



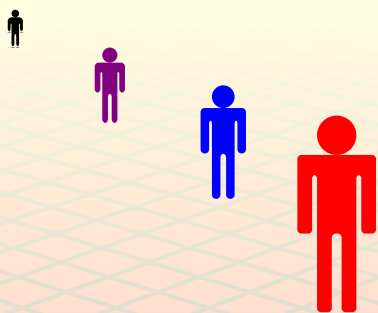
LUYỆN THI

THPTQG

Toán

THEO CHỦ ĐỀ

KHẢO SÁT HÀM SỐ



Mục lục

Chương 1. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ	1
Bài 1. SỰ ĐỒNG BIẾN NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ	1
(A) LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	1
(B) PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	2
Dạng 1. Tìm khoảng đơn điệu của một hàm số cho trước	2
Dạng 2. Tìm khoảng đơn điệu của hàm số bằng hình ảnh đồ thị cho trước	3
Dạng 3. Tìm m để hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đơn điệu trên \mathbb{R}	4
Dạng 4. Tìm m để hàm $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ đơn điệu trên từng khoảng xác định	4
Dạng 5. Biện luận đơn điệu của hàm đa thức trên khoảng, đoạn cho trước	5
Dạng 6. Biện luận đơn điệu của hàm phân thức trên khoảng, đoạn cho trước	6
Dạng 7. Xét tính đơn điệu của hàm hợp, hàm liên kết khi biết trước đồ thị $f'(x)$	7
(C) BÀI TẬP TỰ LUYỆN	8
Bài 2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ	15
(A) LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	15
(B) CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP	15
Dạng 1. Ứng dụng đạo hàm (quy tắc 1) để tìm cực trị cực hàm số	15
Dạng 2. Xác định cực trị khi biết bảng biến thiên hoặc đồ thị của $f(x)$ hoặc $f'(x)$	16
Dạng 3. Ứng dụng đạo hàm (quy tắc 2) để tìm cực trị cực hàm số	17
Dạng 4. Tìm m để hàm số đạt cực trị tại điểm x_0 cho trước	18
Dạng 5. Biện luận cực trị hàm bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$	18
Dạng 6. Biện luận cực trị hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$	19
Dạng 7. Tìm cực trị của hàm hợp, hàm liên kết khi biết hàm $f'(x)$	20
(C) BÀI TẬP TỰ LUYỆN	21
Bài 3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ	29
(A) LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	29
(B) CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP	30

	Dạng 1. Tìm max – min của hàm số cho trước.....	30
	Dạng 2. Tìm max – min của hàm chứa ẩn trong dấu trị tuyệt đối $y = f(x) $	32
	Dạng 3. Một số bài toán vận dụng.....	32
	(C) BÀI TẬP TỰ LUYỆN	33
Bài 4.	ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ	38
	(A) LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	38
	(B) CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP	39
	Dạng 1. Cho hàm số $y = f(x)$, tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị tương ứng.....	39
	Dạng 2. Xác định TCN và TCD khi biết bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$	41
	Dạng 3. Một số bài toán biện luận theo tham số m	42
	(C) BÀI TẬP TỰ LUYỆN	43
Bài 5.	ĐỒ THỊ CÁC HÀM SỐ THƯỜNG GẶP	48
	(A) LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	48
	(B) CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP	49
	Dạng 1. Nhận dạng đồ thị hàm bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$	49
	Dạng 2. Nhận dạng đồ thị hàm bậc bốn trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$	51
	Dạng 3. Nhận dạng đồ thị hàm nhất biến $y = \frac{ax + b}{cx + d}$	53
	Dạng 4. Đồ thị hàm trị tuyệt đối.....	55
	(C) BÀI TẬP TỰ LUYỆN	57
Bài 6.	ỨNG DỤNG ĐỒ THỊ ĐỂ BIỆN LUẬN NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH	63
	(A) LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	63
	(B) CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP	64
	Dạng 1. Tìm nghiệm, xác định số nghiệm bằng phương pháp đồ thị.....	64
	Dạng 2. Biện luận nghiệm phương trình bằng phương pháp đồ thị.....	65
	Dạng 3. Giải, biện luận nghiệm bất phương trình bằng phương pháp đồ thị.....	66
	Dạng 4. Một số bài toán liên quan đến hàm hợp.....	67
	(C) BÀI TẬP TỰ LUYỆN	68
Bài 7.	SỰ TƯƠNG GIAO CỦA HAI ĐỒ THỊ	75
	(A) LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	75

ⓑ	CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP.....	75
	Dạng 1. Xác định (biện luận) giao điểm của đường thẳng và đồ thị của hàm số bậc ba.....	75
	Dạng 2. Xác định (biện luận) giao điểm của đường thẳng và đồ thị của hàm số bậc bốn trùng phương.....	77
	Dạng 3. Xác định (biện luận) giao của đường thẳng và đồ thị hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ 78	
ⓒ	BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	79
Bài 8.	TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ	83
ⓐ	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....	83
ⓑ	CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP.....	83
	Dạng 1. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $(x_0; y_0)$ cho trước.....	83
	Dạng 2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ khi biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng k_0	85
	Dạng 3. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$, biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(x_A; y_A)$	86
	Dạng 4. Bài tập tổng hợp.....	86
ⓒ	BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	87

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Bài số

1

SỰ ĐỒNG BIẾN NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ

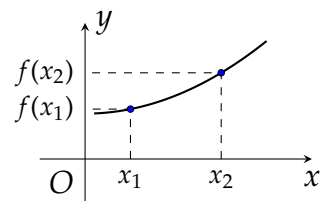
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; b)$. Khi đó

☑ Hàm số đồng biến trên $(a; b)$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a; b): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

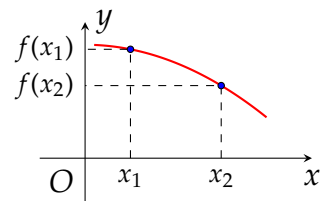
— Trên khoảng $(a; b)$, đồ thị là một "đường đi lên" khi xét từ trái sang phải.



☑ Hàm số nghịch biến trên $(a; b)$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a; b): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

— Trên khoảng $(a; b)$, đồ thị là một "đường đi xuống" khi xét từ trái sang phải.



2. Các tính chất thường dùng cho hàm đơn điệu

☑ Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$. Xét $m, n \in (a; b)$.

① Nếu $f(m) = f(n)$ thì $m = n$.

② Nếu $f(m) > f(n)$ thì $m > n$.

③ Nếu $f(m) < f(n)$ thì $m < n$.

④ Với k là một số thực cho trước, phương trình $f(x) = k$ có không quá 1 nghiệm thực trên $(a; b)$.

☑ Cho hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a; b)$. Xét $m, n \in (a; b)$.

① Nếu $f(m) = f(n)$ thì $m = n$.

② Nếu $f(m) > f(n)$ thì $m < n$.

③ Nếu $f(m) < f(n)$ thì $m > n$.

④ Với k là một số thực cho trước, phương trình $f(x) = k$ có không quá 1 nghiệm thực trên $(a; b)$.

3. Liên hệ giữa đạo hàm và tính đơn điệu

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$.

- ① Nếu $y' \geq 0, \forall x \in (a; b)$ và dấu bằng chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm thì $y = f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$.
- ② Nếu $y' \leq 0, \forall x \in (a; b)$ và dấu bằng chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm thì $y = f(x)$ nghịch biến trên $(a; b)$.

B PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DẠNG 1 Tìm khoảng đơn điệu của một hàm số cho trước

- ① Tìm tập xác định \mathcal{D} của hàm số.
- ② Tính y' , giải phương trình $y' = 0$ tìm các nghiệm x_i (nếu có).
- ③ Lập bảng xét dấu y' trên miền \mathcal{D} . Từ dấu y' , ta suy ra chiều biến thiên của hàm số.
 - Khoảng y' mang dấu $-$: Hàm nghịch biến.
 - Khoảng y' mang dấu $+$: Hàm đồng biến.

❖ **Ví dụ 1.** Hàm số $y = -x^3 + 3x - 4$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; -1)$. B. $(-6; -2)$. C. $(1; +\infty)$. D. $(-1; 1)$.

❖ **Ví dụ 2.** Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 5)$.
 B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và $(2; +\infty)$.
 C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$.
 D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$.

❖ **Ví dụ 3.** Hàm số $y = -x^4 + 2x^3 - 2x - 1$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-\infty; -\frac{1}{2})$. B. $(-\frac{1}{2}; +\infty)$. C. $(-\infty; 1)$. D. $(-\infty; +\infty)$.

❖ **Ví dụ 4.** Hàm số $y = x^4 + 8x^3 + 5$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(0; +\infty)$. B. $(-\infty; -6)$. C. $(-6; 0)$. D. $(-\infty; +\infty)$.

❖ **Ví dụ 5.** Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x + 2)$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$.
 B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$.
 C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.
 D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$.

❖ **Ví dụ 6.** Cho hàm số $y = \frac{x+3}{x-3}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 3)$ và $(3; +\infty)$.
 B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 3)$ và $(3; +\infty)$.
 C. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.
 D. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

❖ **Ví dụ 7.** Cho hàm số $y = \frac{3-x}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.
- B. Hàm số nghịch biến với mọi $x \neq 1$.
- C. Hàm số nghịch biến trên tập $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- D. Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

❖ **Ví dụ 8.** Hàm số nào sau đây nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó?

- A. $y = \frac{x-1}{x+1}$.
- B. $y = \frac{2x+1}{x-3}$.
- C. $y = \frac{x-2}{2x-1}$.
- D. $y = \frac{x+5}{-x-1}$.

DẠNG 2 Tìm khoảng đơn điệu của hàm số bằng hình ảnh đồ thị cho trước

☑ Nếu đề bài cho đồ thị $y = f(x)$, ta chỉ việc nhìn các khoảng mà đồ thị "đi lên" hoặc "đi xuống".

- ① Khoảng mà đồ thị "đi lên": hàm đồng biến;
- ② Khoảng mà đồ thị "đi xuống": hàm nghịch biến.

☑ Nếu đề bài cho đồ thị $y = f'(x)$. Ta tiến hành lập bảng biến thiên của hàm $y = f(x)$ theo các bước:

- ① Tìm nghiệm của $f'(x) = 0$ (hoành độ giao điểm với trục hoành);
- ② Xét dấu $f'(x)$ (phần trên Ox mang dấu dương; phần dưới Ox mang dấu âm);
- ③ Lập bảng biến thiên của $y = f(x)$, suy ra kết quả tương ứng.

❖ **Ví dụ 9.** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên dưới

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(0; 1)$.
- B. $(3; 4)$.
- C. $(-2; 4)$.
- D. $(-4; 2)$.

❖ **Ví dụ 10.**

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

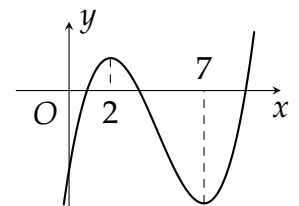
- A. $(-\infty; 5)$.
- B. $(0; 2)$.
- C. $(2; +\infty)$.
- D. $(0; +\infty)$.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	5	3	$+\infty$		

❖ **Ví dụ 11.**

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 3)$.
- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(6; +\infty)$.
- C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(3; 6)$.



❖ **Ví dụ 12.** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.
- B. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên \mathbb{R} .

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	-		-
y	2	$-\infty$	$+\infty$

DẠNG 3 Tìm m để hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đơn điệu trên \mathbb{R}

- ① Hàm số đồng biến trên \mathbb{R} thì $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases}$ hoặc suy biến $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c > 0. \end{cases}$
- ② Hàm số nghịch biến trên \mathbb{R} thì $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases}$ hoặc suy biến $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c < 0. \end{cases}$

❖ **Ví dụ 13.** Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + 4x - 1$ đồng biến trên \mathbb{R} là

- A. 2.
- B. vô số.
- C. 3.
- D. 4.

❖ **Ví dụ 14.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m - 3)x - m + 2$ nghịch biến trên \mathbb{R} .

- A. $m \leq -3, m \geq 1$.
- B. $-3 < m < 1$.
- C. $-3 \leq m \leq 1$.
- D. $m \leq 1$.

❖ **Ví dụ 15.** Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = (m - 1)x^3 - 3(m - 1)x^2 + 3x + 2$ đồng biến trên \mathbb{R}

- A. $1 < m \leq 2$.
- B. $1 < m < 2$.
- C. $1 \leq m \leq 2$.
- D. $1 \leq m < 2$.

DẠNG 4 Tìm m để hàm $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ đơn điệu trên từng khoảng xác định

Tính $y' = \frac{ad - cb}{(cx + d)^2}$.

- ① Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó $\Leftrightarrow y' > 0 \Leftrightarrow ad - cb > 0$.
- ② Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó $\Leftrightarrow y' < 0 \Leftrightarrow ad - cb < 0$.

❖ **Ví dụ 16.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x + 2 - m}{x + 1}$ nghịch biến trên các khoảng mà nó xác định.

- A. $m \leq 1$.
- B. $m \leq -3$.
- C. $m < -3$.
- D. $m < 1$.

❖ **Ví dụ 17.** Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x + m^2}{x + 1}$ luôn đồng biến trên từng khoảng xác định.

- A. $m \in (0; +\infty)$.
- B. $m \in [-1; 1]$.
- C. $m \in \mathbb{R}$.
- D. $m \in (-1; 1)$.

DẠNG 5

Biện luận đơn điệu của hàm đa thức trên khoảng, đoạn cho trước

☀ **Loại 1:** Tìm điều kiện của tham số để hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đơn điệu trên toàn miền xác định \mathbb{R} .

- ① Hàm số đồng biến trên \mathbb{R} thì $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases}$ hoặc suy biến $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c > 0. \end{cases}$
- ② Hàm số nghịch biến trên \mathbb{R} thì $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases}$ hoặc suy biến $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c < 0. \end{cases}$

☀ **Loại 2:** Tìm điều kiện của tham số để hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đơn điệu trên khoảng con của tập \mathbb{R} . Ta thường gặp hai trường hợp:

- ① Nếu phương trình $y' = 0$ giải được nghiệm "đẹp": Ta thiết lập bảng xét dấu y' theo các nghiệm vừa tìm (*xét hết các khả năng nghiệm trùng, nghiệm phân biệt*). Từ đó "ép" khoảng mà dấu y' không thỏa mãn ra khỏi khoảng đề bài yêu cầu.
- ② Nếu phương trình $y' = 0$ nghiệm "xấu": Ta sử dụng 1 trong 2 cách sau
- **Cách 1.** Dùng định lý về so sánh nghiệm (*sẽ nói rõ hơn qua bài giải cụ thể*).
 - **Cách 2.** Cô lập tham số m , dùng đồ thị.

☀ **Loại 3:** Tìm điều kiện của tham số để hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ đơn điệu trên khoảng con của tập \mathbb{R} .

- ① Giải phương trình $y' = 0$, tìm nghiệm.
- ② Biện luận các trường hợp nghiệm (*nghiệm trùng, nghiệm phân biệt*). Từ đó "ép" khoảng mà dấu y' không thỏa mãn ra khỏi khoảng đề bài yêu cầu.

🔗 **Ví dụ 18.** Giá trị m để hàm số $y = -x^3 + mx^2 - m$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$ là

- A. $0 < m < 3$. B. $m \geq 3$. C. $m \in [1; 3]$. D. $m \leq 3$.

🔗 **Ví dụ 19.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3(m+2)x^2 + 3(m^2 + 4m)x + 1$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$?

- A. 1. B. 4. C. 3. D. 2.

🔗 **Ví dụ 20.** Các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 - mx - 4$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ là

- A. $m \geq 3$. B. $m \geq -2$. C. $m \leq -3$. D. $m \leq 3$.

🔗 **Ví dụ 21.** (QG.2020 lần 2 – mã đề 102). Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (5 - m)x$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ là

- A. $(-\infty; 2)$. B. $(-\infty; 5)$. C. $(-\infty; 5]$. D. $(-\infty; 2]$.

🔗 **Ví dụ 22.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + m - 2$ đồng biến trên khoảng $(1; 3)$.

- A. $m \in [-5; 2)$. B. $m \in (-\infty; -5)$. C. $m \in (2; +\infty)$. D. $m \in (-\infty; 2]$.

DẠNG 6 Biện luận đơn điệu của hàm phân thức trên khoảng, đoạn cho trước

Loại 1. Tìm điều kiện của tham số để hàm $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ đơn điệu trên từng khoảng xác định.

① Tính $y' = \frac{ad - cb}{(cx + d)^2}$.

② Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó $\Leftrightarrow y' > 0 \Leftrightarrow ad - cb > 0$.

③ Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó $\Leftrightarrow y' < 0 \Leftrightarrow ad - cb < 0$.

Loại 2. Tìm điều kiện để hàm $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ đơn điệu trên khoảng $(m; n) \subset \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$.

① Tính $y' = \frac{ad - cb}{(cx + d)^2}$.

② Hàm số đồng biến trên khoảng $(m; n)$:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y' > 0 \\ -\frac{d}{c} \notin (m; n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ad - cb > 0 \\ -\frac{d}{c} \leq m \text{ hoặc } -\frac{d}{c} \geq n \end{cases}$$

③ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(m; n)$:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y' < 0 \\ -\frac{d}{c} \notin (m; n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ad - cb < 0 \\ -\frac{d}{c} \leq m \text{ hoặc } -\frac{d}{c} \geq n \end{cases}$$

Ví dụ 23. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x + 2}{x + m}$ nghịch biến trên tập xác định của nó.

A. $m \leq 2$.

B. $m > 2$.

C. $m \geq 2$.

D. $m < 2$.

Ví dụ 24. Cho hàm số $y = \frac{mx - 2m - 3}{x - m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$. Tìm số phần tử của S .

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 1.

Ví dụ 25. Giá trị của m để hàm số $y = \frac{mx + 4}{x + m}$ nghịch biến trên $(-\infty; 1)$ là

A. $-2 \leq m \leq -1$.

B. $-2 \leq m \leq -1$.

C. $-2 \leq m \leq 2$.

D. $-2 < m < 2$.

Ví dụ 26. Cho hàm số $y = \frac{2x - 1}{x - m}$. Tìm m để hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

A. $\frac{1}{2} < m \leq 1$.

B. $m > \frac{1}{2}$.

C. $m \geq 1$.

D. $m \geq \frac{1}{2}$.

Ví dụ 27. Cho hàm số $y = \frac{mx + 2}{2x + m}$, m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$. Tìm số phần tử của S .

A. 2.

B. 5.

C. 3.

D. 1.

DẠNG 7

Xét tính đơn điệu của hàm hợp, hàm liên kết khi biết trước đồ thị $f'(x)$

Loại 1: Cho đồ thị $y = f'(x)$, hỏi tính đơn điệu của hàm $y = f(x)$.

- ① Tìm nghiệm của $f'(x) = 0$ (hoành độ giao điểm với trục hoành);
- ② Xét dấu $f'(x)$ (phần trên Ox mang dấu dương; phần dưới Ox mang dấu âm);
- ③ Lập bảng biến thiên của $y = f(x)$, suy ra kết quả tương ứng.

Loại 2: Cho đồ thị $y = f'(x)$, hỏi tính đơn điệu của hàm hợp $y = f(u)$.

- ① Tính $y' = u' \cdot f'(u)$;
- ② Giải phương trình $f'(u) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u' = 0 \\ f'(u) = 0 \end{cases}$ (Nhìn đồ thị, suy ra nghiệm.)
- ③ Lập bảng biến thiên của $y = f(u)$, suy ra kết quả tương ứng.

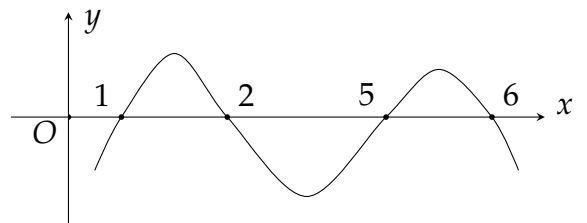
Loại 3: Cho đồ thị $y = f'(x)$, hỏi tính đơn điệu của hàm $y = f(x) + v(x)$.

- ① Tính $y' = f'(x) + v'(x)$.
- ② Giải phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow f'(x) + v'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -v'(x)$.
 - Trên hình đồ thị $y = f'(x)$, ta vẽ thêm đồ thị $y = -v'(x)$.
 - Quan sát hoành độ giao điểm của hai đồ thị này, ta suy ra nghiệm.
- ③ Từ nghiệm của y' , lập bảng biến thiên của $y = f(x) + v(x)$, suy ra kết quả tương ứng.

Ví dụ 28.

Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ (đồ thị $f'(x)$ cắt Ox ở các điểm có hoành độ lần lượt là 1, 2, 5, 6). Chọn khẳng định đúng.

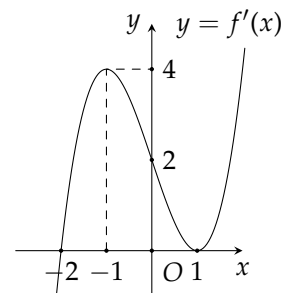
- A. $f(x)$ nghịch biến trên khoảng (1; 2).
- B. $f(x)$ đồng biến trên khoảng (5; 6).
- C. $f(x)$ nghịch biến trên khoảng (1; 5).
- D. $f(x)$ đồng biến trên khoảng (4; 5).



Ví dụ 29.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} , hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau

- A. $(-\infty; -2); (1; +\infty)$.
- B. $(-2; +\infty) \setminus \{1\}$.
- C. $(-2; +\infty)$.
- D. $(-5; -2)$.



Ví dụ 30. (THPTQG-2019, Mã đề 101)

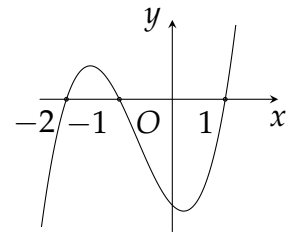
Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu $f'(x)$ như hình bên. Hàm số $y = f(3 - 2x)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(4; +\infty)$.
- B. $(-2; 1)$.
- C. $(2; 4)$.
- D. $(1; 2)$.

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

❖ Ví dụ 31.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} . Biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $f(x^2 - 2)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

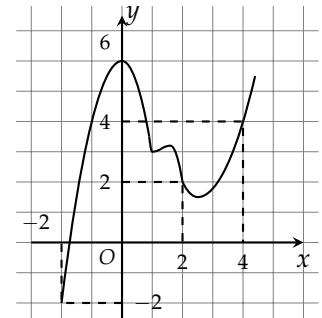


- A. $(0; 1)$. B. $(1; \sqrt{3})$. C. $(-1; 0)$. D. $(-\sqrt{3}; 0)$.

❖ Ví dụ 32.

Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.

Đặt $h(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- A. Hàm số $y = h(x)$ đồng biến trên khoảng $(2; 3)$.
 B. Hàm số $y = h(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 4)$.
 C. Hàm số $y = h(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.
 D. Hàm số $y = h(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2; 4)$.

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Đề số 1

Câu 1. Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(1; 3)$. B. $(2; +\infty)$. C. $(-\infty; 0)$. D. $(0; 3)$.

Câu 2. Cho hàm số $y = x^2(3 - x)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
 B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(+\infty; 3)$.
 C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.
 D. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Câu 3. Hàm số $y = 2x^4 + 3$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(0; +\infty)$. B. $(-\infty; 3)$. C. $(-\infty; 0)$. D. $(3; +\infty)$.

Câu 4. Hàm số $y = x^4 + 8x^3 + 5$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(0; +\infty)$. B. $(-\infty; -6)$. C. $(-6; 0)$. D. $(-\infty; +\infty)$.

Câu 5. Hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ đồng biến trên khoảng nào?

- A. $(-1; 0)$. B. $(-1; +\infty)$. C. $(-3; 8)$. D. $(-\infty; -1)$.

Câu 6. Tìm tất cả các khoảng nghịch biến của hàm số $y = -x^4 + 8x^2 - 7$.

- A. $(-2; 0), (2; +\infty)$. B. $(-2; 0)$. C. $(-\infty; -2), (2; +\infty)$. D. $(2; +\infty)$.

Câu 7. Hàm số nào dưới đây nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A. $y = -x^3 - x + 3$. B. $y = -x^4 + 4x^2 - 2$.
 C. $y = x^3 + 4x^2 - 1$. D. $y = x^4 - 5x + 7$.

Câu 8. Cho hàm số $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 4$ nghịch biến trên khoảng $(a; b)$ với $a < b; a, b \in \mathbb{R}$ và đồng biến trên các khoảng $(-\infty; a), (b; +\infty)$. Tính $S = 3a + 3b$.

- A. $S = 6$. B. $S = 9$. C. $S = 10$. D. $S = 12$.

Câu 9. Tìm tất cả các khoảng nghịch biến của hàm số $y = -\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 - x - 2017$.

A. $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

B. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ và $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

C. $(-\infty; +\infty)$.

D. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$.

Câu 10. Cho hàm số $y = -x^3 + 1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

B. Hàm số đồng biến trên \mathbb{R} .

C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$.

D. Hàm số nghịch biến trên \mathbb{R} .

Câu 11. Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+3}$. Tìm khẳng định đúng?

A. Hàm số xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

C. Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định.

D. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

Câu 12. Cho hàm số $y = \frac{3x-1}{x-2}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên \mathbb{R} .

B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Câu 13. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên tập xác định của nó?

A. $y = \frac{x-2}{x-1}$.

B. $y = \frac{x-2}{x+1}$.

C. $y = -x^4 + x^2$.

D. $y = -x^3 + 1$.

Câu 14. Hàm số $y = x + \frac{4}{x}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(2; +\infty)$.

B. $(0; +\infty)$.

C. $(-2; 0)$.

D. $(-2; 2)$.

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^4 - 4x^2 + 3$. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên các khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(-1; 1)$ và $(\sqrt{3}; +\infty)$.

B. $(-\sqrt{3}; -1)$ và $(1; \sqrt{3})$.

C. $(-\infty; 1)$ và $(3; +\infty)$.

D. $(-\sqrt{2}; 0)$ và $(\sqrt{2}; +\infty)$.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x-1)^3(2-x)$. Hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(2; +\infty)$.

B. $(-1; 1)$.

C. $(1; 2)$.

D. $(-\infty; -1)$.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
				$-$	0
					$+$

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 2)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.

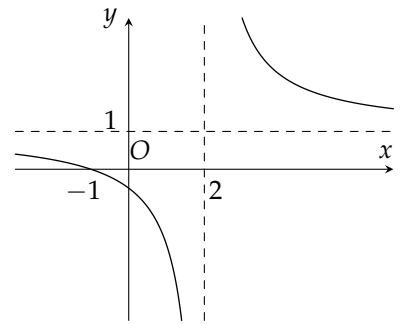
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 2)$.

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$		3		0	$+\infty$

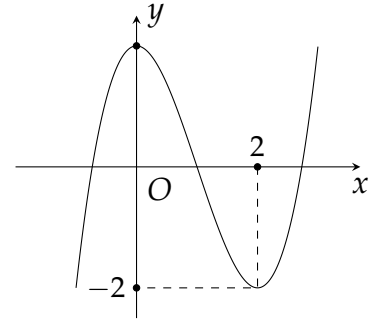
Câu 19. Đường cong của hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ với a, b, c, d là các số thực. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $y' < 0, \forall x \neq 1$.
- B. $y' > 0, \forall x \neq 1$.
- C. $y' > 0, \forall x \neq 2$.
- D. $y' < 0, \forall x \neq 2$.



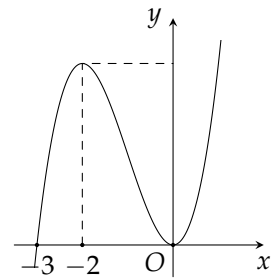
Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$.
- B. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 2)$.
- C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên $(1; +\infty)$.



Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào?

- A. $(-\infty; 0)$.
- B. $(-3; +\infty)$.
- C. $(-\infty; 4)$.
- D. $(-4; 0)$.



Câu 22. Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
- C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(5; +\infty)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.

Câu 23. Hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ nghịch biến trên khoảng nào?

- A. $(1; +\infty)$.
- B. $(-1; 1)$.
- C. $(-\infty; -1)$.
- D. $(\frac{1}{3}; 3)$.

Câu 24. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đồng biến trên \mathbb{R} khi và chỉ khi

- A. $\begin{cases} a = b = 0, c > 0 \\ a > 0; b^2 - 3ac \geq 0 \end{cases}$
- B. $\begin{cases} a = b = 0, c > 0 \\ a < 0; b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$
- C. $\begin{cases} a = b = 0, c > 0 \\ a > 0; b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$
- D. $a > 0; b^2 - 3ac \leq 0$.

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ có tính chất $f'(x) \geq 0, \forall x \in (0; 3)$ và $f'(x) = 0, \forall x \in (1; 2)$. Khẳng định nào sau đây là sai?

- A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 3)$.
- B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.
- C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(2; 3)$.
- D. Hàm số $f(x)$ là hàm hằng (tức không đổi) trên khoảng $(1; 2)$.

Câu 26. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và đồng biến trên $(0; 2)$ thì hàm số $y = f(2x)$ luôn đồng biến trên khoảng nào?

- A. $(0; 4)$. B. $(0; 2)$. C. $(-2; 0)$. D. $(0; 1)$.

Câu 27. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (2m + 1)x - 3m - 1$ đồng biến trên \mathbb{R} .

- A. $m \in (-\infty; +\infty)$. B. $m \leq 0$. C. $m \geq -\frac{1}{2}$. D. $m < -\frac{1}{2}$.

Câu 28. Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m + 9)x + 5$, với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$?

- A. 5. B. 6. C. 7. D. 4.

Câu 29. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x+2}{x+m}$ nghịch biến trên các khoảng xác định của nó.

- A. $m \leq 2$. B. $m > 2$. C. $m \geq 2$. D. $m < 2$.

Câu 30. Cho hàm số $y = \frac{mx-2}{x+m-3}$. Các giá trị của m để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định của nó là

- A. $1 < m < 2$. B. $\begin{cases} m > 2 \\ m < 1 \end{cases}$. C. $1 < m \leq 2$. D. $m = 1$.

—HẾT—

2. Đề số 2

Câu 1. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$. B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$. D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Câu 2. Hàm số $y = -\frac{x^4}{2} + 1$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-\infty; 0)$. B. $(1; +\infty)$. C. $(-3; 4)$. D. $(-\infty; 1)$.

Câu 3. Hàm số nào sau đây **không** đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$?

- A. $y = x^3 + 2$. B. $y = x^5 + x^3 - 1$. C. $y = \frac{x-1}{x+2}$. D. $y = x + 1$.

Câu 4. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{2-x}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đã cho đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.
B. Hàm số đã cho đồng biến trên \mathbb{R} .
C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.
D. Hàm số đã cho nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

Câu 5. Hàm số $y = (x^2 - 4x)^2$ nghịch biến khoảng nào dưới đây?

- A. $(2; 4)$. B. $(-1; 2)$. C. $(0; 2)$. D. $(0; 4)$.

Câu 6. Hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

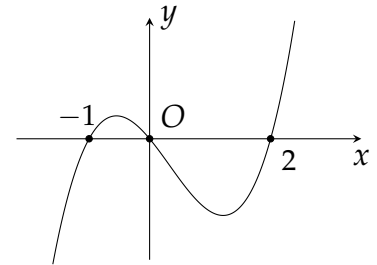
- A. $(-\infty; 1)$. B. $(1; +\infty)$. C. $(0; 1)$. D. $(1; 2)$.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = -x^2 + 5x - 6$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = -5f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào?

- A. $(-\infty; 2)$ và $(3; +\infty)$.
 B. $(3; +\infty)$.
 C. $(-\infty; 2)$.
 D. $(2; 3)$.

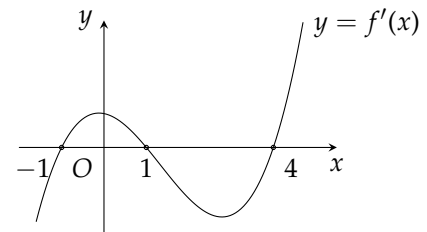
Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-\infty; -1)$.
 B. $(-1; 0)$.
 C. $(0; 2)$.
 D. $(1; +\infty)$.



Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = f(2 - x)$ đồng biến trên khoảng

- A. $(1; 3)$.
 B. $(2; +\infty)$.
 C. $(-2; 1)$.
 D. $(-\infty; -2)$.

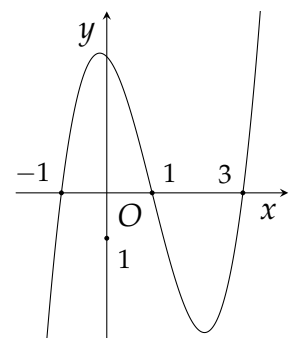


Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} và $f'(x) > 0, \forall x > 0$. Biết $f(1) = 2$, hỏi khẳng định nào sau đây có thể xảy ra?

- A. $f(2) + f(3) = 4$.
 B. $f(-1) = 2$.
 C. $f(2) = 1$.
 D. $f(2018) > f(2019)$.

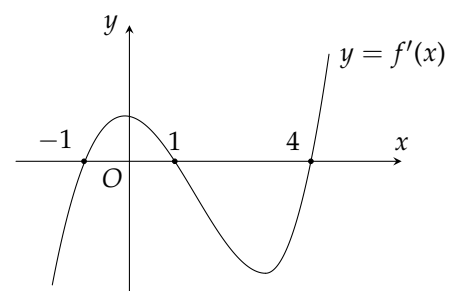
Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hỏi hàm số $y = f(1 - x)$ đồng biến trên khoảng nào?

- A. $(0; 2)$.
 B. $(-\infty; 2)$.
 C. $(-1; 1)$.
 D. $(2; +\infty)$.



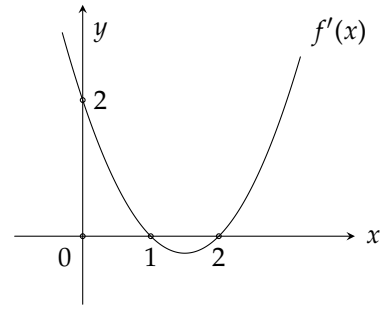
Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-1; 4]$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2 + 1)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

- A. $(-1; 1)$.
 B. $(0; 1)$.
 C. $(1; 4)$.
 D. $(\sqrt{3}; 4)$.



Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = f(x - x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $\left(\frac{-1}{2}; +\infty\right)$. B. $\left(\frac{-3}{2}; +\infty\right)$.
 C. $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$. D. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.



Câu 14. Tìm mối liên hệ giữa các tham số a và b sao cho hàm số $y = f(x) = 2x + a \sin x + b \cos x$ luôn tăng trên \mathbb{R} ?

- A. $a + 2b \geq \frac{1 + \sqrt{2}}{3}$. B. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$. C. $a + 2b = 2\sqrt{3}$. D. $a^2 + b^2 \leq 4$.

Câu 15. Tìm giá trị lớn nhất của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (8 + 2m)x + m + 3$ đồng biến trên \mathbb{R} .

- A. $m = 2$. B. $m = -2$. C. $m = 4$. D. $m = -4$.

Câu 16. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m - 6)x + 3$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A. 4. B. 6. C. Vô số. D. 5.

Câu 17. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}(m^2 - 1)x^3 + (m + 1)x^2 + 3x - 1$, với m là tham số. Số giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2018; 2018]$ để hàm số đồng biến trên \mathbb{R} là

- A. 4035. B. 4037. C. 4036. D. 4034.

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - 9m^2x$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

- A. $m \geq \frac{1}{3}$ hoặc $m \leq -1$. B. $m > \frac{1}{3}$.
 C. $m < -1$. D. $-1 < m < \frac{1}{3}$.

Câu 19. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - 9m^2x$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

- A. $m > \frac{1}{3}$. B. $m < -1$.
 C. $m \geq \frac{1}{3}$ hoặc $m \leq -1$. D. $-1 \leq m \leq \frac{1}{3}$.

Câu 20. Tìm m để hàm số $y = x^3 - 6x^2 + mx + 1$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

- A. $m \geq 12$. B. $m \leq 12$. C. $m \geq 0$. D. $m \leq 0$.

Câu 21. Gọi T là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$. Tổng giá trị các phần tử của T .

- A. 4. B. 10. C. 6. D. 8.

Câu 22. Giá trị m để hàm số $y = -x^3 + mx^2 - m$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$ là

- A. $0 < m < 3$. B. $m \geq 3$. C. $m \in [1; 3]$. D. $m \leq 3$.

Câu 23. Gọi S là tập hợp các giá trị thực của m để hàm số $y = 2x^3 + 3(m - 1)x^2 + 6(m - 2)x + 2017$ nghịch biến trên khoảng $(a; b)$ sao cho $b - a > 3$. Giả sử $S = (-\infty; m_1) \cup (m_2; +\infty)$. Khi đó $m_1 + m_2$ bằng

- A. 2. B. 6. C. 4. D. 8.

Câu 24. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{mx + 1}{4x + m}$ luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định của hàm số.

- A. 1. B. 2. C. 3. D. Vô số.

Câu 25. Cho hàm số $y = \frac{x + m}{x + 2}$. Tập hợp tất cả các giá trị của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ là

- A. $(2; +\infty)$. B. $(-\infty; 2)$. C. $[2; +\infty)$. D. $(-\infty; 2]$.

Câu 26. Tồn tại bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = \frac{x - 2}{x - m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$?

- A. 3. B. 4. C. 2. D. Vô số.

Câu 27. Cho hàm số $y = \frac{mx + 2}{2x + m}$, với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$. Tìm số phần tử của S .

- A. 1. B. 5. C. 2. D. 3.

Câu 28. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{mx + 16}{x + m}$ đồng biến trên khoảng $(0; 10)$.

- A. $m \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$. B. $m \in (-\infty; -10] \cup (4; +\infty)$.
 C. $m \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$. D. $m \in (-\infty; -10] \cup [4; +\infty)$.

Câu 29. Cho a, b là hai số nguyên dương sao cho cả hai hàm số $y = \frac{ax + b}{4x + a}$ (1) và $y = \frac{bx + a}{4x + b}$ (2) đồng biến trên từng khoảng xác định. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 2a + 3b$ bằng

- A. 25. B. 30. C. 23. D. 27.

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$		
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+

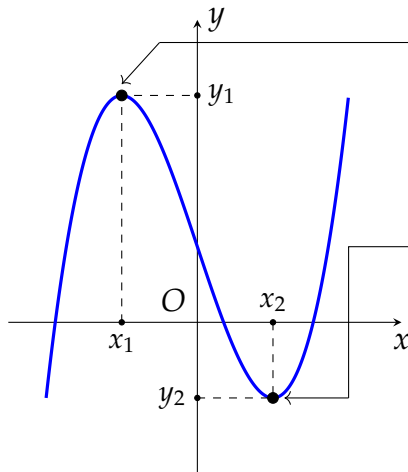
Hàm số $y = 3f(x + 2) - x^3 + 3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?

- A. $(1; +\infty)$. B. $(-\infty; -1)$. C. $(-1; 0)$. D. $(0; 2)$.

—HẾT—

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

- ☑ Hàm số đạt cực trị tại x_0 thì x_0 là nghiệm của phương trình $y' = 0$ hoặc x_0 là điểm mà tại đó đạo hàm không xác định (chỉ có một chiều nhé, đừng suy ngược lại).
- ☑ Bảng tổng kết tên gọi:



$(x_1; y_1)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số;

- x_1 là điểm cực đại của hàm số;
- y_1 là giá trị cực đại của hàm số.

$(x_2; y_2)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số;

- x_2 là điểm cực tiểu của hàm số;
- y_2 là giá trị cực tiểu của hàm số.

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

DẠNG 1 Ứng dụng đạo hàm (quy tắc 1) để tìm cực trị cực hàm số

- ① Giải phương trình $y' = 0$ tìm các nghiệm x_i và những điểm x_j mà đạo hàm không xác định;
- ② Đưa các nghiệm x_i và x_j lên bảng xét dấu và xét dấu y' ;
- ③ Lập bảng biến thiên và nhìn "điểm dừng":
 - "Dừng" trên cao tại điểm $(x_1; y_1)$ thì x_1 là điểm cực đại của hàm số; y_1 là giá trị cực đại (cực đại) của hàm số; $(x_1; y_1)$ là tọa độ điểm **cực đại của đồ thị**.
 - "Dừng" dưới thấp tại điểm $(x_2; y_2)$ thì x_2 là điểm cực tiểu của hàm số; y_2 là giá trị cực tiểu (cực tiểu) của hàm số; $(x_2; y_2)$ là tọa độ điểm **cực tiểu của đồ thị**.

☞ Ví dụ 1. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2 + 2$ là

- A. $(\frac{2}{3}; \frac{50}{27})$. B. $(0; 2)$. C. $(\frac{50}{27}; \frac{2}{3})$. D. $(2; 0)$.

☞ Ví dụ 2. Hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 - 3$ đạt cực đại tại

- A. $x = 0$. B. $x = -\sqrt{3}$. C. $x = \sqrt{3}$. D. $x = \pm\sqrt{3}$.

☞ Ví dụ 3. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^4 - 1$ là

- A. $(-1; -1)$. B. $(0; -1)$. C. $(-1; 0)$. D. $(1; -1)$.

❖ **Ví dụ 4.** Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị là (C). Gọi A, B là các điểm cực trị của (C). Tính độ dài đoạn thẳng AB.

- A. $AB = 2\sqrt{5}$. B. $AB = 5$. C. $AB = 4$. D. $AB = 5\sqrt{2}$.

❖ **Ví dụ 5.** Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ là

- A. $y = -2x - 1$. B. $y = -2x + 1$. C. $y = 2x - 1$. D. $y = 2x + 1$.

❖ **Ví dụ 6.** Cho hàm số $y = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{4}$ có đồ thị (C). Tính diện tích của tam giác tạo thành từ 3 điểm cực trị của đồ thị (C).

- A. $S = \frac{5\sqrt{3}}{4}$. B. $S = \frac{\sqrt{3}}{4}$. C. $S = \sqrt{3}$. D. $S = \frac{9\sqrt{3}}{4}$.

❖ **Ví dụ 7.** Cho hàm số $y = 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x + 1$. Gọi $M(x_1; y_1)$ là điểm cực tiểu của đồ thị của hàm số đã cho. Tính tổng $x_1 + y_1$.

- A. 5. B. -11. C. 7. D. 6.

DẠNG 2 Xác định cực trị khi biết bảng biến thiên hoặc đồ thị của $f(x)$ hoặc $f'(x)$

⚙ **Loại 1:** Cho bảng biến thiên hoặc đồ thị hàm $y = f(x)$. Ta nhìn "điểm dừng":

- "Dừng" trên cao tại điểm $(x_1; y_1)$ thì x_1 là điểm cực đại của hàm số; y_1 là giá trị cực đại (cực đại) của hàm số; $(x_1; y_1)$ là tọa độ điểm **cực đại của đồ thị**
- "Dừng" dưới thấp tại điểm $(x_2; y_2)$ thì x_2 là điểm cực tiểu của hàm số; y_2 là giá trị cực tiểu (cực tiểu) của hàm số; $(x_2; y_2)$ là tọa độ điểm **cực tiểu của đồ thị**

⚙ **Loại 2:** Cho đồ thị hàm $f'(x)$. Ta thực hiện tương tự như ở phần đồng biến, nghịch biến.

- Nhìn hoành độ giao điểm của $f'(x)$ với trục hoành, ta suy ra nghiệm của $f'(x) = 0$.
- Lập bảng biến thiên, kết luận cực trị.

❖ **Ví dụ 8.**

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Cực tiểu (giá trị cực tiểu) của hàm số là

- A. 4. B. 2.
C. -1. D. 3.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+
y	$-\infty$		↗ 4 ↘		↗ 3 ↘	$+\infty$

❖ **Ví dụ 9.** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

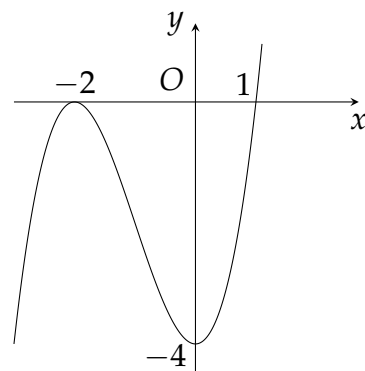
x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$			
y'		-	0	+	+	0	-	
y	$+\infty$		↘ -1 ↗		↗ 2 ↘		↗ 2 ↘	$-\infty$

Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $x = 1$. B. Giá trị cực tiểu của hàm số bằng -1.
C. Giá trị cực đại của hàm số bằng 2. D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$.

🔗 Ví dụ 10.

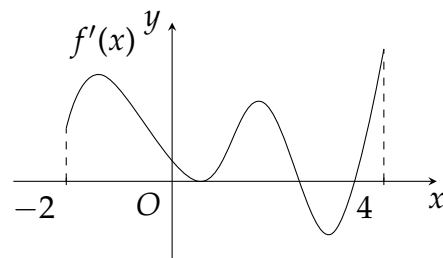
Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x)$. Biết rằng hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số $f'(x)$. Khẳng định nào sau đây là đúng về cực trị của hàm số $f(x)$?



- A. Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = -2$.
- B. Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.
- C. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x = -1$.
- D. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x = -2$.

🔗 Ví dụ 11.

Tìm số điểm cực tiểu trên đoạn $[-2; 4]$ của hàm số $y = f(x)$ biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



- A. 1.
- B. 0.
- C. 2.
- D. 3.

🔗 Ví dụ 12. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có đạo hàm $f'(x) = x^3 - 3x + 2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
- B. Hàm số có 2 điểm cực trị.
- C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 1)$.
- D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$.

🔗 Ví dụ 13. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có đạo hàm $f'(x) = (x - 1)(x - 2)^2(x - 3)^{2017}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(1; 2)$ và $(3; +\infty)$.
- B. Hàm số có 3 điểm cực trị.
- C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 3)$.
- D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$, đạt cực tiểu tại $x = 1$ và $x = 3$.

DẠNG 3 Ứng dụng đạo hàm (quy tắc 2) để tìm cực trị cực hàm số

Chỉ dùng khi hàm số có đạo hàm cấp 2 tại x_0 . Ta thực hiện các bước:

- ① Tính y' . Giải phương trình $y' = 0$, tìm nghiệm x_0 .
- ② Tính y'' .
 - Nếu $y''(x_0) < 0$ thì x_0 là điểm cực đại của hàm số.
 - Nếu $y''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số.

⚠ Ghi nhớ: "âm" lồi, "dương" lõm

🔗 Ví dụ 14. Hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 1$ đạt cực tiểu tại điểm có hoành độ

- A. $x = \pm\sqrt{2}$.
- B. $x = \pm 1$.
- C. $x = 1$.
- D. $x = \pm 2$.

🔗 Ví dụ 15. Tìm các điểm cực tiểu của hàm số $y = \sin 2x - x$.

- A. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$.
- B. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$.
- C. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$.
- D. $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$.

DẠNG 4

Tìm m để hàm số đạt cực trị tại điểm x_0 cho trước

- ① Giải điều kiện $y'(x_0) = 0$, tìm m .
- ② Thử lại với m vừa tìm được bằng một trong hai cách sau:
 - **Cách 1:** Lập bảng biến thiên với m vừa tìm được. Xem giá trị m nào thỏa yêu cầu.
 - **Cách 2:** Tính y'' . Thử $y''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ là điểm CĐ; $y''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ là điểm CT.

❖ **Ví dụ 16.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + m^2x + 2$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

- A. $m = 1$.
- B. $m = 3$.
- C. $m = 1$ hoặc $m = 3$.
- D. $m = -1$.

❖ **Ví dụ 17.** Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ với m là tham số. Với giá trị nào của tham số m thì hàm số đạt cực đại tại $x = 2$?

- A. $m = -3$.
- B. $m = 3$.
- C. $m = -1$.
- D. $m = 0$.

DẠNG 5

Biện luận cực trị hàm bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Các kết quả cần nhớ:

☼ Cực trị là nghiệm (bội lẻ) của phương trình $y' = 0$ (phương trình bậc hai). Suy ra

① $\begin{cases} \Delta > 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$: Hàm số có hai điểm cực trị

② $\Delta \leq 0$ hoặc suy biến $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$: Hàm số không có cực trị.

☼ Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của $y' = 0$ thì $x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a}$ và $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{3a}$.

- $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$
- $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$
- $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$.

☼ Các công thức tính toán thường gặp

- Độ dài $MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}$
- Khoảng cách từ M đến Δ : $d(M, \Delta) = \frac{|Ax_M + By_M + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, với $\Delta: Ax + By + C = 0$.
- Tam giác ABC vuông tại $A \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$.
- Diện tích tam giác ABC là $S = \frac{1}{2}|a_1b_2 - a_2b_1|$, với $\vec{AB} = (a_1; b_1)$, $\vec{AC} = (a_2; b_2)$.

☼ Phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị là $y = -\frac{2}{9a}(b^2 - 3ac)x + d - \frac{bc}{9a}$.

❖ **Ví dụ 18.** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 +$

$5mx - 1$ không có cực trị?

- A. 6. B. 3. C. 5. D. 4.

❖ **Ví dụ 19.** Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (m + 1)x + 2$ có hai điểm cực trị.

- A. $m < 2$. B. $m \leq 2$. C. $m > 2$. D. $m < -4$.

❖ **Ví dụ 20.** Cho $y = (m - 3)x^3 + 2(m^2 - m - 1)x^2 + (m + 4)x - 1$. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục tung. Tìm số phần tử của S .

- A. 4. B. 5. C. 6. D. 7.

❖ **Ví dụ 21.** Gọi S là tập các giá trị dương của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 9x - m$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| \leq 2$. Biết $S = (a; b]$. Tính $T = b - a$.

- A. $T = 2 + \sqrt{3}$. B. $T = 1 + \sqrt{3}$. C. $T = 2 - \sqrt{3}$. D. $T = 3 - \sqrt{3}$.

❖ **Ví dụ 22.** Cho hàm số $y = -x^3 - 3mx^2 + m - 2$ với m là tham số. Tổng tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho $AB = 2$ bằng

- A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.

❖ **Ví dụ 23.** Tìm m để đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3mx + 1$ có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác OAB vuông tại gốc tọa độ O .

- A. $m = \frac{1}{2}$. B. $m = -1$. C. $m = 1$. D. $m = 0$.

DẠNG 6

Biện luận cực trị hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$

a) Tính $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $2ax^2 + b = 0$ (1).

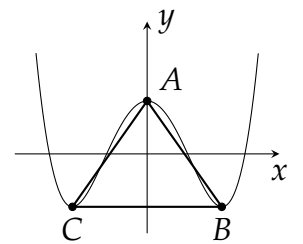
b) Nhận xét:

- ☑ Hàm số có ba điểm cực trị khi (1) có hai nghiệm khác 0. Suy ra $ab < 0$
- ☑ Hàm số có đúng một điểm cực trị $ab \geq 0$ và a, b không đồng thời bằng 0.

c) Các công thức tính nhanh:

☑ $\cos A = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a}$;

☑ $S_{ABC}^2 = -\frac{b^5}{32a^3}$.



❖ **Ví dụ 24.** Cho hàm số $y = (m + 1)x^4 - mx^2 + 3$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số có ba điểm cực trị.

- A. $m \in (-\infty; -1) \cup [0; +\infty)$. B. $m \in (-1; 0)$.
C. $m \in (-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$. D. $m \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$.

❖ **Ví dụ 25.** Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = (m - 2)x^4 + (m^2 - 4)x^2 + 2m - 3$ có đúng 1 điểm cực trị.

- A. $m \in [-2; 2)$. B. $m \in [-2; +\infty) \setminus \{2\}$.
C. $m \in [-2; 2]$. D. $m \in [-2; +\infty)$.

❖ **Ví dụ 26.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^4 + (6m - 4)x^2 + 1 - m$ là ba đỉnh của một tam giác vuông.

- A. $m = \frac{2}{3}$. B. $m = \frac{1}{3}$. C. $m = -1$. D. $m = \sqrt[3]{3}$.

❖ **Ví dụ 27.** Gọi m_0 là giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 - 1$ có 3 điểm cực trị lập thành một tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $m_0 \in (-1; 1]$. B. $m_0 \in (-2; -1]$. C. $m_0 \in (-\infty; -2]$. D. $m_0 \in (-1; 0)$.

DẠNG 7 Tìm cực trị của hàm hợp, hàm liên kết khi biết hàm $f'(x)$

⚙ **Loại 1:** Cho đồ thị $f'(x)$, hỏi cực trị của hàm hợp $y = f(u)$.

- ① Tính $y' = u' \cdot f'(u)$;
- ② Giải phương trình $f'(u) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u' = 0 \\ f'(u) = 0 \end{cases}$ (nhìn đồ thị, suy ra nghiệm.);
- ③ Xét dấu $f'(u)$. Lập bảng biến thiên của $y = f(u)$, suy ra kết quả tương ứng.

⚙ **Loại 2:** Cho đồ thị $f'(x)$, hỏi cực trị của hàm $y = f[u(x)] + v(x)$.

- ① Tính $y' = u' \cdot f'(u) + v'$;
- ② Giải phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow u' \cdot f'(u) + v' = 0$ (thường dẫn đến việc tìm hoành độ giao điểm của đồ thị $f'(u)$ với một đồ thị xác định. Loại này ta vẽ hình để suy ra nghiệm).
- ③ Lập bảng biến thiên của $y = f[u(x)] + v(x)$, suy ra kết quả tương ứng.

❖ **Ví dụ 28.** (QG.2019 - Mã đề 104). Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	-3	2	-1	$+\infty$

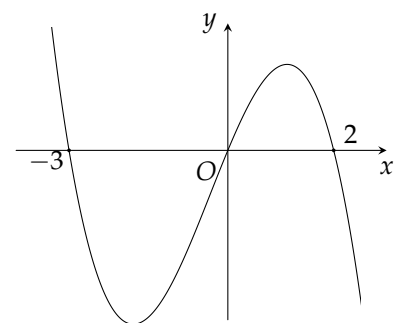
Số điểm cực trị của hàm số $y = f(4x^2 + 4x)$ là

- A. 5. B. 9. C. 7. D. 3.

❖ **Ví dụ 29.**

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} . Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(6 - x^2)$ là

- A. 4. B. 3.
C. 1. D. 7.

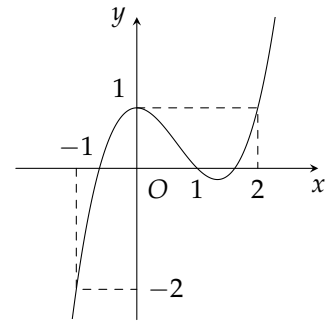


❖ Ví dụ 30.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số

$g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 2$ đạt cực tiểu tại điểm nào dưới đây?

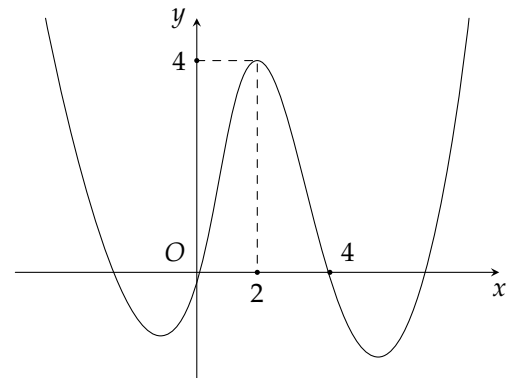
- A. $x = 0$. B. $x = 0,5$. C. $x = 1$. D. $x = -1$.



❖ Ví dụ 31.

Cho hàm số bậc năm $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x^2) - 2x^3 - 6x^2$ là

- A. 7. B. 10. C. 5. D. 11.



C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Đề số 1

Câu 1. Tọa độ điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ là

- A. (0; 1). B. (2; -3). C. (1; -1). D. (3; 1).

Câu 2. Gọi x_1 là điểm cực đại x_2 là điểm cực tiểu của hàm số $y = -x^3 + 3x + 2$. Tính $x_1 + 2x_2$.

- A. 2. B. 1. C. -1. D. 0.

Câu 3. Hiệu số giữa giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ là

- A. 4. B. -4. C. -2. D. 2.

Câu 4. Điểm cực tiểu của hàm số $y = -x^4 + 5x^2 - 2$ là

- A. $y = 0$. B. $x = -2$. C. $x = 0$. D. $y = -2$.

Câu 5. Cho hàm số $y = x^4 - 8x^3 + 1$. Chọn mệnh đề đúng.

- A. Nhận điểm $x = 6$ làm điểm cực đại. B. Nhận điểm $x = 6$ làm điểm cực tiểu.
C. Nhận điểm $x = 0$ làm điểm cực đại. D. Nhận điểm $x = 0$ làm điểm cực tiểu.

Câu 6. Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 2$ là

- A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.

Câu 7. Tiếp tuyến tại điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 5$

- A. Có hệ số góc dương. B. Song song với trục hoành.
C. Có hệ số góc bằng -1. D. Song song với đường thẳng $x = 1$.

Câu 8. Khoảng cách từ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ đến trục tung bằng

- A. 1. B. 2. C. 4. D. 0.

Câu 9. Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$. Tính diện tích S của tam giác OAB với O là gốc tọa độ.

- A. $S = 8$. B. $S = \sqrt{3}$. C. $S = 2$. D. $S = 4$.

Câu 10. Cho hàm số $y = x^4 - 8x^2 + 10$ có đồ thị (C) . Gọi A, B, C là ba điểm cực trị của đồ thị (C) . Tính diện tích S của tam giác ABC .

- A. $S = 64$. B. $S = 32$. C. $S = 24$. D. $S = 12$.

Câu 11. Tìm hàm số có đồ thị (C) nhận điểm $N(1; -2)$ là cực tiểu

- A. $y = x^4 - x^2 - 2$. B. $y = x^4 + 2x^2 - 4$. C. $y = -x^4 + 2x^2$. D. $y = x^4 - 2x^2 - 1$.

Câu 12. Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2 - 4$. Diện tích tam giác tạo bởi ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là

- A. 4. B. $\frac{1}{2}$. C. 1. D. 2.

Câu 13. Hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

Câu 14. Số điểm cực trị của hàm số $y = x^{2017}(x+1)$ là

- A. 2017. B. 2. C. 1. D. 0.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên \mathbb{R} và có đạo hàm $y' = f'(x) = 3x^3 - 3x^2$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. Trên khoảng $(1; +\infty)$ hàm số đồng biến. B. Trên khoảng $(-1; 1)$ hàm số nghịch biến.
C. Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị. D. Đồ thị hàm số có một điểm cực tiểu.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(x-2)^3$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$		0	1	0	$+\infty$

Giá trị cực đại của hàm số là

- A. $y = 1$. B. $y = 0$. C. $x = 1$. D. $x = 0$.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên dưới.

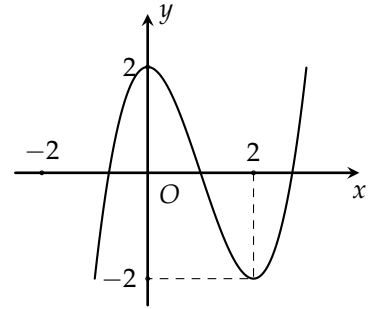
x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
y'		$+$	0	$-$	$+$	0	$-$		
y	$-\infty$		2		-1	-1	3		2

Hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 2.
 B. Hàm số có giá trị cực đại bằng 0.
 C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và cực tiểu tại $x = 2$.
 D. Hàm số có ba điểm cực trị.



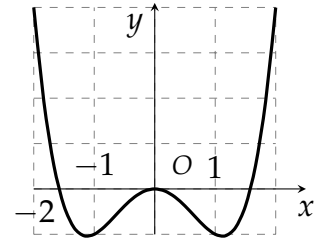
Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên \mathbb{R} và có bảng xét dấu của đạo hàm như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

- A. $x = 0$. B. $x = 2$. C. $y = 0$. D. $y = 2$.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	-	0	+	0	-

Câu 21. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng K , biết đồ thị của hàm số $y' = f'(x)$ trên $[-2; 2]$ như hình vẽ bên. Tìm số cực trị của hàm số $y = f(x)$ trên $[-2; 2]$.

- A. 1. B. 2.
 C. 3. D. 4.



Câu 22. Hàm số $y = x - 3\sqrt[3]{x^2}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 2. B. 0. C. 1. D. 8.

Câu 23. Hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + m^2x - 2$ đạt cực tiểu tại $x = 1$ khi

- A. $m = 3$. B. $m = 1$. C. $m = -1$. D. $m = -3$.

Câu 24. Với giá trị nào của m thì hàm số $y = mx^3 - 3mx + 2$ đạt cực đại tại $x = 1$?

- A. $m = 3$. B. $m < 0$. C. $m = 1$. D. $m \neq 0$.

Câu 25. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3m + 1$ có hai điểm cực trị.

- A. $m \geq 0$. B. $\forall m \in \mathbb{R}$. C. $m \leq 0$. D. $m \neq 0$.

Câu 26. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = x^3 - mx^2 + \left(m + \frac{4}{3}\right)x + 10$ có hai điểm cực trị. Hỏi có bao nhiêu số nguyên $m \in S$ và thỏa $|m| \leq 2018$?

- A. 4031. B. 4036. C. 4029. D. 4033.

Câu 27. Cho hàm số $y = 2x^3 + 3(m - 1)x^2 + 6(m - 2)x - 18$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số có hai điểm cực trị thuộc khoảng $(-5; 5)$ là

- A. $(-\infty; -3) \cup (7; +\infty)$. B. $(-3; +\infty) \setminus \{3\}$.
 C. $(-\infty; 7) \setminus \{3\}$. D. $(-3; 7) \setminus \{3\}$.

Câu 28. Biết đồ thị hàm số $y = x^4 + bx^2 + c$ chỉ có một điểm cực trị là điểm có tọa độ $(0; -1)$, khi đó b và c thỏa mãn những điều kiện nào dưới đây?

- A. $b < 0$ và $c = -1$. B. $b \geq 0$ và $c > 0$. C. $b < 0$ và $c < 0$. D. $b \geq 0$ và $c = -1$.

Câu 29. Cho hàm số $y = (m + 1)x^4 - mx^2 + 3$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số có ba điểm cực trị.

- A. $m \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$. B. $m \in (-1; 0)$.
 C. $m \in (-\infty; -1) \cup [0; +\infty)$. D. $m \in (-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$.

Câu 30. Cho hàm số $f(x) = x^4 + 4mx^3 + 3(m+1)x^2 + 1$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số có cực tiểu mà không có cực đại. Tính tổng các phần tử của tập S .

- A. 1. B. 2. C. 6. D. 0.

Câu 31. Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới

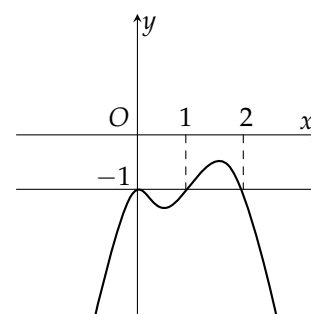
x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$		2		$+\infty$
		-3		-1	

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ là

- A. 3. B. 9. C. 5. D. 7.

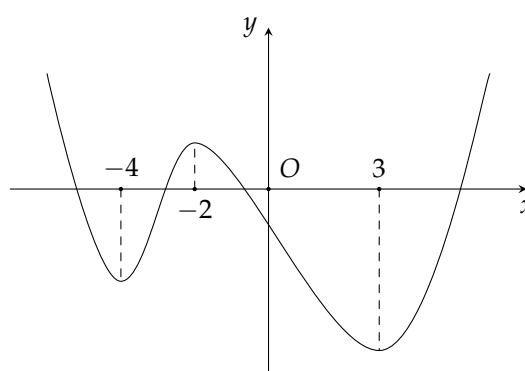
Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên \mathbb{R} , có đạo hàm $f'(x)$. Biết rằng đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Xác định điểm cực đại của hàm số $g(x) = f(x) + x$.

- A. Không có giá trị. B. $x = 0$.
C. $x = 1$. D. $x = 2$.



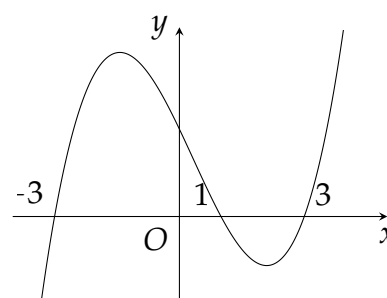
Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ là đa thức bậc 5 có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f(x^2 + 2x) - x^2$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1. B. 2.
C. 4. D. 3.



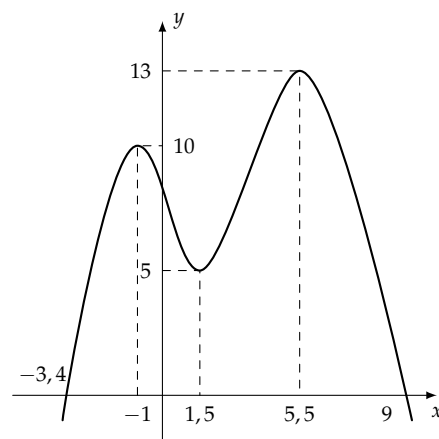
Câu 34. Cho đồ thị hàm đa thức $y = f(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $g(x) = f(x) \cdot f(2x+1)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 5. B. 6.
C. 7. D. 9.



Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên \mathbb{R} và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Biết rằng $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (-\infty; -3,4) \cup (9; +\infty)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(x) - mx + 5$ có đúng hai điểm cực trị.

- A. 8. B. 6.
C. 5. D. 7.



—HẾT—

2. Đề số 2

Câu 1. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = -2x^3 + 3x^2 + 1$.

- A. $y = x + 1$. B. $y = -x + 1$. C. $y = x - 1$. D. $y = -x - 1$.

Câu 2. Gọi d là đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$. Điểm nào sau đây thuộc d ?

- A. $M(-2; 1)$. B. $N(3; -5)$. C. $P(2; 3)$. D. $Q(3; -1)$.

Câu 3. Khoảng cách giữa hai điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số $y = (x + 1)(x - 2)^2$

- A. $5\sqrt{2}$. B. 2. C. $2\sqrt{5}$. D. 4.

Câu 4. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$. Diện tích S của tam giác tạo bởi ba đỉnh cực trị của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 3. B. 4. C. 1. D. 2.

Câu 5. Hàm số $f(x) = C_{2019}^0 + C_{2019}^1 x + C_{2019}^2 x^2 + \dots + C_{2019}^{2019} x^{2019}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

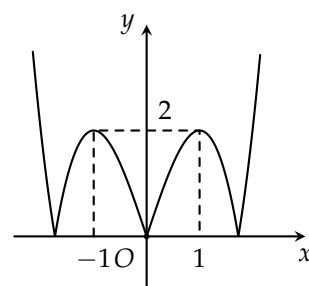
- A. 1. B. 2019. C. 2018. D. 0.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 1)x^2(x - 2)^{2019}$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có đồ thị như hình bên. Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 4. B. 5.
C. 2. D. 3.



Câu 8. Cho hàm số $y = f(x) = \sin 2x$. Trong khoảng $(0; 2018)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

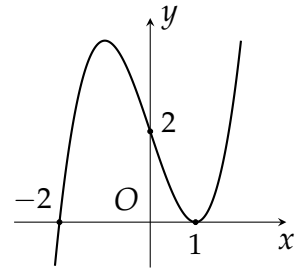
- A. 1285. B. 2017. C. 643. D. 642.

Câu 9. Cho hàm số $y = x - \sin 2x + 3$. Chọn kết luận đúng.

- A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \frac{\pi}{3}$.
 B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -\frac{\pi}{6}$.
 C. Hàm số đạt cực đại tại $x = \frac{\pi}{6}$.
 D. Hàm số đạt cực đại tại $x = -\frac{\pi}{6}$.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên \mathbb{R} . Biết hàm số $y = f'(x)$ liên tục và có đồ thị trên \mathbb{R} như trong hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y = f(x^2)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

- A. 2.
 B. 3.
 C. 1.
 D. 0.



Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} và có bảng xét dấu của $y = f'(x)$ như sau. Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

- A. 1.
 B. 2.
 C. 3.
 D. 4.

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$	
f'		$-$	0	$+$	0	$-$

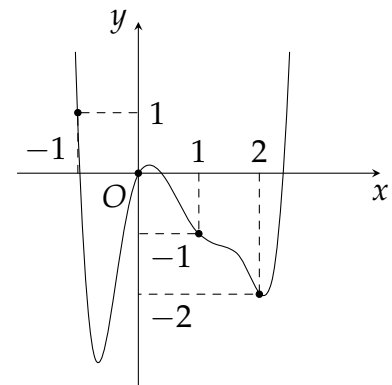
Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y = f(x^2 + 1)$ có bao nhiêu điểm cực trị.

- A. 0.
 B. 2.
 C. 3.
 D. 1.

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$
y	$+\infty$	-2	$+\infty$	$+\infty$

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} . Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $g(x) = 2f(x) + x^2$ đạt cực tiểu tại điểm nào sau đây?

- A. $x = -1$
 B. $x = 0$.
 C. $x = 1$.
 D. $x = 2$.



Câu 14. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx$ đạt cực tiểu tại $x = 2$.

- A. $m = 0$.
 B. $m = -2$.
 C. $m = 1$.
 D. $m = 2$.

Câu 15. Biết với $m = m_0$ thì hàm số $y = x^3 - mx + 1$ đạt cực đại tại $x = -2$. Tìm khẳng định đúng.

- A. $m_0 \in (0; 3)$.
 B. $m_0 \in (10; 14)$.
 C. $m_0 \in (7; 10)$.
 D. $m_0 \in (4; 6)$.

Câu 16. Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (3m - 2)x + 1$ có 2 cực trị khi và chỉ khi

- A. $m > 1$.
 B. $1 < m < 2$.
 C. $m < 1$ hoặc $m > 2$.
 D. $m = 1$.

Câu 17. Hàm số $y = x^3 - 3x + 1 - m$ với m là tham số. Hàm số có giá trị cực đại và giá trị cực tiểu trái dấu khi

- A. $m = -1$ hoặc $m = 3$.
 B. $-1 < m < 3$.
 C. $m < -1$ hoặc $m > 3$.
 D. $-1 < m \leq 3$.

- Câu 18.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -x^4 + 2(m-1)x^2 - m + 7$ có ba điểm cực trị.
- A. $m < 1$. B. $m > 1$. C. $m \geq 1$. D. $m \leq 1$.
- Câu 19.** Tập hợp các số thực m thỏa mãn hàm số $y = mx^4 - x^2 + 1$ có đúng một điểm cực trị là
- A. $(-\infty; 0)$. B. $(-\infty; 0]$. C. $(0; +\infty)$. D. $[0; +\infty)$.
- Câu 20.** Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2 + mx - 1$ nằm bên phải trục tung.
- A. $m < 0$. B. $0 < m < \frac{1}{3}$. C. $m < \frac{1}{3}$. D. Không tồn tại.
- Câu 21.** Biết m_0 là giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 13$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. $m_0 \in (-1; 7)$. B. $m_0 \in (-15; -7)$. C. $m_0 \in (7; 10)$. D. $m_0 \in (-7; -1)$.
- Câu 22.** Cho hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 18$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số có hai điểm cực trị thuộc khoảng $(-5; 5)$ là
- A. $(-\infty; -3) \cup (7; +\infty)$. B. $(-3; +\infty) \setminus \{3\}$.
C. $(-\infty; 7) \setminus \{3\}$. D. $(-3; 7) \setminus \{3\}$.
- Câu 23.** Cho điểm $A(-1; 3)$. Gọi m_1 và m_2 là các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + m$ có hai điểm cực trị B và C thỏa ba điểm A, B, C thẳng hàng. Tính $m_1 + m_2$.
- A. $m_1 + m_2 = \frac{5}{2}$. B. $m_1 + m_2 = -\frac{1}{2}$. C. $m_1 + m_2 = 0$. D. $m_1 + m_2 = -1$.
- Câu 24.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 + 2x^2 + (m-3)x + m$ có hai điểm cực trị và điểm $M(9; -5)$ nằm trên đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị.
- A. $m = 3$. B. $m = 2$. C. $m = -5$. D. $m = -1$.
- Câu 25.** Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2mx^2 + (m-1)x + 2m^2 + 1$ (m là tham số). Xác định khoảng cách lớn nhất từ gốc tọa độ $O(0; 0)$ đến đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số trên.
- A. $\sqrt{3}$. B. $\frac{2}{9}$. C. $2\sqrt{3}$. D. $\frac{\sqrt{10}}{3}$.
- Câu 26.** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = x^8 + (m-2)x^5 - (m^2-4)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?
- A. 3. B. 5. C. 4. D. Vô số.
- Câu 27.** Cho hàm số $y = f(x)$ biết $f'(x) = x^2(x-1)^3(x^2 - 2mx + m + 6)$. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị là
- A. 7. B. 5. C. 6. D. 4.
- Câu 28.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.
- A. $m = -\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$. B. $m = -1$. C. $m = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$. D. $m = 1$.
- Câu 29.** Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + m^4 - 3m^2 + 2017$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 32?
- A. 2. B. 3. C. 5. D. 4.

Câu 30. Đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{3}x^4 - mx^2 + m^2 - 1$ có 3 điểm cực trị tạo thành 3 đỉnh của một tam giác đều khi và chỉ khi

- A. $m = 2$. B. $m = -2$. C. $m = 1$. D. $m = \sqrt[3]{\frac{8}{3}}$.

Câu 31. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m^4 - m$ có ba điểm cực trị đều thuộc các trục tọa độ.

- A. $m = 2$. B. $m = 3$. C. $m = 1$. D. $m = \frac{1}{2}$.

Câu 32. Cho hàm số $y = \frac{mx^2 + (m+2)x + 5}{x^2 + 1}$. Gọi S là tập hợp các giá trị của m sao cho đồ thị hàm số đã cho có đúng hai điểm cực trị và đường thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số cắt hai trục tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích bằng $\frac{25}{4}$. Tính tổng các phần tử của S .

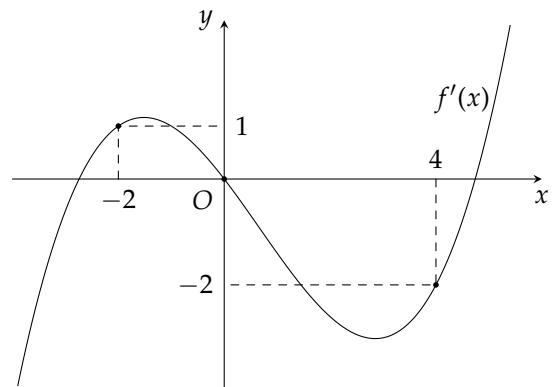
- A. 0. B. 1. C. -4. D. -2.

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^3 + 2x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(x^3 - 3x)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 6. B. 3. C. 5. D. 2.

Câu 34. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $g(x) = 4f(x^2 - 4) + x^4 - 8x^2$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

- A. 4. B. 7.
C. 3. D. 5.



—HẾT—

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

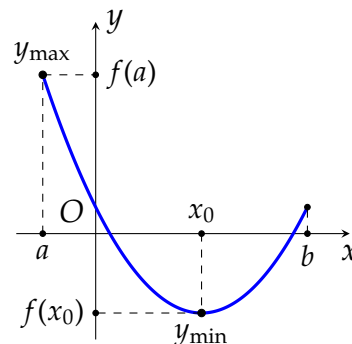
1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập \mathcal{D} . Ta có

① M là giá trị lớn nhất của hàm số nếu $\begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in \mathcal{D} \\ \exists x_0 \in \mathcal{D} : f(x_0) = M. \end{cases}$

Kí hiệu $\boxed{\max_{x \in \mathcal{D}} f(x) = M}$

② n là giá trị nhỏ nhất của hàm số nếu $\begin{cases} f(x) \geq n, \forall x \in \mathcal{D} \\ \exists x_0 \in \mathcal{D} : f(x_0) = n. \end{cases}$

Kí hiệu $\boxed{\min_{x \in \mathcal{D}} f(x) = n}$



2. Các phương pháp thường dùng để tìm max - min

- ① Dùng đạo hàm (đối với hàm một biến), lập bảng biến thiên.
- ② Đặt ẩn phụ, để đưa về khảo sát một hàm đơn giản hơn (nhớ tìm điều kiện của ẩn phụ).
- ③ Dùng bất đẳng thức: (nhớ kiểm tra dấu bằng).

- Bất đẳng thức Cauchy: Với $a_1; a_2; \dots; a_n$ là các số thực không âm, ta luôn có

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

⚠ Trường hợp thường gặp Cauchy cho 2 số hoặc 3 số:

$$- a_1 + a_2 \geq 2\sqrt{a_1 a_2}. \quad \text{Dấu đẳng thức xảy ra khi } a_1 = a_2.$$

$$- a_1 + a_2 + a_3 \geq 3\sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}. \quad \text{Dấu đẳng thức xảy ra khi } a_1 = a_2 = a_3.$$

- Bất đẳng thức Bu-nhia-côp-xki: Với hai bộ số $a_1; a_2; \dots; a_n$ và $b_1; b_2; \dots; b_n$, ta luôn có

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$.

④ Dùng điều kiện có nghiệm của phương trình.

Giả sử y_0 thuộc miền giá trị của hàm số $y = f(x)$. Khi đó, tồn tại $x \in \mathcal{D}$ để phương trình $f(x) = y_0$ có nghiệm. Biện luận điều kiện này, ta sẽ tìm được "khoảng dao động" của y_0 . Từ đó suy ra max, min.

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

DẠNG 1 Tìm max – min của hàm số cho trước

Xét bài toán "Tìm giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số $y = f(x)$ trên miền \mathcal{D} ."

Phương pháp thường dùng:

- Đạo hàm và lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên miền \mathcal{D} .
- Quan sát bảng biến thiên, suy ra kết quả.

Chú ý: Nếu \mathcal{D} là một đoạn $[a; b]$, thì ta có thể giải nhanh như sau

- Giải $f'(x) = 0$, tìm các nghiệm $x_0 \in \mathcal{D}$.
- Tính toán $f(a), f(x_0), f(b)$. So sánh giá trị và chọn kết quả.

❖ **Ví dụ 1.** Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$ trên $[-4; 4]$. Tính tổng $M + m$.

- A. 12. B. 98. C. 17. D. 73.

❖ **Ví dụ 2 (Đề minh họa BDG 2019-1020).** Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = -x^4 + 12x^2 + 1$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

- A. 33. B. 37. C. 12. D. 1.

❖ **Ví dụ 3.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ trên đoạn $[0; 3]$ là

- A. $\min_{[0;3]} y = \frac{1}{2}$. B. $\min_{[0;3]} y = -3$. C. $\min_{[0;3]} y = 1$. D. $\min_{[0;3]} y = -1$.

❖ **Ví dụ 4.** Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$ trên đoạn $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$ bằng

- A. 4. B. -3. C. $-\frac{7}{2}$. D. $-\frac{13}{3}$.

❖ **Ví dụ 5.** Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \sqrt{7 + 6x - x^2}$.

- A. $M = 4$. B. $M = \sqrt{7}$. C. $M = 7$. D. $M = 3$.

❖ **Ví dụ 6.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3x + \frac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ bằng

- A. $3\sqrt[3]{9}$. B. $2\sqrt[3]{9}$. C. $\frac{33}{5}$. D. $\frac{25}{4}$.

❖ **Ví dụ 7.** Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{mx+1}{x-m}$ trên đoạn $[1; 2]$ bằng 3. Khi đó giá trị m thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. $\left(-\frac{3}{4}; 0\right)$. B. $\left(1; \frac{3}{2}\right)$. C. $\left(0; \frac{3}{4}\right)$. D. $\left(\frac{3}{4}; 11\right)$.

❖ **Ví dụ 8.** Cho hàm số $y = \frac{2x-m}{x+2}$ với m là tham số và $m \neq -4$. Biết $\min_{[0;2]} f(x) + \max_{[0;2]} f(x) = -8$. Giá trị của tham số m bằng

- A. 12. B. 9. C. 8. D. 10.

❖ **Ví dụ 9.** Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số liên tục trên \mathbb{R} và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

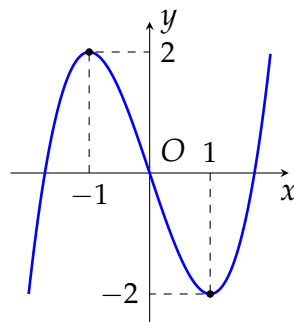
- A. Cực đại của hàm số là 4.
 B. Cực tiểu của hàm số là 3.
 C. $\max_{\mathbb{R}} y = 4$.
 D. $\min_{\mathbb{R}} y = 3$.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$			
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow	4	\searrow	3	\nearrow	4	\searrow	$-\infty$

❖ **Ví dụ 10.**

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong ở hình bên. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 1]$.

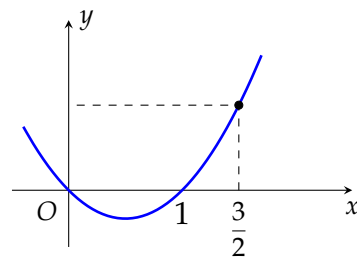
- A. $m = 2$.
 B. $m = -2$.
 C. $m = 1$.
 D. $m = -1$.



❖ **Ví dụ 11.**

Cho hàm số $y = f(x)$, biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$ tại điểm nào sau đây?

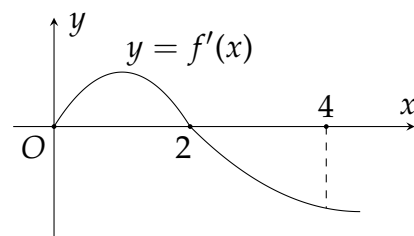
- A. $x = \frac{3}{2}$.
 B. $x = \frac{1}{2}$.
 C. $x = 1$.
 D. $x = 0$.



❖ **Ví dụ 12.**

Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Biết $f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3)$. Giá trị nhỏ nhất m , giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 4]$ là

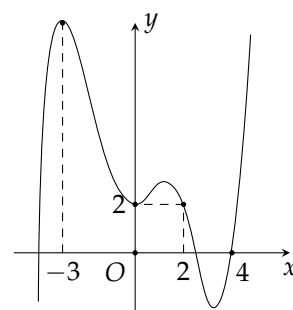
- A. $m = f(4), M = f(1)$.
 B. $m = f(4), M = f(2)$.
 C. $m = f(1), M = f(2)$.
 D. $m = f(0), M = f(2)$.



❖ **Ví dụ 13.**

(Minh họa 2021). Cho hàm số $f(x)$, đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(2x) - 4x$ trên đoạn $[-\frac{3}{2}; 2]$ bằng

- A. $f(0)$.
 B. $f(-3) + 6$.
 C. $f(2) - 4$.
 D. $f(4) - 8$.



❖ **Ví dụ 14.** Gọi M, m tương ứng là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2 \cos x + 1}{\cos x - 2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $9M + m = 0$.
 B. $9M - m = 0$.
 C. $M + 9m = 0$.
 D. $M + m = 0$.

DẠNG 2 Tìm max – min của hàm chứa ẩn trong dấu trị tuyệt đối $y = |f(x)|$

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $[a; b]$. Gọi $M = \max_{[a;b]} f(x)$ và $m = \min_{[a;b]} f(x)$. Ta có các kết quả sau:

Giá trị lớn nhất: $\max_{[a;b]} |f(x)| = \max \{|M|, |m|\} = \frac{|M| + |m| + \left| |M| - |m| \right|}{2}$

Giá trị nhỏ nhất: Các trường hợp có thể xảy ra

- Nếu $m \geq 0$ thì $\min_{[a;b]} |f(x)| = m$.
- Nếu $M \leq 0$ thì $\min_{[a;b]} |f(x)| = -M$.
- Nếu $M \cdot m < 0$ thì $\min_{[a;b]} |f(x)| = 0$.

❖ **Ví dụ 15.** Cho hàm số $y = g(x)$ liên tục trên $[a; b]$, đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên $[a; b]$ lần lượt là 3 và -5 . Tìm giá trị lớn nhất M và nhỏ nhất n của hàm số $y = |g(x)|$ trên đoạn $[a; b]$.

- A. $M = 3$ và $n = -5$. B. $M = 5$ và $n = 0$. C. $M = 8$ và $n = 0$. D. $M = 5$ và $n = -3$.

❖ **Ví dụ 16.** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng 3. Số phần tử của S là

- A. 6. B. 2. C. 1. D. 0.

❖ **Ví dụ 17.** Cho hàm số $f(x) = |x^4 - 2x^2 + m|$. Có bao nhiêu số nguyên m để $\max_{[-1;2]} f(x) \leq 100$.

- A. 192. B. 193. C. 191. D. 190.

❖ **Ví dụ 18.** Cho hàm số $y = f(x) = |x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0; 2]$. Số giá trị nguyên a thuộc đoạn $[-3; 3]$ sao cho $M \leq 2m$ là

- A. 5. B. 6. C. 3. D. 7.

DẠNG 3 Một số bài toán vận dụng

Bài toán chuyển động:

- Gọi $s(t)$ là hàm quãng đường; $v(t)$ là hàm vận tốc; $a(t)$ là hàm gia tốc;
- Khi đó $s'(t) = v(t)$; $v'(t) = a(t)$.

Bài toán thực tế – tối ưu:

- Biểu diễn dữ kiện cần đạt max – min qua một hàm $f(t)$.
- Khảo sát hàm $f(t)$ trên miền điều kiện của hàm và suy ra kết quả.

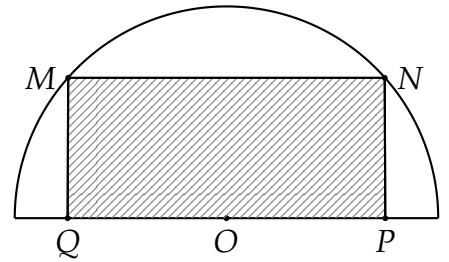
❖ **Ví dụ 19.** Một chất điểm chuyển động với quãng đường $s(t)$ cho bởi công thức $s(t) = 6t^2 - t^3$, t (giây) là thời gian. Hỏi trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây, vận tốc v (m/s) của chất điểm đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm t (giây) bằng bao nhiêu?

- A. $t = 3$ s. B. $t = 4$ s. C. $t = 2$ s. D. $t = 6$ s.

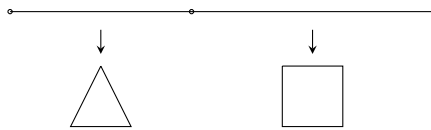
❖ Ví dụ 20.

Từ một tấm tôn có hình dạng là nửa hình tròn bán kính $R = 3$, người ta muốn cắt ra một hình chữ nhật (hình vẽ bên). Diện tích lớn nhất có thể của tấm tôn hình chữ nhật là

- A. $\frac{9}{2}$. B. $6\sqrt{2}$. C. 9. D. $9\sqrt{2}$.



❖ Ví dụ 21. Một sợi dây có chiều dài là 6 m, được chia thành 2 phần. Phần thứ nhất được uốn thành hình tam giác đều, phần thứ hai uốn thành hình vuông. Hỏi độ dài của cạnh hình tam giác đều bằng bao nhiêu để tổng diện tích 2 hình thu được là nhỏ nhất?

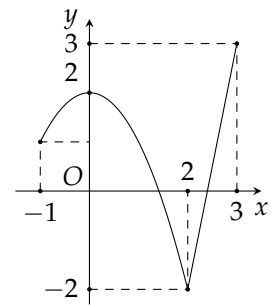


- A. $\frac{12}{4 + \sqrt{3}}$ m. B. $\frac{18\sqrt{3}}{4 + \sqrt{3}}$ m. C. $\frac{36\sqrt{3}}{4 + \sqrt{3}}$ m. D. $\frac{18}{9 + 4\sqrt{3}}$ m.

C // BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 3]$. Giá trị $M - m$ bằng

- A. 5. B. 1.
C. 4. D. 2.



Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Xét ba khẳng định sau:

- (1) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.
- (2) Hàm số có một cực đại.
- (3) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 3.

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$-$		
y	$-\infty$	\nearrow	3	\searrow	\nearrow	3	\searrow	$-\infty$

Số khẳng định đúng trong ba khẳng định trên là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Câu 3. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = -x^4 + 4x^2$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

- A. 1. B. 4. C. 5. D. 3.

Câu 4. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ trên đoạn $[-4; 4]$. Tính $T = M + 2m$.

- A. $T = -41$. B. $T = -44$. C. $T = -43$. D. $T = -42$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'		-	-	0	+	0	-

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\min_{(-1;+\infty)} f(x) = f(0)$.
 B. $\max_{(0;+\infty)} f(x) = f(1)$.
 C. $\max_{(-1;1]} f(x) = f(0)$.
 D. $\min_{(-\infty;-1)} f(x) = f(-1)$.

Câu 6. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng

- A. $\frac{6}{7}$.
 B. $\frac{5}{6}$.
 C. $\frac{4}{5}$.
 D. $\frac{2}{3}$.

Câu 7. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2+3}{x+1}$ trên đoạn $[-4; -2]$ là

- A. $\min_{[-4;-2]} y = -7$.
 B. $\min_{[-4;-2]} y = -\frac{19}{3}$.
 C. $\min_{[-4;-2]} y = -8$.
 D. $\min_{[-4;-2]} y = -6$.

Câu 8. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \sqrt{12 - 3x^2}$.

- A. $\max y = 4, \min y = 2$.
 B. $\max y = 4, \min y = -2$.
 C. $\max y = 2, \min y = -2$.
 D. $\max y = 2, \min y = -4$.

Câu 9. Tổng giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{2-x^2} - x$ bằng bao nhiêu?

- A. $2 - \sqrt{2}$.
 B. 2.
 C. $2 + \sqrt{2}$.
 D. 1.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có bảng biến thiên như hình bên dưới. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số có hai điểm cực trị.
 B. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 0 và giá trị lớn nhất bằng 1.
 C. Hàm số có giá trị cực đại bằng 0.
 D. Hàm số có đạt cực tiểu tại $x = 0$ và đạt cực đại tại $x = 1$.

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$				
y'		-	0	+	0	-		
y	$+\infty$			0		1		$-\infty$

Câu 11. Trên khoảng $(0; 1)$, hàm số $y = x^3 + \frac{1}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x_0 bằng

- A. $\frac{1}{2}$.
 B. $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$.
 C. $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.
 D. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 12. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = 4x^2 + \frac{1}{x} - 4$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

- A. $m = -1$.
 B. $m = -4$.
 C. $m = 7$.
 D. $m = -3$.

Câu 13. Gọi m và M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{2x+19}{x^2+16x+68}$.
 Tính tích mM .

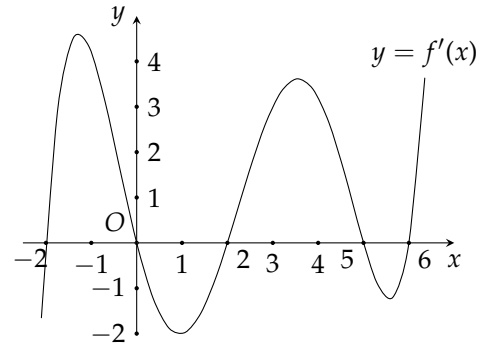
- A. $mM = -0.20$.
 B. $mM = -0.25$.
 C. $mM = -0.15$.
 D. $mM = -0.30$.

Câu 14. Hàm số $y = 4 \sin x - 3 \cos x$ có giá trị lớn nhất M , giá trị nhỏ nhất m là

- A. $M = 7, m = 1$.
 B. $M = 5, m = -5$.
 C. $M = 1, m = -7$.
 D. $M = 7, m = -7$.

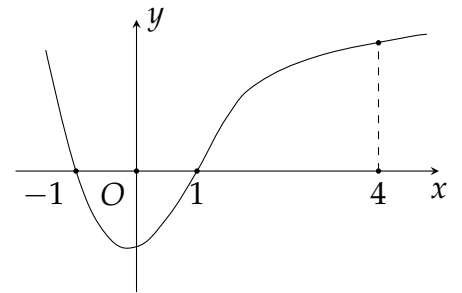
Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 6]$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0; 6]$ bằng

- A. $f(2)$. B. $f(0)$. C. $f(5)$. D. $f(6)$.



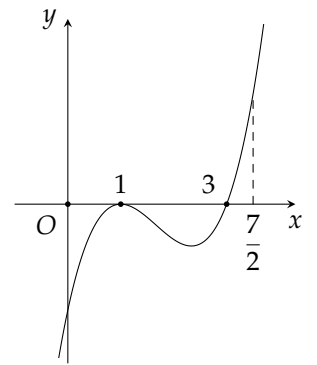
Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Biết rằng $f(-1) + f(2) = f(1) + f(4)$, các điểm $A(1; 0)$, $B(-1; 0)$ thuộc đồ thị. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[-1; 4]$ lần lượt là

- A. $f(1), f(-1)$. B. $f(0), f(2)$.
C. $f(-1), f(4)$. D. $f(1), f(4)$.



Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0; \frac{7}{2}\right]$ tại điểm nào dưới đây?

- A. $x_0 = 0$. B. $x_0 = 1$. C. $x_0 = \frac{7}{2}$. D. $x_0 = 3$.



Câu 18. Cho hàm số $f(x) = \frac{x - m}{x + 1}$, với m là tham số. Biết $\min_{[0;3]} f(x) + \max_{[0;3]} f(x) = -2$. Hãy chọn kết luận đúng?

- A. $m = 2$. B. $m > 2$. C. $m = -2$. D. $m < -2$.

Câu 19. Cho hàm số $y = \frac{x - m^2 + m}{x + 1}$. Tổng các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0; 1]$ bằng -2 là

- A. 2. B. -2 . C. 0. D. 1.

Câu 20. Gọi T là tập hợp tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{mx + 1}{x + m^2}$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[2; 3]$ bằng $\frac{5}{6}$. Tính tổng S của các phần tử trong T .

- A. $S = \frac{18}{5}$. B. $S = \frac{17}{5}$. C. $S = 6$. D. $S = 2$.

Câu 21. Cho $a > 0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{7(a^2 + 9)}{a} + \frac{a}{a^2 + 9}$ bằng

- A. $\frac{251}{3}$. B. $2\sqrt{7}$. C. $\frac{253}{3}$. D. $\frac{253}{6}$.

Câu 22. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\cos^2 x - 5 \cos x + 3}{\cos x - 6}$ là

- A. $y_{\max} = \frac{1}{5}; y_{\min} = -\frac{9}{7}$.
 B. $y_{\max} = 13; y_{\min} = 4$.
 C. $y_{\max} = 1; y_{\min} = -\frac{9}{7}$.
 D. $y_{\max} = \frac{1}{5}; y_{\min} = -1$.

Câu 23. M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \cos x(1 + 2 \cos 2x)$. Tìm $2M - m$.

- A. 9. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $6 + \frac{\sqrt{3}}{9}$. D. $\frac{2\sqrt{3}}{9} + 3$.

Câu 24. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \cos^2 2x - \sin x \cos x + 4$ trên \mathbb{R} .

- A. $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{7}{2}$. B. $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 3$. C. $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{10}{3}$. D. $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{16}{5}$.

Câu 25. Cho hai số thực x, y thay đổi thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 = 2$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2(x^3 + y^3) - 3xy$. Giá trị của $M + m$ bằng

- A. -4. B. $-\frac{1}{2}$. C. -6. D. $1 - 4\sqrt{2}$.

Câu 26. Cho biểu thức $P = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ với x, y khác 0. Giá trị nhỏ nhất của P bằng

- A. -2. B. 0. C. -1. D. 1.

Câu 27. Cho x, y là hai số thực không âm thỏa mãn $x + y = 2$. Gọi a, b lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + y^2 - x + 1$. Khi đó kết luận nào sau đây là đúng?

- A. $a + b = \frac{22}{3}$. B. $a + b = \frac{10}{3}$. C. $a + b = 8$. D. $a + b = \frac{32}{3}$.

Câu 28. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x^2 + 2xy + 3y^2 = 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (x - y)^2$.

- A. $\max P = 8$. B. $\max P = 16$. C. $\max P = 12$. D. $\max P = 4$.

Câu 29. Một người thợ muốn làm một chiếc thùng hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông và không có nắp, biết thể tích của khối hộp là $V = 2,16 \text{ m}^3$. Giá nguyên liệu để làm bốn mặt bên là 36000 đồng/ m^2 và giá nguyên liệu để làm đáy là 90000 đồng/ m^2 . Tính các kích thước của hình hộp để chi phí làm chiếc thùng đó là nhỏ nhất.

- A. Cạnh đáy là 1,2 m, chiều cao là 1,8 m. B. Cạnh đáy là 1,5 m, chiều cao là 1,2 m.
 C. Cạnh đáy là 1,7 m, chiều cao là 1 m. D. Cạnh đáy là 1 m, chiều cao là 1,7 m.

Câu 30. Cho ba số dương x, y, z theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{\sqrt{x^2 + 8yz} + 3}{\sqrt{(2y + z)^2 + 6}}$.

- A. $\frac{5}{2\sqrt{2}}$. B. $\frac{5}{\sqrt{10}}$. C. $\frac{6}{\sqrt{10}}$. D. $\frac{6}{\sqrt{15}}$.

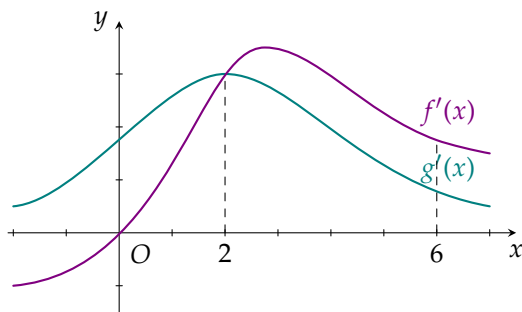
Câu 31. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{x^2 + mx + m}{x + 1} \right|$ trên $[1; 2]$ bằng 2. Số phần tử của S là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 32. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 - 2x + m|$ trên đoạn $[0; 3]$ bằng 5. Tổng các phần tử của S bằng

- A. 8. B. 2. C. -2. D. -12.

Câu 33. Cho hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ có đạo hàm là $f'(x), g'(x)$. Đồ thị hàm số $f'(x)$ và $g'(x)$ được cho như hình vẽ bên dưới.

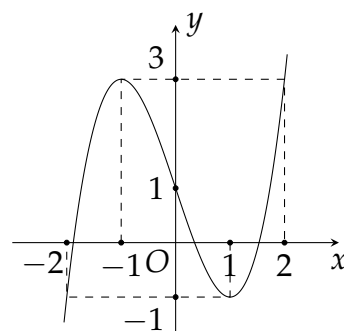


Biết rằng $f(0) - f(6) < g(0) - g(6)$. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x) = f(x) - g(x)$ trên đoạn $[0; 6]$ lần lượt là

- A. $h(2), h(6)$. B. $h(6), h(2)$. C. $h(0), h(2)$. D. $h(2), h(0)$.

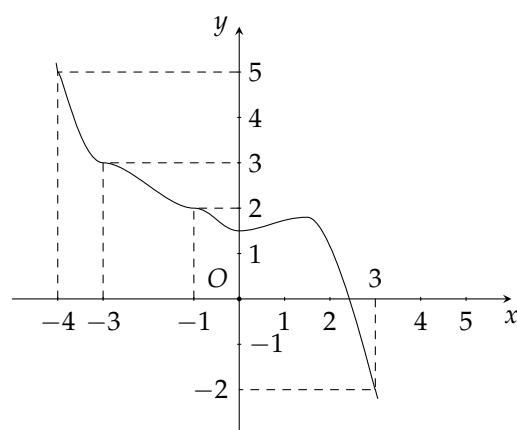
Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} và có đồ thị như hình vẽ. Đặt hàm số $g(x) = f(2x^3 + x - 1) + m$. Tìm m để $\max_{[0;1]} g(x) = -10$.

- A. $m = 3$. B. $m = -12$.
C. $m = -13$. D. $m = -1$.



Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong như hình bên. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = 2f(x) + (1 - x)^2$ trên đoạn $[-4; 3]$ bằng

- A. $2f(-3) + 16$. B. $2f(-4) + 25$.
C. $2f(-1) + 4$. D. $2f(3) + 4$.



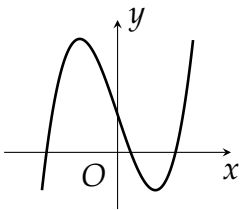
—HẾT—

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

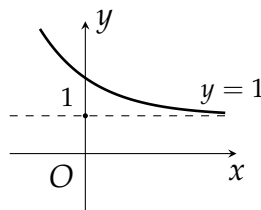
1. Đường tiệm cận ngang (TCN)

- ☑ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn $(a; +\infty)$, $(-\infty; b)$ hoặc $(-\infty; +\infty)$. Đường thẳng $y = y_0$ là TCN của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

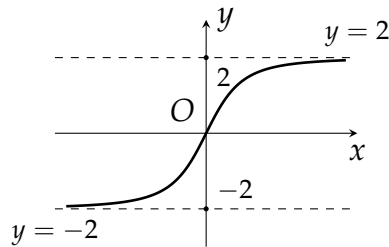
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0 \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$$



Không có TCN



Có TCN $y = 1$



Có TCN $y = 2, y = -2$

- ☑ Các bước tìm TCN:

① Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

② Xem ở "vị trí" nào ra kết quả hữu hạn thì ta kết luận có tiệm cận ngang ở "vị trí" đó.

- ☑ Sử dụng máy tính cầm tay: Nhập biểu thức $f(x)$.

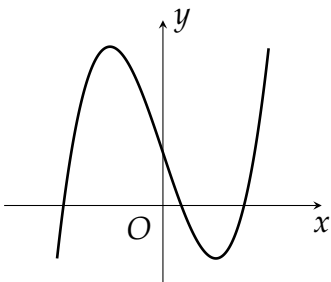
① Bấm **CACL** $X = 10^8$ để kiểm tra khi $x \rightarrow +\infty$.

② Bấm **CACL** $X = -10^8$ để kiểm tra khi $x \rightarrow -\infty$.

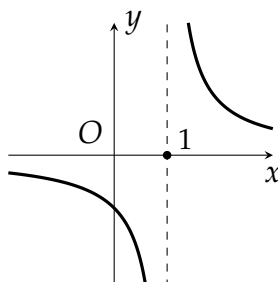
2. Đường tiệm cận đứng (TCD)

- ☑ Đường thẳng $x = x_0$ là TCD của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

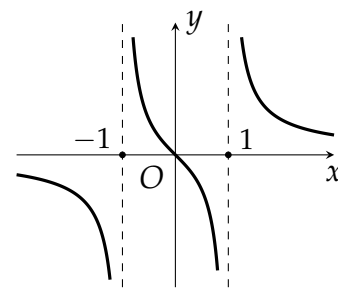
$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$$



Không có TCD



Có TCD $x = 1$



Có TCD $x = -1$ và $x = 1$

☑ Các bước tìm TCD:

- ① Tìm nghiệm của mẫu, giả sử nghiệm đó là $x = x_0$.
- ② Tính giới hạn một bên tại x_0 . Nếu xảy ra $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ thì ta kết luận $x = x_0$ là đường tiệm cận đứng.

☑ Sử dụng máy tính cầm tay: Nhập biểu thức $f(x)$.

- ① Bấm $X = x_0 - 0.000001$ để kiểm tra khi $x \rightarrow x_0^-$.
- ② Bấm $X = x_0 + 0.000001$ để kiểm tra khi $x \rightarrow x_0^+$.

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

DẠNG 1 Cho hàm số $y = f(x)$, tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị tương ứng.

Thực hiện theo lý thuyết đã nêu trên. Chú ý các vấn đề thường gặp sau:

- ☑ Tính giới hạn của hàm số dạng phân thức $\frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots}{b_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots}$ khi $x \rightarrow \pm\infty$ để xác định TCN, ta thường gặp:

- ① bậc tử < bậc mẫu thì kết quả bằng 0.
- ② bậc tử = bậc mẫu thì kết quả bằng $\frac{a_n}{b_m}$.
- ③ bậc tử > bậc mẫu thì kết quả bằng ∞ . Lúc này đồ thị không có đường TCN.

- ☑ Khi tìm TCD, trước tiên ta tìm **nghiệm x_0 của mẫu**. Chú ý:

- ① Nếu x_0 không là nghiệm của tử số thì $x = x_0$ là một TCD.
- ② Nếu x_0 là nghiệm của tử số thì ta kiểm tra lại bằng máy tính.
- ③ Nếu $x = x_0$ không xác định đối với tử số thì $x = x_0$ bị loại.

- ☑ Đồ thị hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ luôn có TCD $x = -\frac{d}{c}$ và TCN: $y = \frac{a}{c}$.

❖ **Ví dụ 1.** Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x - 4}{x + 2}$ là
A. $y = 2$. **B.** $x = 2$. **C.** $x = -2$. **D.** $y = -2$.

❖ **Ví dụ 2.** Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x + 1}{1 - x}$.
A. $y = -2$. **B.** $x = -2$. **C.** $y = 2$. **D.** $x = 1$.

❖ **Ví dụ 3.** Hàm số nào có đồ thị nhận đường thẳng $x = 2$ làm đường tiệm cận đứng?
A. $y = x - 2 + \frac{1}{x + 1}$. **B.** $y = \frac{1}{x + 1}$.
C. $y = \frac{2}{x + 2}$. **D.** $y = \frac{5x}{2 - x}$.

❖ **Ví dụ 4.** Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{3x+1}{x-2}$ là đường thẳng

- A. $x = -2$. B. $x = 2$. C. $y = 3$. D. $y = -\frac{1}{2}$.

❖ **Ví dụ 5.** Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x^2+4x-5}$ có phương trình là

- A. $x = -1$. B. $y = 1; y = -5$. C. $x = 1; x = -5$. D. $x = \pm 5$.

❖ **Ví dụ 6.** Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{3}{x-2}$ là

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

❖ **Ví dụ 7.** Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$.

- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

❖ **Ví dụ 8.** Tìm tọa độ giao điểm I của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{2-3x}$.

- A. $I\left(\frac{2}{3}; 1\right)$. B. $I\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$. C. $I\left(\frac{3}{2}; -\frac{2}{3}\right)$. D. $I\left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

❖ **Ví dụ 9.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong (C) và các giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$,

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của (C).
 B. Đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của (C).
 C. Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận ngang của (C).
 D. Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của (C).

❖ **Ví dụ 10.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(-2; -1)$ và có $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} y = 2$

và $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = -\infty$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Đồ thị hàm số $f(x)$ có hai tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -1$ và $x = -2$.
 B. Đồ thị hàm số $f(x)$ có một tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -1$.
 C. Đồ thị hàm số $f(x)$ có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 2$ và $y = -1$.
 D. Đồ thị hàm số $f(x)$ có một tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$.

❖ **Ví dụ 11. (Quốc Gia - 2018)** Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$ là

- A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.

❖ **Ví dụ 12.** Đồ thị hàm số $y = \sqrt{4x^2+4x+3} - \sqrt{4x^2+1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận ngang?

- A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.

❖ **Ví dụ 13.** Hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{3x+1}{x-4}$ cắt hai trục tọa độ tại các điểm A, B. Bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB là

- A. $R = 4$. B. $R = 5$. C. $R = \frac{5}{2}$. D. $R = 3$.

DẠNG 2**Xác định TCN và TCD khi biết bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$**

☑ Nhìn "vị trí" $\pm\infty$ để xác định đường TCN.

- ① Nếu "vị trí" nào ra kết quả hữu hạn thì vị trí đó có TCN.
- ② Nếu "vị trí" nào không tồn tại hoặc ra kết quả ∞ thì "vị trí" đó không có TCN.

☑ Nhìn "vị trí có hai gạch sọc" để xác định TCD.

- ① Nếu "vị trí" nào xuất hiện ∞ thì vị trí đó là TCD.
- ② Nếu "vị trí" nào không xuất hiện ∞ ở cả hai bên (giới hạn trái và giới hạn phải) thì vị trí đó không là TCD.

🔗 **Ví dụ 14.** Cho bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
y	$-\infty$	$+\infty$	3

Đồ thị của hàm số đã cho có tổng số bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

- A.** 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

🔗 **Ví dụ 15.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình bên.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	$-$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-1	2	$-\infty$

Chọn khẳng định đúng.

- A.** Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận ngang.
- B.** Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.
- C.** Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng.
- D.** Đồ thị hàm số không có tiệm đứng và tiệm cận ngang.

🔗 **Ví dụ 16.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	$-$	0	$+$	$+$
y	-2	$+\infty$	1	$+\infty$	-2

Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

❖ **Ví dụ 17.** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

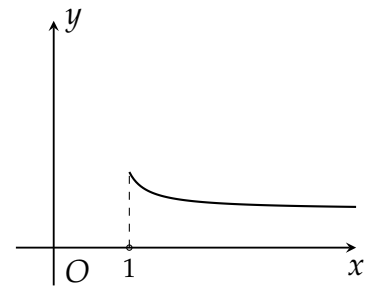
x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'	+		- 0 +		
y	-2	$+\infty$	-2	$+\infty$	

- A. 4. B. 2. C. 3. D. 1.

❖ **Ví dụ 18.**

Hỏi có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(a; b)$ để hàm số $y = \frac{2x - a}{4x - b}$ có đồ thị trên $(1; +\infty)$ như hình vẽ bên?

- A. 1. B. 4. C. 2. D. 3.



❖ **Ví dụ 19.** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	-		-	- 0 +	
y	$+\infty$	2	1	-1	1

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2}{3f(x) - 2}$ là

- A. 6. B. 5. C. 4. D. 3.

DẠNG 3 Một số bài toán biện luận theo tham số m

❖ **Ví dụ 20.** Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx + 2}{x - 5}$ có đường tiệm cận ngang đi qua điểm $A(1; 3)$.

- A. $m = -3$. B. $m = 1$. C. $m = -1$. D. $m = 3$.

❖ **Ví dụ 21.** Cho hàm số $y = \frac{ax + 1}{bx - 2}$, xác định a và b để đồ thị của hàm số trên nhận đường thẳng $x = 1$ làm tiệm cận đứng và đường thẳng $y = \frac{1}{2}$ làm tiệm cận ngang.

- A. $\begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases}$ B. $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$ C. $\begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$ D. $\begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \end{cases}$.

❖ **Ví dụ 22.** Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 - 5x + m}{x - m}$ có tiệm cận đứng.

- A. $\begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$. B. $m \neq 0$. C. $m \neq 2$. D. $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 2 \end{cases}$.

❖ **Ví dụ 23.** Biết rằng hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x + 1}{x - m}$ (với m là tham số) tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 2. Giá trị của m là

- A. $m = \pm 2$. B. $m = -1$. C. $m = 2$. D. $m = \pm 1$.

❖ **Ví dụ 24.** Tìm tất cả các điểm trên đồ thị hàm số $y = \frac{x + 1}{x - 2}$ sao cho tổng khoảng cách từ điểm đó đến hai đường tiệm cận là nhỏ nhất.

- A. $(2 + \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3})$ và $(2 - \sqrt{3}; 1 - \sqrt{3})$. B. $(1 + \sqrt{3}; 2 - \sqrt{3})$ và $(1 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3})$.
C. $(1 + \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3})$ và $(1 - \sqrt{3}; 2 - \sqrt{3})$. D. $(2 + \sqrt{3}; 1 - \sqrt{3})$ và $(2 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3})$.

❖ **Ví dụ 25.** Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y = \frac{x - 2}{x^2 - mx + 1}$ có đúng 3 đường tiệm cận.

- A. $\begin{cases} m > 2 \\ m \neq \frac{5}{2} \\ m < -2 \end{cases}$. B. $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}$. C. $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$. D. $-2 < m < 2$.

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x - 3}{x - 1}$ là

- A. $y = 5$. B. $y = 0$. C. $x = 1$. D. $y = 1$.

Câu 2. Cho hàm số $y = \frac{x + 1}{2x - 2}$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = \frac{1}{2}$.
B. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = -\frac{1}{2}$.
C. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = \frac{1}{2}$.
D. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 2$.

Câu 3. Số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{3x + 1}{x^2 - 4}$ là

- A. 2. B. 1. C. 4. D. 3.

Câu 4. Đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số nào sau đây?

- A. $y = \frac{2x^2 + 1}{2 - x}$. B. $y = \frac{x^2 + 2x + 1}{1 + x}$. C. $y = \frac{x + 1}{1 - 2x}$. D. $y = \frac{2x - 2}{x + 2}$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.
B. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

- C. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là hai đường thẳng $x = -2$ và $x = 2$.
 D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là hai đường thẳng $y = -2$ và $y = 2$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là \mathbb{R} và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. Tìm kết luận đúng trong các kết luận sau.

- A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = y_0$.
 B. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = y_0$.
 C. Đồ thị hàm số không có tiệm cận.
 D. Đồ thị hàm số có cả tiệm cận đứng, tiệm cận ngang.

Câu 7. Cho hàm số $y = \frac{2017}{x-2}$ có đồ thị (H). Số đường tiệm cận của (H) là

- A. 0. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 8. Cho đồ thị (C): $y = \frac{x-3}{x+2}$ có hai đường tiệm cận cắt nhau tại I. Tính độ dài đoạn thẳng OI (với O là gốc tọa độ).

- A. $OI = \sqrt{3}$. B. $OI = \sqrt{2}$. C. $OI = 1$. D. $OI = \sqrt{5}$.

Câu 9. Số đường tiệm cận (đứng và ngang) của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x^2}$ là bao nhiêu?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 10. Tìm số tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x^2-3x+2}$.

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 0.

Câu 11. Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+2x-3}{x^2-1}$ có đường tiệm cận ngang là

- A. $y = 2$. B. $y = \pm 2$. C. $y = 1$. D. $y = \pm 1$.

Câu 12. Đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{|x|+1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận (đứng và ngang)?

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

Câu 13. Đồ thị hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4x}-\sqrt{x^2-3x}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận ngang?

- A. 3. B. 1. C. 4. D. 2.

Câu 14. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x}$ có đồ thị (C). Gọi d là tích khoảng cách từ một điểm bất kì trên (C) đến các đường tiệm cận của (C). Tính d.

- A. $d = 1$. B. $d = \sqrt{2}$. C. $d = 2$. D. $d = 2\sqrt{2}$.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 4. B. 1.
 C. 3. D. 2.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	+		+
y	2	$+\infty$	5

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Hỏi đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tổng số bao nhiêu tiệm cận (tiệm cận đứng và tiệm cận ngang)?

- A. 0. B. 2.
C. 3. D. 1.

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
y'		+	0	-
y	-1	$+\infty$	2	$-\infty$

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-		-	
$f(x)$	-2	$+\infty$	-1	$+\infty$	2

Khẳng định nào sau đây sai?

- A. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = -2$, $y = 2$.
B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $x = 1$, $x = -1$.
C. Hàm số $y = f(x)$ không có đạo hàm tại điểm $x = 0$.
D. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại điểm $x = 0$.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(-2; 0) \cup (0; +\infty)$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $f(x)$ là

- A. 4. B. 2.
C. 1. D. 3.

x	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	0

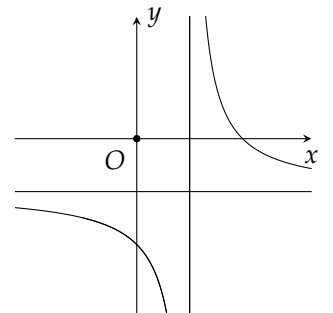
Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình bên. Hỏi đồ thị hàm số có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 1. B. 2.
C. 3. D. 4.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'		+	-	0	+
y	2	$-\infty$	$-\infty$	1	$-\infty$

Câu 20. Cho hàm số $y = \frac{ax - b}{x - 1}$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. $b < 0 < a$. B. $0 < b < a$.
C. $b < a < 0$. D. $a < b < 0$.



Câu 21. Cho hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x + m}{x - m}$ có đồ thị (C). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (C) không có tiệm cận đứng.

- A. $m = 0$ hoặc $m = 1$.
C. $m = 1$.

- B. $m = 2$.
D. $m = 0$.

Câu 22. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-m}$ đi qua điểm $M(2;5)$ khi m bằng bao nhiêu?

- A. $m = -2$. B. $m = -5$. C. $m = 5$. D. $m = 2$.

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$		4		-2		$+\infty$

Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2018}{f(x)}$ là

- A. 4. B. 1. C. 3. D. 2.

Câu 24. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x^2+2mx+1}$ có hai tiệm cận đứng là

- A. $(-1;1)$. B. $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.
C. $\left\{-\frac{5}{4}\right\}$. D. $\left(-\infty; -\frac{5}{4}\right) \cup \left(-\frac{5}{4}; -1\right) \cup (1; +\infty)$.

Câu 25. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{mx^2-2x+3}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số đã cho có đúng hai đường tiệm cận.

- A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.

Câu 26. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{4x-5}{x-m}$ có tiệm cận đứng nằm bên phải trục tung.

- A. $m < 0$. B. $m > 0$ và $m \neq \frac{5}{4}$.
C. $m > 0$. D. $m > 0$ và $m \neq -\frac{5}{4}$.

Câu 27. Biết rằng đồ thị của hàm số $y = \frac{(a-3)x+a+2018}{x-(b+3)}$ nhận trục hoành làm tiệm cận ngang và trục tung làm tiệm cận đứng. Khi đó giá trị của $a+b$ là

- A. 3. B. -3 . C. 6. D. 0.

Câu 28. Tập hợp các giá trị m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx^2+6x-2}{x+2}$ có tiệm cận đứng là

- A. $\left\{\frac{7}{2}\right\}$. B. \mathbb{R} . C. $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{7}{2}\right\}$. D. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{7}{2}\right\}$.

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		2		$+\infty$
				3	
					$-\infty$

Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x) - 5}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Câu 30. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2mx + 2m}$ có đúng 3 đường tiệm cận.

A. $m \neq -\frac{1}{4}$.

B. $\begin{cases} m < 0 \\ m > 2 \end{cases}$.

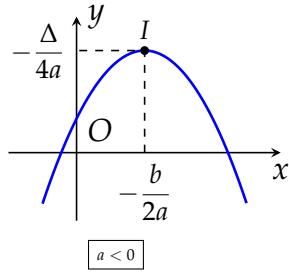
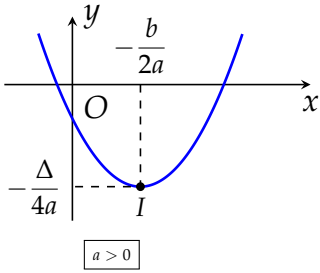
C. $\begin{cases} m > 2 \\ m < 0 \\ m \neq -\frac{1}{4} \end{cases}$.

D. $0 < m < 2$.

—HẾT—

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$



GHI NHỚ

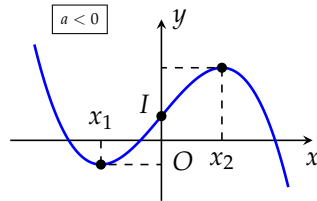
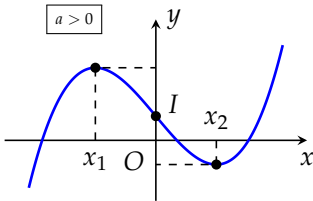
- ① Tọa độ đỉnh:

$$I(x_0; y_0) = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right).$$
- ② (P) viết theo tọa độ đỉnh:

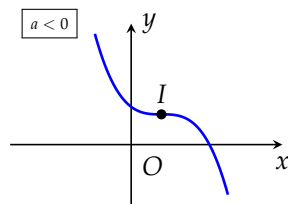
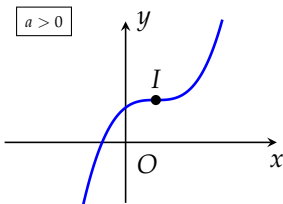
$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

2. Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

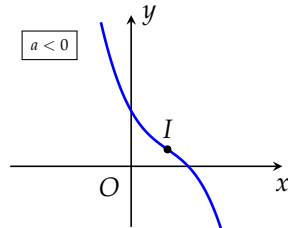
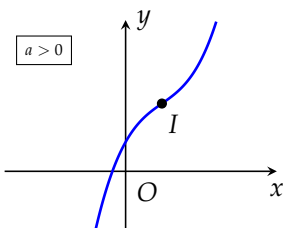
☑ TH1. $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 . Khi đó, hàm số có hai điểm cực trị $x = x_1$ và $x = x_2$.



☑ TH2. $y' = 0$ có nghiệm kép x_0 . Khi đó, hàm số không có cực trị.



☑ TH3. $y' = 0$ vô nghiệm. Khi đó, hàm số không có cực trị.



GHI NHỚ

- ① Hàm số có hai điểm cực trị

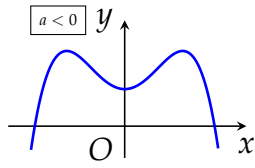
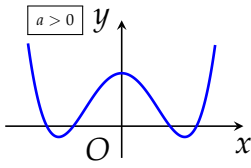
$$\begin{cases} a \neq 0 \\ b^2 - 3ac > 0. \end{cases}$$
- ② Liên hệ tổng tích hai nghiệm

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{3a} \end{cases}$$
- ③ Hàm số không có điểm cực trị

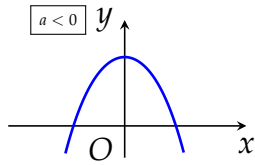
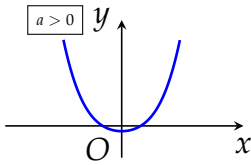
$$b^2 - 3ac \leq 0 \text{ hoặc } \begin{cases} a = 0 \\ b = 0. \end{cases}$$
- ④ Hoành độ điểm uốn là nghiệm phương trình $y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{3a}$.
 Tọa độ điểm uốn là tâm đối xứng của đồ thị.
- ⑤ Tiếp tuyến tại điểm uốn $I(x_0; y_0)$ sẽ có hệ số góc nhỏ nhất nếu $a > 0$ và lớn nhất nếu $a < 0$.

3. Hàm số bậc bốn trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$

☑ $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt. Khi đó, hàm số có ba điểm cực trị $x = 0$ và $x = \pm \sqrt{-\frac{b}{2a}}$.



☑ $y' = 0$ có đúng 1 nghiệm $x = 0$. Khi đó, hàm số có đúng 1 điểm cực trị.



GHI NHỚ

① Hàm số có ba điểm cực trị

$$ab < 0$$

② Hàm số có đúng một điểm cực trị

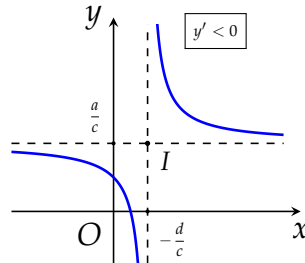
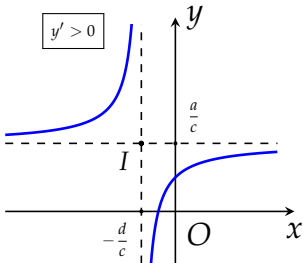
$$\begin{cases} ab \geq 0 \\ a, b \text{ không đồng thời bằng } 0 \end{cases}$$

③ Hàm số chẵn, đối xứng nhau qua Oy .

4. Hàm nhất biến $y = \frac{ax + b}{cx + d}$

☑ Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$

☑ Hình dạng đồ thị:



GHI NHỚ

① Tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$.

② Tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$.

③ Giao với Ox : $y = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$.

④ Giao với Oy : $x = 0 \Rightarrow y = \frac{b}{d}$.

⑤ Giao hai đường tiệm cận (điểm I) là tâm đối xứng của đồ thị.

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

DẠNG 1 Nhận dạng đồ thị hàm bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

☑ Nhìn "dáng điệu" của đồ thị:

① Bên phải đi lên thì $a > 0$.

② Bên phải đi xuống thì $a < 0$.

☑ Nhìn điểm thuộc đồ thị:

① Thay tọa độ điểm thuộc vào hàm số phải thoả mãn. ② Đồ thị qua điểm $(0; d)$.

☑ Nhìn cực trị:

① Đồ thị hàm số có điểm cực đại (cực tiểu) là $(x_0; y_0)$ thì $y'(x_0) = 0$ và $y(x_0) = y_0$.

② Mối liên hệ giữa hai điểm cực trị x_1 và x_2 của hàm số: $x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a}$ và $x_1 x_2 = \frac{c}{3a}$.

❖ Ví dụ 1.

Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

- A. $y = -x^3 - 2x^2 + 5$. B. $y = x^3 - 3x^2 + 5$.
 C. $y = -x^3 - 3x + 5$. D. $y = x^3 + 3x^2 + 5$.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$		5		1	$+\infty$

❖ Ví dụ 2.

Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

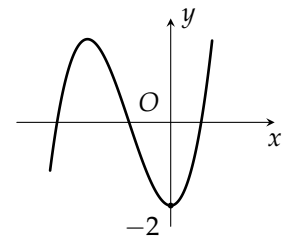
- A. $y = x^3 - 3x^2 + x + 3$. B. $y = x^3 - 3x + 4$.
 C. $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$. D. $y = x^3 + 3x^2 + 5$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$	
y'		+	0	+
y	$-\infty$		2	$+\infty$

❖ Ví dụ 3.

Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

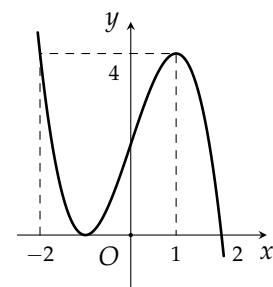
- A. $y = -x^3 + x^2 - 2$. B. $y = x^3 + 3x^2 - 2$.
 C. $y = x^3 - 3x + 2$. D. $y = x^2 - 3x - 2$.



❖ Ví dụ 4.

Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

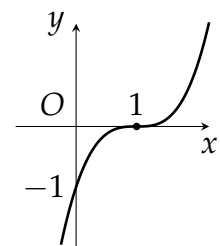
- A. $y = x^3 + 3x - 2$. B. $y = x^3 - 3x + 2$.
 C. $y = -x^3 + 3x + 2$. D. $y = -x^3 - 3x - 2$.



❖ Ví dụ 5.

Đồ thị hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

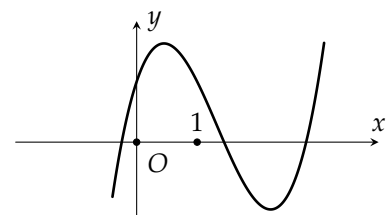
- A. $y = x^3 - 1$. B. $y = (x + 1)^3$.
 C. $y = (x - 1)^3$. D. $y = x^3 + 1$.



❖ Ví dụ 6.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

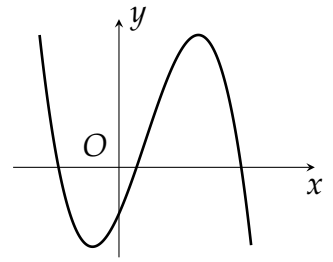
- A. $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$. B. $a < 0, b < 0, c > 0, d > 0$.
 C. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$. D. $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.



❖ Ví dụ 7.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

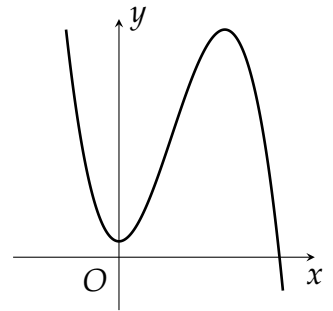
- A. $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$. B. $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$.
 C. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$. D. $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.



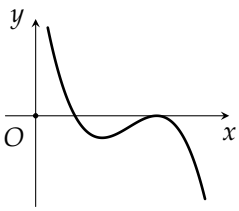
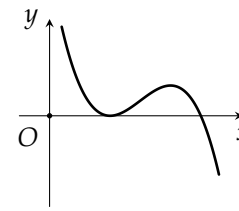
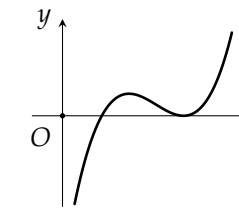
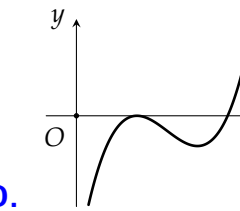
❖ Ví dụ 8.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$. B. $a < 0, b < 0, c = 0, d > 0$.
 C. $a < 0, b > 0, c = 0, d > 0$. D. $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.



❖ Ví dụ 9. Cho hàm số $f(x) = (a - x)(b - x)^2$ với $a < b$ có đồ thị như hình bên. Hỏi đồ thị hàm số $y = f(x)$ là hình nào trong các phương án sau đây?

- A.  B.  C.  D. 

DẠNG 2

Nhận dạng đồ thị hàm bậc bốn trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$

☑ Nhìn "dáng điệu" của đồ thị:

- ① Bên phải đi lên thì $a > 0$. ② Bên phải đi xuống thì $a < 0$.

☑ Nhìn điểm thuộc đồ thị:

- ① Thay tọa độ điểm thuộc vào hàm số phải thoả mãn. ② Đồ thị qua điểm $(0; c)$.

☑ Nhìn điểm cực trị

- ① Đồ thị có 3 điểm cực trị $ab < 0$ ② Đồ thị có một điểm cực trị $ab > 0$.

❖ Ví dụ 10.

Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

- A. $y = x^4 - 8x^2 + 2$.
 B. $y = x^4 + 6x^2 + 2$.
 C. $y = x^4 - 6x^2 + 2$.
 D. $y = -x^4 + 8x^2 + 2$.

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0
y	$-\infty$		2		$-\infty$
			-7		-7

❖ Ví dụ 11.

Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

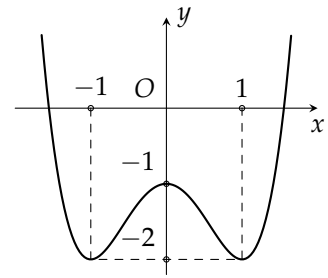
- A. $y = -x^4 + 3x^2 + 2$. B. $y = -x^4 - 2x^2 + 1$.
 C. $y = -x^4 - 3x^2 + 2$. D. $y = -x^4 + x^2 + 2$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	2	$-\infty$

❖ Ví dụ 12.

Đồ thị ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

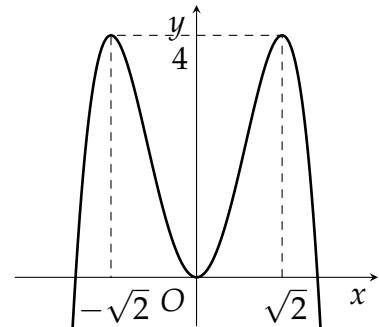
- A. $y = x^4 - 2x^2 - 1$. B. $y = 2x^4 - 4x^2 - 1$.
 C. $y = -x^4 + 2x^2 - 1$. D. $y = -2x^4 + 4x^2 - 1$.



❖ Ví dụ 13.

Đồ thị ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

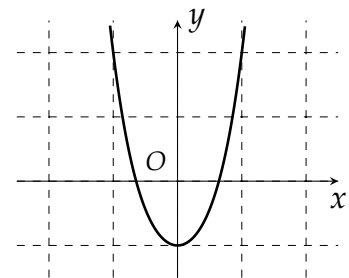
- A. $y = -x^4 + 4x^2$. B. $y = x^4 - 3x^2$.
 C. $y = -x^4 - 2x^2$. D. $y = -\frac{1}{4}x^4 + 3x^2$.



❖ Ví dụ 14.

Đồ thị ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

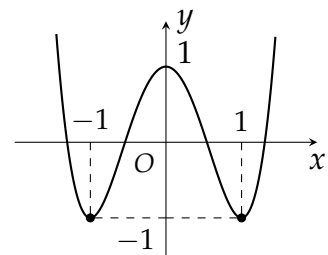
- A. $y = x^2 - 1$. B. $y = x^4 - 2x^2 - 1$.
 C. $y = x^4 + 2x^2 - 1$. D. $y = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 - 1$.



❖ Ví dụ 15.

Biết rằng hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị là đường cong hình vẽ bên. Tính giá trị $f(a + b + c)$.

- A. $f(a + b + c) = -1$. B. $f(a + b + c) = 2$.
 C. $f(a + b + c) = -2$. D. $f(a + b + c) = 1$.



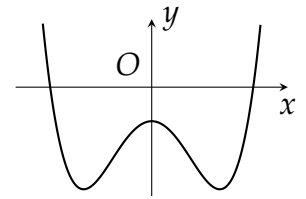
❖ Ví dụ 16. Biết đồ thị hàm số $y = x^4 + bx^2 + c$ chỉ có một điểm cực trị là điểm có tọa độ $(0; -1)$, khi đó b và c thỏa mãn những điều kiện nào dưới đây?

- A. $b < 0$ và $c = -1$. B. $b \geq 0$ và $c > 0$. C. $b < 0$ và $c < 0$. D. $b \geq 0$ và $c = -1$.

❖ Ví dụ 17.

Đường cong trong hình bên là đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ với a, b, c là các tham số thực. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

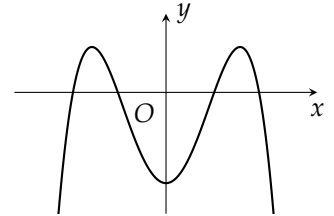
- A. $a < 0, b > 0, c < 0$. B. $a < 0, b < 0, c < 0$.
 C. $a > 0, b < 0, c < 0$. D. $a > 0, b < 0, c > 0$.



❖ Ví dụ 18.

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

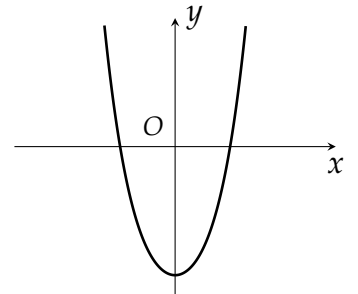
- A. $a < 0, b > 0, c > 0$. B. $a < 0, b < 0, c < 0$.
 C. $a < 0, b > 0, c < 0$. D. $a < 0, b < 0, c > 0$.



❖ Ví dụ 19.

Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a, b \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

- A. $a < 0, b > 0, c > 0$. B. $a > 0, b > 0, c > 0$.
 C. $a > 0, b < 0, c > 0$. D. $a > 0, b > 0, c < 0$.



DẠNG 3

Nhận dạng đồ thị hàm nhất biến $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

Chú ý bốn thông số

- ① Tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$. ② Tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$.
 ③ Giao với Ox: $y = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$. ④ Giao với Oy: $x = 0 \Rightarrow y = \frac{b}{d}$.

❖ Ví dụ 20.

Bảng biến thiên ở hình bên là của hàm số nào?

- A. $y = \frac{2x-1}{x+3}$. B. $y = \frac{4x-6}{x-2}$.
 C. $y = \frac{3-x}{2-x}$. D. $y = \frac{x+5}{x-2}$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	-		-
y	1	$-\infty$	1

❖ Ví dụ 21.

Bảng biến thiên sau là của hàm số nào trong các hàm số bên dưới?

- A. $y = \frac{x-1}{x-3}$. B. $y = \frac{x-1}{-x-3}$.
 C. $y = \frac{x+5}{-x+3}$. D. $y = \frac{1}{x-3}$.

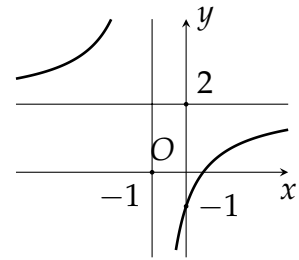
x	$-\infty$	3	$+\infty$
y'	+		+
y	-1	$+\infty$	-1

❖ Ví dụ 22.

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

A. $y = \frac{2x-1}{x+1}$.
 C. $y = \frac{2x+1}{x-1}$.

B. $y = \frac{1-2x}{x+1}$.
 D. $y = \frac{2x+1}{x+1}$.

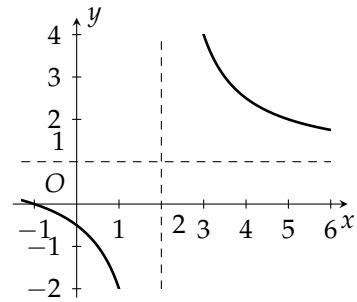


❖ Ví dụ 23.

Cho hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ có đồ thị như hình vẽ. Tính $T = a + b$

A. $T = 2$.
 C. $T = -1$.

B. $T = 0$.
 D. $T = 3$.

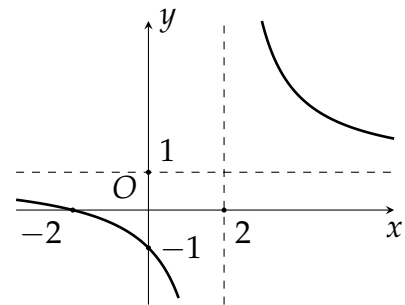


❖ Ví dụ 24.

Hãy xác định a, b để hàm số $y = \frac{2-ax}{x+b}$ có đồ thị như hình vẽ?

A. $a = 1; b = -2$.
 C. $a = -1; b = -2$.

B. $a = b = 2$.
 D. $a = b = -2$.

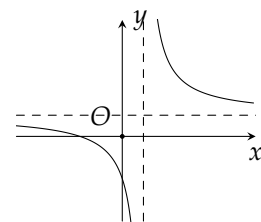


❖ Ví dụ 25.

Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $a > 0$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $b < 0, c < 0, d < 0$.
 C. $b < 0, c > 0, d < 0$.

B. $b > 0, c < 0, d < 0$.
 D. $b > 0, c > 0, d < 0$.

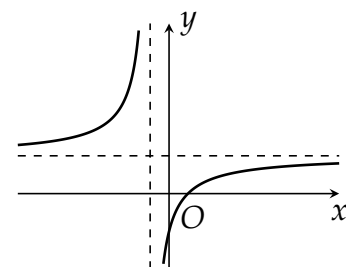


❖ Ví dụ 26.

Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $ab > 0, bd < 0$.
 C. $ab < 0, ad < 0$.

B. $ab < 0, ad > 0$.
 D. $bd > 0, ad > 0$.



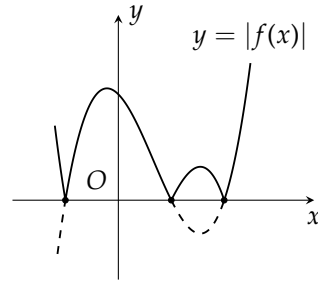
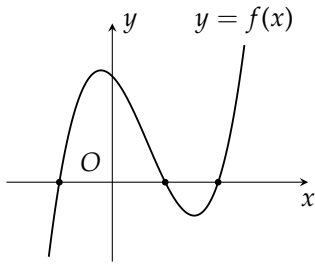
DẠNG 4 Đồ thị hàm trị tuyệt đối

Loại 1: Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$

① Cách vẽ đồ thị hàm số $y = |f(x)|$:

- Vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$.
- Giữ nguyên phần đồ thị nằm trên Ox và lấy đối xứng phần phía dưới Ox lên trên, ta được đồ thị hàm số $y = |f(x)|$.

Quan sát đồ thị:



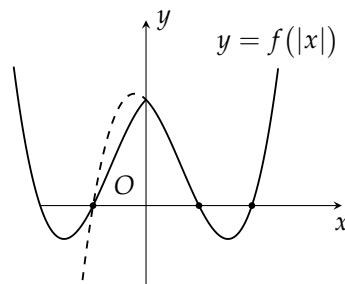
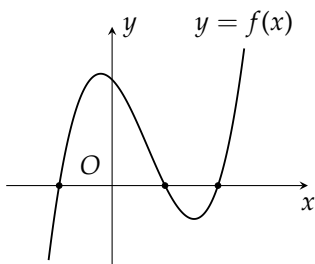
② Số điểm cực trị của hàm số $|f(x)|$ bằng số điểm cực trị của hàm $f(x)$ cộng với số nghiệm bội lẻ của $f(x) = 0$.

Loại 2: Đồ thị hàm số $y = f(|x|)$

① Cách vẽ đồ thị hàm số $y = f(|x|)$:

- Vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$.
- Giữ nguyên phần đồ thị nằm bên phải Oy , bỏ hẳn phần đồ thị nằm bên trái Oy . Sau đó lấy đối xứng phần đồ thị bên phải qua Oy , ta được đồ thị hàm số $y = f(|x|)$.

Quan sát đồ thị:



② Xét trên Số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$ bằng số điểm cực trị **dương** của hàm $f(x)$ cộng thêm 1.

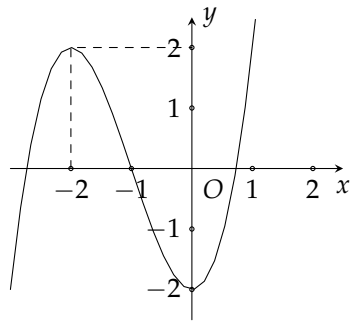
Trường hợp trên $[0; a]$, $f(x)$ là hàm hằng thì công thức trên không còn đúng.

Ghi chú: Trường hợp không phải hai loại trên, ta phá trị tuyệt đối theo định nghĩa

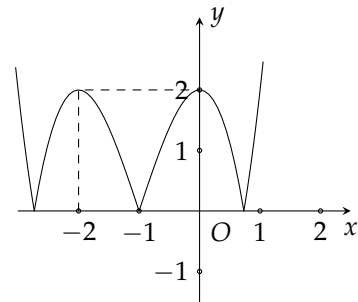
$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{nếu } f(x) < 0 \end{cases}$$

Sau đó vẽ đồ thị từng nhánh nhỏ và hợp các đồ thị lại với nhau.

❖ Ví dụ 27. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

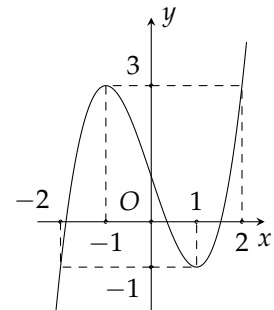
- A. $y = -x^3 - 3x^2 + 2$.
 C. $y = |x^3| + 3x^2 - 2$.

- B. $y = |x^3 + 3x^2 - 2|$.
 D. $y = ||x^3| + 3x^2 - 2|$.

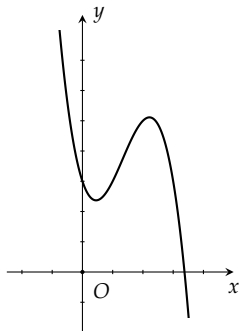
❖ Ví dụ 28.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

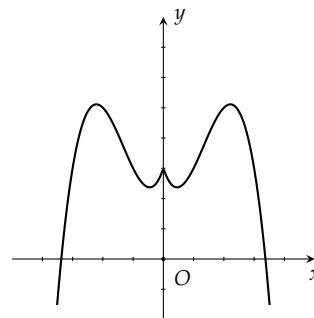
- A. 6. B. 7. C. 8. D. 5.



❖ Ví dụ 29. Cho hàm số $y = -x^3 + 4x^2 - 3x + 3$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

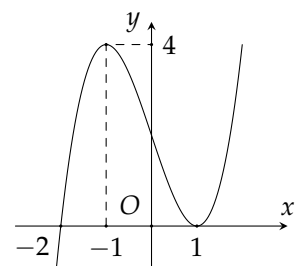
- A. $y = ||x|^3 - 4x^2 + 3|x| - 3|$.
 C. $y = |x^3 + 4x^2 - 3x - 3|$.

- B. $y = |-x^3 + 4x^2 - 3x + 3|$.
 D. $y = -|x|^3 + 4x^2 + -3|x| + 3$.

❖ Ví dụ 30.

Cho hàm số $y = (x + 2)(x - 1)^2$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi mệnh đề nào dưới đây đúng với hàm số $y = |x + 2|(x - 1)^2$?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
 B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
 C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 2)$.
 D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$.



C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Đồ thị hàm số nào dưới đây **không** đi qua điểm $A(1; 1)$?

- A. $y = x$. B. $y = 2x^2 - 1$. C. $y = 2x^3 - x - 1$. D. $y = -x^4 + 2$.

Câu 2. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-2}$ có đồ thị (C). Đồ thị (C) đi qua điểm nào?

- A. $M(1; 3)$. B. $M(0; -2)$. C. $M\left(-1; \frac{1}{3}\right)$. D. $M(3; 5)$.

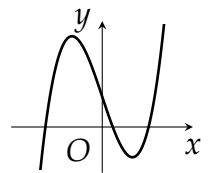
Câu 3. Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

- A. $y = -x^3 - 3x - 2$.
 B. $y = x^3 - 3x^2 - 1$.
 C. $y = x^3 + 3x^2 - 1$.
 D. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$			
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		-1		-5		$+\infty$

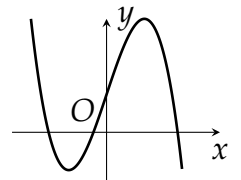
Câu 4. Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào dưới đây?

- A. $y = -x^3 + 3x + 1$. B. $y = x^3 + 3x + 1$.
 C. $y = -x^3 - 3x + 1$. D. $y = x^3 - 3x + 1$.



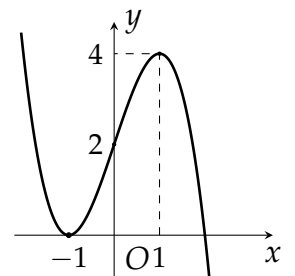
Câu 5. Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào dưới đây?

- A. $y = x^3 + 3x^2 - 3x + 1$. B. $y = -x^3 - 2x^2 + x - 2$.
 C. $y = -x^3 + 3x + 1$. D. $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.



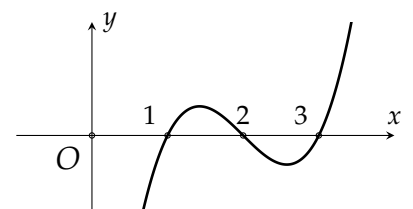
Câu 6. Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào dưới đây?

- A. $y = (x+1)^2(1+x)$. B. $y = (x+1)^2(1-x)$.
 C. $y = (x+1)^2(2-x)$. D. $y = (x+1)^2(2+x)$.



Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

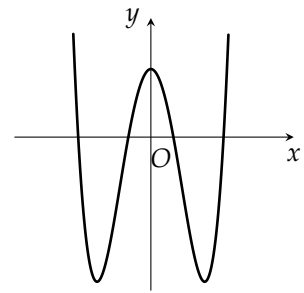
- A. $f(1,5) < 0, f(2,5) < 0$. B. $f(1,5) > 0 > f(2,5)$.
 C. $f(1,5) > 0, f(2,5) > 0$. D. $f(1,5) < 0 < f(2,5)$.



Câu 8. Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = x^4 + 5x^2 + 2.$
 C. $y = x^4 - 5x^2 + 2.$

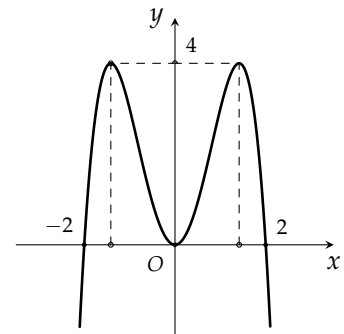
B. $y = x^3 - 3x^2 + 2.$
 D. $y = -x^4 + 5x^2 + 2.$



Câu 9. Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = x^4 - 3x^2.$
 C. $y = -x^4 - 2x^2.$

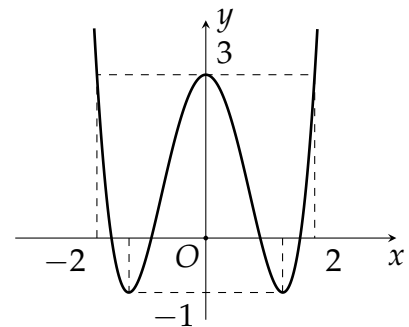
B. $y = -\frac{1}{4}x^4 + 3x^2.$
 D. $y = -x^4 + 4x^2.$



Câu 10. Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = -x^4 + 4x^2 + 3.$
 C. $y = (x^2 - 2)^2 - 1.$

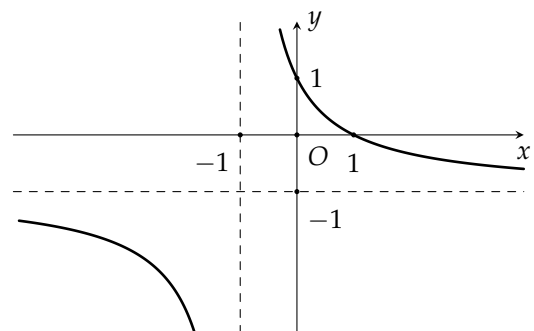
B. $y = -x^4 + 2x^2 + 3.$
 D. $y = (x^2 + 2)^2 - 1.$



Câu 11. Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = \frac{-2x+1}{2x+1}.$
 C. $y = \frac{-x+2}{x+1}.$

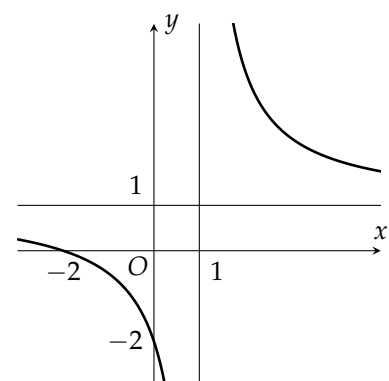
B. $y = \frac{-x+1}{x+1}.$
 D. $y = \frac{-x}{x+1}.$



Câu 12. Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

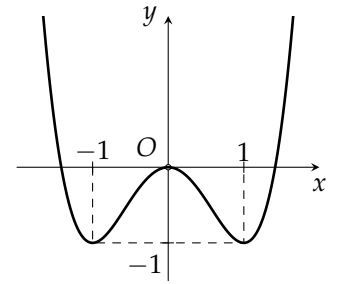
A. $y = \frac{2x+1}{x-1}.$
 C. $y = \frac{x+2}{x-1}.$

B. $y = \frac{x+2}{1-x}.$
 D. $y = \frac{x+1}{x-1}.$



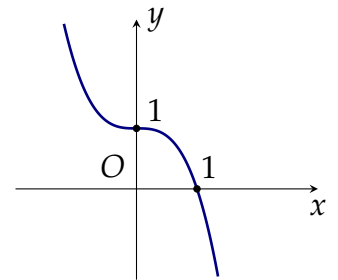
Câu 13. Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = x^4 - 2x^2$. B. $y = x^4 - 2x^2 - 3$.
 C. $y = -x^4 + 2x^2$. D. $y = -x^4 + 2x^2 - 3$.



Câu 14. Đường cong ở hình bên là đồ thị một trong bốn hàm số cho ở phương án A, B, C, D. Hỏi đó là hàm số nào?

- A. $y = -x^3 + 1$. B. $y = -2x^3 + x^2$.
 C. $y = 3x^2 + 1$. D. $y = -4x^3 + 1$.



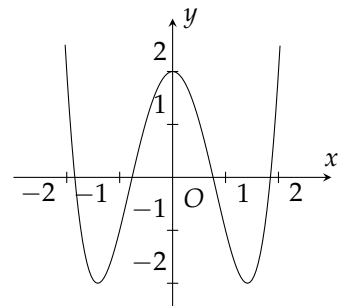
Câu 15. Hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây có bảng biến thiên như hình bên?

- A. $y = \frac{2x-3}{x+2}$. B. $y = \frac{x+4}{x-2}$.
 C. $y = \frac{2x+3}{x-2}$. D. $y = \frac{2x-7}{x-2}$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	-		-
y	2	$-\infty$	2

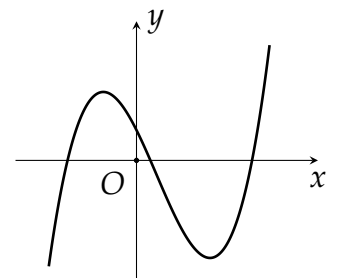
Câu 16. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. $a > 0, b < 0, c > 0$. B. $a > 0, b < 0, c < 0$.
 C. $a > 0, b > 0, c > 0$. D. $a < 0, b > 0, c > 0$.



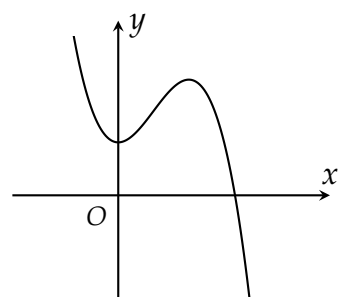
Câu 17. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. $a > 0, b < 0, c > 0, d < 0$. B. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.
 C. $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$. D. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.



Câu 18. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây, điểm cực tiểu của đồ thị nằm trên trục tung. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. $a < 0, b < 0, c = 0, d > 0$. B. $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.
 C. $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$. D. $a < 0, b > 0, c = 0, d > 0$.



Câu 19. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a \neq 0$. Biết đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $A(1; -1)$, $B(-1; 3)$. Tính $f(4)$.

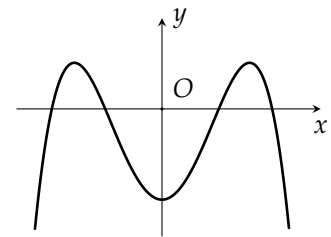
- A. $f(4) = 53$. B. $f(4) = -17$. C. $f(4) = -53$. D. $f(4) = 17$.

Câu 20. Cho $A(0; -3)$ là điểm cực đại và $B(-1; -5)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$. Tính giá trị của hàm số tại $x = -2$.

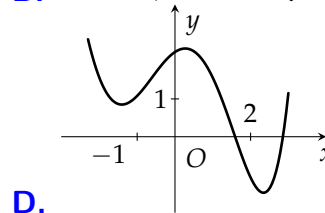
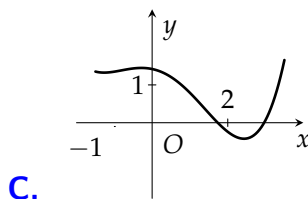
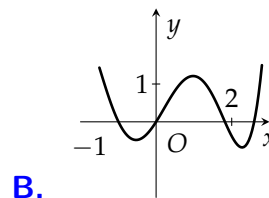
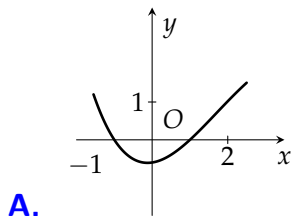
- A. $y(-2) = 43$. B. $y(-2) = 23$. C. $y(-2) = 19$. D. $y(-2) = 13$.

Câu 21. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a > 0, b < 0, c < 0$. B. $a < 0, b < 0, c < 0$.
C. $a < 0, b > 0, c < 0$. D. $a > 0, b < 0, c > 0$.

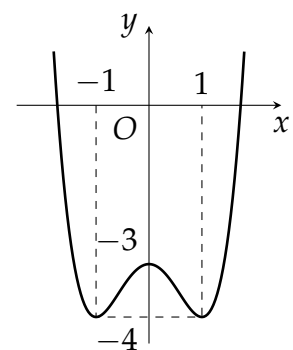


Câu 22. Cho hàm số $g(x)$ liên tục trên \mathbb{R} thỏa mãn $g'(0) = 0, g''(x) > 0 \quad \forall x \in (-1; 2)$. Hỏi đồ thị nào dưới đây có thể là đồ thị của hàm số $g(x)$?



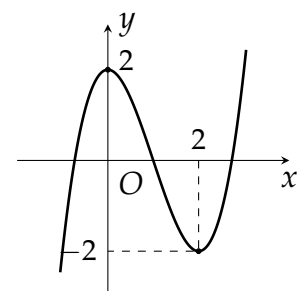
Câu 23. Xác định các hệ số a, b, c để hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên.

- A. $a = -\frac{1}{4}, b = 3, c = -3$. B. $a = 1, b = -2, c = -3$.
C. $a = 1, b = -3, c = 3$. D. $a = 1, b = 3, c = -3$.



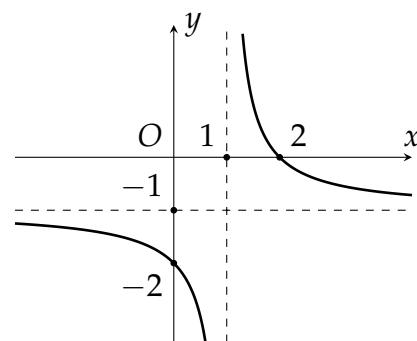
Câu 24. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị là đường cong như hình bên. Tính tổng $S = a + b + c + d$.

- A. $S = 0$. B. $S = 6$.
C. $S = -4$. D. $S = 2$.



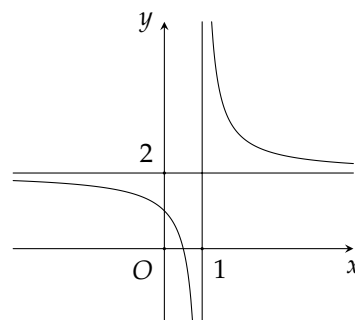
Câu 25. Cho hàm số $y = \frac{ax + b}{x + c}$ có đồ thị như hình vẽ, với a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $T = a - 3b + 2c$.

- A. $T = 12$.
- B. $T = -7$.
- C. $T = 10$.
- D. $T = -9$.



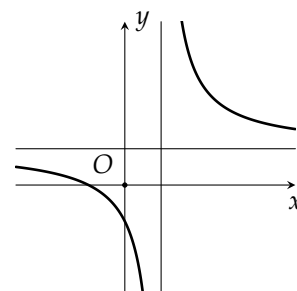
Câu 26. Xác định a, b, c để hàm số $y = \frac{ax - 1}{bx + c}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn đáp án đúng trong các đáp án bên dưới.

- A. $a = 2, b = 2, c = -1$.
- B. $a = 2, b = 1, c = 1$.
- C. $a = 2, b = -1, c = 1$.
- D. $a = 2, b = 1, c = -1$.



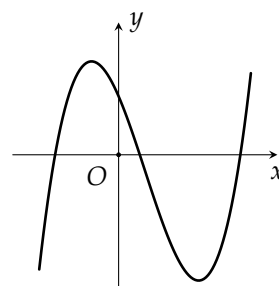
Câu 27. Cho hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $ac > 0, bd > 0, cd > 0$.
- B. $ad < 0, bc > 0, cd > 0$.
- C. $ab > 0, bc > 0, bd < 0$.
- D. $bc > 0, ad < 0, ac < 0$.



Câu 28. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. $ab < 0, bc > 0, cd < 0$.
- B. $ab > 0, bc > 0, cd < 0$.
- C. $ab < 0, bc < 0, cd > 0$.
- D. $ab < 0, bc > 0, cd > 0$.

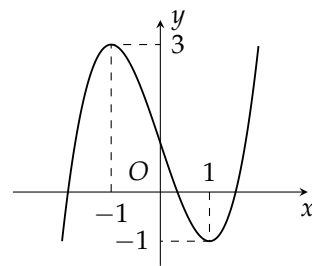


Câu 29. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \in (-1; 0)$, $x_2 \in (1; 2)$. Biết hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1; x_2)$. Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.
- B. $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.
- C. $a > 0, b > 0, c > 0, d < 0$.
- D. $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$.

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(|x|)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-2; -1)$. B. $(0; 1)$.
 C. $(-\infty; -2)$. D. $(-1; 0)$.



Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên \mathbb{R} và có bảng biến thiên như hình bên. Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

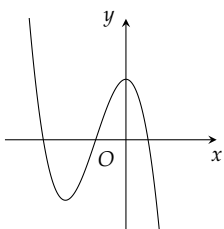
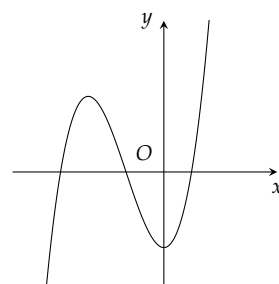
- A. 4. B. 5. C. 2. D. 3.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	5	1	$+\infty$	

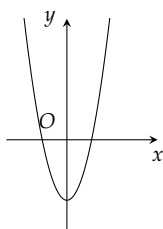
Câu 32. Cho hàm số $y = |x^4 - 2x^2 - 3|$. Số điểm cực trị của đồ thị hàm số là

- A. 5. B. 1. C. 3. D. 2.

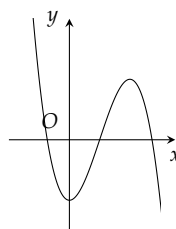
Câu 33. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$ có đồ thị như hình bên. Hỏi hình nào được liệt kê dưới đây ở các phương án A, B, C và D là đồ thị của hàm số $y = |x|^3 + 3x^2 - 2$.



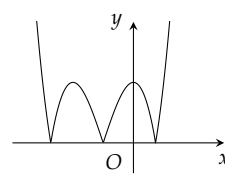
A.



B.



C.



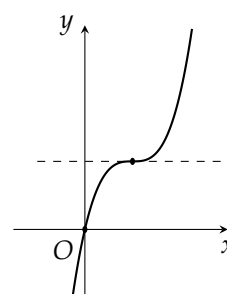
D.

Câu 34. Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$. Biết đồ thị hàm số $y = g(x) = |ax^4 + bx^2 + c|$ có 5 điểm cực trị, trong đó có 3 điểm cực trị có tung độ dương. Tìm mệnh đề đúng?

- A. $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0. \\ c < 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0. \\ c < 0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0. \\ c > 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0. \\ c < 0 \end{cases}$

Câu 35. Cho hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + c^2 + b + 2d + 1$.

- A. $\frac{1}{5}$. B. 1. C. $\frac{5}{8}$. D. $\frac{1}{3}$.



ỨNG DỤNG ĐỒ THỊ ĐỂ BIỆN LUẬN NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

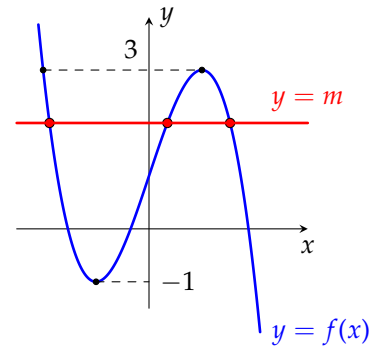
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Ứng dụng đồ thị để biện luận nghiệm phương trình.

Xét phương trình $f(x) = m$, với m là tham số. Nghiệm của phương trình này có thể coi là hoành độ giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ (cố định) với đường thẳng $y = m$ (nằm ngang).

Từ đó, để biện luận nghiệm phương trình $f(x) = m$, ta có thể thực hiện các bước như sau:

- Lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên miền xác định mà đề bài yêu cầu.
- Tịnh tiến đường thẳng $y = m$ theo hướng "lên, xuống". Quan sát số giao điểm để quy ra số nghiệm tương ứng.

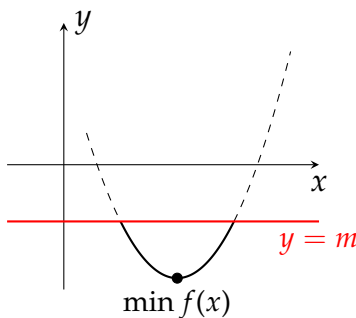


2. Ứng dụng đồ thị để biện luận nghiệm bất phương trình.

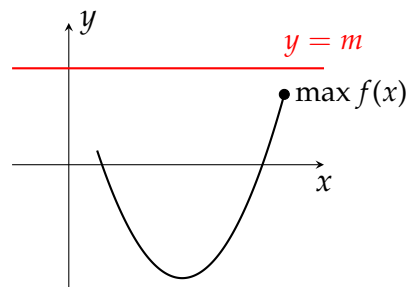
☑ Xét bất phương trình ở dạng $f(x) < m$ (1), với m là tham số.

Bài toán 1. Tìm điều kiện của tham số m để (1) có nghiệm trên miền \mathcal{D} : Khi đó, ta tìm điều kiện để đồ thị $y = f(x)$ có phần nằm dưới đường thẳng $y = m$.

Bài toán 2. Tìm điều kiện của tham số m để (1) nghiệm đúng với mọi x thuộc miền \mathcal{D} : Khi đó, ta tìm điều kiện để đồ thị $y = f(x)$ nằm hoàn toàn phía dưới đường thẳng $y = m$.



Minh họa Bài toán 1



Minh họa Bài toán 2

☑ Các bài toán tương tự:

- | | |
|---|---|
| ① $f(x) > m$ nghiệm đúng $\forall x \in \mathcal{D}$. | ② $f(x) > m$ có nghiệm trên miền \mathcal{D} . |
| ③ $f(x) \leq m$ nghiệm đúng $\forall x \in \mathcal{D}$. | ④ $f(x) \leq m$ có nghiệm trên miền \mathcal{D} . |
| ⑤ $f(x) \geq m$ nghiệm đúng $\forall x \in \mathcal{D}$. | ⑥ $f(x) \geq m$ có nghiệm trên miền \mathcal{D} . |

⚠ Khi muốn sử dụng phương pháp đồ thị để biện luận nghiệm của phương trình $f(x, m) = 0$ hoặc bất phương trình $f(x, m) > 0$, $f(x, m) < 0$, ta phải thực hiện "cô lập" tham số m .

❖ Ví dụ 6.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có bảng biến thiên như sau. Hỏi phương trình $f(|x|) = 1$ có mấy nghiệm?

- A. 6 nghiệm. B. 2 nghiệm.
C. 3 nghiệm. D. 4 nghiệm.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	↗ 2 ↘	$-\infty$	↗ $+\infty$	

❖ Ví dụ 7.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên \mathbb{R} , có bảng biến thiên như sau. Số nghiệm của phương trình $2[f(x)]^2 - 3f(x) + 1 = 0$ là

- A. 2. B. 3.
C. 6. D. 0.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	↗ 1 ↘	3	↘ $\frac{1}{3}$ ↗	1	

DẠNG 2 **Biện luận nghiệm phương trình bằng phương pháp đồ thị**

- Chuyển phương trình đã cho về dạng $f(x) = m$;
- Vẽ đồ thị $\begin{cases} y = f(x) \\ y = m \text{ (nằm ngang)} \end{cases}$
- Tịnh tiến đường thẳng $y = m$ lên xuống theo phương ngang. Nhìn giao điểm với đồ thị $y = f(x)$ để quy ra số nghiệm tương ứng.

❖ Ví dụ 8.

Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = m + 1$ có ba nghiệm thực phân biệt.

- A. $-3 \leq m \leq 3$. B. $-2 \leq m \leq 4$.
C. $-2 < m < 4$. D. $-3 < m < 3$.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	↗ 4 ↘	$-\infty$	↗ $+\infty$	

❖ Ví dụ 9.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có bảng biến thiên sau. Tìm tập hợp tất cả các thực của tham số m sao cho phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm thực phân biệt.

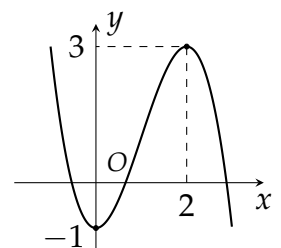
- A. $(-\infty; 4]$. B. $[-2; 4]$.
C. $(-2; 4)$. D. $(-2; 4]$.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	-	+	0	-
y	$+\infty$	↘ -2 ↗	4	↘ $-\infty$

❖ Ví dụ 10.

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2f(|x|) - m = 0$ có đúng 4 nghiệm phân biệt.

- A. $1 < m < 3$. B. $-1 < m < 3$.
C. $-2 < m < 6$. D. $2 < m < 6$.



❖ **Ví dụ 11.** Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình $-x^4 + 2x^2 + 3 + 2m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

- A. $-2 \leq m \leq \frac{-3}{2}$. B. $\frac{-3}{2} < m < 2$. C. $-2 < m < \frac{-3}{2}$. D. $3 < m < 4$.

❖ **Ví dụ 12.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + mx + 1$ có hai điểm cực trị đều thuộc khoảng $(-1; 4)$?

- A. 4. B. 9. C. 8. D. 3.

❖ **Ví dụ 13.** Cho phương trình $\sin^3 x - 3\sin^2 x + 2 - m = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình có nghiệm?

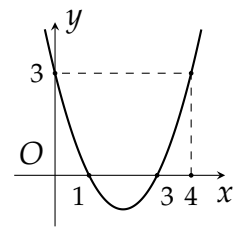
- A. 3. B. 1. C. 5. D. 4.

DẠNG 3 Giải, biện luận nghiệm bất phương trình bằng phương pháp đồ thị

❖ **Ví dụ 14.**

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $f(x) \leq 3$ là

- A. 3. B. 5. C. 6. D. 2.



❖ **Ví dụ 15.**

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên dưới. Với các giá trị nào của tham số m thì $f(x) \leq m$ với mọi $x \in \mathbb{R}$?

- A. $m \geq 3$. B. $m > -4$.
C. $m > 3$. D. $m \geq -4$.

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	0	-2	1	-4	3

❖ **Ví dụ 16.** Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (2m - 1)x + 2019$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.

- A. $m < \frac{1}{2}$. B. $m = \frac{1}{2}$. C. $m \geq 0$. D. $m \geq \frac{1}{2}$.

❖ **Ví dụ 17.** Tìm tất cả các giá trị của m sao cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - 6mx + m$ nghịch biến trên $(-1; 1)$.

- A. $m \geq 0$. B. $m \geq \frac{1}{4}$. C. $m \geq 2$. D. $m \leq -\frac{1}{4}$.

❖ **Ví dụ 18.** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = x^3 + mx - \frac{1}{5x^5}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

- A. 5. B. 3. C. 0. D. 4.

❖ **Ví dụ 19.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $m\sqrt{x^2 - 2x + 2} + m + 2x - x^2 \leq 0$ có nghiệm $x \in [0; 1 + \sqrt{3}]$.

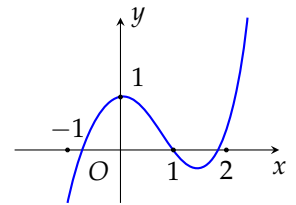
- A. $m \leq \frac{2}{3}$. B. $m \leq 0$. C. $m \geq \frac{2}{3}$. D. $m \leq -1$.

DẠNG 4 Một số bài toán liên quan đến hàm hợp

❖ **Ví dụ 20.**

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khi đó phương trình $4f(3x^4) - 3 = 0$ có bao nhiêu nghiệm dương?

- A. 2.
- B. 4.
- C. 5.
- D. 1.



❖ **Ví dụ 21.**

Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Số nghiệm của phương trình $f(3x^4 - 6x^2 + 1) = 1$ là

- A. 4.
- B. 5.
- C. 6.
- D. 3.

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$		2		-1		$+\infty$

❖ **Ví dụ 22.**

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Phương trình $f(4x - x^2) - 2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực?

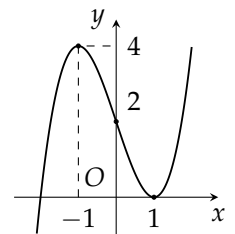
- A. 2.
- B. 6.
- C. 0.
- D. 4.

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$		-1		3		$-\infty$

❖ **Ví dụ 23.**

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm thuộc đoạn $[0; 5\pi]$ của phương trình $f(\cos x) = 1$

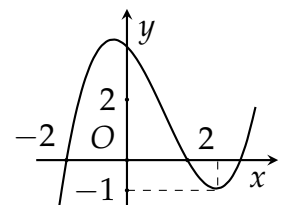
- A. 3.
- B. 4.
- C. 5.
- D. 6.



❖ **Ví dụ 24.**

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $|f(x^3 - 3x)| = \frac{2}{3}$ là

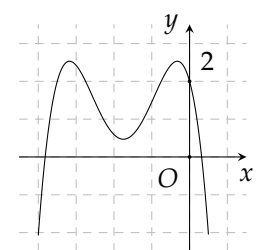
- A. 6.
- B. 10.
- C. 3.
- D. 9.



❖ **Ví dụ 25.**

(QG.2020 – Mã đề 104). Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(x^2f(x)) - 2 = 0$ là

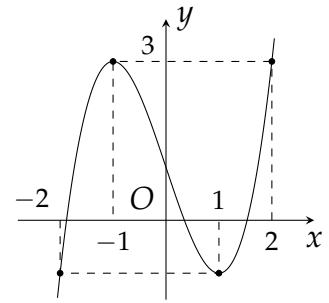
- A. 6.
- B. 12.
- C. 8.
- D. 9.



❖ Ví dụ 26.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(1 - \cos 2x) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ là

- A. $[-1; 3]$. B. $(-1; 1)$. C. $(-1; 3)$. D. $(-1; 1]$.



C // BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Giải phương trình, bất phương trình bằng phương pháp đồ thị

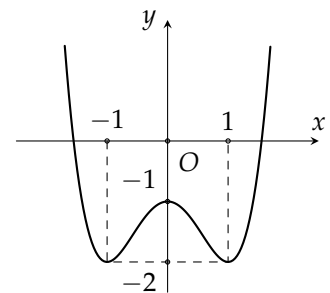
Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Phương trình $f(x) - 4 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực?

- A. 2. B. 4. C. 0. D. 3.

x	$-\infty$	3	5	7	$+\infty$
y'	+	0	-	0	-
y	$-\infty$	3	1	5	$-\infty$

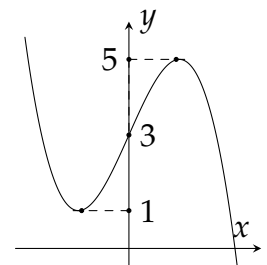
Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có đồ thị ở hình bên. Số nghiệm dương phân biệt của phương trình $f(x) = -\sqrt{3}$ là

- A. 1. B. 3.
C. 2. D. 4.



Câu 3. Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Phương trình $2f(x) - 5 = 0$ có bao nhiêu nghiệm âm?

- A. 0. B. 2.
C. 1. D. 3.



Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Số nghiệm của phương trình $f(x + 5) - 4 = 0$ là

- A. 0. B. 2.
C. 3. D. 1.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
y'	+	0	-	0
y	$-\infty$	4	-2	$+\infty$

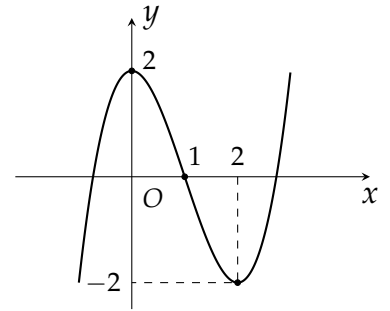
Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $f^2(x) - 9 = 0$ là

- A. 4. B. 3. C. 5. D. 6.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	9	-3	$+\infty$	

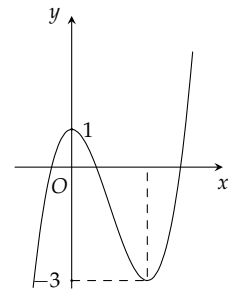
Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số nghiệm của phương trình $f(x) = -x + 1$.

- A. 2. B. 4.
C. 1. D. 3.



Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi phương trình $3f(|x|) = 2$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 3. B. 2. C. 4. D. 1.



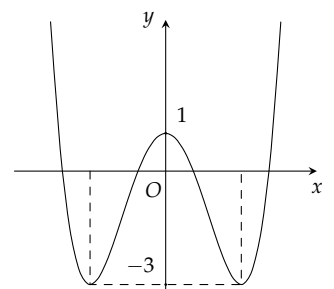
Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $2f(|x|) - 1 = 0$ là

- A. 1. B. 4. C. 3. D. 0.

x	$-\infty$	0	$\frac{4}{3}$	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	$\frac{22}{27}$	$+\infty$	

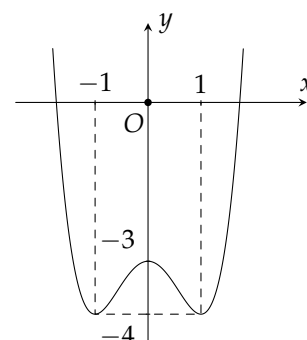
Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $\frac{1 + f(x)}{3 + 2f(x)} = 2$ là

- A. 2. B. 4. C. 3. D. 5.



2. Biện luận nghiệm của phương trình, bất phương trình bằng đồ thị

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $4f(x) + m = 0$ có đúng 4 nghiệm thực phân biệt?



- A. 4.
- B. 3.
- C. 2.
- D. 0.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	-	+	0	-
y	$+\infty$	-1	2	$-\infty$

Tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình $f(x) + m = 0$ có ba nghiệm phân biệt là

- A. $(-2; 1]$.
- B. $[-1; 2)$.
- C. $(-1; 2)$.
- D. $(-2; 1)$.

Câu 12. Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^3 - 3x^2 - m - 4 = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

- A. $4 < m < 8$.
- B. $m < 0$.
- C. $-8 < m < -4$.
- D. $0 \leq m \leq 4$.

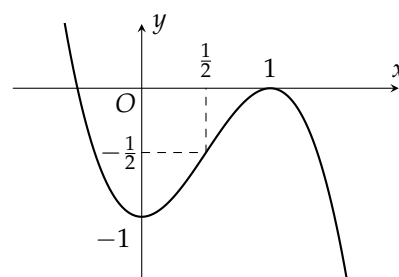
Câu 13. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2x^3 - 3x^2 = 2m + 1$ có đúng hai nghiệm phân biệt. Tổng các phần tử của S bằng

- A. $-\frac{1}{2}$.
- B. $-\frac{3}{2}$.
- C. $-\frac{5}{2}$.
- D. $\frac{1}{2}$.

Câu 14. Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - 4x^2 + 3 + m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt là

- A. $(-1; 3)$.
- B. $(-3; 1)$.
- C. $(2; 4)$.
- D. $(-3; 0)$.

Câu 15. Cho hàm số $y = -2x^3 + 3x^2 - 1$ có đồ thị như hình vẽ. Bằng cách sử dụng đồ thị hàm số, xác định m để phương trình $2x^3 - 3x^2 + 2m = 0$ có đúng ba nghiệm phân biệt, trong đó có hai nghiệm lớn hơn $\frac{1}{2}$.



- A. $m \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.
- B. $m \in (-1; 0)$.
- C. $m \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.
- D. $m \in \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$.

3. Ứng dụng vào bài toán xét đồng biến, nghịch biến trên khoảng

Câu 24. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 - mx - 4$ luôn đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

- A. $m \leq -3$. B. $m < -3$. C. $m \geq 3$. D. $m > 3$.

Câu 25. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + (m - 1)x + 4m$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$ là

- A. $m > 4$. B. $m \geq 4$. C. $m \leq -8$. D. $m < 8$.

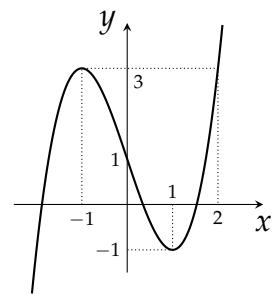
Câu 26. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \frac{3}{4}x^4 - (m - 1)x^2 - \frac{1}{4x^4}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

4. Một số bài toán liên quan đến hàm hợp

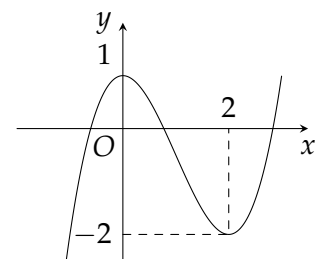
Câu 27. (QG.2021 – Mã đề 101). Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(f(x)) = 1$ là

- A. 9. B. 3. C. 6. D. 7.



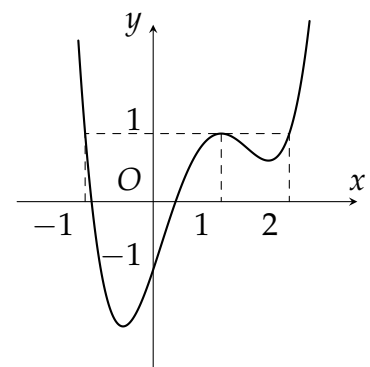
Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có đồ thị như hình vẽ. Tìm số nghiệm của phương trình $2f(x^2) + 3 = 0$.

- A. 4. B. 2.
C. 3. D. 6.



Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm thực của phương trình $f(x^2 + x) = 1$ là

- A. 2. B. 3.
C. 4. D. 5.



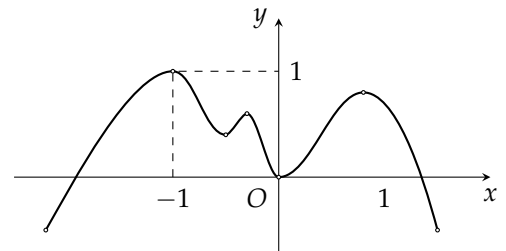
Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau. Số nghiệm của phương trình $f(\sqrt{2x-3}) + 4 = 0$ là

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
y'	+		- 0 +	
y	$-\infty$	2	$+\infty$	$+\infty$
			-4	

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm thực của phương trình $f(f(\sin 2x)) = 0$ trong khoảng $(0; \pi)$ là

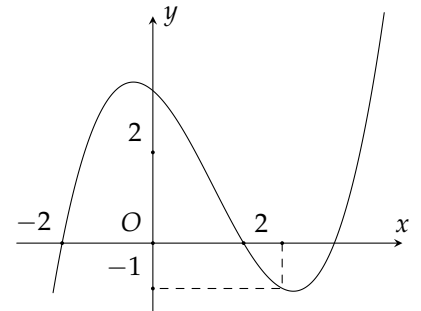
- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.



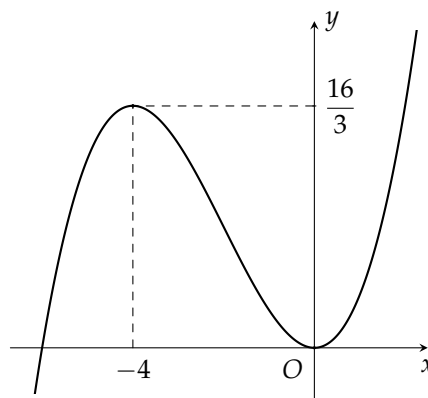
Câu 32. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Số nghiệm thực của phương trình $|f(x^3 - 3x)| = \frac{1}{2}$ là

- A. 6. B. 10.
C. 12. D. 3.



Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên \mathbb{R} , có đồ thị như hình vẽ.



Với m là tham số bất kỳ thuộc $[0; 1]$. Phương trình $f(x^3 - 3x^2) = 3\sqrt{m} + 4\sqrt{1-m}$ có bao nhiêu nghiệm thực?

- A. 2. B. 3. C. 5. D. 9.

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Phương pháp đại số

Xác định tọa độ giao điểm của hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$, ta thực hiện các bước:

- ① Giải phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = g(x)$. Tìm các nghiệm $x_0 \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$.
- ② Với x_0 vừa tìm, thay vào một trong hai hàm số ban đầu để tìm y_0 .
- ③ Kết luận giao điểm $(x_0; y_0)$.

2. Phương pháp đồ thị

- ① Nếu đề bài cho hình ảnh đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$, ta có thể dùng hình vẽ để xác định tọa độ giao điểm giữa chúng.
- ② Số nghiệm phương trình $f(x) = m$ chính bằng số giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ với đường thẳng $y = m$ (nằm ngang).

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

DẠNG 1

Xác định (biện luận) giao điểm của đường thẳng và đồ thị của hàm số bậc ba

Xác định (biện luận) giao điểm của đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có đồ thị (C) và đường thẳng d có phương trình $y = kx + n$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = kx + n \quad (1)$$

Ta có hai trường hợp xảy ra:

- ☑ Trường hợp 1: Phương trình (1) có “nghiệm đẹp” x_0 . Khi đó, ta phân tích (1) về dạng

$$(1) \Leftrightarrow (x - x_0)(Ax^2 + Bx + C) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ Ax^2 + Bx + C = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Khi đó:

- ① (C) và d có đúng ba điểm chung \Leftrightarrow (2) có hai nghiệm phân biệt khác x_0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ Ax_0^2 + Bx_0 + C \neq 0 \end{cases}$$

② (C) và d có đúng hai điểm chung \Leftrightarrow (2) có đúng 1 nghiệm khác x_0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ -\frac{B}{2A} \neq x_0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \Delta > 0 \\ -\frac{B}{2A} = x_0 \end{cases}$$

③ (C) và d có đúng một điểm chung \Leftrightarrow (2) vô nghiệm hoặc có nghiệm duy nhất và nghiệm đó bằng x_0 .

$$\Leftrightarrow \Delta < 0 \text{ hoặc } \begin{cases} \Delta = 0 \\ -\frac{B}{2A} = x_0 \end{cases}$$

☑ Trường hợp 2: Phương trình (1) không có “nghiệm đẹp”. Khi đó ta tiến hành các bước:

- ① Cô lập tham số m , chuyển phương trình (1) về dạng $f(x) = m$. Số nghiệm phương trình này chính bằng hoành độ giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ với đường thẳng $y = m$ (nằm ngang).
- ② Lập bảng biến thiên của hàm $y = f(x)$ trên miền đề bài yêu cầu.
- ③ Tịnh tiến đường thẳng $y = m$ theo phương song song với Ox , nhìn giao điểm suy ra kết quả.

✧ Ví dụ 1. Đường thẳng $y = x - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2 + x - 1$ tại hai điểm. Tìm tổng tung độ các giao điểm đó.

- A. -3. B. 2. C. 0. D. -1.

✧ Ví dụ 2. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = (x - 1)(x^2 - 3x + 2)$ và trục hoành là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

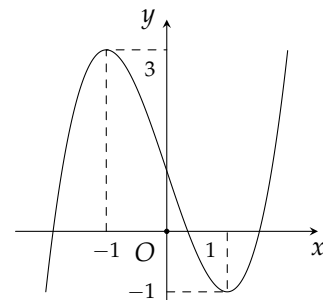
✧ Ví dụ 3. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^2 - 3x + 1$ tại hai điểm phân biệt A, B . Tính độ dài AB .

- A. $AB = 3$. B. $AB = 2\sqrt{2}$. C. $AB = 2$. D. $AB = 1$.

✧ Ví dụ 4.

Đồ thị sau đây là của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$. Với giá trị nào của m thì phương trình $x^3 - 3x - m = 0$ có 3 nghiệm phân biệt?

- A. $-2 < m < 2$. B. $-1 < m < 3$.
C. $-2 \leq m < 2$. D. $-2 < m < 3$.



✧ Ví dụ 5. Cho hàm số $y = (x - 2)(x^2 + mx + m^2 - 3)$. Tìm tập hợp các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

- A. $-1 < m < 2$. B. $\begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \neq -1 \end{cases}$. C. $\begin{cases} -1 < m < 2 \\ m \neq 1 \end{cases}$. D. $-2 < m < -1$.

✧ Ví dụ 6. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị (C). Gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(3; 20)$ và có hệ số góc là m . Với giá trị nào của m thì d cắt (C) tại ba điểm phân biệt?

$$\text{A. } \begin{cases} m < \frac{15}{4} \\ m \neq 4 \end{cases} \quad \text{B. } \begin{cases} m < \frac{1}{5} \\ m \neq 0 \end{cases} \quad \text{C. } \begin{cases} m > \frac{15}{4} \\ m \neq 24 \end{cases} \quad \text{D. } \begin{cases} m > \frac{1}{5} \\ m \neq 1 \end{cases}$$

❖ **Ví dụ 7.** Biết có hai số m_1, m_2 là hai giá trị của tham số m sao cho đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - 3x + 3m + 2$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 15$. Tính $m_1 + m_2$.

$$\text{A. } 0. \quad \text{B. } 3. \quad \text{C. } 2. \quad \text{D. } 1.$$

❖ **Ví dụ 8.** Cho hàm số $y = x^3 + mx^2 - x - m$ (C_m). Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (C_m) cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng?

$$\text{A. } 2. \quad \text{B. } 3. \quad \text{C. } 1. \quad \text{D. } 0.$$

❖ **Ví dụ 9.** Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng $\Delta : y = x + 4$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + (m + 3)x + 4$ tại ba điểm phân biệt $A(0;4)$, B và C sao cho diện tích tam giác MBC bằng 4, với $M(1;3)$.

$$\begin{array}{ll} \text{A. } m = 2 \text{ hoặc } m = 3. & \text{B. } m = -2 \text{ hoặc } m = 3. \\ \text{C. } m = 3. & \text{D. } m = -2 \text{ hoặc } m = -3. \end{array}$$

DẠNG 2

Xác định (biện luận) giao điểm của đường thẳng và đồ thị của hàm số bậc bốn trùng phương

Xác định (biện luận) giao điểm của đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị (C) và đường thẳng $y = k$ có đồ thị d .

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d :

$$ax^4 + bx^2 + c = k \quad (1)$$

Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$) ta có phương trình $at^2 + bt + c - k = 0$ (2).

Khi đó:

① (C) và d có bốn điểm chung \Leftrightarrow (2) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$$

② (C) và d có ba điểm chung \Leftrightarrow (2) có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm dương và một nghiệm $t = 0$.

③ (C) và d có hai điểm chung \Leftrightarrow (2) có nghiệm kép dương hoặc có hai nghiệm trái dấu.

④ (C) và d có một điểm chung \Leftrightarrow (2) có nghiệm $t = 0$ và một nghiệm âm.

⑤ (C) và d không có điểm chung \Leftrightarrow (2) vô nghiệm hoặc chỉ có nghiệm âm.

⚠ Có thể chuyển bài toán về dạng "biện luận giao điểm của đồ thị cô định với một đường thẳng nằm ngang".

❖ **Ví dụ 10.** Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ với trục Ox .

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

❖ **Ví dụ 11.** Đồ thị hàm số $y = 2x^4 - 3x^2$ và đồ thị hàm số $y = -x^2 + 2$ có bao nhiêu điểm chung?

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.

❖ **Ví dụ 12.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 - m - 1$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.

- A. $\begin{cases} m > -1 \\ m = -\frac{13}{4} \end{cases}$. B. $m > -1$. C. $\begin{cases} m \geq -1 \\ m = -\frac{13}{4} \end{cases}$. D. $m \geq -1$.

❖ **Ví dụ 13.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$ tại bốn điểm phân biệt.

- A. $m > -1$. B. $-1 < m < 1$. C. $m < -4$. D. $-4 < m < -3$.

❖ **Ví dụ 14.** Cho hàm số: $y = x^4 - (2m - 1)x^2 + 2m$ có đồ thị (C). Tất cả có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đường thẳng $d: y = 2$ cắt đồ thị (C) tại bốn điểm phân biệt đều có hoành độ bé hơn 3?

- A. 3. B. 1. C. 2. D. 4.

DẠNG 3

Xác định (biện luận) giao của đường thẳng và đồ thị hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$

Xác định (biện luận) giao điểm của đồ thị hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$, ($ad - bc \neq 0$) có đồ thị (C) và đường thẳng d có phương trình $y = kx + n$.

Lập phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d :

$$\frac{ax + b}{cx + d} = kx + n \Leftrightarrow \begin{cases} Ax^2 + Bx + C = 0 \quad (1) \\ x \neq -\frac{d}{c} = x_0 \end{cases}$$

Các bài toán thường gặp

① (C) và d có hai điểm chung \Leftrightarrow (1) có hai nghiệm phân biệt khác $x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ Ax_0^2 + Bx_0 + C \neq 0 \end{cases}$

② Giả sử hai đồ thị trên cắt nhau tại hai điểm phân biệt $M(x_1; kx_1 + n)$ và $N(x_2; kx_2 + n)$. Khi đó

$$MN = \sqrt{(k^2 + 1) \frac{\Delta}{A^2}}$$

❖ **Ví dụ 15.** Đồ thị của hàm số $y = \frac{x - 1}{x + 1}$ cắt hai trục Ox và Oy tại A và B . Khi đó diện tích của tam giác OAB (với O là gốc tọa độ) bằng

- A. 1. B. $\frac{1}{4}$. C. 2. D. $\frac{1}{2}$.

❖ **Ví dụ 16.** Biết đường thẳng $y = x - 2$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x-1}$ tại 2 điểm phân biệt A, B . Tìm hoành độ trọng tâm tam giác OAB với O là gốc tọa độ.
A. $\frac{2}{3}$. **B.** 2. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** 4.

❖ **Ví dụ 17.** Gọi M, N là giao điểm của đường thẳng $y = x + 1$ và đường cong $y = \frac{2x+4}{x-1}$. Tìm hoành độ trung điểm của đoạn thẳng MN .
A. $x = -1$. **B.** $x = 1$. **C.** $x = -2$. **D.** $x = 2$.

❖ **Ví dụ 18.** Cho hàm số $y = \frac{2x}{x+1}$ có đồ thị (C) . Gọi A, B là giao điểm của đường thẳng $d: y = x$ với đồ thị (C) . Tính độ dài đoạn AB .
A. $AB = \sqrt{2}$. **B.** $AB = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $AB = 1$. **D.** $AB = 2$.

❖ **Ví dụ 19.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-14; 15]$ sao cho đường thẳng $y = mx + 3$ cắt đồ thị của hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt.
A. 17. **B.** 16. **C.** 20. **D.** 15.

❖ **Ví dụ 20.** Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C) . Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = x + m - 1$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 2\sqrt{3}$.
A. $m = 4 \pm \sqrt{3}$. **B.** $m = 2 \pm \sqrt{3}$. **C.** $m = 4 \pm \sqrt{10}$. **D.** $m = 2 \pm \sqrt{10}$.

❖ **Ví dụ 21.** Biết rằng có hai giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ (C) và đường thẳng $d: y = mx + 3$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O (với O là gốc tọa độ). Tổng của hai giá trị đó bằng
A. 0. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 6.

❖ **Ví dụ 22.** Cho hàm số $y = \frac{3x-2}{x+1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(-5; 5)$. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = -x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt M, N sao cho tứ giác $OAMN$ là hình bình hành (O là gốc tọa độ).
A. $m = 3$. **B.** $m = 2 + \sqrt{5}$.
C. $m = 2 + \sqrt{5}, m = 2 - \sqrt{5}$. **D.** $m = 2 - \sqrt{5}$.

C // BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 1$ và đường thẳng $y = 2$.

- A.** 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 2. Đồ thị hàm số $y = x^4 - x^3 - 3$ cắt trục tung tại mấy điểm?

- A.** 1 điểm. **B.** 2 điểm. **C.** 4 điểm. **D.** 3 điểm.

Câu 3. Đồ thị hàm số $y = x^4 - 5x^2 + 4$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm?

- A.** 0. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 4. Tìm số giao điểm n của hai đồ thị $(C_1): y = x^4 - 3x^2 + 2$ và $(C_2): y = x^2 - 2$.

- A.** $n = 1$. **B.** $n = 4$. **C.** $n = 2$. **D.** $n = 0$.

Câu 5. Đồ thị hàm số $y = \frac{4x+4}{x-1}$ và $y = x^2 - 1$ cắt nhau tại bao nhiêu điểm?

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 0.

Câu 6. Biết rằng đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2 - x + 2$ và đồ thị hàm số $y = -x^2 - x + 5$ cắt nhau tại điểm duy nhất có tọa độ $(x_0; y_0)$. Tìm y_0 .

- A. 0. B. 4. C. 1. D. 3.

Câu 7. Đồ thị hàm số nào sau đây cắt trục tung tại điểm có tung độ âm?

- A. $y = \frac{4x+1}{x+2}$. B. $y = \frac{-2x+3}{x+1}$. C. $y = \frac{3x+4}{x-1}$. D. $y = \frac{2x-3}{x-1}$.

Câu 8. Biết đường thẳng $y = x - 2$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ lần lượt là x_A, x_B . Khi đó

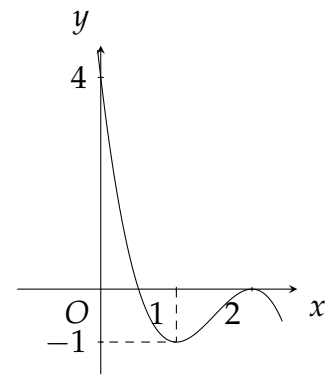
- A. $x_A + x_B = 5$. B. $x_A + x_B = 2$. C. $x_A + x_B = 1$. D. $x_A + x_B = 3$.

Câu 9. Biết rằng đồ thị hàm số $y = x^3 - 4x^2 + 5x - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = 1$ tại hai điểm phân biệt A và B . Tính độ dài đoạn thẳng AB .

- A. $AB = 2$. B. $AB = 3$. C. $AB = 2\sqrt{2}$. D. $AB = 1$.

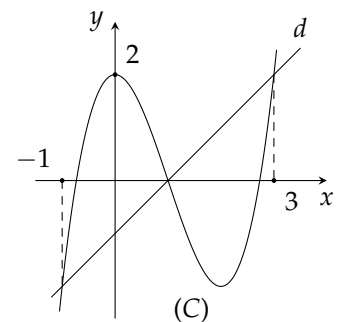
Câu 10. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($d \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $3f(x) - 1 = 0$ bằng

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.



Câu 11. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ, đường thẳng d có phương trình $y = x - 1$. Biết phương trình $f(x) = 0$ có ba nghiệm $x_1 < x_2 < x_3$. Giá trị của $x_1 x_3$ bằng

- A. -2. B. $-\frac{5}{2}$. C. $-\frac{7}{3}$. D. -3.



Câu 12. Cho hàm số $y = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 1$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d : y = -m$. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để d cắt (C) tại ba điểm phân biệt.

- A. $[\frac{1}{3}; 1]$. B. $[-1; -\frac{1}{3}]$. C. $(\frac{1}{3}; 1)$. D. $(-1; -\frac{1}{3})$.

Câu 13. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + m$ cắt trục hoành bốn điểm phân biệt.

- A. $m > 0$. B. $0 < m < 1$. C. $m > 1$. D. $m < 1$.

Câu 14. Có bao nhiêu số m nguyên âm để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (1 - m)x + m + 1$ cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt.

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 15. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3x + m$ cắt trục hoành tại đúng 3 điểm phân biệt.

- A. $m \in (2; +\infty)$. B. $m \in (-2; 2)$. C. $m \in \mathbb{R}$. D. $m \in (-\infty; -2)$.

Câu 16. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (3m - 1)x + 6m$ có đồ thị là (C). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để (C) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2x_3 = 20$. Tính tổng các phần tử của tập S .

- A. $\frac{4}{3}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{5}{3}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 17. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 9x - 7$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

- A. $\begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{-1 \pm \sqrt{15}}{2} \end{cases}$. B. $m = \frac{-1 + \sqrt{15}}{2}$. C. $m = \frac{-1 - \sqrt{15}}{2}$. D. $m = 1$.

Câu 18. Giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx$ cắt trục hoành tại ba điểm A, B, C phân biệt và cách đều nhau là

- A. 2. B. 1. C. -2. D. 0.

Câu 19. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $-x^4 + 2x^2 + 3 + 2m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

- A. $-2 \leq m \leq \frac{-3}{2}$. B. $\frac{-3}{2} < m < 2$. C. $-2 < m < \frac{-3}{2}$. D. $3 < m < 4$.

Câu 20. Tìm tất cả các giá trị m nguyên để phương trình $x^4 - 2x^2 + 3 - m = 0$ có bốn nghiệm thực.

- A. 1. B. 2.
C. 3. D. Không có giá trị m .

Câu 21. Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^2|x^2 - 3|$ và đường thẳng $y = 2$.

- A. 8. B. 2. C. 6. D. 4.

Câu 22. Có bao nhiêu đường thẳng cắt đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{5x - 3}{x - 1}$ tại hai điểm phân biệt mà hai giao điểm đó có hoành độ và tung độ là các số nguyên?

- A. 15. B. 4. C. 2. D. 6.

Câu 23. Đồ thị hàm số $y = \frac{x - 3}{x + 1}$ cắt đường thẳng $y = x + m$ tại hai điểm phân biệt khi

- A. $m > -2$. B. $m > 6$. C. $\begin{cases} m < -2 \\ m > 6 \end{cases}$. D. $m < -2$.

Câu 24. Cho hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ ($b < 0, a \neq 0$). Biết rằng đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt trong đó có hai giao điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ. Tính giá trị của biểu thức $T = 2(ab - c) + 3$.

- A. $T = 5$. B. $T = 2$. C. $T = 3$. D. $T = 1$.

Câu 25. Cho hàm số $y = \frac{3x + 2}{x + 2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d : y = ax + 2b - 4$. Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm A và B đối xứng nhau qua gốc tọa độ O . Tính $a + b$.

- A. $T = 2$. B. $T = \frac{5}{2}$. C. $T = 4$. D. $T = \frac{7}{2}$.

Câu 26. Đường thẳng d đi qua $A(2; 1)$ với hệ số góc k cắt đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x-8}{x-4}$ tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi

- A. $k > 0$. B. $-1 < k < 1$. C. $k < 1$ hoặc $k > 3$. D. $k < 0$ hoặc $k > 4$.

Câu 27. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C). Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = x + m - 1$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 2\sqrt{3}$.

- A. $m = 4 \pm \sqrt{3}$. B. $m = 4 \pm \sqrt{10}$. C. $m = 2 \pm \sqrt{10}$. D. $m = 2 \pm \sqrt{3}$.

Câu 28. Tìm giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = 2x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ (C) tại hai điểm A, B phân biệt sao cho đoạn AB ngắn nhất.

- A. $m = 0$. B. $m = -1$. C. $m = -2$. D. $m = 1$.

Câu 29. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng (d): $y = mx - m - 1$ cắt đồ thị (C): $y = x^3 - 3x^2 + 1$ tại 3 điểm A, B, C phân biệt (B thuộc đoạn AC), sao cho tam giác AOC cân tại O (với O là gốc tọa độ).

- A. $m = -1$. B. $m = 1$. C. $m = 2$. D. $m = -2$.

Câu 30. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\begin{cases} a + c > b + 1 \\ a + b + c + 1 < 0 \end{cases}$. Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ và trục Ox .

- A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.

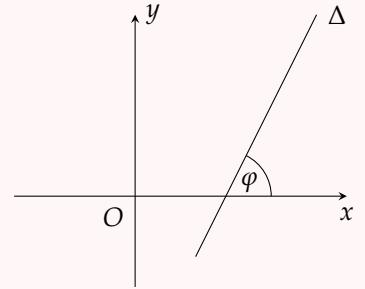
—HẾT—

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

☑ Đường thẳng đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ có hệ số góc k có phương trình là $y = k(x - x_0) + y_0$.

Lưu ý:

- ① $k = \tan \varphi$, với φ là góc hợp bởi đường thẳng Δ với chiều dương của trục Ox và $\varphi \neq 90^\circ$.
- ② Cho hai đường thẳng $\Delta_1: y = k_1x + m_1$ và $\Delta_2: y = k_2x + m_2$.
 - $\Delta_1 \parallel \Delta_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$ và $m_1 \neq m_2$.
 - $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$.

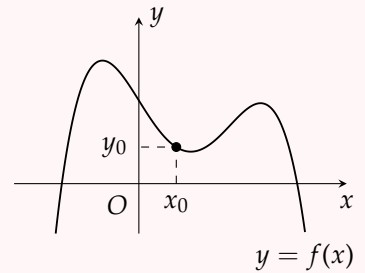


☑ Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(x_0; y_0)$:

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến d của đồ thị hàm số tại điểm $M(x_0; y_0)$ có phương trình là $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$ (lúc này $k = f'(x_0)$).

Trong đó

- x_0 gọi là hoành độ tiếp điểm;
- y_0 là tung độ tiếp điểm, với $y_0 = f(x_0)$;
- $f'(x_0)$ gọi là hệ số góc của tiếp tuyến.



B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

DẠNG 1 Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $(x_0; y_0)$ cho trước

- Tính $f'(x)$. Từ đây tính $f'(x_0)$ hoặc bấm máy $\left. \frac{d}{dx}(f(x)) \right|_{x=x_0}$.
- Thay vào công thức $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$, thu gọn kết quả về dạng $y = Ax + B$.

⚠ Trong nhiều trường hợp, đề bài chưa cho đầy đủ $(x_0; y_0)$. ta thường gặp các loại sau:

- ① Cho biết trước x_0 hoặc y_0 . Ta chỉ việc thay giá trị đó vào hàm số $y = f(x)$, sẽ tính được đại lượng còn lại.
- ② Cho trước 1 điều kiện giải. Ta chỉ việc giải điều kiện đó, tìm x_0 .

🔗 **Ví dụ 1.** Cho hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 4$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm $M(1; 1)$.

- A. $y = -x + 2$. B. $y = -2x + 3$. C. $y = -3x + 4$. D. $y = -4x + 5$.

❖ **Ví dụ 2.** Tiếp tuyến với đồ thị của hàm số $f(x) = \frac{3}{2x-1}$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$ có hệ số góc là
A. $-\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** 2. **D.** -2.

❖ **Ví dụ 3.** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^2 - 3x + 1$ tại điểm có hoành độ bằng 3 là
A. $y = 3x - 8$. **B.** $y = 3x - 10$. **C.** $y = -3x + 10$. **D.** $y = -3x - 8$.

❖ **Ví dụ 4.** Tìm hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{3-4x}{x-2}$ tại điểm có tung độ $y = -\frac{7}{3}$.
A. $\frac{9}{5}$. **B.** $-\frac{5}{9}$. **C.** $\frac{5}{9}$. **D.** -10.

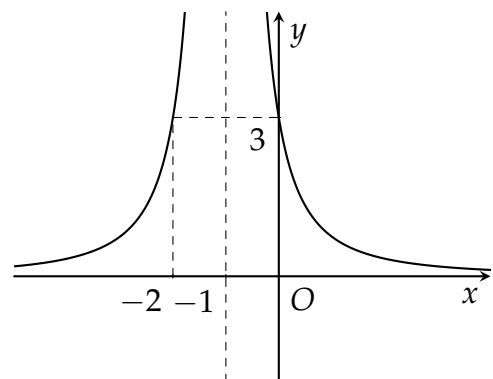
❖ **Ví dụ 5.** Tiếp tuyến của đường cong (C): $y = \frac{2x+1}{x-1}$ tại điểm $M(2;5)$ cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A và B. Tính diện tích tam giác OAB .
A. $\frac{121}{6}$. **B.** $-\frac{121}{6}$. **C.** $\frac{121}{3}$. **D.** $-\frac{121}{3}$.

❖ **Ví dụ 6.** Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 4$ tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục Ox là
A. $y = 9x + 9$. **B.** $y = -9x + 9$ và $y = 0$.
C. $y = 9x - 9$ và $y = 0$. **D.** $y = -9x - 9$.

❖ **Ví dụ 7.** Biết đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{2}{2-x}$ cắt đồ thị (C') của hàm số $y = x^2 + 1$ tại hai điểm A, B. Tiếp tuyến tại hai điểm A, B với đồ thị (C) có hệ số góc lần lượt là k_1, k_2 . Tính tổng $k_1 + k_2$.
A. $k_1 + k_2 = -\frac{5}{2}$. **B.** $k_1 + k_2 = 1$. **C.** $k_1 + k_2 = 3$. **D.** $k_1 + k_2 = \frac{5}{2}$.

❖ **Ví dụ 8.** Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x+2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng (d): $y = -2x + m - 1$ (m là tham số thực). Gọi k_1, k_2 là hệ số góc của tiếp tuyến tại giao điểm của (d) và (C). Khi đó $k_1 \cdot k_2$ bằng
A. 3. **B.** 4. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** 2.

❖ **Ví dụ 9.**
 Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}; c \neq 0, d \neq 0$) có đồ thị (C). Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Biết (C) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành.



- A.** $x - 3y + 2 = 0$. **B.** $x + 3y - 2 = 0$.
C. $x + 3y + 2 = 0$. **D.** $x - 3y - 2 = 0$.

DẠNG 2

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ khi biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng k_0

- Tính $f'(x)$. Giải phương trình $f'(x) = k_0$, tìm nghiệm x_0 . Thay x_0 vào $y = f(x)$, tìm y_0 .
- Viết phương trình tiếp tuyến tại $(x_0; y_0)$ theo công thức $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$.

⚠ Trong nhiều trường hợp, ta gặp các dạng sau:

- ① Biết tiếp tuyến song song với $\Delta: y = ax + b$. Khi đó $k_0 = a$ hay $f'(x_0) = a$.
- ② Biết tiếp tuyến vuông góc với $\Delta: y = ax + b$. Khi đó $k_0 \cdot a = -1$ hay $f'(x_0) = -\frac{1}{a}$.
- ③ Biết tiếp tuyến tạo với Ox một góc φ thì $k_0 = \pm \tan \varphi$.
- ④ Biết tiếp tuyến cắt Ox, Oy lần lượt tại hai điểm A, B thỏa $OA = m \cdot OB$ thì $k_0 = \pm \frac{OB}{OA}$.
- ⑤ Biết tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất (hoặc lớn nhất) thì $k_0 = \min f'(x)$ (hoặc $\max f'(x)$). Đối với hàm bậc ba thì k_{\max} hoặc k_{\min} đạt được tại x_0 thỏa $f''(x) = 0$.

❖ Ví dụ 10. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^4 - x^2 + 6$, biết tiếp tuyến có hệ số góc $k = 6$.

- A. $y = 6x + 6$. B. $y = -6x + 1$. C. $y = -6x + 10$. D. $y = 6x + 10$.

❖ Ví dụ 11. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 9x + 5$ có hệ số góc lớn nhất là

- A. $y = 12x + 18$. B. $y = 9x - 9$. C. $y = 12x + 6$. D. $y = 4x + 4$.

❖ Ví dụ 12. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 5$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số có hệ số góc nhỏ nhất là

- A. $y = -x + \frac{17}{3}$. B. $y = -x + \frac{23}{3}$. C. $y = 5$. D. $y = \frac{19}{3}$.

❖ Ví dụ 13. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = -2x - 1$.

- A. $y = -2x + \frac{10}{3}; y = -2x - 22$. B. $y = -2x - 10; y = -2x - \frac{22}{3}$.
C. $y = -2x + \frac{10}{3}; y = -2x + \frac{22}{3}$. D. $y = -2x + \frac{10}{3}; y = -2x - \frac{22}{3}$.

❖ Ví dụ 14. Cho $(C_m): y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3m+4}{2}x^2 + 3m+3$. Gọi $A \in (C_m)$ có hoành độ 1. Tìm m để tiếp tuyến tại A song song với đường thẳng $d: y = 6x + 2017$?

- A. $m = -3$. B. $m = 3$. C. $m = 5$. D. $m = 0$.

❖ Ví dụ 15. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3$ có đồ thị (C). Số tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{9}x + 2017$ là

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

❖ **Ví dụ 16.** Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu tiếp tuyến của (C) cắt trục Ox , Oy lần lượt tại hai điểm A và B thỏa mãn điều kiện $OA = 4OB$.

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 4.

DẠNG 3 **Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$, biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(x_A; y_A)$**

- Gọi $d: y = k(x - x_A) + y_A$ (1) là đường thẳng đi qua điểm A và có hệ số góc k .
- d là tiếp tuyến khi hệ $\begin{cases} f(x) = k(x - x_A) + y_A \\ f'(x) = k \end{cases}$ (2) có nghiệm x .
- Giải hệ (2), tìm x và k .
- Thay k vào (1), ta được kết quả.

❖ **Ví dụ 17.** Cho hàm số $y = x^3 - 9x^2 + 17x + 2$ có đồ thị (C). Qua điểm $M(-2; 5)$ kẻ được tất cả bao nhiêu tiếp tuyến đến (C)?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

❖ **Ví dụ 18.** Cho đường cong (C): $y = x^4 - 4x^2 + 2$ và điểm $A(0; a)$. Nếu qua A kẻ được 4 tiếp tuyến với (C) thì a phải thỏa mãn điều kiện

- A. $a \in \left(2; \frac{10}{3}\right)$. B. $a \in (2; +\infty)$.
 C. $a \in (-\infty; 2) \cup \left(\frac{10}{3}; +\infty\right)$. D. $a \in \left(-\infty; \frac{10}{3}\right)$.

❖ **Ví dụ 19.** Đường thẳng $x + y = 2m$ là tiếp tuyến của đường cong $y = -x^3 + 2x + 4$ khi m bằng

- A. -3 hoặc 1. B. 1 hoặc 3. C. -1 hoặc 3. D. -3 hoặc -1.

❖ **Ví dụ 20.** Cho hàm số $y = \frac{2x}{x+1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(0; a)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của a để từ A kẻ được hai tiếp tuyến AM, AN đến (C) với M, N là các tiếp điểm và $MN = 4$. Tổng các phần tử của S bằng bao nhiêu?

- A. 4. B. 3. C. 6. D. 1.

❖ **Ví dụ 21.** Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ (1). Biết trên trục tung có đúng hai điểm M, N mà từ đó chỉ kẻ được tới đồ thị của hàm số (1) đúng một tiếp tuyến. Độ dài đoạn MN là

- A. $\sqrt{5}$. B. 2. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

DẠNG 4 **Bài tập tổng hợp**

❖ **Ví dụ 22.** Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x+3}$ có đồ thị (C). Đường thẳng d có phương trình $y = ax + b$ là tiếp tuyến của (C), biết d cắt trục hoành tại A và cắt trục tung tại B sao cho tam giác OAB cân tại O, với O là gốc tọa độ. Tính $a + b$.

- A. -1. B. -2. C. 0. D. -3.

❖ **Ví dụ 23.** Cho các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = \frac{f(x)}{g(x)}$. Nếu hệ số góc tiếp tuyến của các đồ thị hàm số đã cho tại điểm có hoành độ x_0 bằng nhau và khác không thì

- A. $f(x_0) > \frac{1}{4}$. B. $f(x_0) \leq \frac{1}{4}$. C. $f(x_0) \leq \frac{1}{2}$. D. $f(x_0) < \frac{1}{4}$.

❖ **Ví dụ 24.** Cho hàm số $y = \frac{x+1}{2x-1}$, có đồ thị (H) . Biết $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ là hai điểm phân biệt thuộc (H) sao cho tiếp tuyến của (H) tại A, B song song với nhau. Tìm độ dài nhỏ nhất của đoạn thẳng AB .

- A. $2\sqrt{6}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\sqrt{6}$. D. $3\sqrt{2}$.

❖ **Ví dụ 25.** Cho hàm số $y = \frac{-x+1}{2x-1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $(d): y = x + m$. Với mọi giá trị của m đường thẳng (d) luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B . Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A và B . Giá trị nhỏ nhất của $T = k_1^{2020} + k_2^{2020}$ bằng

- A. 1. B. 2. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{2}{3}$.

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4x + 7$ tại điểm $A(-1; 2)$ có hệ số góc là

- A. 2. B. 4. C. -2. D. 6.

Câu 2. Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{3x-2}{2x-1}$ tại điểm có hoành độ 2 là

- A. $\frac{3}{2}$. B. -1. C. $\frac{1}{9}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 3. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -2x^4 + x^2 + 3$ tại điểm $M(1; 2)$ là

- A. $y = -6x + 8$. B. $y = -6x + 6$. C. $y = -6x - 6$. D. $y = -6x - 8$.

Câu 4. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$.

- A. $y = -x - 7$. B. $y = 7x - 14$. C. $y = 7x - 7$. D. $y = -x + 9$.

Câu 5. Số tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 + 2x^2 + 2$ tại điểm có tung độ bằng 2 là

- A. 3. B. 2. C. 4. D. 1.

Câu 6. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x - 2$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.

- A. $y = -2x + 1$. B. $y = 2x + 1$. C. $y = 3x - 2$. D. $y = -3x - 2$.

Câu 7. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x - 2$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M , biết M là giao điểm của (C) với đường thẳng có phương trình $y = -x - 2$ và $x_M > 0$.

- A. $y = -9x - 12$. B. $y = -9x + 12$. C. $y = -9x + 14$. D. $y = -9x - 14$.

Câu 8. Số tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 8x + 1$ song song với đường thẳng $(d): y = x + 28$ là

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

Câu 9. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{x+1}$ song song với đường thẳng $y = 5x + 17$ có phương trình là

A. $y = 5x + 17; y = 5x + 3.$

B. $y = 5x + 3.$

C. $y = 5x - 3.$

D. $y = 5x + 17; y = 5x - 3.$

Câu 10. Cho đường cong (C) có phương trình $y = \frac{2x+1}{x+1}$. Tìm phương trình tiếp tuyến của đường cong (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: y = -4x + 3$.

A. $y = \frac{1}{4}x - \frac{7}{4}.$

B. $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$ và $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}.$

C. $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$ và $y = \frac{1}{4}x + \frac{13}{4}.$

D. $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}.$

Câu 11. Tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ vuông góc với đường thẳng $x - 3y + 1 = 0$ có phương trình là

A. $x - 3y + 3 = 0.$

B. $3x - y - 3 = 0.$

C. $3x + y - 3 = 0.$

D. $3x + y - 1 = 0.$

Câu 12. Đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2$ có bao nhiêu tiếp tuyến song song với trục Ox ?

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Câu 13. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 2$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) mà có hệ số góc lớn nhất là

A. $y = 3x + 1.$

B. $y = -3x + 1.$

C. $y = 3x - 1.$

D. $y = -3x - 1.$

Câu 14. Cho hàm số $y = \frac{x^2+x}{x-2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = -2x$. Biết d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B . Tích các hệ số góc của các tiếp tuyến của (C) tại A, B bằng

A. 0.

B. 4.

C. $-\frac{1}{6}.$

D. $\frac{5}{2}.$

Câu 15. Đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{x-1}$ cắt trục tung tại điểm $A(0; -1)$, tiếp tuyến của đồ thị tại điểm A có hệ số góc $k = -3$. Giá trị của a và b là

A. $a = 1; b = 1.$

B. $a = 2; b = 2.$

C. $a = 2; b = 1.$

D. $a = 1; b = 2.$

Câu 16. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (m+1)x - m$. Gọi A là giao điểm của đồ thị hàm số với trục Oy . Tìm giá trị của m để tiếp tuyến của đồ thị tại A vuông góc với đường thẳng $y = 2x - 3$.

A. $m = -\frac{3}{2}.$

B. $m = -\frac{1}{2}.$

C. $m = -3.$

D. $m = 1.$

Câu 17. Cho các hàm số $y = f(x), y = g(x), y = \frac{f(x)+3}{g(x)+1}$. Hệ số góc tiếp tuyến của các đồ thị hàm số đã cho tại điểm có hoành độ $x = 1$ bằng nhau và khác 0. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $f(1) \leq -\frac{11}{4}.$

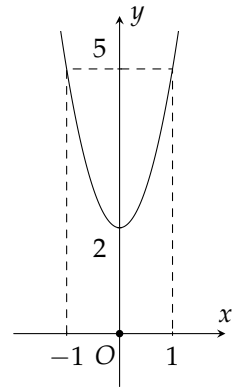
B. $f(1) < -\frac{11}{4}.$

C. $f(1) > -\frac{11}{4}.$

D. $f(1) \geq -\frac{11}{4}.$

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) có đồ thị là (C). Biết đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng $x = 1$.

- A. $y = x + 2$. B. $y = x + 4$. C. $y = 5x + 2$. D. $y = 5x - 2$.



Câu 19. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị là (C). Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm thuộc đồ thị (C) với hoành độ $x_0 = 0$ cắt hai đường tiệm cận của đồ thị (C) tại hai điểm A, B. Tính diện tích tam giác IAB, với I là giao điểm hai đường tiệm cận của đồ thị (C).

- A. $S_{\triangle IAB} = 6$. B. $S_{\triangle IAB} = 3$. C. $S_{\triangle IAB} = 12$. D. $S_{\triangle IAB} = 6\sqrt[3]{2}$.

Câu 20. Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{2}x^2$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ (M, N khác A) thỏa mãn $y_1 - y_2 = 6(x_1 - x_2)$?

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.

—HẾT—