

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu I. (4 điểm)

- 1) Tìm số nghiệm của phương trình $\sin\left(2x + \frac{5\pi}{2}\right) - 3\cos\left(x - \frac{7\pi}{2}\right) = 1 + 2\sin x$ trên khoảng $(0, 3\pi)$.
- 2) Cho tam giác ABC . Chứng minh $\frac{\cos A + \cos B + \cos C - 1}{\sin A + \sin B - \sin C} = \tan \frac{C}{2}$.

Câu II. (4 điểm)

- 1) Cứ vào đầu mỗi tháng, ông A đến gửi tiết kiệm ngân hàng số tiền 10 triệu đồng với lãi suất là 0,5% / tháng theo hình thức lãi kép. Hỏi sau đúng 5 năm thì ông A nhận được số tiền cả gốc và lãi là bao nhiêu, biết rằng trong suốt quá trình gửi, ông A không rút tiền ra và lãi suất của ngân hàng không thay đổi.
- 2) Cho hai số thực a, b đều lớn hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{1}{\log_{ab} a} + \frac{1}{\log_{\sqrt[3]{ab}} b}$.

Câu III. (4 điểm)

- 1) Tìm các giới hạn sau

a) $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1} - 1}{1 - \sqrt{2-x^2}}$.

b) $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)\dots(1+10x) - 1}{x}$.

- 2) Cho dãy số (u_n) là một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 1$, công bội $q = 2$. Chứng minh

$$\frac{1}{u_3 - u_1} + \frac{1}{u_4 - u_2} + \frac{1}{u_5 - u_3} + \dots + \frac{1}{u_{2024} - u_{2022}} < \frac{2}{3}.$$

Câu IV. (6 điểm)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a, AD = 2a$. Biết SA vuông góc với đáy $(ABCD)$ và $SA = a$.

- 1) Tính sin của góc giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (SAC) .
- 2) Gọi M là một điểm thay đổi trên cạnh CD , (M khác C và D). Mặt phẳng qua M và song song với mặt phẳng (SBC) cắt các cạnh AB, SA, SD lần lượt tại N, P và Q . Chứng minh tứ giác $MNPQ$ là hình thang vuông.
- 3) Khi M thay đổi, tìm giá trị lớn nhất của diện tích tứ giác $MNPQ$.

Câu V. (2 điểm) Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 4u_n + 3 \cdot 4^n + 6, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Tìm số hạng tổng quát u_n

và tính giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n \cdot 4^n}$.

.....HẾT.....

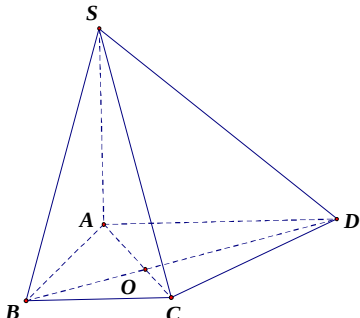
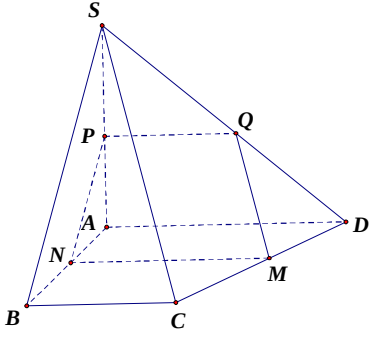
Họ và tên thí sinh..... Số báo danh.....

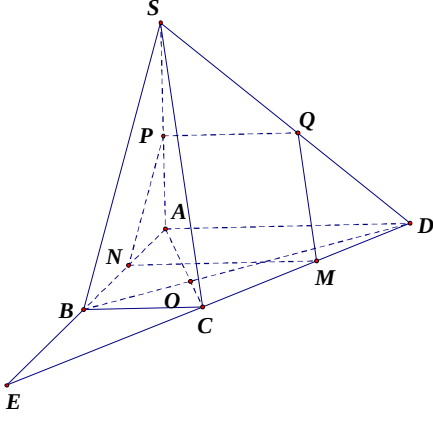
Chữ ký cán bộ coi thi số 1..... Chữ ký cán bộ coi thi số 2.....

HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu	Nội Dung	Điểm
I (4,0đ)	1) Tìm số nghiệm của phương trình ...	2,0
	$\sin\left(2x + \frac{5\pi}{2}\right) - 3\cos\left(x - \frac{7\pi}{2}\right) = 1 + 2\sin x$ $\Leftrightarrow \cos 2x + 3\sin x = 1 + 2\sin x$	0,5
	$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ $\Leftrightarrow \sin x(2\sin x - 1) = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$	0,5
	Với $x = k\pi \in (0; 3\pi) \Rightarrow 0 < k < 3 \Rightarrow k = 1; 2 \Rightarrow x \in \{\pi; 2\pi\}$ $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \in (0; 3\pi) \Rightarrow k = 0; 1 \Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}\right\}$ $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \in (0; 3\pi) \Rightarrow k = 0; 1 \Rightarrow x \in \left\{\frac{5\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right\}$ Vậy phương trình có 6 nghiệm thuộc $(0; 3\pi)$.	0,5
	2) Cho tam giác ABC. Chứng minh $\frac{\cos A + \cos B + \cos C - 1}{\sin A + \sin B - \sin C} = \tan \frac{C}{2}$.	2,0
	Ta có $\cos A + \cos B + \cos C - 1 = 2\cos \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} + \cos C - 1$ $= 2\sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} - 2\sin^2 \frac{C}{2} = 2\sin \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} - \sin \frac{C}{2} \right)$ $= 2\sin \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} \right) = 4\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$	1,0
	Lại có $\sin A + \sin B - \sin C = 2\sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} - \sin C$ $= 2\cos \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} - 2\cos \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} = 2\cos \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} - \sin \frac{C}{2} \right)$	0,5

	$= 2 \cos \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} \right) = 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}.$	
	Suy ra $\frac{\cos A + \cos B + \cos C - 1}{\sin A + \sin B - \sin C} = \tan \frac{C}{2}.$	0,5
II (4,0đ)	1) Đầu mỗi tháng, ông A đến gửi tiết kiệm ngân hàng...	2,0
	Số tiền ông A nhận được cả gốc lẫn lãi từ số tiền 10 triệu đồng gửi ở tháng thứ n là: $S_n = 10 \cdot (1 + 0,5\%)^{61-n}$ (triệu đồng).	0,5
	Do đó, sau đúng 5 năm thì ông A nhận được số tiền cả gốc và lãi là $T_{60} = \sum_{k=1}^{60} 10 \cdot (1 + 0,5\%)^k$	0,5
	$= 10 \cdot (1 + 0,5\%) \left(\frac{(1 + 0,5\%)^{60} - 1}{0,5\%} \right) = 10 \cdot 1,005 \cdot \frac{1,005^{60} - 1}{0,005} \approx 701,2$ (triệu đồng).	1,0
	2) Cho hai số thực a, b đều lớn hơn 1...	2,0
	Ta có $S = \frac{1}{\log_{ab} a} + \frac{1}{\log_{\sqrt[4]{ab}} b} = \log_a(ab) + \log_b \sqrt[4]{ab}$ $= 1 + \log_a b + \frac{1}{4}(\log_b a + 1) = \log_a b + \frac{1}{4 \log_a b} + \frac{5}{4}.$	0,5
	Đặt $x = \log_a b$. Do $a, b > 1$ nên $x > 0$. Khi đó $S = x + \frac{1}{4x} + \frac{5}{4}.$	0,5
	Ta có $S = x + \frac{1}{4x} + \frac{5}{4} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{4x}} + \frac{5}{4} = \frac{9}{4}$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4x} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$ Vậy $\min S = \frac{9}{4}$ tại $\log_a b = \frac{1}{2} \Leftrightarrow b = \sqrt{a}.$	0,5
III (4,0đ)	1) Tìm các giới hạn sau ...	2,0
	a) $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1}-1}{1-\sqrt{2-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x-2)(1+\sqrt{2-x^2})}{(x^2-1)(\sqrt[3]{(2x-1)^2} + \sqrt[3]{2x-1} + 1)}$	0,5
	$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(1+\sqrt{2-x^2})}{(x+1)(\sqrt[3]{(2x-1)^2} + \sqrt[3]{2x-1} + 1)} = \frac{2}{3}$	0,5
	b) Gọi a_i là hệ số của x^i trong khai triển của đa thức $(1+x)(1+2x)(1+3x)\dots(1+10x) - 1; i = 0; 1; 2; \dots; 10$ $\Rightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 + 2 + \dots + 10 = 55. \end{cases}$	0,5
	Suy ra $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{55x + a_2x^2 + \dots + a_{10}x^{10}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (55 + a_2x + \dots + a_{10}x^9) = 55.$	0,5

	2) Cho dãy số (u_n) là một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 1$, công bội $q = 2...$	2,0
	Ta có $VT = \frac{1}{u_1(q^2-1)} + \frac{1}{u_2(q^2-1)} + \frac{1}{u_3(q^2-1)} + \dots + \frac{1}{u_{2022}(q^2-1)}$ $= \frac{1}{q^2-1} \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \dots + \frac{1}{u_{2022}} \right)$	0,5
	$= \frac{1}{q^2-1} \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_1 q} + \frac{1}{u_1 q^2} + \dots + \frac{1}{u_1 q^{2021}} \right) = \frac{1}{q^2-1} \cdot \frac{1}{u_1} \left(1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \dots + \frac{1}{q^{2021}} \right)$	0,5
	$= \frac{1}{q^2-1} \cdot \frac{1}{u_1} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{q}\right)^{2022}}{1 - \frac{1}{q}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2022}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2022} \right) < \frac{2}{3}.$	1,0
IV (6,0đ)	1) Tính sin của góc giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (SAC) .	2.0
	 Gọi $BD \cap AC = \{O\}$. Chứng minh $CD \perp AC$ mà $CD \perp SA \Rightarrow CD \perp (SAC)$	0.5
	$\Rightarrow C$ là hình chiếu của D lên mặt phẳng (SAC) $\Rightarrow (BD, SAC) = (BD; OC) = \widehat{COD}.$	0.5
	Ta có: $\frac{OD}{OB} = \frac{AD}{BC} = 2 \Rightarrow OD = \frac{2}{3} BD = \frac{2a\sqrt{5}}{3}; CD = a\sqrt{2}$	0.5
	$\Rightarrow \sin \widehat{COD} = \frac{CD}{OD} = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$ Vậy sin của góc giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (SAC) là $\frac{3\sqrt{10}}{10}.$	0.5
	2) Gọi M là một điểm thay đổi trên cạnh CD , (M khác C và D)...	2.0
	 (α) là mặt phẳng qua M và song song với (SBC). $\begin{cases} (\alpha) \cap (ABCD) = MN \\ (SBC) \cap (ABCD) = BC \end{cases} \Rightarrow MN \parallel BC \parallel AD.$	0.5
	$\begin{cases} (\alpha) \cap (SAD) = PQ \\ (\alpha) \parallel AD \end{cases} \Rightarrow PQ \parallel AD.$ Suy ra $MN \parallel PQ.$	0.5
	Có $\begin{cases} AD \perp (SAB) \\ AD \parallel MN \end{cases} \Rightarrow MN \perp (SAB) \Rightarrow MN \perp NP.$	1,0

Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình thang vuông.		
3) Khi M thay đổi, tìm giá trị lớn nhất của diện tích tứ giác $MNPQ$.		2,0
	Đặt $BN = x, (0 < x < a)$. Gọi $AB \cap CD = \{E\}$. $\frac{MN}{AD} = \frac{EN}{EA} \Rightarrow MN = \frac{EN}{EA} \cdot AD = \frac{a+x}{2a} \cdot 2a = a+x.$	0.5
	$\frac{PQ}{AD} = \frac{SP}{SA} = \frac{BN}{AB} \Rightarrow PQ = \frac{BN}{AB} \cdot AD = 2x.$ $\frac{NP}{SB} = \frac{AN}{AB} \Rightarrow NP = \frac{AN}{AB} \cdot SB$ $= \frac{a-x}{a} \cdot a\sqrt{2} = \sqrt{2}(a-x).$	0.5
Suy ra $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(MN + PQ) \cdot NP = \frac{\sqrt{2}}{2}(3x+a)(a-x) = \frac{\sqrt{2}}{6}(3x+a)(3a-3x)$		0.5
$\leq \frac{\sqrt{2}}{6} \left(\frac{3x+a+3a-3x}{2} \right)^2 = \frac{2a^2\sqrt{2}}{3}.$ Dấu “=” xảy ra khi $3x+a=3a-3x \Leftrightarrow x = \frac{a}{3}$. Vậy $MaxS_{MNPQ} = \frac{2a^2\sqrt{2}}{3}.$		0,5
V (2,0đ)	Cho dãy số xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 4u_n + 3 \cdot 4^n + 6, n \in \mathbb{N}^* \dots \end{cases}$	2,0
	Ta có $u_{n+1} = 4u_n + 3 \cdot 4^n + 6$ $\Rightarrow u_{n+1} - 3n \cdot 4^n + 2 = 4u_n - 3(n-1) \cdot 4^n + 8$ $\Rightarrow u_{n+1} - 3n \cdot 4^n + 2 = 4[u_n - 3(n-1) \cdot 4^{n-1} + 2], \forall n = 1; 2; 3 \dots$	0.5
	Đặt $v_n = u_n - 3(n-1) \cdot 4^{n-1} + 2, \forall n = 1; 2; 3 \dots$	
	Suy ra $\begin{cases} v_1 = 3 \\ v_{n+1} = 3v_n, \forall n = 1; 2; 3 \dots \end{cases} \Rightarrow v_n = 3^n$	0.5
	$\Rightarrow u_n = 3(n-1)4^{n-1} + 3^n - 2, \forall n = 1; 2; 3 \dots$	0.5
	Suy ra $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n \cdot 4^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3(n-1)4^{n-1} + 3^n - 2}{n \cdot 4^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{3}{4} \cdot \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} \left(\frac{3}{4} \right)^n - \frac{2}{n} \left(\frac{1}{4} \right)^n \right] = \frac{3}{4}.$	0,5

Các cách giải khác đáp án, nếu đúng vẫn cho điểm tối đa tương ứng.

-----HẾT-----