 1}^2 + 5\sqrt{x^3 + 1} (*)$. Xét hàm số $f(t) = t^2 + t$, với $t \geq 0$. Ta có $f'(t) = 2t + 1 > 0, \forall t \geq 0$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$. Do đó $(*) \Leftrightarrow 3x^2 - x + 5 < 5\sqrt{x^3 + 1}$	0,25
	$\Leftrightarrow \sqrt{x+1} - \sqrt{x^2-x+1} - 2\sqrt{x+1} + 3\sqrt{x^2-x+1} < 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{x^2-x+1} < 0 \\ 2\sqrt{x+1} - 3\sqrt{x^2-x+1} > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{x^2-x+1} > 0 \\ 2\sqrt{x+1} - 3\sqrt{x^2-x+1} < 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x > 0 \\ 9x^2 - 13x + 5 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 - 2x < 0 \\ 9x^2 - 13x + 5 > 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow 0 < x < 2$ Kết hợp với điều kiện, ta được nghiệm của bất phương trình đã cho là $0 < x < 2$	0,25
	Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$ và $a + b > 2c$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \frac{6\sqrt{15}}{25(a+b)}$.	1,0 điểm
Câu 10 1,0 điểm	Ta chứng minh bất đẳng thức $(m^3 + n^3)(p^3 + q^3)(r^3 + s^3) \geq (mpr + nqs)^3 (*)$, với m, n, p, q, r, s là các số thực dương. Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có $\frac{m^3}{m^3 + n^3} + \frac{p^3}{p^3 + q^3} + \frac{r^3}{r^3 + s^3} \geq \frac{3mpr}{\sqrt[3]{(m^3 + n^3)(p^3 + q^3)(r^3 + s^3)}}$ $\frac{n^3}{m^3 + n^3} + \frac{q^3}{p^3 + q^3} + \frac{s^3}{r^3 + s^3} \geq \frac{3nqs}{\sqrt[3]{(m^3 + n^3)(p^3 + q^3)(r^3 + s^3)}}$ Cộng hai bất đẳng thức trên, ta được bất đẳng thức (*). Áp dụng bất đẳng thức (*), ta có $\left(\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} \right)^2 a^2(b+c) + b^2(c+a) \geq (a+b)^3.$ Mặt khác $a^2(b+c) + b^2(c+a) - \frac{(a+b)^3}{4} - \frac{c(a+b)^2}{2} = -\frac{(a-b)^2(a+b-2c)}{4} \leq 0$ $\Leftrightarrow a^2(b+c) + b^2(c+a) \leq \frac{(a+b)^3}{4} + \frac{c(a+b)^2}{2} = \frac{(a+b)^2(a+b+2c)}{4}.$	0,25

	Suy ra $\left(\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}}\right)^2 \geq \frac{(a+b)^3}{(a+b)^2(a+b+2c)} = \frac{4(a+b)}{a+b+2c}$ $\Leftrightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} \geq 2\sqrt{\frac{a+b}{a+b+2c}}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.	
	Do đó $P \geq 2\sqrt{\frac{1-c}{1+c}} + \frac{6\sqrt{15}}{25(1-c)}$. Xét hàm số $f(c) = 2\sqrt{\frac{1-c}{1+c}} + \frac{6\sqrt{15}}{25(1-c)}$, với $c \in \left(0; \frac{1}{3}\right)$. Có $f'(c) = \frac{-2}{(1+c)\sqrt{1-c^2}} + \frac{6\sqrt{15}}{25(1-c)^2}$; $f'(c) = 0 \Leftrightarrow c = \frac{1}{4}$.	0,25
	Từ bảng biến thiên, suy ra $f(c) \geq f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{18\sqrt{15}}{25}$, $\forall c \in \left(0; \frac{1}{3}\right)$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{18\sqrt{15}}{25}$, đạt được khi $a = b = \frac{3}{8}, c = \frac{1}{4}$.	0,25

* Mọi cách giải khác đúng đều được điểm tối đa của phần đó.

* Điểm toàn bài được làm tròn theo qui định.