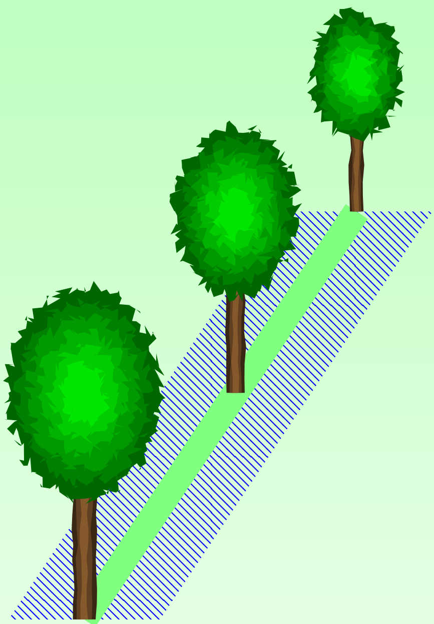
TRƯỜNG THPT NGUYỄN TẤT THÀNH

GIÁO VIÊN: LÊ QUANG XE

TÀI LIỆU DẠY THÊM

MÔN TOÁN

12



TÀI LIỆU LƯU HÀNH NỘI BỘ

Ngày 27 tháng 3 năm 2021

MỤC LỤC

CHƯƠNG 1 KHẢO SÁT HÀM SỐ VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

§ 1. SỰ ĐỒNG BIẾN NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ

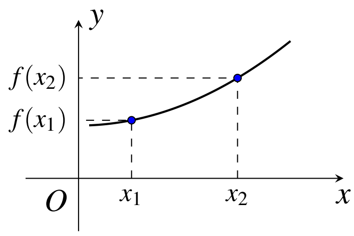
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a;b)$. Khi đó

- Hàm số đồng biến trên $(a;b)$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a;b): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

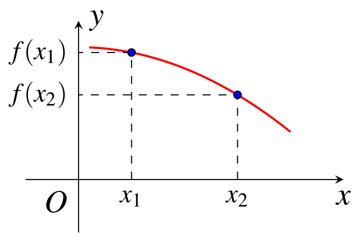
  - Trên khoảng $(a;b)$, đồ thị là một "**đường đi lên**" khi xét từ trái sang phải.



- Hàm số nghịch biến trên $(a;b)$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a;b): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

  - Trên khoảng $(a;b)$, đồ thị là một "**đường đi xuống**" khi xét từ trái sang phải.



2 Các tính chất thường dùng cho hàm đơn điệu

- Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a;b)$. Xét $m, n \in (a;b)$.

① Nếu $f(m) = f(n)$ thì $m = n$.

② Nếu $f(m) > f(n)$ thì $m > n$.

③ Nếu $f(m) < f(n)$ thì $m < n$.

④ Với k là một số thực cho trước, phương trình $f(x) = k$ có không quá 1 nghiệm thực trên $(a;b)$.

- Cho hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a;b)$. Xét $m, n \in (a;b)$.

① Nếu $f(m) = f(n)$ thì $m = n$.

② Nếu $f(m) > f(n)$ thì $m < n$.

③ Nếu $f(m) < f(n)$ thì $m > n$.

④ Với k là một số thực cho trước, phương trình $f(x) = k$ có không quá 1 nghiệm thực trên $(a;b)$.

3 Liên hệ giữa đạo hàm và tính đơn điệu

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$.

① Nếu $y' \geq 0, \forall x \in (a;b)$ thì $y = f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$.

② Nếu $y' \leq 0, \forall x \in (a;b)$ thì $y = f(x)$ nghịch biến trên $(a;b)$.

Chú ý: Dấu bằng xảy ra chỉ tại các điểm "rời nhau".

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

DẠNG 1. Tìm khoảng đơn điệu của một hàm số cho trước

Phương pháp giải.

1. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số.
2. Tính y', giải phương trình $y' = 0$ tìm các nghiệm x_i (nếu có).
3. Lập bảng xét dấu y' trên miền $\mathscr{D}$. Từ dấu y', ta suy ra chiều biến thiên của hàm số.
   - **Khoảng** y' mang dấu $-$: Hàm nghịch biến.
   - **Khoảng** y' mang dấu $+$: Hàm đồng biến.

Ví dụ 1. Hàm số $y = -x^3 + 3x - 4$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty; -1)$. **B.** $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.
C. $(1; +\infty)$. **D.** $(-1; 1)$.

Lời giải

Ta có $y' = -3x^2 + 3$, $y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.
Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu, hàm số đã cho đồng biến trên $(-1; 1)$.
Chọn đáp án D

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 5)$.
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và $(2; +\infty)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$.
D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 + 6x$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \end{array}\right.$.
Bảng biến thiên như hình bên:
Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Chọn đáp án D

Ví dụ 3. Hàm số $y = -x^4 + 2x^3 - 2x - 1$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $\left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right)$. **B.** $\left(-\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$. **C.** $(-\infty; 1)$. **D.** $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

$y'=-4x^3+6x^2-2$, $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{2} \\ x=1 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu $f'(x)$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	

Từ bảng xét dấu $f'(x)$ suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Chọn đáp án (B)

Ví dụ 4. Hàm số $y=x^4+8x^3+5$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-6)$. **C.** $(-6;0)$. **D.** $(-\infty;+\infty)$.

Lời giải

Ta có $y'=4x^3+24x^2=4x^2(x+6)$.

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-6 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-6		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$y(-6)$	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Nhìn bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-6)$.

Chọn đáp án (B)

Ví dụ 5. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+2)$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;+\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$.

Lời giải

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2(x+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;+\infty)$ là khẳng định đúng.
Chọn đáp án C

Ví dụ 6. Cho hàm số $y=\dfrac{x+3}{x-3}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;3)$ và $(3;+\infty)$.
B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;3)$ và $(3;+\infty)$.
C. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.
D. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Lời giải

Hàm số đã cho có tập xác định là $(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$, và $y'=\dfrac{-6}{(x-3)^2}>0\,\forall x\in(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$. Do đó, hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;3)$ và $(3;+\infty)$.

Chọn đáp án B

Ví dụ 7. Cho hàm số $y=\dfrac{3-x}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.
B. Hàm số nghịch biến với mọi $x\neq 1$.
C. Hàm số nghịch biến trên tập $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
D. Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

Lời giải

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
Ta có $y'=\dfrac{-4}{(x+1)^2}<0,\ \forall x\in\mathscr{D}$.
Vậy hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

Chọn đáp án D

Ví dụ 8. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. $y=\dfrac{x-1}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{2x+1}{x-3}$. **C.** $y=\dfrac{x-2}{2x-1}$. **D.** $y=\dfrac{x+5}{-x-1}$.

Lời giải

☑ Với $y=\dfrac{x-1}{x+1}\Rightarrow y'=\dfrac{2}{(x+1)}>0$.

☑ Với $y=\dfrac{2x+1}{x-3} \Rightarrow y'=\dfrac{-7}{(x-3)^2}<0 \Rightarrow$ hàm số nghịch biến.

Chọn đáp án (B)

Ví dụ 9. Hàm số $y=\sqrt{2x-x^2}$ nghịch biến trên khoảng nào sau?

A. $(0;1)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải

Ta có $\mathscr{D}=[0;2]$

$y'=\dfrac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}=0 \Leftrightarrow x=1.$

Bảng biến thiên

x	0		1		2
y'		$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$		$\searrow$	

Suy ra hàm số nghịch biến trên $(1;2)$.

Chọn đáp án (C)

DẠNG 2. Tìm khoảng đơn điệu của hàm số bằng hình ảnh đồ thị cho trước

Phương pháp giải.

☑ Nếu đề bài cho đồ thị $y=f(x)$, ta chỉ việc nhìn các khoảng mà đồ thị "đi lên" hoặc "đi xuống".

① Khoảng mà đồ thị "đi lên": hàm đồng biến;

② Khoảng mà đồ thị "đi xuống": hàm nghịch biến.

☑ Nếu đề bài cho đồ thị $y=f'(x)$. Ta tiến hành lập bảng biến thiên của hàm $y=f(x)$ theo các bước:

① Tìm nghiệm của $f'(x)=0$ (hoành độ giao điểm với trục hoành);

② Xét dấu $f'(x)$ (phần trên Ox mang dấu dương; phần dưới Ox mang dấu âm);

③ Lập bảng biến thiên của $y=f(x)$, suy ra kết quả tương ứng.

Ví dụ 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên dưới

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(0;1)$. **B.** $(3;4)$. **C.** $(-2;4)$. **D.** $(-4;2)$.

Ví dụ 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

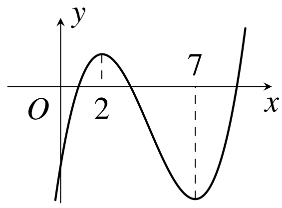
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

A. $(-\infty;5)$. **B.** $(0;2)$.
C. $(2;+\infty)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.
Chọn đáp án C

Ví dụ 12. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;3)$.
B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(6;+\infty)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;3)$.
D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(3;6)$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;7)$, do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(3;6)$.
Chọn đáp án D

Ví dụ 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau. Khẳng định nào sau đây là đúng?

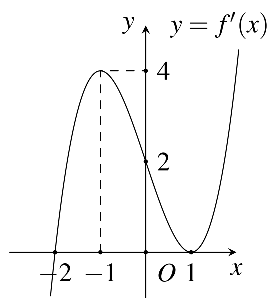
A. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.
B. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.
C. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.
D. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$			2			$+\infty$
y'		$-$		$\|\|$		$-$	
y	2	$\searrow$	$-\infty$	$\|\|$	$+\infty$	$\searrow$	2

Lời giải

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.
Chọn đáp án C

Ví dụ 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau



A. $(-\infty;-2);(1;+\infty)$. **B.** $(-2;+\infty) \setminus \{1\}$.
C. $(-2;+\infty)$. **D.** $(-5;-2)$.

Lời giải

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$			$+\infty$

Dựa và bảng biến thiên, hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.
Chọn đáp án C

DẠNG 3. Tìm m để hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đơn điệu trên $\mathbb{R}$

Phương pháp giải.

① Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $\boxed{y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases}$ hoặc suy biến $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c > 0. \end{cases}$

② Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì $\boxed{y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases}$ hoặc suy biến $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c < 0. \end{cases}$

Ví dụ 15. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + 4x - 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

A. 2. **B.** vô số. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
$y' = 3x^2 - 4mx + 4$
Hàm số y đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4m^2 - 12 \leq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq m \leq \sqrt{3}$.
$\Rightarrow m \in \{-1; 0; 1\}$.
Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn.
Chọn đáp án C

Ví dụ 16. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-3)x - m + 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m \leq -3, m \geq 1$. **B.** $-3 < m < 1$. **C.** $-3 \leq m \leq 1$. **D.** $m \leq 1$.

Lời giải

Ta có $y' = -x^2 - 2mx + (2m-3)$.
Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $y' \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 1$.
Chọn đáp án C

Ví dụ 17. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=(m-1)x^3-3(m-1)x^2+3x+2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

A. $1<m\leq 2$. **B.** $1<m<2$. **C.** $1\leq m\leq 2$. **D.** $1\leq m<2$.

Lời giải

$y'=3(m-1)x^2-6(m-1)x+3$

- $m=1$, $y'=3>0$
- $m\neq 1$

$$ycbt \Leftrightarrow \begin{cases} m-1>0 \\ \Delta'=9(m-1)^2-3(m-1)\cdot 3\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1<m\leq 2.$$

Vậy $1\leq m\leq 2$.

Chọn đáp án C

DẠNG 4. Tìm m để hàm $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ đơn điệu trên từng khoảng xác định

Phương pháp giải.

1. Tính $y'=\dfrac{ad-cb}{(cx+d)^2}$.
2. Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó $\Leftrightarrow \boxed{y'>0} \Leftrightarrow ad-cb>0$.
3. Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó $\Leftrightarrow \boxed{y'<0} \Leftrightarrow ad-cb<0$.

Ví dụ 18. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+2-m}{x+1}$ nghịch biến trên các khoảng mà nó xác định.

A. $m\leq 1$. **B.** $m\leq -3$. **C.** $m<-3$. **D.** $m<1$.

Lời giải

$y'=\dfrac{m-1}{(x+1)^2}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng mà nó xác định khi và chỉ khi $y'<0\Leftrightarrow m-1<0\Leftrightarrow m<1$.

Chọn đáp án D

Ví dụ 19. Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+m^2}{x+1}$ luôn đồng biến trên từng khoảng xác định.

A. $m\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. **B.** $m\in[-1;1]$.
C. $m\in\mathbb{R}$. **D.** $m\in(-1;1)$.

Lời giải

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Ta có: $y' = \dfrac{1-m^2}{(x+1)^2}$.
Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow y' > 0, \forall x \in \mathscr{D} \Leftrightarrow 1 - m^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1$.
Chọn đáp án D

BUỔI SỐ 2

DẠNG 5. Biện luận đơn điệu của hàm đa thức trên khoảng, đoạn cho trước

Phương pháp giải.

- **Loại 1:** Tìm điều kiện của tham số để hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đơn điệu trên toàn miền xác định $\mathbb{R}$.

  ① Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $\boxed{y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases}$ hoặc suy biến $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c > 0. \end{cases}$

  ② Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì $\boxed{y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases}$ hoặc suy biến $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c < 0. \end{cases}$

- **Loại 2:** Tìm điều kiện của tham số để hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đơn điệu trên khoảng con của tập $\mathbb{R}$.
  Ta thường gặp hai trường hợp:

  ① Nếu phương trình $y' = 0$ giải được nghiệm "đẹp": Ta thiết lập bảng xét dấu y' theo các nghiệm vừa tìm *(xét hết các khả năng nghiệm trùng, nghiệm phân biệt)*. Từ đó "ép" khoảng mà dấu y' không thỏa mãn ra khỏi khoảng đề bài yêu cầu.

  ② Nếu phương trình $y' = 0$ nghiệm "xấu": Ta sử dụng 1 trong 2 cách sau
  Cách 1. Dùng định lý về so sánh nghiệm (*sẽ nói rõ hơn qua bài giải cụ thể*).
  Cách 2. Cô lập tham số m, dùng đồ thị (*cách này xét sau*).

- **Loại 3:** Tìm điều kiện của tham số để hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ đơn điệu trên khoảng con của tập $\mathbb{R}$.

  ① Giải phương trình $y' = 0$, tìm nghiệm.

  ② Biện luận các trường hợp nghiệm (*nghiệm trùng, nghiệm phân biệt*). Từ đó "ép" khoảng mà dấu y' không thỏa mãn ra khỏi khoảng đề bài yêu cầu.

Ví dụ 20. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + 4x + 2m$, với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Tìm tập S.

A. $S = \{m \in \mathbb{Z} \mid |m| \geqslant 2\}$. **B.** $S = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.
C. $S = \{-1; 0; 1\}$. **D.** $S = \{m \in \mathbb{Z} \mid |m| > 2\}$.

Lời giải

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. $y' = x^2 - 2mx + 4$.
Khi $\Delta' = m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$ thì $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Nếu $\Delta' = m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$ thì $y' \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $y' = 0$ tại 1 điểm. Nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Do đó tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ là $S = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.
Chọn đáp án (B)

Ví dụ 21. Giá trị m để hàm số $y = -x^3 + mx^2 - m$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$ là
A. $0 < m < 3$. **B.** $m \geq 3$. **C.** $m \in [1;3]$. **D.** $m \leq 3$.

Lời giải

$$y' = -3x^2 + 2mx \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 2mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{2m}{3} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$\frac{2m}{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

$$ycbt \Leftrightarrow \frac{2m}{3} \geq 2 \Leftrightarrow m \geq 3.$$

Chọn đáp án (B)

Ví dụ 22. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3(m+2)x^2 + 3(m^2 + 4m)x + 1$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$?
A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Hàm số nghịch biến trên $(0;1)$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} y' \leq 0, \quad \forall x \in (0;1) \quad &\Leftrightarrow \quad 3x^2 - 6(m+2)x + 3(m^2 + 4m) \leq 0, \quad \forall x \in (0;1) \\ &\Leftrightarrow \quad (x-m)(3x - 3m - 12) \leq 0, \quad \forall x \in (0;1) \\ &\Leftrightarrow \quad m \leq x \leq m + 4, \quad \forall x \in (0;1) \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} m \leq 0 \\ 1 \leq m + 4 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 0. \end{aligned}$$

Suy ra có 4 giá trị của m thỏa mãn đề bài.
Chọn đáp án (B)

Ví dụ 23. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + m - 2$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$.
A. $m \in [-5;2)$. **B.** $m \in (-\infty; -5)$. **C.** $m \in (2; +\infty)$. **D.** $m \in (-\infty; 2]$.

Lời giải

$$\begin{aligned}
&\text{Hàm số đồng biến trên}(1;3)\\
\Leftrightarrow\ & y' = 4x^3 - 4(m-1)x \geq 0, \forall x \in (1;3)\\
\Leftrightarrow\ & x^2 - m + 1 \geq 0, \forall x \in (1;3) \text{ (vì trong khoảng } (1;3) \text{ ta có } x > 0)\\
\Leftrightarrow\ & x^2 + 1 \geq m, \forall x \in (1;3)\\
\Leftrightarrow\ & \min_{(1;3)} (x^2+1) \geq m\\
\Leftrightarrow\ & m \leq 2 \text{ (vì hàm số } y = x^2 + 1 \text{ đồng biến trên } (1;3) \text{ nên } m \leq f(1))
\end{aligned}$$

Chọn đáp án D

DẠNG 6. Biện luận đơn điệu của hàm phân thức trên khoảng, đoạn cho trước

Phương pháp giải.

Loại 1. Tìm điều kiện của tham số để hàm $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ đơn điệu trên từng khoảng xác định.

① Tính $y' = \dfrac{ad-cb}{(cx+d)^2}$.

② Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó $\Leftrightarrow \boxed{y' > 0} \Leftrightarrow ad - cb > 0$.

③ Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó $\Leftrightarrow \boxed{y' < 0} \Leftrightarrow ad - cb < 0$.

Loại 2. Tìm điều kiện để hàm $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ đơn điệu trên khoảng $(m;n) \subset \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.

① Tính $y' = \dfrac{ad-cb}{(cx+d)^2}$.

② Hàm số đồng biến trên khoảng $(m;n)$:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y' > 0 \\ -\dfrac{d}{c} \notin (m;n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ad - cb > 0 \\ -\dfrac{d}{c} \leq m \text{ hoặc } -\dfrac{d}{c} \geq n \end{cases}$$

③ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(m;n)$:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y' < 0 \\ -\dfrac{d}{c} \notin (m;n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ad - cb < 0 \\ -\dfrac{d}{c} \leq m \text{ hoặc } -\dfrac{d}{c} \geq n \end{cases}$$

Ví dụ 24. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x+2}{x+m}$ nghịch biến trên tập xác định của nó.

A. $m \leq 2$. **B.** $m > 2$. **C.** $m \geq 2$. **D.** $m < 2$.

Lời giải

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.
Hàm số nghịch biến trên tập xác định của nó khi $m - 2 < 0 \Leftrightarrow m < 2$.
Chọn đáp án D

Ví dụ 25. Cho hàm số $y=\dfrac{mx-2m-3}{x-m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$. Tìm số phần tử của S.

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 1.

Lời giải

Tập xác định của hàm số: $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{m\}$.

Ta có $y'=\dfrac{-m^2+2m+3}{(x-m)^2}$.

Điều kiện cần và đủ để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ là

$$\begin{aligned}
& y'>0,\forall x\in(2;+\infty)\\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases}-m^2+2m+3>0\\ m\notin(2;+\infty)\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases}-1<m<3\\ m\le 2\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ & -1<m\le 2.
\end{aligned}$$

Do đó $S=\{0;1;2\}$.

Chọn đáp án A

Ví dụ 26. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-m}$. Tìm m để hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

A. $\dfrac{1}{2}<m\le 1$. **B.** $m>\dfrac{1}{2}$. **C.** $m\ge 1$. **D.** $m\ge\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{m\}$. Ta có $y'=\dfrac{1-2m}{(x-m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};1\right)\Leftrightarrow y'<0,\forall x\in\left(\dfrac{1}{2};1\right)\Leftrightarrow\begin{cases}1-2m<0\\ \left[\begin{array}{l}m\le\dfrac{1}{2}\\ m\ge 1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m\ge 1.$

Chọn đáp án C

DẠNG 7. Một số bài toán liên quan đến hàm hợp

Phương pháp giải.

Loại 1: Cho đồ thị $y=f'(x)$, hỏi tính đơn điệu của hàm $y=f(x)$.

① Tìm nghiệm của $f'(x)=0$ (hoành độ giao điểm với trục hoành);

② Xét dấu $f'(x)$ (phần trên Ox mang dấu dương; phần dưới Ox mang dấu âm);

③ Lập bảng biến thiên của $y=f(x)$, suy ra kết quả tương ứng.

Loại 2: Cho đồ thị $y=f'(x)$, hỏi tính đơn điệu của hàm hợp $y=f(u)$.

① Tính $y'=u'\cdot f'(u)$;

② Giải phương trình $f'(u) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u' = 0 \\ f'(u) = 0(\textit{ Nhìn đồ thị, suy ra nghiệm.}) \end{array}\right.$;

③ Lập bảng biến thiên của $y = f(u)$, suy ra kết quả tương ứng.

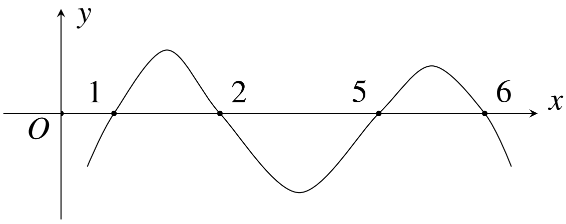
☑ **Loại 3:** Cho đồ thị $y = f'(x)$, hỏi tính đơn điệu của hàm $y = g(x)$, trong đó $g(x)$ có liên hệ với $f(x)$.

① Tính $y' = g'(x)$;

② Giải phương trình $g'(x) = 0$ (*thường dẫn đến việc giải phương trình liên quan đến $f'(x)$. Loại này ta nhìn hình để suy ra nghiệm*).

③ Lập bảng biến thiên của $y = g(x)$, suy ra kết quả tương ứng.

Ví dụ 27. Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ (đồ thị $f'(x)$ cắt Ox ở các điểm có hoành độ lần lượt là 1, 2, 5, 6). Chọn khẳng định đúng.



A. $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.
B. $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;6)$.
C. $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;5)$.
D. $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(4;5)$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		2		5		6		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘		↗		↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trong khoảng $(5;6)$.
Chọn đáp án (B) ■

Ví dụ 28. (THPTQG–2019, Mã đề 101) Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu $f'(x)$ như hình bên dưới

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = f(3-2x)$ nghịch biến trên khoảng
A. $(4;+\infty)$. **B.** $(-2;1)$. **C.** $(2;4)$. **D.** $(1;2)$.

Lời giải

Ta có $y' = -2f(3-2x)$.

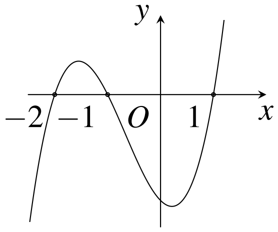
$y' < 0 \Leftrightarrow f(3-2x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3-2x>5\\-2<3-2x<2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<-1\\\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{5}{2}\end{array}\right.$.

Vậy hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-1)$ và $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{2}\right)$.

Chọn đáp án B

Ví dụ 29. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $f(x^2-2)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(0;1)$. **B.** $(1;\sqrt{3})$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(-\sqrt{3};0)$.



Lời giải

Ta có, hàm số $f(x^2-2)$ đồng biến khi

$$\begin{aligned}
& f'(x^2-2) = 2xf'(x^2-2) > 0\\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases}2x>0\\f'(x^2-2)>0\end{cases} \text{hoặc} \begin{cases}2x<0\\f'(x^2-2)<0\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases}x>0\\\left[\begin{array}{l}-2<x^2-2<-1\\x^2-2>1\end{array}\right.\end{cases} \text{hoặc} \begin{cases}x<0\\\left[\begin{array}{l}x^2-2<-2\\-1<x^2-2<1\end{array}\right.\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases}x>0\\\left[\begin{array}{l}0<x^2<1\\x^2>3\end{array}\right.\end{cases} \text{hoặc} \begin{cases}x<0\\\left[\begin{array}{l}x^2<0\\1<x^2<3\end{array}\right.\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases}x>0\\\left[\begin{array}{l}-1<x<1\\x<-\sqrt{3}\\x>\sqrt{3}\end{array}\right.\end{cases} \text{hoặc} \begin{cases}x<0\\\left[\begin{array}{l}-1<x<1\\-\sqrt{3}<x<-1\\1<x<\sqrt{3}\end{array}\right.\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}0<x<1\\x>\sqrt{3}\end{array}\right. \text{hoặc } -\sqrt{3}<x<-1.
\end{aligned}$$

Vậy hàm số đồng biến trên $(0;1)$.

Chọn đáp án A

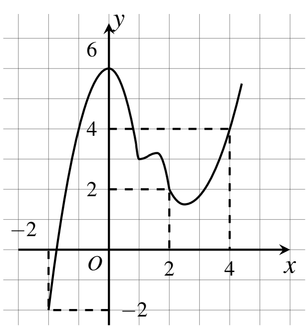
Ví dụ 30. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Đặt $h(x)=f(x)-\dfrac{x^2}{2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số $y=h(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;3)$.

B. Hàm số $y=h(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;4)$.

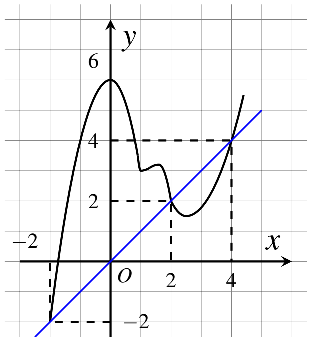
C. Hàm số $y=h(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

D. Hàm số $y=h(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2;4)$.



Lời giải

Ta có $h(x) = f(x) - \dfrac{x^2}{2}$ nên $h'(x) = f'(x) - x \Rightarrow h'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(x) \geq x$ và $h'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f'(x) \leq x$.
Vẽ đường thẳng $y = x$ cắt đồ thị tại ba điểm $(-2;-2)$, $(2;2)$, $(4;4)$, từ đó ta dễ dàng nhận thấy trên khoảng $(2;4)$ thì $h'(x) < 0$.
Do vậy hàm số $y = h(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2;4)$.



Chọn đáp án D

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN – ĐỀ SỐ 1

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

1	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	7	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	13	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	19	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	25	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
2	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	8	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	14	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	20	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	26	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
3	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	9	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	15	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	21	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	27	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
4	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	16	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	22	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	28	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
5	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	11	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	17	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	23	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	29	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
6	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	12	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	18	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	24	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	30	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

Câu 1. Hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(1;3)$. **B.** $(2:+\infty)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(0;3)$.

Câu 2. Cho hàm số $y=x^2(3-x)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.
B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(+\infty;3)$.
C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;2)$.
D. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

Câu 3. Hàm số $y=2x^4+3$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;+\infty)$. **B.** $(-\infty;3)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Câu 4. Hàm số $y=x^4+8x^3+5$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-6)$. **C.** $(-6;0)$. **D.** $(-\infty;+\infty)$.

Câu 5. Hàm số $y=x^4-2x^2+1$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-1;0)$. **B.** $(-1;+\infty)$. **C.** $(-3;8)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Câu 6. Tìm tất cả các khoảng nghịch biến của hàm số $y=-x^4+8x^2-7$.

A. $(-2;0)$, $(2;+\infty)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(-\infty;-2)$, $(2;+\infty)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 7. Hàm số nào dưới đây nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. $y=-x^3-x+3$. **B.** $y=-x^4+4x^2-2$. **C.** $y=x^3+4x^2-1$. **D.** $y=x^4-5x+7$.

Câu 8. Cho hàm số $y=x^3-5x^2+3x-4$ nghịch biến trên khoảng $(a;b)$ với $a<b$; $a,b\in\mathbb{R}$ và đồng biến trên các khoảng $(-\infty;a)$, $(b;+\infty)$. Tính $S=3a+3b$.

A. $S=6$. **B.** $S=9$. **C.** $S=10$. **D.** $S=12$.

Câu 9. Tìm tất cả các khoảng nghịch biến của hàm số $y=-\dfrac{4}{3}x^3-2x^2-x-2017$.

A. $\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$ và $\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

C. $(-\infty;+\infty)$. **D.** $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$.

Câu 10. Cho hàm số $y=-x^3+1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$. **B.** Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;0)$. **D.** Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 11. Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+3}$. Tìm khẳng định đúng?

A. Hàm số xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.
B. Hàm số đồng biếntrên $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$.
C. Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định.
D. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

Câu 12. Cho hàm số $y=\dfrac{3x-1}{x-2}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.
C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.
D. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Câu 13. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên tập xác định của nó?

A. $y=\dfrac{x-2}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{x-2}{x+1}$. **C.** $y=-x^4+x^2$. **D.** $y=-x^3+1$.

Câu 14. Hàm số $y=x+\dfrac{4}{x}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(-2;2)$.

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^4-4x^2+3$. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên các khoảng nào sau đây?

A. $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)$, $(-1;1)$ và $\left(\sqrt{3};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\sqrt{3};-1\right)$ và $\left(1;\sqrt{3}\right)$.
C. $(-\infty;1)$ và $(3;+\infty)$. **D.** $\left(-\sqrt{2};0\right)$ và $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^2(x-1)^3(2-x)$. Hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.
B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.
D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

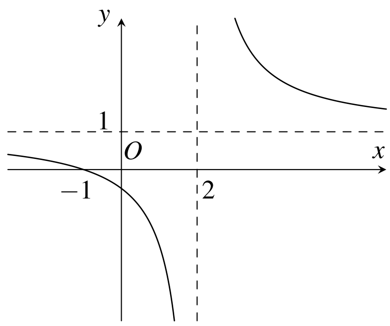
x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;2)$.
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;3)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.
D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;2)$.

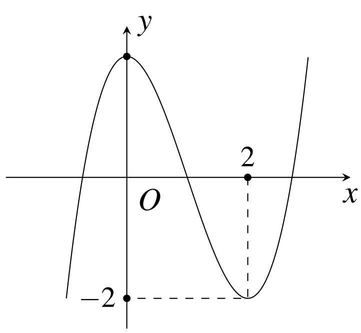
x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	0	↗	$+\infty$

Câu 19. Đường cong của hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với a, b, c, d là các số thực. Mệnh đề nào sau đây đúng?



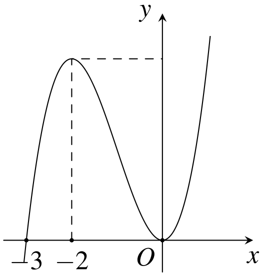
A. $y'<0,\forall x\neq 1$.
B. $y'>0,\forall x\neq 1$.
C. $y'>0,\forall x\neq 2$.
D. $y'<0,\forall x\neq 2$.

Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)$.
B. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;2)$.
C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$.
D. Hàm số nghịch biến trên $(1;+\infty)$.

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào?



A. $(-\infty;0)$. B. $(-3;+\infty)$.
C. $(-\infty;4)$. D. $(-4;0)$.

Câu 22. Cho hàm số $y = \sqrt{x^2-6x+5}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$. B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(5;+\infty)$. D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

Câu 23. Hàm số $y = \dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ nghịch biến trên khoảng nào?
A. $(1;+\infty)$. B. $(-1;1)$. C. $(-\infty;-1)$. D. $\left(\dfrac{1}{3};3\right)$.

Câu 24. Hàm số $y = ax^3+bx^2+cx+d$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi
A. $\left[\begin{array}{l} a=b=0, c>0 \\ a>0; b^2-3ac\geq 0 \end{array}\right.$. B. $\left[\begin{array}{l} a=b=0, c>0 \\ a<0; b^2-3ac\leq 0 \end{array}\right.$.
C. $\left[\begin{array}{l} a=b=0, c>0 \\ a>0; b^2-3ac\leq 0 \end{array}\right.$. D. $a>0; b^2-3ac\leq 0$.

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ có tính chất $f'(x)\geq 0$, $\forall x\in(0;3)$ và $f'(x)=0$ $\forall x\in(1;2)$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?
A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$.
B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.
C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;3)$.
D. Hàm số $f(x)$ là hàm hằng (tức không đổi) trên khoảng $(1;2)$.

Câu 26. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và đồng biến trên $(0;2)$ thì hàm số $y = f(2x)$ luôn đồng biến trên khoảng nào?
A. $(0;4)$. B. $(0;2)$. C. $(-2;0)$. D. $(0;1)$.

Câu 27. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3+(2m+1)x-3m-1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
A. $m\in(-\infty;+\infty)$. B. $m\leq 0$. C. $m\geq -\dfrac{1}{2}$. D. $m<-\dfrac{1}{2}$.

Câu 28. Cho hàm số $y=-x^3-mx^2+(4m+9)x+5$, với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)$?
A. 5. B. 6. C. 7 . D. 4.

Câu 29. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+2}{x+m}$ nghịch biến trên các khoảng xác định của nó.
A. $m\leq 2$. B. $m>2$. C. $m\geq 2$. D. $m<2$.

Câu 30. Cho hàm số $y=\dfrac{mx-2}{x+m-3}$. Các giá trị của m để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định của nó là
A. $1<m<2$. B. $\left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<1 \end{array}\right.$. C. $1<m\leq 2$. D. $m=1$.

——HẾT——

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN – ĐỀ SỐ 2

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

1	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	7	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	13	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	19	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	25	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
2	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	8	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	14	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	20	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	26	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
3	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	9	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	15	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	21	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	27	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
4	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	16	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	22	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	28	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
5	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	11	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	17	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	23	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	29	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
6	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	12	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	18	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	24	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	30	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

Câu 1. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$. **B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$. **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

Câu 2. Hàm số $y = -\dfrac{x^4}{2} + 1$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-3;4)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Câu 3. Hàm số nào sau đây **không** đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$?

A. $y = x^3 + 2$. **B.** $y = x^5 + x^3 - 1$. **C.** $y = \dfrac{x-1}{x+2}$. **D.** $y = x + 1$.

Câu 4. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{2-x}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.
B. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.
C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;2) \cup (2;+\infty)$.
D. Hàm số đã cho nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

Câu 5. Hàm số $y = (x^2 - 4x)^2$ nghịch biến khoảng nào dưới đây?

A. $(2;4)$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(0;4)$.

Câu 6. Hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

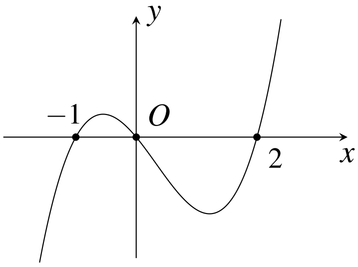
A. $(-\infty;1)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;2)$.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = -x^2 + 5x - 6$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = -5f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty;2)$ và $(3;+\infty)$. **B.** $(3;+\infty)$.
C. $(-\infty;2)$. **D.** $(2;3)$.

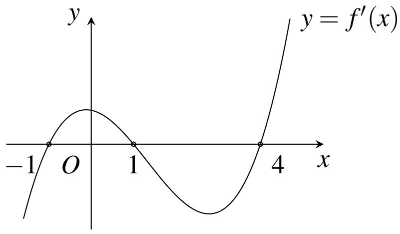
Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;0)$.
C. $(0;2)$. **D.** $(1;+\infty)$.



Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = f(2-x)$ đồng biến trên khoảng

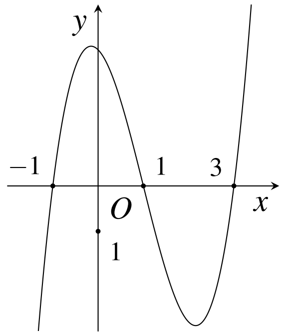
A. $(1;3)$. **B.** $(2;+\infty)$.
C. $(-2;1)$. **D.** $(-\infty;-2)$.



Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) > 0$, $\forall x > 0$. Biết $f(1) = 2$, hỏi khẳng định nào sau đây có thể xảy ra?

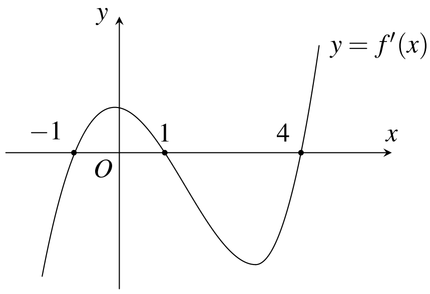
A. $f(2) + f(3) = 4$. **B.** $f(-1) = 2$.
C. $f(2) = 1$. **D.** $f(2018) > f(2019)$.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hỏi hàm số $y = f(1-x)$ đồng biến trên khoảng nào?



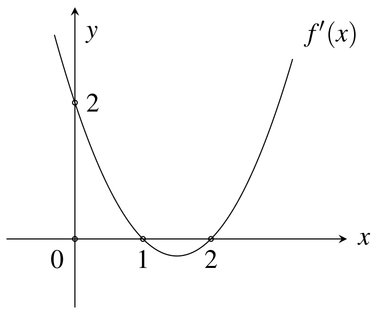
A. $(0;2)$. **B.** $(-\infty;2)$.
C. $(-1;1)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-1;4]$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hỏi hàm số $g(x) = f\left(x^2+1\right)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?



A. $(-1;1)$. **B.** $(0;1)$.
C. $(1;4)$. **D.** $\left(\sqrt{3};4\right)$.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = f(x-x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $\left(\dfrac{-1}{2};+\infty\right)$. **B.** $\left(\dfrac{-3}{2};+\infty\right)$.
C. $\left(-\infty;\dfrac{3}{2}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Câu 14. Tìm mối liên hệ giữa các tham số a và b sao cho hàm số $y = f(x) = 2x + a\sin x + b\cos x$ luôn tăng trên $\mathbb{R}$?

A. $a + 2b \geq \dfrac{1+\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 1$. **C.** $a + 2b = 2\sqrt{3}$. **D.** $a^2 + b^2 \leq 4$.

Câu 15. Tìm giá trị lớn nhất của tham số m để hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (8+2m)x + m + 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m = 2$. **B.** $m = -2$. **C.** $m = 4$. **D.** $m = -4$.

Câu 16. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số $y = -\dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m-6)x + 3$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. 4. **B.** 6. **C.** Vô số. **D.** 5.

Câu 17. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}(m^2-1)x^3 + (m+1)x^2 + 3x - 1$, với m là tham số. Số giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2018;2018]$ để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

A. 4035. **B.** 4037. **C.** 4036. **D.** 4034.

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - 9m^2x$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

A. $m \geq \dfrac{1}{3}$ hoặc $m \leq -1$. **B.** $m > \dfrac{1}{3}$.

C. $m < -1$. **D.** $-1 < m < \frac{1}{3}$.

Câu 19. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - 9m^2x$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

A. $m > \frac{1}{3}$. **B.** $m < -1$.
C. $m \geq \frac{1}{3}$ hoặc $m \leq -1$. **D.** $-1 \leq m \leq \frac{1}{3}$.

Câu 20. Tìm m để hàm số $y = x^3 - 6x^2 + mx + 1$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

A. $m \geq 12$. **B.** $m \leq 12$. **C.** $m \geq 0$. **D.** $m \leq 0$.

Câu 21. Gọi T là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$. Tổng giá trị các phần tử của T.

A. 4. **B.** 10. **C.** 6. **D.** 8.

Câu 22. Giá trị m để hàm số $y = -x^3 + mx^2 - m$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$ là

A. $0 < m < 3$. **B.** $m \geq 3$. **C.** $m \in [1;3]$. **D.** $m \leq 3$.

Câu 23. Gọi S là tập hợp các giá trị thực của m để hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x + 2017$ nghịch biến trên khoảng $(a;b)$ sao cho $b - a > 3$. Giả sử $S = (-\infty;m_1) \cup (m_2;+\infty)$. Khi đó $m_1 + m_2$ bằng

A. 2. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 8.

Câu 24. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{mx+1}{4x+m}$ luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định của hàm số.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Câu 25. Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x+2}$. Tập hợp tất cả các giá trị của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ là

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $[2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;2]$.

Câu 26. Tồn tại bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = \frac{x-2}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** Vô số.

Câu 27. Cho hàm số $y = \frac{mx+2}{2x+m}$, với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$. Tìm số phần tử của S.

A. 1. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 28. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{mx+16}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(0;10)$.

A. $m \in (-\infty;-4) \cup (4;+\infty)$. **B.** $m \in (-\infty;-10] \cup (4;+\infty)$.
C. $m \in (-\infty;-4] \cup [4;+\infty)$. **D.** $m \in (-\infty;-10] \cup [4;+\infty)$.

Câu 29. Cho a, b là hai số nguyên dương sao cho cả hai hàm số $y = \frac{ax+b}{4x+a}$ (1) và $y = \frac{bx+a}{4x+b}$ (2) đồng biến trên từng khoảng xác định. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 2a + 3b$ bằng

A. 25. **B.** 30. **C.** 23. **D.** 27.

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = 3f(x+2) - x^3 + 3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(0;2)$.

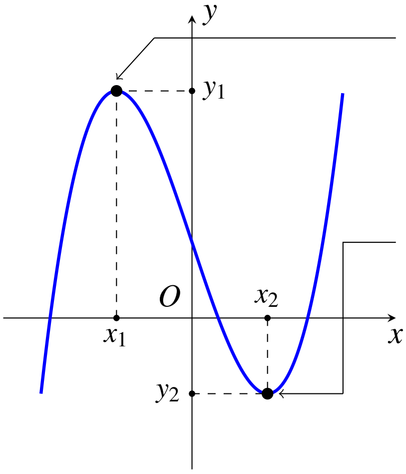
——HẾT——

§ 2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

① Hàm số đạt cực trị tại x_0 thì x_0 là nghiệm của phương trình $y' = 0$ hoặc x_0 là điểm mà tại đó đạo hàm không xác định (chỉ có một chiều nhé, đừng suy ngược lại).

② Bảng tổng kết tên gọi:



$(x_1; y_1)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số
- x_1 là điểm cực đại của hàm số
- y_1 là giá trị cực đại của hàm số

$(x_2; y_2)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số
- x_2 là điểm cực tiểu của hàm số
- y_2 là giá trị cực tiểu của hàm số

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

BUỔI SỐ 1

DẠNG 1. Ứng dụng đạo hàm (quy tắc 1) để tìm cực trị cực hàm số

Phương pháp giải.

① Giải phương trình $y' = 0$ tìm các nghiệm x_i và những điểm x_j mà đạo hàm không xác định;

② Đưa các nghiệm x_i và x_j lên bảng xét dấu và xét dấu y';

③ Lập bảng biến thiên và nhìn "điểm dừng":

- ☑ "Dừng" trên cao tại điểm $(x_1; y_1)$ thì x_1 là điểm cực đại của hàm số; y_1 là giá trị cực đại (cực đại) của hàm số; $(x_1; y_1)$ là tọa độ điểm **cực đại của đồ thị**.
- ☑ "Dừng" dưới thấp tại điểm $(x_2; y_2)$ thì x_2 là điểm cực tiểu của hàm số; y_2 là giá trị cực tiểu (cực tiểu) của hàm số; $(x_2; y_2)$ là tọa độ điểm **cực tiểu của đồ thị**.

Ví dụ 1. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2 + 2$ là

A. $\left(\frac{2}{3}; \frac{50}{27}\right)$. **B.** $(0; 2)$. **C.** $\left(\frac{50}{27}; \frac{2}{3}\right)$. **D.** $(2; 0)$.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 2 \\ x = \dfrac{2}{3} \Rightarrow y = \dfrac{50}{27}. \end{array}\right.$

Có $y'' = 6x - 2 \Rightarrow y''(0) = -2, y''\left(\dfrac{2}{3}\right) = 2$. Vậy điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $\left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{50}{27}\right)$.

Chọn đáp án A

Ví dụ 2. Hàm số $y = \dfrac{1}{2}x^4 - 3x^2 - 3$ đạt cực đại tại

A. $x = 0$. **B.** $x = -\sqrt{3}$. **C.** $x = \sqrt{3}$. **D.** $x = \pm\sqrt{3}$.

Lời giải

Ta có $y' = 2x^3 - 6x$.

Phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 2x(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3}. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\dfrac{15}{2}$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\dfrac{15}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $y = \dfrac{1}{2}x^4 - 3x^2 - 3$ đạt cực đại tại $x = 0$.

Chọn đáp án A

Ví dụ 3. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^4 - 1$ là

A. $(-1; -1)$. **B.** $(0; -1)$. **C.** $(-1; 0)$. **D.** $(1; -1)$.

Lời giải

Ta có $y' = 4x^3$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(0; -1)$.

Chọn đáp án B

Ví dụ 4. Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị là (C). Gọi A, B là các điểm cực trị của (C). Tính độ dài đoạn thẳng AB.

A. $AB = 2\sqrt{5}$. **B.** $AB = 5$. **C.** $AB = 4$. **D.** $AB = 5\sqrt{2}$.

Lời giải

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Khi đó $y' = 3x^2 - 6x$ và $y'' = 6x - 6$.

Xét $y' = 0$ suy ra $3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Mà $y''(0) = -6 < 0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x_{CĐ} = 0$ suy ra $y_{CĐ} = 2$.

Tương tự $y''(2) = 6 > 0$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x_{CT} = 2$ suy ra $y_{CT} = -2$.

Giả sử $A(0;2)$ và điểm $B(2;-2)$ ta có $AB = \sqrt{(2-0)^2 + (-2-2)^2} = 2\sqrt{5}$.

Chọn đáp án A

Ví dụ 5. Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ là

A. $y = -2x - 1$. **B.** $y = -2x + 1$. **C.** $y = 2x - 1$. **D.** $y = 2x + 1$.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$, do đó hàm số đã cho có hai điểm cực trị là $A(0;1)$ và $B(2;-3)$.

Đường thẳng đi qua hai điểm A, B có phương trình $y = -2x + 1$.

Chọn đáp án B

Ví dụ 6. Cho hàm số $y = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{4}$ có đồ thị (C). Tính diện tích của tam giác tạo thành từ 3 điểm cực trị của đồ thị (C).

A. $S = \frac{5\sqrt{3}}{4}$. **B.** $S = \frac{\sqrt{3}}{4}$. **C.** $S = \sqrt{3}$. **D.** $S = \frac{9\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Ta có $y' = -x^3 + 3x$, cho $y' = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Đồ thị có 3 điểm cực trị là $A\left(0;-\frac{5}{4}\right)$, $B\left(\sqrt{3};1\right)$ và $C\left(-\sqrt{3};1\right)$.

Mà tam giác ABC cân tại A có $BC = 2\sqrt{3}$ và $h = \frac{9}{4}$ nên $S = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot h = \frac{9\sqrt{3}}{4}$.

Chọn đáp án D

Ví dụ 7. Cho hàm số $y = 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x + 1$. Gọi $M(x_1;y_1)$ là điểm cực tiểu của đồ thị của hàm số đã cho. Tính tổng $x_1 + y_1$.

A. 5. **B.** -11. **C.** 7. **D.** 6.

Lời giải

Ta có $y' = 12x^3 - 12x^2 - 12x + 12 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-10	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra tọa độ điểm cực tiểu là $M(-1;-10)$.
Vậy $x_1+y_1=-11$.
Chọn đáp án (B)

DẠNG 2. Xác định cực trị khi biết bảng biến thiên hoặc đồ thị

Phương pháp giải.

☑ **Loại 1:** Cho bảng biến thiên hoặc đồ thị hàm $y=f(x)$. Ta nhìn "điểm dừng":

① "Dừng" trên cao tại điểm $(x_1;y_1)$ thì x_1 là điểm cực đại của hàm số; y_1 là giá trị cực đại (cực đại) của hàm số; $(x_1;y_1)$ là tọa độ điểm **cực đại của đồ thị**

② "Dừng" dưới thấp tại điểm $(x_2;y_2)$ thì x_2 là điểm cực tiểu của hàm số; y_2 là giá trị cực tiểu (cực tiểu) của hàm số; $(x_2;y_2)$ là tọa độ điểm **cực tiểu của đồ thị**

☑ Loại 2: Cho đồ thị hàm $f'(x)$. Ta thực hiện tương tự như ở phần đồng biến, nghịch biến.

Ví dụ 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Cực tiểu (*giá trị cực tiểu*)của hàm số là

A. 4. **B.** 2.
C. -1. **D.** 3.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$. Giá trị cực tiểu là $y_{CT}=3$.
Chọn đáp án (D)

Ví dụ 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và $x=1$.
B. Giá trị cực tiểu của hàm số bằng -1.
C. Giá trị cực đại của hàm số bằng 2.
D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-2$.

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2 ‖ $-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Lời giải

Từ bảng biến thiên ta có $x=-2$ và $x=1$ lần lượt là điểm cực tiểu và điểm cực đại của hàm số $y=f(x)$.

Chọn đáp án (A)

Ví dụ 10. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)^{2017}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(1;2)$ và $(3;+\infty)$.
B. Hàm số có 3 điểm cực trị.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;3)$.
D. Hàm số đạt cực đại tại $x=2$, đạt cực tiểu tại $x=1$ và $x=3$.

Lời giải

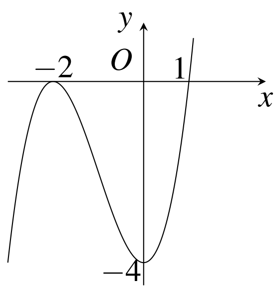
Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2		$\searrow$		-2	$\nearrow$	$+\infty$

ta thấy hàm số nghịch biến trên $(1;3)$.

Chọn đáp án (C)

Ví dụ 11. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x)$. Biết rằng hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số $f'(x)$. Khẳng định nào sau đây là đúng về cực trị của hàm số $f(x)$?



A. Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=-2$.
B. Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=1$.
C. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x=-1$.
D. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x=-2$.

Lời giải

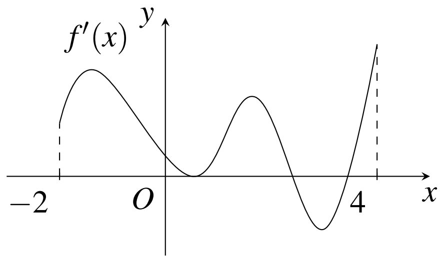
Từ đồ thị của đạo hàm $f'(x)$, ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\searrow$	CT	$\nearrow$	

Vậy hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=1$.

Chọn đáp án (B)

Ví dụ 12. Tìm số điểm cực tiểu trên đoạn $[-2;4]$ của hàm số $y=f(x)$ biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



A. 1. **B.** 0.
C. 2. **D.** 3.

Lời giải

Đồ thị ta thấy $f'(x)=0$ tại ba điểm theo thứ tự x_1, x_2, x_3. Ta có bảng biến thiên như sau:

x	-2		x_1		x_2		x_3		4
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\nearrow$	CĐ	$\searrow$	CT	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số $y=f(x)$ có một cực tiểu.
Chọn đáp án A

DẠNG 3. Ứng dụng đạo hàm (quy tắc 2) để tìm cực trị cực hàm số

Phương pháp giải. Chỉ dùng khi hàm số có đạo hàm cấp 2 tại x_0. Ta thực hiện các bước:

1. Tính y'. Giải phương trình $y'=0$, tìm nghiệm x_0.
2. Tính y''.
   - Nếu $y''(x_0)<0$ thì x_0 là điểm cực đại của hàm số.
   - Nếu $y''(x_0)>0$ thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số.

⚠ *Ghi nhớ: "âm" lồi, "dương" lõm*

Ví dụ 13. Hàm số $y=x^4-4x^2+1$ đạt cực tiểu tại điểm có hoành độ

A. $x=\pm\sqrt{2}$. **B.** $x=\pm 1$. **C.** $x=1$. **D.** $x=\pm 2$.

Lời giải

Ta có $y'=x^4-4x^2+1=4x(x^2-2)$; $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 1$ đạt cực tiểu tại điểm có hoành độ $x = \pm\sqrt{2}$.
Chọn đáp án A

Ví dụ 14. Tìm các điểm cực tiểu của hàm số $y = \sin 2x - x$.

A. $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$. **B.** $x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi$. **C.** $x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi$. **D.** $x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$.

Lời giải

Chọn đáp án B

BUỔI SỐ 2

DẠNG 4. Tìm m để hàm số đạt cực trị tại điểm x_0 cho trước

Phương pháp giải.

① Giải điều kiện $y'(x_0) = 0$, tìm m.

② Thử lại với m vừa tìm được bằng một trong hai cách sau:

- Cách 1: Lập bảng biến thiên với m vừa tìm được. Xem giá trị m nào thỏa yêu cầu.
- Cách 2. Tính y''. Thử $y''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ là điểm CĐ; $y''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ là điểm CT.

Ví dụ 15. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + m^2x + 2$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

A. $m = 1$. **B.** $m = 3$.
C. $m = 1$ hoặc $m = 3$. **D.** $m = -1$.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 - 4mx + m^2$, $y'' = 6x - 4m$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ khi

$$\begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 4m + m^2 = 0 \\ 6 - 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 3 \end{array}\right. \\ 6 - 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Chọn đáp án A

Ví dụ 16. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ với m là tham số. Với giá trị nào của tham số m thì hàm số đạt cực đại tại $x = 2$?

A. $m = -3$. **B.** $m = 3$. **C.** $m = -1$. **D.** $m = 0$.

Lời giải

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.
Ta có $y' = \dfrac{x^2 + 2mx + m^2 - 1}{(x + m)^2}$.

Hàm số đạt cực đại tại $x=2 \Rightarrow y'(2)=0 \Leftrightarrow \dfrac{4+4m+m^2-1}{(2+m)^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-3. \end{array}\right.$

Ta có $y''=\dfrac{2}{(x+m)^3}$.

- Với $m=-1$, ta có $y''(2)=2>0 \Rightarrow x=2$ là điểm cực tiểu của hàm số.
- Với $m=-3$, ta có $y''(2)=-2<0 \Rightarrow x=2$ là điểm cực đại của hàm số.

Vậy với $m=-3$ thì hàm số đạt cực đại tại $x=2$.

Chọn đáp án (A)

DẠNG 5. Biện luận cực trị hàm bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$

Phương pháp giải.

① Biện luận nghiệm phương trình $y'=0$ (phương trình bậc hai).

- $\begin{cases} \Delta>0 \\ a\neq 0 \end{cases}$: Hàm số có hai điểm cực trị
- $\Delta \leq 0$ hoặc suy biến $\begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$: Hàm số không có cực trị.

② Định lý Vi-et: $x_1+x_2=-\dfrac{2b}{3a}$ và $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{3a}$ (nhìn trực tiếp từ hàm số).

- $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$;
- $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$
- $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)$.

③ Các công thức tính toán thường gặp

- Độ dài $MN=\sqrt{(x_N-x_M)^2+(y_N-y_M)^2}$
- Khoảng cách từ M đến Δ: $d(M,\Delta)=\dfrac{|Ax_M+By_M+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$, với $\Delta\colon Ax+By+C=0$.
- Tam giác ABC vuông tại $A \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.
- Diện tích tam giác ABC là $S=\dfrac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$, với $\overrightarrow{AB}=(a_1;b_1)$, $\overrightarrow{AC}=(a_2;b_2)$.

④ Phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị là $y=-\dfrac{2}{9a}(b^2-3ac)x+d-\dfrac{bc}{9a}$.

Ví dụ 17. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+5mx-1$ không có cực trị?

A. 6. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $y'=x^2-2mx+5m$, hàm số không có cực trị khi $\Delta'\leq 0 \Leftrightarrow 0\leq m\leq 5$.

Chọn đáp án (A)

Ví dụ 18. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y=x^3-3x^2+(m+1)x+2$ có hai điểm cực trị.

A. $m<2$. **B.** $m\leq 2$. **C.** $m>2$. **D.** $m<-4$.

Lời giải

$y' = 3x^2 - 6x + m + 1$, $\Delta' = 6 - 3m$. Để hàm số có hai điểm cực trị thì $y' = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt tức là $\Delta > 0 \Leftrightarrow m < 2$.
Chọn đáp án A

Ví dụ 19. Cho $y = (m-3)x^3 + 2(m^2 - m - 1)x^2 + (m+4)x - 1$. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục tung. Tìm số phần tử của S.

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

$y' = 3(m-3)x^2 + 4(m^2 - m - 1)x + m + 4$. Hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục tung khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu $\Leftrightarrow (m-3)(m+4) < 0 \Leftrightarrow -4 < m < 3$
Chọn đáp án C

Ví dụ 20. Gọi S là tập các giá trị dương của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 9x - m$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| \leq 2$. Biết $S = (a; b]$. Tính $T = b - a$.

A. $T = 2 + \sqrt{3}$. **B.** $T = 1 + \sqrt{3}$. **C.** $T = 2 - \sqrt{3}$. **D.** $T = 3 - \sqrt{3}$.

Lời giải

Hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 9x - m$ xác định trên $\mathbb{R}$. Ta có $y' = 3(x^2 - 2mx + 3)$.
Điều kiện hàm số có cực trị: $m^2 - 3 > 0$. Lúc này theo Viet: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1x_2 = 3 \end{cases}$.
Theo giả thiết $|x_1 - x_2| =\leq 2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 \leq 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \leq 4$.
Mà m dương nên $3 < m^2 \leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{3} < m \leq 2$.
Vậy $a = \sqrt{3}, b = 2 \Rightarrow b - a = 2 - \sqrt{3}$.
Chọn đáp án C

Ví dụ 21. Cho hàm số $y = -x^3 - 3mx^2 + m - 2$ với m là tham số. Tổng tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho $AB = 2$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
Ta có $y' = -3x^2 - 6mx$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2m. \end{array}\right.$
Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $m \neq 0$.
Gọi hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là A, B.
Ta có $A(0; m-2)$, $B\left(-2m; -4m^3 + m - 2\right)$.
Do đó

$$\begin{aligned} AB^2 = 4m^2 + 16m^6 = 4 &\Leftrightarrow 4m^6 + m^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow m^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Suy ra tổng bằng 0.
Chọn đáp án C

Ví dụ 22. Tìm m để đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3mx + 1$ có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác OAB vuông tại gốc tọa độ O.

A. $m = \frac{1}{2}$. **B.** $m = -1$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = 0$.

DẠNG 6. Biện luận cực trị hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$

Phương pháp giải.

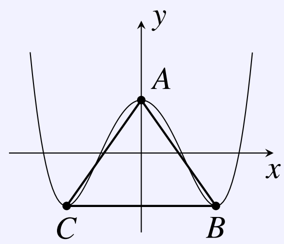
① Tính $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $2ax^2 + b = 0$ (1).

② Nhận xét:

- Hàm số có ba điểm cực trị khi (1) có hai nghiệm khác 0. Suy ra $\boxed{ab < 0}$
- Hàm số có đúng một điểm cực trị $\boxed{ab \geq 0}$ và a, b không đồng thời bằng 0.

③ Các công thức tính nhanh:

- $\cos A = \dfrac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a}$
- $S^2_{ABC} = -\dfrac{b^5}{32a^3}$.



Ví dụ 23. Cho hàm số $y = (m+1)x^4 - mx^2 + 3$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số có ba điểm cực trị.

A. $m \in (-\infty; -1) \cup [0; +\infty)$. **B.** $m \in (-1; 0)$.
C. $m \in (-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$. **D.** $m \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$.

Lời giải

$y' = 4(m+1)x^3 - 2mx = 2x[2(m+1)x^2 - m]$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2(m+1)x^2 - m = 0 \ (*) \end{array}\right.$

Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

$\Leftrightarrow \dfrac{m}{m+1} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 0. \end{array}\right.$

Chọn đáp án D

Ví dụ 24. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = (m-2)x^4 + (m^2-4)x^2 + 2m - 3$ có đúng 1 điểm cực trị.

A. $m \in [-2; 2)$. **B.** $m \in [-2; +\infty) \backslash \{2\}$.
C. $m \in [-2; 2]$. **D.** $m \in [-2; +\infty)$.

Ví dụ 25. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^4 + (6m-4)x^2 + 1 - m$ là ba đỉnh của một tam giác vuông.

A. $m = \dfrac{2}{3}$. **B.** $m = \dfrac{1}{3}$. **C.** $m = -1$. **D.** $m = \sqrt[3]{3}$.

Lời giải

Ta có $y' = 4x^3 + 4(3m-2)x$. Giải $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 2 - 3m \end{array}\right.$.

Hàm số có ba cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 2 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < \dfrac{2}{3}$.

Khi đó, tọa độ ba điểm cực trị là $A(0;10m)$, $B\left(\sqrt{2-3m}; -(2-3m)^2 + 1 - m\right)$

và $C\left(-\sqrt{2-3m}; -(2-3m)^2 + 1 - m\right)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = \left(\sqrt{2-3m}; -(2-3m)^2\right)$ và $\overrightarrow{AC} = \left(-\sqrt{2-3m}; -(2-3m)^2\right)$

Nhận xét: $\triangle ABC$ luôn cân tại A.

Do đó, ABC tạo thành tam giác vuông $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -(2-3m) + (2-3m)^4 = 0$

$\Leftrightarrow (2-3m)^3 = 1 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án B

Ví dụ 26. Gọi m_0 là giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 - 1$ có 3 điểm cực trị lập thành một tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $m_0 \in (-1;1]$. **B.** $m_0 \in (-2;-1]$. **C.** $m_0 \in (-\infty;-2]$. **D.** $m_0 \in (-1;0)$.

Lời giải

Ta có $y' = 4x^3 + 4mx = 4x(x^2 + m)$.

Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m < 0$.

Khi đó đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là $A(0;-1)$, $B\left(-\sqrt{-m}; -m^2 - 1\right)$, $B\left(\sqrt{-m}; -m^2 - 1\right)$.

Gọi H là trung điểm của BC, ta có $H(0;-m^2-1)$.

Ta có $BC = \sqrt{\left(2\sqrt{-m}\right)^2} = 2\sqrt{-m}$, $AH = \sqrt{\left(-m^2\right)^2} = m^2$.

Tam giác ABC cân tại A nên $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}BC \cdot AH = \dfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{-m} \cdot m^2 = \sqrt{-m} \cdot m^2$.

Theo giả thiết, ta có $S_{ABC} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{-m} \cdot m^2 = 4\sqrt{2} \Rightarrow m = -2$.

Chọn đáp án C

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN – ĐỀ SỐ 1

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

1	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	7	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	13	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	19	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	25	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
2	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	8	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	14	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	20	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	26	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
3	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	9	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	15	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	21	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	27	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
4	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	16	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	22	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	28	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
5	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	11	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	17	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	23	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	29	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
6	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	12	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	18	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	24	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	30	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

Câu 1. Tọa độ điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ là

A. $(0;1)$. **B.** $(2;-3)$. **C.** $(1;-1)$. **D.** $(3;1)$.

Câu 2. Gọi x_1 là điểm cực đại x_2 là điểm cực tiểu của hàm số $y = -x^3 + 3x + 2$. Tính $x_1 + 2x_2$.

A. 2. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 0.

Câu 3. Hiệu số giữa giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ là

A. 4. **B.** -4. **C.** -2. **D.** 2.

Câu 4. Điểm cực tiểu của hàm số $y = -x^4 + 5x^2 - 2$ là

A. $y = 0$. **B.** $x = -2$. **C.** $x = 0$. **D.** $y = -2$.

Câu 5. Cho hàm số $y = x^4 - 8x^3 + 1$. Chọn mệnh đề đúng.

A. Nhận điểm $x = 6$ làm điểm cực đại. **B.** Nhận điểm $x = 6$ làm điểm cực tiểu.

C. Nhận điểm $x = 0$ làm điểm cực đại. **D.** Nhận điểm $x = 0$ làm điểm cực tiểu.

Câu 6. Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 2$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 7. Tiếp tuyến tại điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 5$

A. Có hệ số góc dương. **B.** Song song với trục hoành.

C. Có hệ số góc bằng -1. **D.** Song song với đường thẳng $x = 1$.

Câu 8. Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$. Tính diện tích S của tam giác OAB với O là gốc tọa độ.

A. $S = 8$. **B.** $S = \sqrt{3}$. **C.** $S = 2$. **D.** $S = 4$.

Câu 9. Khoảng cách từ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ đến trục tung bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 0.

Câu 10. Cho hàm số $y = x^4 - 8x^2 + 10$ có đồ thị (C). Gọi A, B, C là ba điểm cực trị của đồ thị (C). Tính diện tích S của tam giác ABC.

A. $S = 64$. **B.** $S = 32$. **C.** $S = 24$. **D.** $S = 12$.

Câu 11. Tìm hàm số có đồ thị (C) nhận điểm $N(1;-2)$ là cực tiểu

A. $y = x^4 - x^2 - 2$. **B.** $y = x^4 + 2x^2 - 4$. **C.** $y = -x^4 + 2x^2 - 3$. **D.** $y = x^4 - 2x^2 - 1$.

Câu 12. Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2 - 4$. Diện tích tam giác tạo bởi ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là

A. 4. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 13. Hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 14. Số điểm cực trị của hàm số $y = x^{2017}(x+1)$ là

A. 2017. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $y' = f'(x) = 3x^3 - 3x^2$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Trên khoảng $(1; +\infty)$ hàm số đồng biến. **B.** Trên khoảng $(-1; 1)$ hàm số nghịch biến.
C. Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị. **D.** Đồ thị hàm số có một điểm cực tiểu.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(x-2)^3$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

Giá trị cực đại của hàm số là

A. $y = 1$. **B.** $y = 0$. **C.** $x = 1$. **D.** $x = 0$.

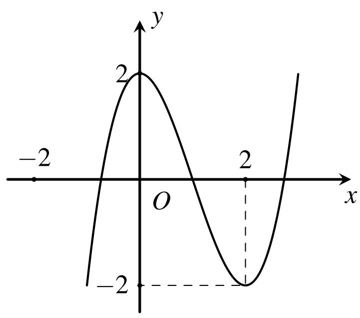
Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên dưới.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-1 || -1	↗	3	↘	2

Hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



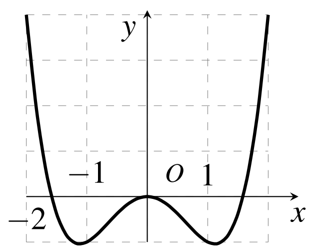
A. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 2.
B. Hàm số có giá trị cực đại bằng 0.
C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và cực tiểu tại $x = 2$.
D. Hàm số có ba điểm cực trị.

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	

A. $x = 0$. **B.** $x = 2$. **C.** $y = 0$. **D.** $y = 2$.

Câu 21. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng K, biết đồ thị của hàm số $y' = f'(x)$ trên K như hình vẽ bên. Tìm số cực trị của hàm số $y = f(x)$ trên K.



A. 1. **B.** 2.
C. 3. **D.** 4.

Câu 22. Hàm số $y = x - 3\sqrt[3]{x^2}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 8.

Câu 23. Hàm số $y=x^3-2mx^2+m^2x-2$ đạt cực tiểu tại $x=1$ khi

A. $m=3$. **B.** $m=1$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=-3$.

Câu 24. Với giá trị nào của m thì hàm số $y=mx^3-3mx+2$ đạt cực đại tại $x=1$?

A. $m=3$. **B.** $m<0$. **C.** $m=1$. **D.** $m\neq 0$.

Câu 25. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3m+1$ có hai điểm cực trị.

A. $m\geq 0$. **B.** $\forall m\in\mathbb{R}$. **C.** $m\leq 0$. **D.** $m\neq 0$.

Câu 26. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x)=x^3-mx^2+\left(m+\dfrac{4}{3}\right)x+10$ có hai điểm cực trị. Hỏi có bao nhiêu số nguyên $m\in S$ và thỏa $|m|\leq 2018$?

A. 4031. **B.** 4036. **C.** 4029. **D.** 4033.

Câu 27. Cho hàm số $y=2x^3+3(m-1)x^2+6(m-2)x-18$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số có hai điểm cực trị thuộc khoảng $(-5;5)$ là

A. $(-\infty;-3)\cup(7;+\infty)$. **B.** $(-3;+\infty)\setminus\{3\}$.

C. $(-\infty;7)\setminus\{3\}$. **D.** $(-3;7)\setminus\{3\}$.

Câu 28. Biết đồ thị hàm số $y=x^4+bx^2+c$ chỉ có một điểm cực trị là điểm có tọa độ $(0;-1)$, khi đó b và c thỏa mãn những điều kiện nào dưới đây?

A. $b<0$ và $c=-1$. **B.** $b\geq 0$ và $c>0$. **C.** $b<0$ và $c<0$. **D.** $b\geq 0$ và $c=-1$.

Câu 29. Cho hàm số $y=(m+1)x^4-mx^2+3$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số có ba điểm cực trị.

A. $m\in(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$. **B.** $m\in(-1;0)$.

C. $m\in(-\infty;-1)\cup[0;+\infty)$. **D.** $m\in(-\infty;-1]\cup[0;+\infty)$.

Câu 30. Cho hàm số $f(x)=x^4+4mx^3+3(m+1)x^2+1$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số có cực tiểu mà không có cực đại. Tính tổng các phần tử của tập S.

A. 1. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 0.

—HẾT—

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN – ĐỀ SỐ 2

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

1	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	7	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	13	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	19	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	25	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
2	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	8	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	14	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	20	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	26	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
3	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	9	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	15	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	21	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	27	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
4	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	16	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	22	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	28	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
5	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	11	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	17	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	23	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	29	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
6	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	12	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	18	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	24	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	30	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

Câu 1. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=-2x^3+3x^2+1$.

A. $y=x+1$. **B.** $y=-x+1$. **C.** $y=x-1$. **D.** $y=-x-1$.

Câu 2. Gọi d là đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x+1$. Điểm nào sau đây thuộc d?

A. $M(-2;1)$. **B.** $N(3;-5)$. **C.** $P(2;3)$. **D.** $Q(3;-1)$.

Câu 3. Khoảng cách giữa hai điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số $y=(x+1)(x-2)^2$

A. $5\sqrt{2}$. **B.** 2. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** 4.

Câu 4. Cho hàm số $y=x^4-2x^2+2$. Diện tích S của tam giác tạo bởi ba đỉnh cực trị của đồ thị hàm số đã cho là

A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 5. Hàm số $f(x)=C_{2019}^0+C_{2019}^1x+C_{2019}^2x^2+\cdots+C_{2019}^{2019}x^{2019}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

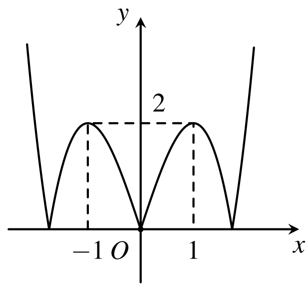
A. 1. **B.** 2019. **C.** 2018. **D.** 0.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x^2-1)x^2(x-2)^{2019}$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B.** 5.
C. 2. **D.** 3.



Câu 8. Cho hàm số $y=x-\sin 2x+3$. Chọn kết luận đúng.

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=\dfrac{\pi}{3}$. **B.** Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-\dfrac{\pi}{6}$.

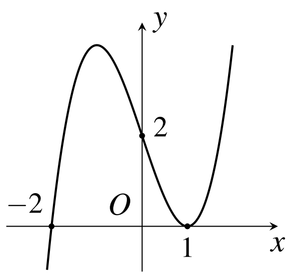
C. Hàm số đạt cực đại tại $x=\dfrac{\pi}{6}$. **D.** Hàm số đạt cực đại tại $x=-\dfrac{\pi}{6}$.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)=\sin 2x$. Hỏi trong khoảng $(0;2018)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 1285. **B.** 2017. **C.** 643. **D.** 642.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'(x)$ liên tục và có đồ thị trên $\mathbb{R}$ như trong hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y=f(x^2)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 2. **B.** 3.
C. 1. **D.** 0.



Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $y = f'(x)$ như sau. Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

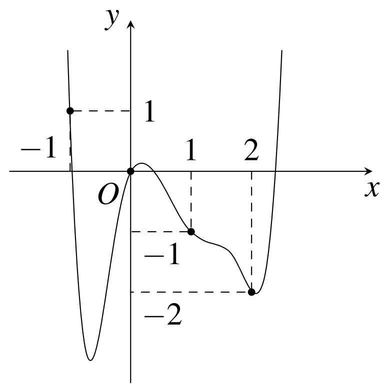
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $= f\left(x^2+1\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$+\infty$		-2				$+\infty$

A. 0. **B.** 2.
C. 3. **D.** 1.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $g(x) = 2f(x) + x^2$ đạt cực tiểu tại điểm nào sau đây?



A. $x = -1$.
B. $x = 0$.
C. $x = 1$.
D. $x = 2$.

Câu 14. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx$ đạt cực tiểu tại $x = 2$.
A. $m = 0$. **B.** $m = -2$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = 2$.

Câu 15. Biết với $m = m_0$ thì hàm số $y = x^3 - mx + 1$ đạt cực đại tại $x = -2$. Tìm khẳng định đúng.
A. $m_0 \in (0;3)$. **B.** $m_0 \in (10;14)$. **C.** $m_0 \in (7;10)$. **D.** $m_0 \in (4;6)$.

Câu 16. Hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (3m-2)x + 1$ có 2 cực trị khi và chỉ khi
A. $m > 1$. **B.** $1 < m < 2$. **C.** $m < 1$ hoặc $m > 2$. **D.** $m = 1$.

Câu 17. Hàm số $y = x^3 - 3x + 1 - m$ với m là tham số. Hàm số có giá trị cực đại và giá trị cực tiểu trái dấu khi
A. $m = -1$ hoặc $m = 3$. **B.** $-1 < m < 3$.
C. $m < -1$ hoặc $m > 3$. **D.** $-1 < m \leq 3$.

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -x^4 + 2(m-1)x^2 - m + 7$ có ba điểm cực trị.
A. $m < 1$. **B.** $m > 1$. **C.** $m \geq 1$. **D.** $m \leq 1$.

Câu 19. Tập hợp các số thực m thỏa mãn hàm số $y = mx^4 - x^2 + 1$ có đúng một điểm cực trị là
A. $(-\infty;0)$. **B.** $(-\infty;0]$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $[0;+\infty)$.

Câu 20. Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2 + mx - 1$ nằm bên phải trục tung.
A. $m < 0$. **B.** $0 < m < \dfrac{1}{3}$. **C.** $m < \dfrac{1}{3}$. **D.** Không tồn tại.

Câu 21. Biết m_0 là giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho ${x_1}^2 + {x_2}^2 - x_1x_2 = 13$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
A. $m_0 \in (-1;7)$. **B.** $m_0 \in (-15;-7)$. **C.** $m_0 \in (7;10)$. **D.** $m_0 \in (-7;-1)$.

Câu 22. Cho hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 18$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số có hai điểm cực trị thuộc khoảng $(-5;5)$ là
A. $(-\infty;-3) \cup (7;+\infty)$. **B.** $(-3;+\infty) \setminus \{3\}$.
C. $(-\infty;7) \setminus \{3\}$. **D.** $(-3;7) \setminus \{3\}$.

Câu 23. Cho điểm $A(-1;3)$. Gọi m_1 và m_2 là các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+m$ có hai điểm cực trị B và C thỏa ba điểm A,B,C thẳng hàng. Tính m_1+m_2.

A. $m_1+m_2=\frac{5}{2}$. **B.** $m_1+m_2=-\frac{1}{2}$. **C.** $m_1+m_2=0$. **D.** $m_1+m_2=-1$.

Câu 24. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3+2x^2+(m-3)x+m$ có hai điểm cực trị và điểm $M(9;-5)$ nằm trên đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị.

A. $m=3$. **B.** $m=2$. **C.** $m=-5$. **D.** $m=-1$.

Câu 25. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=x^8+(m-2)x^5-(m^2-4)x^4+1$ đạt cực tiểu tại $x=0$?

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** Vô số.

Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)$ biết $f'(x)=x^2(x-1)^3(x^2-2mx+m+6)$. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị là

A. 7. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 27. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=x^4+2mx^2+1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

A. $m=-\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$. **D.** $m=1$.

Câu 28. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số $y=x^4-2(m-1)x^2+m^4-3m^2+2017$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 32?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 29. Đồ thị hàm số $y=-\frac{1}{3}x^4-mx^2+m^2-1$ có 3 điểm cực trị tạo thành 3 đỉnh của một tam giác đều khi và chỉ khi

A. $m=2$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=\sqrt[3]{\frac{8}{3}}$.

Câu 30. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+2m^4-m$ có ba điểm cực trị đều thuộc các trục tọa độ.

A. $m=2$. **B.** $m=3$. **C.** $m=1$. **D.** $m=\frac{1}{2}$.

—**HẾT**—

§ 3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

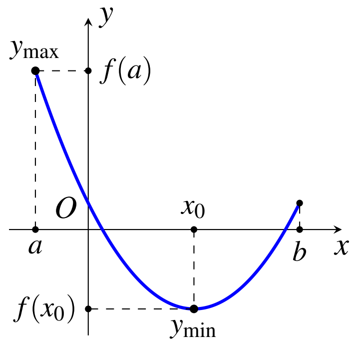
1 Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $\mathscr{D}$. Ta có

- M là giá trị lớn nhất của hàm số nếu $\begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in \mathscr{D} \\ \exists x_0 \in \mathscr{D} : f(x_0) = M \end{cases}$.

  Kí hiệu $\boxed{\max\limits_{x \in \mathscr{D}} f(x) = M}$

- n là giá trị nhỏ nhất của hàm số nếu $\begin{cases} f(x) \geq n, \forall x \in \mathscr{D} \\ \exists x_0 \in \mathscr{D} : f(x_0) = n \end{cases}$.

  Kí hiệu $\boxed{\min\limits_{x \in \mathscr{D}} f(x) = n}$



2 Các phương pháp thường dùng để tìm max - min

- Dùng đạo hàm (đối với hàm một biến), lập bảng biến thiên.
- Dùng bất đẳng thức đánh giá và kiểm tra dấu bằng

  ① Bất đẳng thức Cauchy: Với $a_1; a_2; \cdots; a_n$ là các số thực không âm, ta luôn có

  $$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}$$

  Dấu "=" xảy ra khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.
  Trường hợp thường gặp Cauchy cho 2 số hoặc 3 số:
  • $a_1 + a_2 \geq 2\sqrt{a_1 a_2}$. • $a_1 + a_2 + a_3 \geq 3\sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}$.

  ② Bất đẳng thức Bu-nhia-cốp-xki: Với hai bộ số $a_1; a_2; \cdots; a_n$ và $b_1; b_2; \cdots; b_n$, ta luôn có

  $$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2 \leq \left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right)$$

  Dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \cdots = \dfrac{a_n}{b_n}$.

- Dùng điều kiện có nghiệm của phương trình.
  Giả sử y_0 thuộc miền giá trị của hàm số $y = f(x)$. Khi đó, tồn tại $x \in \mathscr{D}$ để phương trình $f(x) = y_0$ có nghiệm. Biện luận điều kiện này, ta sẽ tìm được "khoảng dao động" của y_0. Từ đó suy ra max, min.

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

DẠNG 1. Tìm max – min của hàm số cho trước

Phương pháp giải.

Ví dụ 1. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$ trên $[-4; 4]$. Tính tổng $M + m$.

A. 12. **B.** 98. **C.** 17. **D.** 73.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3. \end{array}\right.$

Khi đó: $y(-4) = 21,\ y(-3) = 28,\ \ y(1) = -4,\ \ y(4) = 77.$

Do đó $M + m = 77 + (-4) = 73.$

Chọn đáp án D

Ví dụ 2. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ trên đoạn $[0;3]$ là

A. $\min\limits_{[0;3]} y = \dfrac{1}{2}$. **B.** $\min\limits_{[0;3]} y = -3$. **C.** $\min\limits_{[0;3]} y = 1$. **D.** $\min\limits_{[0;3]} y = -1$.

Lời giải

Trên đoạn $[0;3]$ hàm số luôn xác định.

Ta có $y' = \dfrac{2}{(x+1)^2} > 0,\ \forall x \in [0;3]$ nên hàm số đã cho đồng biến trên đoạn $[0;3]$.

Do đó $\min\limits_{[0;3]} y = y(0) = -1.$

Chọn đáp án D

Ví dụ 3. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$ trên đoạn $\left[-2; \dfrac{1}{2}\right]$ bằng

A. 4. **B.** -3. **C.** $-\dfrac{7}{2}$. **D.** $-\dfrac{13}{3}$.

Lời giải

Ta có $y' = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$. Xét $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in \left[-2; \dfrac{1}{2}\right] \\ x = 2 \notin \left[-2; \dfrac{1}{2}\right] \end{array}\right.$.

Ta có $y(0) = -3,\ y(-2) = \dfrac{-13}{3},\ y\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{-7}{2}.$

Suy ra $\max\limits_{x \in \left[-2; \frac{1}{2}\right]} y = -3$

Chọn đáp án B

Ví dụ 4. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \sqrt{7 + 6x - x^2}$.

A. $M = 4$. **B.** $M = \sqrt{7}$. **C.** $M = 7$. **D.** $M = 3$.

Lời giải

Tập xác định $\mathscr{D} = [-1;7]$.

$y' = \dfrac{-x+3}{\sqrt{7 + 6x - x^2}}$.

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x = 3 \in \mathscr{D}$.

Có $y(3) = 4, y(-1) = 0, y(7) = 0$. Vậy $M = 4$.

Chọn đáp án (A)

Ví dụ 5. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=3x+\dfrac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$ bằng

A. $3\sqrt[3]{9}$. **B.** $2\sqrt[3]{9}$. **C.** $\dfrac{33}{5}$. **D.** $\dfrac{25}{4}$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương, ta có

$$y=\frac{3x}{2}+\frac{3x}{2}+\frac{4}{x^2}\geq 3\sqrt[3]{\frac{3x}{2}\cdot\frac{3x}{2}\cdot\frac{4}{x^2}}=3\sqrt[3]{9}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\dfrac{3x}{2}=\dfrac{4}{x^2}\Leftrightarrow x=\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}}=2\sqrt[3]{2}$.

Chọn đáp án (A)

Ví dụ 6. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{mx+1}{x-m}$ trên đoạn $[1;2]$ bằng 3. Khi đó giá trị m thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\dfrac{3}{4};0\right)$. **B.** $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$. **C.** $\left(0;\dfrac{3}{4}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{3}{4};11\right)$.

Lời giải

Ta có $y'=\dfrac{-m^2-1}{(x-m)^2}<0,\forall m$.

+) Xét $f(1)=\dfrac{m+1}{1-m}=3\Rightarrow m=\dfrac{1}{2}$. Khi đó thay $m=\dfrac{1}{2}$ vào hàm số ta được giá trị lớn nhất của hàm số là $f(1)=3$.

+) Xét $f(2)=\dfrac{2m+1}{2-m}=3\Rightarrow m=1$. Khi đó hàm số không có giá trị lớn nhất bằng 3 trên đoạn $[1;2]$.

Vậy $m=\dfrac{1}{2}$ thỏa mãn.

Chọn đáp án (C)

Ví dụ 7. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. Cực đại của hàm số là 4.

B. Cực tiểu của hàm số là 3.

C. $\max\limits_{\mathbb{R}} y=4$.

D. $\min\limits_{\mathbb{R}} y=3$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	3	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

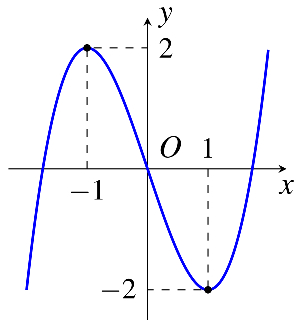
Lời giải

Từ bảng biến thiên ta thấy $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ nên hàm số không có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (D)

Ví dụ 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong ở hình bên. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 1]$.

A. $m = 2$. **B.** $m = -2$.
C. $m = 1$. **D.** $m = -1$.



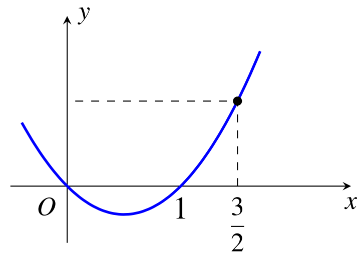
Lời giải

Dựa vào đồ thị ta có giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 1]$ bằng -2.

Chọn đáp án B

Ví dụ 9. Cho hàm số $y = f(x)$, biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ tại điểm nào sau đây?

A. $x = \frac{3}{2}$. **B.** $x = \frac{1}{2}$.
C. $x = 1$. **D.** $x = 0$.



Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$. Ta có bảng biến thiên

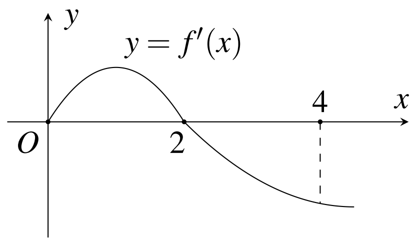
x	$\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$
y'		$-$	0	$+$	0
y		$\searrow$		$\nearrow$	

Suy ra hàm số đạt giá trị nhỏ nhất trên $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ tại $x = 1$.

Chọn đáp án C

Ví dụ 10. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Biết $f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3)$. Giá trị nhỏ nhất m, giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 4]$ là

A. $m = f(4), M = f(1)$. **B.** $m = f(4), M = f(2)$.
C. $m = f(1), M = f(2)$. **D.** $m = f(0), M = f(2)$.



Lời giải

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên:

x	0		2		4
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$			$f(2)$		
	$f(0)$	$\nearrow$		$\searrow$	$f(4)$

Từ bảng biến thiên ta thấy $M = f(2)$.

Mặt khác, từ bảng biến thiên ta có $\begin{cases} f(1) < f(2) \\ f(3) < f(2) \end{cases} \Rightarrow f(1) + f(3) < 2f(2)$.

Do đó $f(4) = f(0) + f(1) + f(3) - 2f(2) < f(0) + f(2) + f(2) - 2f(2) = f(0) \Rightarrow m = f(4)$.

Chọn đáp án B

DẠNG 2. Một số bài toán vận dụng

Phương pháp giải.

1. Bài toán chuyển động:
   - Gọi $s(t)$ là hàm quãng đường; $v(t)$ là hàm vận tốc; $a(t)$ là hàm gia tốc;
   - Khi đó $s'(t) = v(t)$; $v'(t) = a(t)$.
2. Bài toán thực tế – tối ưu.
   - Biểu diễn dữ kiện cần đạt max – min qua một hàm $f(t)$.
   - Khảo sát hàm $f(t)$ trên miền điều kiện "đúng" và suy ra kết quả.

Ví dụ 11. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \cos^3 x + 9\cos x + 6\sin^2 x - 1$ là

A. -2. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Ta có $y = \cos^3 x + 9\cos x + 6\left(1 - \cos^2 x\right) - 1 = \cos^3 x - 6\cos^2 x + 9\cos x + 5$.

Đặt $t = \cos x$, ta xét hàm số $f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 5$, với $t \in [-1; 1]$.

Ta có $f'(t) = 3t^2 - 12t + 9$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \notin (-1; 1) \\ t = 3 \notin (-1; 1). \end{array}\right.$

$f(-1) = -11$, $f(1) = 9$.

Suy ra $\max\limits_{[-1;1]} f(t) = 9$, $\min\limits_{[-1;1]} f(t) = -11$.

Do đó $\max\limits_{\mathbb{R}} y = 9$, $\min\limits_{\mathbb{R}} y = -11$.

Từ đó $\min\limits_{\mathbb{R}} y + \max\limits_{\mathbb{R}} y = -11 + 9 = -2$.

Chọn đáp án A

Ví dụ 12. Một chất điểm chuyển động với quãng đường $s(t)$ cho bởi công thức $s(t)=6t^2-t^3$, t (giây) là thời gian. Hỏi trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây, vận tốc v (m/s) của chất điểm đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm t (giây) bằng bao nhiêu?

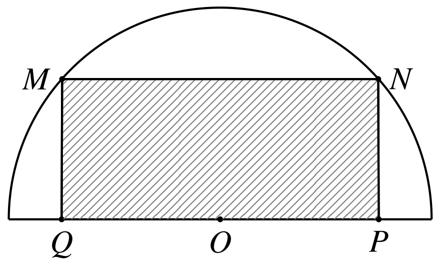
A. $t=3$ s. **B.** $t=4$ s. **C.** $t=2$ s. **D.** $t=6$ s.

Lời giải

Ta có $v(t)=s'(t)=12t-3t^2$.
$v'(t)=12-6t$, $v'(t)=0 \Leftrightarrow t=2$.
Lập bảng biến thiên ta thấy $v(t)$ đạt giá trị lớn nhất tại $t=2$.
Chọn đáp án C

Ví dụ 13. Từ một tấm tôn có hình dạng là nửa hình tròn bán kính $R=3$, người ta muốn cắt ra một hình chữ nhật (hình vẽ bên). Diện tích lớn nhất có thể của tấm tôn hình chữ nhật là

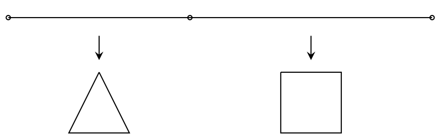
A. $\dfrac{9}{2}$. **B.** $6\sqrt{2}$. **C.** 9. **D.** $9\sqrt{2}$.



Lời giải

Đặt $OQ=x,\ (0<x<3) \Rightarrow MQ=\sqrt{MO^2-OQ^2}=\sqrt{9-x^2}$.
Ta có $S_{MNPQ}=PQ\cdot MQ=2x\cdot\sqrt{9-x^2}\le 2\cdot\dfrac{x^2+9-x^2}{2}=9$.
Dấu $=$ xảy ra khi $x=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.
Chọn đáp án C

Ví dụ 14. Một sợi dây có chiều dài là 6 m, được chia thành 2 phần. Phần thứ nhất được uốn thành hình tam giác đều, phần thứ hai uốn thành hình vuông. Hỏi độ dài của cạnh hình tam giác đều bằng bao nhiêu để tổng diện tích 2 hình thu được là nhỏ nhất?



A. $\dfrac{12}{4+\sqrt{3}}$ m. **B.** $\dfrac{18\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$ m. **C.** $\dfrac{36\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$ m. **D.** $\dfrac{18}{9+4\sqrt{3}}$ m.

Lời giải

Gọi độ dài cạnh hình tam giác đều là x (m). Khi đó độ dài cạnh hình vuông là $\dfrac{6-3x}{4}$.
Tổng diện tích khi đó là $S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2+\left(\dfrac{6-3x}{4}\right)^2=\dfrac{1}{16}\left[\left(9+4\sqrt{3}\right)x^2-36x+36\right]$.
Xét hàm số $f(x)=\left(9+4\sqrt{3}\right)x^2-36x+36, x\in(0;6)$.
Ta có $f(x)$ là tam thức bậc 2 có $-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{18}{9+4\sqrt{3}}\in(0;6)$ và $a>0$.

Suy ra $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = -\dfrac{b}{2a}\dfrac{18}{9+4\sqrt{3}}$.

Vậy diện tích nhỏ nhất khi $x = \dfrac{18}{9+4\sqrt{3}}$ m.

Chọn đáp án D

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

1	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	7	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	13	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	19	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	25	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
2	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	8	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	14	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	20	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	26	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
3	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	9	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	15	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	21	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	27	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
4	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	16	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	22	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	28	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
5	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	11	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	17	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	23	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	29	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
6	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	12	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	18	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	24	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	30	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

Câu 1. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ trên đoạn $[-4;4]$. Tính $T = M + 2m$.

A. $T = -41$. **B.** $T = -44$. **C.** $T = -43$. **D.** $T = -42$.

Câu 2. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = -x^4 + 4x^2$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng

A. 1. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 3. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$ trên đoạn $[1;3]$ bằng

A. $\dfrac{6}{7}$. **B.** $\dfrac{5}{6}$. **C.** $\dfrac{4}{5}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Câu 4. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x^2+3}{x+1}$ trên đoạn $[-4;-2]$ là

A. $\min\limits_{[-4;-2]} y = -7$. **B.** $\min\limits_{[-4;-2]} y = -\dfrac{19}{3}$. **C.** $\min\limits_{[-4;-2]} y = -8$. **D.** $\min\limits_{[-4;-2]} y = -6$.

Câu 5. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \sqrt{12 - 3x^2}$.

A. $\max y = 4$, $\min y = 2$. **B.** $\max y = 4$, $\min y = -2$.

C. $\max y = 2$, $\min y = -2$. **D.** $\max y = 2$, $\min y = -4$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Xét ba khẳng định sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

(1) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

(2) Hàm số có một cực đại.

(3) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 3.

Số khẳng định đúng trong ba khẳng định trên là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 7. Tổng giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{2 - x^2} - x$ bằng bao nhiêu?

A. $2 - \sqrt{2}$. **B.** 2. **C.** $2 + \sqrt{2}$. **D.** 1.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\min\limits_{(-1;+\infty)} f(x) = f(0)$. **B.** $\max\limits_{(0;+\infty)} f(x) = f(1)$.

C. $\max\limits_{(-1;1]} f(x) = f(0)$. **D.** $\min\limits_{(-\infty;-1)} f(x) = f(-1)$.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số có hai điểm cực trị.

B. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 0 và giá trị lớn nhất bằng 1.

C. Hàm số có giá trị cực đại bằng 0.

D. Hàm số có đạt cực tiểu tại $x = 0$ và đạt cực đại tại $x = 1$.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	||	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Câu 10. Trên khoảng $(0;1)$, hàm số $y = x^3 + \dfrac{1}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x_0 bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 11. Hàm số $y = 4\sin x - 3\cos x$ có giá trị lớn nhất M, giá trị nhỏ nhất m là

A. $M = 7, m = 1$. **B.** $M = 5, m = -5$. **C.** $M = 1, m = -7$. **D.** $M = 7, m = -7$.

Câu 12. Cho hàm số $y = \dfrac{x - m^2 + m}{x + 1}$. Tổng các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;1]$ bằng -2 là

A. 2. **B.** -2. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 13. Gọi T là tập hợp tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{mx + 1}{x + m^2}$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[2;3]$ bằng $\dfrac{5}{6}$. Tính tổng S của các phần tử trong T.

A. $S = \dfrac{18}{5}$. **B.** $S = \dfrac{17}{5}$. **C.** $S = 6$. **D.** $S = 2$.

Câu 14. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{\cos^2 x - 5\cos x + 3}{\cos x - 6}$ là

A. $y_{\max} = \dfrac{1}{5}; y_{\min} = -\dfrac{9}{7}$. **B.** $y_{\max} = 13; y_{\min} = 4$.

C. $y_{\max} = 1; y_{\min} = -\dfrac{9}{7}$. **D.** $y_{\max} = \dfrac{1}{5}; y_{\min} = -1$.

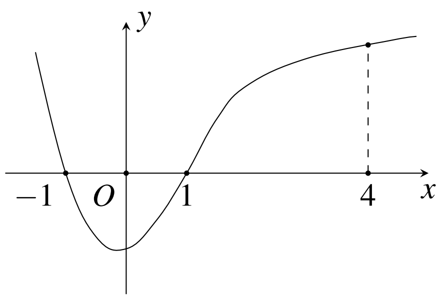
Câu 15. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = \sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} - \sqrt{1+x} \cdot \sqrt{3-x}$ trên tập xác định của nó.

A. $m = 2\sqrt{2} - 1$. **B.** $m = \dfrac{4}{5}$. **C.** $m = 2\sqrt{2} - 2$. **D.** $m = \dfrac{9}{10}$.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Biết rằng $f(-1) + f(2) = f(1) + f(4)$, các điểm $A(1;0)$, $B(-1;0)$ thuộc đồ thị. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[-1;4]$ lần lượt là

A. $f(1), f(-1)$. **B.** $f(0), f(2)$.

C. $f(-1), f(4)$. **D.** $f(1), f(4)$.



Câu 17. Tìm m để bất phương trình $x^4 - 4x^2 - m + 1 \leq 0$ có nghiệm thực.

A. $m \geq -3$. **B.** $m \leq 1$. **C.** $m \geq 1$. **D.** $m \leq -3$.

Câu 18. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x - m}{x + 1}$, với m là tham số. Biết $\min\limits_{[0;3]} f(x) + \max\limits_{[0;3]} f(x) = -2$. Hãy chọn kết luận đúng?

A. $m = 2$. **B.** $m > 2$. **C.** $m = -2$. **D.** $m < -2$.

Câu 19. Tìm giá trị của tham số m để bất phương trình $\dfrac{x^2+3x+3}{x+1} \geq m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [0;1]$.

A. $m \leq 3$. **B.** $m \leq \dfrac{7}{2}$. **C.** $m \geq \dfrac{7}{2}$. **D.** $m \geq 3$.

Câu 20. Cho $a > 0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{7(a^2+9)}{a} + \dfrac{a}{a^2+9}$ bằng

A. $\dfrac{251}{3}$. **B.** $2\sqrt{7}$. **C.** $\dfrac{253}{3}$. **D.** $\dfrac{253}{6}$.

Câu 21. Cho hai số thực x, y thay đổi thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2=2$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2(x^3+y^3) - 3xy$. Giá trị của $M+m$ bằng

A. -4. **B.** $-\dfrac{1}{2}$. **C.** -6. **D.** $1-4\sqrt{2}$.

Câu 22. M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \cos x(1+2\cos 2x)$. Tìm $2M-m$.

A. 9. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $6+\dfrac{\sqrt{3}}{9}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}+3$.

Câu 23. Cho biểu thức $P = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ với x, y khác 0. Giá trị nhỏ nhất của P bằng

A. -2. **B.** 0. **C.** -1. **D.** 1.

Câu 24. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = 4x^2 + \dfrac{1}{x} - 4$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. $m=-1$. **B.** $m=-4$. **C.** $m=7$. **D.** $m=-3$.

Câu 25. Gọi m và M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{2x+19}{x^2+16x+68}$. Tính tích mM.

A. $mM=-0.20$. **B.** $mM=-0.25$. **C.** $mM=-0.15$. **D.** $mM=-0.30$.

Câu 26. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \cos^2 2x - \sin x \cos x + 4$ trên $\mathbb{R}$.

A. $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \dfrac{7}{2}$. **B.** $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 3$. **C.** $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \dfrac{10}{3}$. **D.** $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \dfrac{16}{5}$.

Câu 27. Cho x, y là hai số thực không âm thỏa mãn $x+y=2$. Gọi a, b lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{1}{3}x^3 + x^2 + y^2 - x + 1$. Khi đó kết luận nào sau đây là đúng?

A. $a+b=\dfrac{22}{3}$. **B.** $a+b=\dfrac{10}{3}$. **C.** $a+b=8$. **D.** $a+b=\dfrac{32}{3}$.

Câu 28. Cho các số thực x,y thỏa mãn $x^2+2xy+3y^2=4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (x-y)^2$.

A. $\max P = 8$. **B.** $\max P = 16$. **C.** $\max P = 12$. **D.** $\max P = 4$.

Câu 29. Một người thợ muốn làm một chiếc thùng hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông và không có nắp, biết thể tích của khối hộp là $V = 2{,}16\ \text{m}^3$. Giá nguyên liệu để làm bốn mặt bên là 36000 đồng/m^2 và giá nguyên liệu để làm đáy là 90000 đồng/m^2. Tính các kích thước của hình hộp để chi phí làm chiếc thùng đó là nhỏ nhất.

A. Cạnh đáy là 1,2 m, chiều cao là 1,8 m. **B.** Cạnh đáy là 1,5 m, chiều cao là 1,2 m.

C. Cạnh đáy là 1,7 m, chiều cao là 1 m. **D.** Cạnh đáy là 1 m, chiều cao là 1,7 m.

Câu 30. Cho ba số dương x,y,z theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{\sqrt{x^2+8yz}+3}{\sqrt{(2y+z)^2+6}}$.

A. $\dfrac{5}{2\sqrt{2}}$. **B.** $\dfrac{5}{\sqrt{10}}$. **C.** $\dfrac{6}{\sqrt{10}}$. **D.** $\dfrac{6}{\sqrt{15}}$.

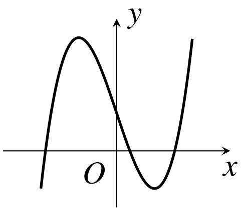
——HẾT——

§ 4. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

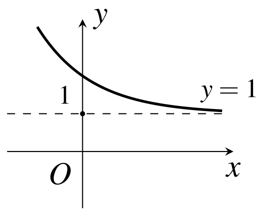
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Đường tiệm cận ngang (TCN)

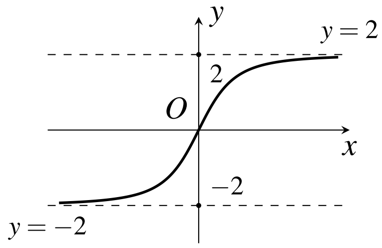
- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn $(a;+\infty)$, $(-\infty;b)$ hoặc $(-\infty;+\infty)$. Đường thẳng $\boxed{y=y_0}$ là TCN của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=y_0 \text{ hoặc } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=y_0}$.



Không có TCN



Có TCN $y=1$



Có TCN $y=2$, $y=-2$

- Các bước tìm TCN:

  ① Tính $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

  ② Xem ở "vị trí" nào ra kết quả hữu hạn thì ta kết luận có tiệm cận ngang ở "vị trí" đó.

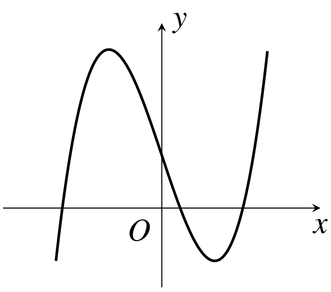
- Sử dụng máy tính cầm tay: Nhập biểu thức $f(x)$.

  ① Bấm $\boxed{\text{CACL}}$ $X=10^8$ để kiểm tra khi $x\to+\infty$.

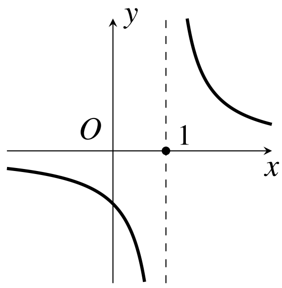
  ② Bấm $\boxed{\text{CACL}}$ $X=-10^8$ để kiểm tra khi $x\to-\infty$.

2 Đường tiệm cận đứng (TCĐ)

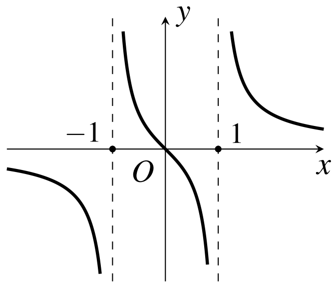
- Đường thẳng $\boxed{x=x_0}$ là TCĐ của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty \text{ hoặc } \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty}$



Không có TCĐ



Có TCĐ $x=1$



Có TCĐ $x=-1$ và $x=1$

- Các bước tìm TCĐ

  ① Tìm nghiệm của mẫu, giả sử nghiệm đó là $x=x_0$.

  ② Tính giới hạn một bên tại x_0. Nếu xảy ra $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$ thì ta kết luận $x=x_0$ là đường tiệm cận đứng.

- Sử dụng máy tính cầm tay: Nhập biểu thức $f(x)$.

  ① Bấm $\boxed{\text{CACL}}$ $X=x_0-0.000001$ để kiểm tra khi $x\to x_0^-$.

  ② Bấm $\boxed{\text{CACL}}$ $X=x_0+0.000001$ để kiểm tra khi $x\to x_0^+$.

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

DẠNG 1. Cho hàm số $y = f(x)$, tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị tương ứng.

Phương pháp giải. Thực hiện theo lý thuyết đã nêu trên. Chú ý các vấn đề thường gặp sau:

- Tính giới hạn của hàm số dạng phân thức $\dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots}{b_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots}$ khi $x \to \pm\infty$ để xác định TCN, ta thường gặp:
  ① bậc tử < bậc mẫu thì kết quả bằng 0.
  ② bậc tử = bậc mẫu thì kết quả bằng $\dfrac{a_n}{b_m}$.
  ③ bậc tử > bậc mẫu thì kết quả bằng ∞. Lúc này đồ thị không có đường TCN.
- Khi tìm TCĐ, trước tiên ta tìm nghiệm của mẫu. Chú ý:
  ① Những nghiệm "đơn" không thỏa tử đều nhận.
  ② Những nghiệm "đơn" thỏa tử đều bị loại.
- Đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ luôn có TCĐ $x = -\dfrac{d}{c}$ và TCN: $y = \dfrac{a}{c}$.

Ví dụ 1. Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-4}{x+2}$ là

A. $y = 2$. **B.** $x = 2$. **C.** $x = -2$. **D.** $y = -2$.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x-4}{x+2} = 2$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-4}{x+2} = 2$ nên hàm số có tiệm cận ngang là $y = 2$.

Chọn đáp án A

Ví dụ 2. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{1-x}$.

A. $y = -2$. **B.** $x = -2$. **C.** $y = 2$. **D.** $x = 1$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x+1}{-x+1} = -2$.

Chọn đáp án A

Ví dụ 3. Hàm số nào có đồ thị nhận đường thẳng $x = 2$ làm đường tiệm cận đứng?

A. $y = x - 2 + \dfrac{1}{x+1}$. **B.** $y = \dfrac{1}{x+1}$. **C.** $y = \dfrac{2}{x+2}$. **D.** $y = \dfrac{5x}{2-x}$.

Lời giải

Xét hàm số $y=\dfrac{5x}{2-x}$

Ta có $\lim\limits_{x\to 2^+} 5x=10>0$; $\lim\limits_{x\to 2^+}(2-x)$ và $x-2<0$ khi $x>2$ suy ra $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{5x}{2-x}=-\infty$.

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x}{2-x}$ nhận đường thẳng $x=2$ làm tiệm cận đứng.

Chọn đáp án D

Ví dụ 4. Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x+1}{x-2}$ là đường thẳng

A. $x=-2$. **B.** $x=2$. **C.** $y=3$. **D.** $y=-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{3x+1}{x-2}=+\infty$.

Chọn đáp án B

Ví dụ 5. Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2+4x-5}$ có phương trình là

A. $x=-1$. **B.** $y=1; y=-5$. **C.** $x=1; x=-5$. **D.** $x=\pm 5$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} y=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-} y=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 5^+} y=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 5^-} y=-\infty$.

Vậy đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng là $x=1$ và $x=-5$.

Chọn đáp án C

Ví dụ 6. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3}{x-2}$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Tiệm cận đứng $x=2$.

Tiệm cận ngang $y=0$.

Chọn đáp án B

Ví dụ 7. Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}$.

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Tập xác định: $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{\pm 2\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=1 \Rightarrow$ đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang là $y=1$.

Ta lại có $\lim\limits_{x\to 2} y=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-1}{x+2}=\dfrac{1}{4}$ và $\lim\limits_{x\to -2^+} y=\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x-1}{x+2}=-\infty$ nên đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng là $x=-2$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 2 đường tiệm cận.

Chọn đáp án (C)

Ví dụ 8. Tìm toạ độ giao điểm I của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{2-3x}$.

A. $I\left(\dfrac{2}{3};1\right)$. **B.** $I\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$. **C.** $I\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{2}{3}\right)$. **D.** $I\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right)$.

Lời giải

Đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số lần lượt là $x=\dfrac{2}{3}$ và $y=-\dfrac{2}{3}$. Nên giao điểm I có tọa độ $\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$.

Chọn đáp án (B)

Ví dụ 9. Cho hàm số $y=\dfrac{1-2x}{x+3}$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. Tâm đối xứng của đồ thị (C) là điểm $I(3;2)$.
B. Điểm $P(-3;2017)$ thuộc đường tiệm cận đứng của đồ thị (C).
C. Đường thẳng $y=-2$ là tiệm cận ngang của (C).
D. Đường thẳng $x=-3$ là tiệm cận đứng của (C).

Lời giải

Ta có: Tâm đối xứng của đô thị hàm số $y=\dfrac{1-2x}{x+3}$ là $I(-3;-2)$.

Chọn đáp án (A)

Ví dụ 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong (C) và các giới hạn $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=2$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của (C).
B. Đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang của (C).
C. Đường thẳng $x=2$ là tiệm cận ngang của (C).
D. Đường thẳng $x=2$ là tiệm cận đứng của (C).

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=2\Rightarrow y=2$ là tiệm cận ngang của (C).

Chọn đáp án (A)

Ví dụ 11. **(Quốc Gia - 2018)** Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Tập xác định $\mathscr{D}=[-9;+\infty)\setminus\{-1;0\}$.

Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}=-\infty\end{cases}\Rightarrow x=-1$ là tiệm cận đứng.

Ngoài ra $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}=\dfrac{1}{6}$ nên $x=0$ không thể là một tiệm cận được.

Chọn đáp án (D)

Ví dụ 12. Đồ thị hàm số $y=\sqrt{4x^2+4x+3}-\sqrt{4x^2+1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận ngang?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1 . **D.** 3 .

Lời giải

Ta có $\sqrt{4x^2+4x+3}-\sqrt{4x^2+1}=\dfrac{4x^2+4x+3-(4x^2+1)}{\sqrt{4x^2+4x+3}+\sqrt{4x^2+1}}=\dfrac{4x+2}{\sqrt{4x^2+4x+3}+\sqrt{4x^2+1}}$.

Từ đó suy ra $\lim\limits_{x\to+\infty}y=1$; $\lim\limits_{x\to-\infty}y=-1$, do đó đồ thị hàm số $y=\sqrt{4x^2+4x+3}-\sqrt{4x^2+1}$ có 2 đường tiệm cận ngang.

Chọn đáp án (A)

Ví dụ 13. Hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x+1}{x-4}$ cắt hai trục tọa độ tại các điểm A,B. Bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB là

A. $R=4$. **B.** $R=5$. **C.** $R=\dfrac{5}{2}$. **D.** $R=3$.

Lời giải

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x+1}{x-4}$ có hai đường tiệm cận là $d_1: x=4$ và $d_2: y=3$.

Giả sử $d_1\cap Ox=A\Rightarrow A(4;0), d_2\cap Oy=B\Rightarrow B(0;3)$.

Ta có tam giác OAB vuông tại O nên độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác bằng một nửa cạnh huyền, dó đó : $R=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{\sqrt{4^2+3^2}}{2}=\dfrac{5}{2}$.

Chọn đáp án (C)

DẠNG 2. Xác định TCN và TCĐ khi biết bảng biến thiên hàm số $y=f(x)$

Phương pháp giải.

- Nhìn "vị trí" $\pm\infty$ để xác định đường TCN.
  ① Nếu "vị trí" nào ra kết quả hữu hạn thì vị trí đó có TCN.
  ② Nếu "vị trí" nào không tồn tại hoặc ra kết quả ∞ thì "vị trí" đó không có TCN.
- Nhìn "vị trí có hai gạch sọc" để xác định TCĐ.
  ① Nếu "vị trí" nào xuất hiện ∞ thì vị trí đó là TCĐ.
  ② Nếu "vị trí" nào không xuất hiện ∞ ở cả hai bên (giới hạn trái và giới hạn phải) thì vị trí đó không là TCĐ.

Ví dụ 14. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình bên. Chọn khẳng định đúng.

A. Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.

C. Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng.

D. Đồ thị hàm số không có tiệm đứng và tiệm cận ngang.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	||	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1 || $-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Lời giải

Do $\lim\limits_{x\to+\infty} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y = +\infty$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.
Do $\lim\limits_{x\to0^+} y = +\infty$ suy ra $x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án C

Ví dụ 15. Cho bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau. Đồ thị của hàm số đã cho có tổng số bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	3

Lời giải

Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -\dfrac{1}{2}$ và có một đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 3$.
Vậy đồ thị hàm số đã cho có tổng số 2 đường tiệm cận đứng và ngang.

Chọn đáp án D

Ví dụ 16. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$ liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	0	$+$	||	$+$	
y	-2	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	-2

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta có:
$\lim\limits_{x\to-1^\pm} f(x) = \pm\infty$. $\lim\limits_{x\to1^\pm} f(x) = \mp\infty$.
Do đó $x = 1$ và $x = -1$ là các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Lại có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -2$. Do đó $y = -2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
Vậy đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận.
Chọn đáp án C

Ví dụ 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	‖	$-$	0	$+$	‖		
y	-2	$\nearrow$	3 ‖ $+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖		

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -2$.
- $\lim\limits_{x\to-2^+} y = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to 2^-} y = +\infty$.

Vậy đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.
Chọn đáp án C

DẠNG 3. Một số bài toán biện luận theo tham số m

Phương pháp giải.

Ví dụ 18. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{mx+2}{x-5}$ có đường tiệm cận ngang đi qua điểm $A(1;3)$.

A. $m = -3$. **B.** $m = 1$. **C.** $m = -1$. **D.** $m = 3$.

Lời giải

Tiệm cận ngang $y = m$ đi qua điểm $A(1;3)$ nên $m = 3$.
Chọn đáp án D

Ví dụ 19. Cho hàm số $y = \dfrac{ax+1}{bx-2}$, xác định a và b để đồ thị của hàm số trên nhận đường thẳng $x = 1$ làm tiệm cận đứng và đường thẳng $y = \dfrac{1}{2}$ làm tiệm cận ngang.

A. $\begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \end{cases}$.

Lời giải

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2}{b} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = 1 \end{cases}$.

Chọn đáp án (B)

Ví dụ 20. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x^2 - 5x + m}{x - m}$ có tiệm cận đứng.

A. $\left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 2 \end{array}\right.$. **B.** $m \neq 0$. **C.** $m \neq 2$. **D.** $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 2 \end{cases}$.

Lời giải

Ta có $x - m = 0 \Leftrightarrow x = m$.

Để đồ thị hàm số có tiệm cận đứng thì $2(m)^2 - 5(m) + m \neq 0 \Leftrightarrow 2m^2 - 4m \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 2 \end{cases}$.

Chọn đáp án (D)

Ví dụ 21. Biết rằng hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-m}$ (với m là tham số) tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 2. Giá trị của m là

A. $m = \pm 2$. **B.** $m = -1$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = \pm 1$.

Lời giải

Điều kiện $m \neq -\dfrac{1}{2}$.

Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+1}{x-m} = 2$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x+1}{x-m} = 2 \Rightarrow y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

- Xét $m > -\dfrac{1}{2}$, ta có $\lim\limits_{x \to m^+} \dfrac{2x+1}{x-m} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to m^-} \dfrac{2x+1}{x-m} = -\infty \Rightarrow x = m$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
- Xét $m < -\dfrac{1}{2}$, ta có $\lim\limits_{x \to m^+} \dfrac{2x+1}{x-m} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to m^-} \dfrac{2x+1}{x-m} = +\infty \Rightarrow x = m$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Diện tích hình chữ nhật là $|2m| = 2 \Rightarrow m = \pm 1$ (thỏa mãn).

Chọn đáp án (D)

Ví dụ 22. Tìm tất cả các điểm trên đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-2}$ sao cho tổng khoảng cách từ điểm đó đến hai đường tiệm cận là nhỏ nhất.

A. $\left(2+\sqrt{3}; 1+\sqrt{3}\right)$ và $\left(2-\sqrt{3}; 1-\sqrt{3}\right)$. **B.** $\left(1+\sqrt{3}; 2-\sqrt{3}\right)$ và $\left(1-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3}\right)$.

C. $\left(1+\sqrt{3}; 2+\sqrt{3}\right)$ và $\left(1-\sqrt{3}; 2-\sqrt{3}\right)$. **D.** $\left(2+\sqrt{3}; 1-\sqrt{3}\right)$ và $\left(2-\sqrt{3}; 1+\sqrt{3}\right)$.

Lời giải

Xét $M_0\left(x_0;\dfrac{x_0+1}{x_0-2}\right)$ thuộc đồ thị hàm số.
Hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số là $x=2$ (TCĐ) và $y=1$ (TCN).
Tổng khoảng cách từ M_0 đến hai đường tiệm cận là

$$|x_0-2|+\left|\frac{x_0+1}{x_0-2}-1\right|=|x_0-2|+\frac{3}{|x_0-2|}\geq 2\sqrt{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$|x_0-2|=\frac{3}{|x_0-2|}\Leftrightarrow|x_0-2|=\sqrt{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=2+\sqrt{3}\\x_0=2-\sqrt{3}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y_0=1+\sqrt{3}\\y_0=1-\sqrt{3}.\end{array}\right.$$

Chọn đáp án A

Ví dụ 23. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-mx+1}$ có đúng 3 đường tiệm cận.

A. $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m>2\\m\neq\dfrac{5}{2}\end{cases}\\m<-2\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m>2\\\begin{cases}m<-2\\m\neq-\dfrac{5}{2}\end{cases}\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m>2\\m<-2\end{array}\right.$. **D.** $-2<m<2$.

Lời giải

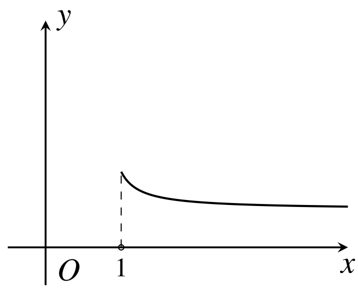
ĐKXĐ : $x^2-mx+1\neq 0$
Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x-2}{x^2-mx+1}=0\Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang.
Do đó đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-mx+1}$ có đúng 3 đường tiệm cận khi và chỉ khi phương trình $x^2-mx+1=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 2.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=m^2-4>0\\2^2-2m+1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>2\\m<-2\end{array}\right.\\m\neq\dfrac{5}{2}\end{cases}.$$

Chọn đáp án A

Ví dụ 24. Hỏi có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(a;b)$ để hàm số $y=\dfrac{2x-a}{4x-b}$ có đồ thị trên $(1;+\infty)$ như hình vẽ bên?

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.



Lời giải

Ta có, $y' = \dfrac{4a-2b}{(4x-b)^2}$ và đường tiệm cận đứng $x = \dfrac{b}{4}$.

Yêu cầu bài toán tương đương $\begin{cases} y' < 0 \\ \dfrac{b}{4} < 1 \\ a > 0, b > 0 \\ a, b \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b < 0 \\ b < 4 \\ a > 0, b > 0 \\ a, b \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 2a < b < 4 \\ a, b \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3. \end{cases}$

Chọn đáp án A

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

1	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	7	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	13	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	19	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	25	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
2	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	8	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	14	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	20	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	26	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
3	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	9	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	15	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	21	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	27	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
4	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	16	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	22	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	28	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
5	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	11	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	17	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	23	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	29	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
6	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	12	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	18	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	24	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	30	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

Câu 1. Phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-3}{x-1}$ là

A. $y=5$. **B.** $y=0$. **C.** $x=1$. **D.** $y=1$.

Câu 2. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{2x-2}$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=\dfrac{1}{2}$.

B. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=-\dfrac{1}{2}$.

C. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=\dfrac{1}{2}$.

D. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=2$.

Câu 3. Số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x+1}{x^2-4}$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 4. Đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số nào sau đây?

A. $y=\dfrac{2x^2+1}{2-x}$. **B.** $y=\dfrac{x^2+2x+1}{1+x}$. **C.** $y=\dfrac{x+1}{1-2x}$. **D.** $y=\dfrac{2x-2}{x+2}$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-2$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

C. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là hai đường thẳng $x=-2$ và $x=2$.

D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là hai đường thẳng $y=-2$ và $y=2$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=y_0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$. Tìm kết luận đúng trong các kết luận sau.

A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=y_0$.

B. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=y_0$.

C. Đồ thị hàm số không có tiệm cận.

D. Đồ thị hàm số có cả tiệm cận đứng, tiệm cận ngang.

Câu 7. Cho hàm số $y=\dfrac{2017}{x-2}$ có đồ thị (H). Số đường tiệm cận của (H) là

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 8. Cho đồ thị $(C)\colon y=\dfrac{x-3}{x+2}$ có hai đường tiệm cận cắt nhau tại I. Tính độ dài đoạn thẳng OI (với O là gốc tọa độ).

A. $OI=\sqrt{3}$. **B.** $OI=\sqrt{2}$. **C.** $OI=1$. **D.** $OI=\sqrt{5}$.

Câu 9. Số đường tiệm cận (đứng và ngang) của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{x^2}$ là bao nhiêu?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 10. Tìm số tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2-3x+2}$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 11. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1}$ có đường tiệm cận ngang là

A. $y=2$. **B.** $y=\pm 2$. **C.** $y=1$. **D.** $y=\pm 1$.

Câu 12. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{|x|+1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận (đứng và ngang)?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 13. Đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4x}-\sqrt{x^2-3x}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận ngang?

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 14. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x}$ có đồ thị (C). Gọi d là tích khoảng cách từ một điểm bất kì trên (C) đến các đường tiệm cận của (C). Tính d.

A. $\mathrm{d}=1$. **B.** $\mathrm{d}=\sqrt{2}$. **C.** $\mathrm{d}=2$. **D.** $\mathrm{d}=2\sqrt{2}$.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	2	↗	$+\infty$ ‖ 3	↗	5

A. 4. **B.** 1.
C. 3. **D.** 2.

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Hỏi đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tổng số bao nhiêu tiệm cận (tiệm cận đứng và tiệm cận ngang)?

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	-1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$

A. 0. **B.** 2.
C. 3. **D.** 1.

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	‖	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2

Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y=-2$, $y=2$.
B. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $x=1$, $x=-1$.
C. Hàm số $y=f(x)$ không có đạo hàm tại điểm $x=0$.
D. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại điểm $x=0$.

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(-2;0)\cup(0;+\infty)$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $f(x)$ là

x	-2		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	‖	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ 1	↘	0

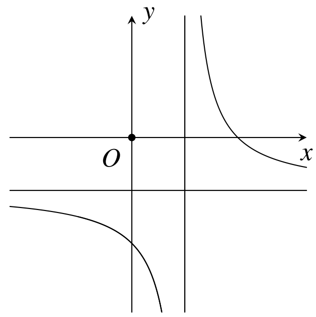
A. 4. **B.** 2.
C. 1. **D.** 3.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình bên. Hỏi đồ thị hàm số có bao nhiêu đường tiệm cận?

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$-$	0	$+$	
y	2 ↘		$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 20. Cho hàm số $y = \dfrac{ax - b}{x - 1}$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào dưới đây là đúng?



A. $b < 0 < a$. **B.** $0 < b < a$.
C. $b < a < 0$. **D.** $a < b < 0$.

Câu 21. Cho hàm số $y = \dfrac{2x^2 - 3x + m}{x - m}$ có đồ thị (C). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (C) không có tiệm cận đứng.

A. $m = 0$ hoặc $m = 1$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = 0$.

Câu 22. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x + 1}{x - m}$ đi qua điểm $M(2;5)$ khi m bằng bao nhiêu?

A. $m = -2$. **B.** $m = -5$. **C.** $m = 5$. **D.** $m = 2$.

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	-2	↗	$+\infty$

Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2018}{f(x)}$ là

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 24. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{x - 2}{x^2 + 2mx + 1}$ có hai tiệm cận đứng là

A. $(-1;1)$. **B.** $(-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$.
C. $\left\{-\dfrac{5}{4}\right\}$. **D.** $\left(-\infty;-\dfrac{5}{4}\right) \cup \left(-\dfrac{5}{4};-1\right) \cup (1;+\infty)$.

Câu 25. Cho hàm số $y = \dfrac{x - 1}{mx^2 - 2x + 3}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số đã cho có đúng hai đường tiệm cận.

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 26. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{4x - 5}{x - m}$ có tiệm cận đứng nằm bên phải trục tung.

A. $m < 0$. **B.** $m > 0$ và $m \neq \dfrac{5}{4}$. **C.** $m > 0$. **D.** $m > 0$ và $m \neq -\dfrac{5}{4}$.

Câu 27. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=\dfrac{(a-3)x+a+2018}{x-(b+3)}$ nhận trục hoành làm tiệm cận ngang và trục tung làm tiệm cận đứng. Khi đó giá trị của $a+b$ là

A. 3. **B.** -3. **C.** 6. **D.** 0.

Câu 28. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty \,\|\, -\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f(x)-5}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 29. Tập hợp các giá trị m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{mx^2+6x-2}{x+2}$ có tiệm cận đứng là

A. $\left\{\dfrac{7}{2}\right\}$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{7}{2}\right\}$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{7}{2}\right\}$.

Câu 30. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-2mx+2m}$ có đúng 3 đường tiệm cận.

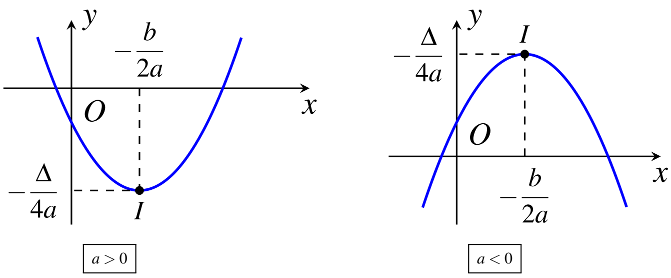
A. $m\neq-\dfrac{1}{4}$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m<0\\ m>2\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m>2\\ \begin{cases}m<0\\ m\neq-\dfrac{1}{4}\end{cases}\end{array}\right.$. **D.** $0<m<2$.

——HẾT——

§ 5. ĐỒ THỊ CÁC HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$

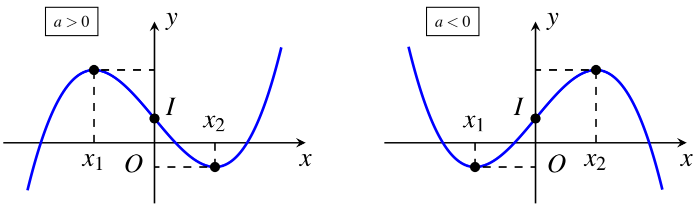


GHI NHỚ

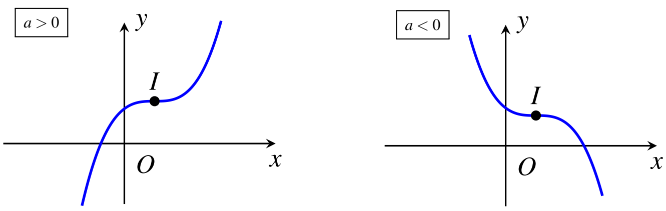
① Tọa độ đỉnh:
$$I(x_0;y_0) = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right).$$
② (P) viết theo tọa độ đỉnh:
$$y = a(x-x_0)^2 + y_0$$

2 Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

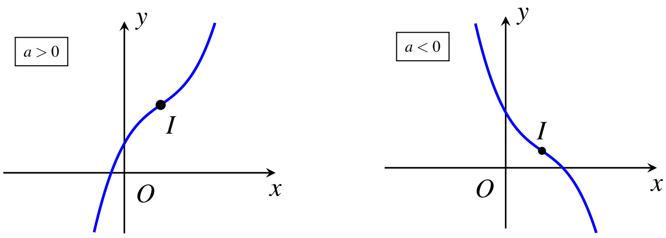
TH1. $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2. Khi đó, hàm số có hai điểm cực trị $x = x_1$ và $x = x_2$.



TH2. $y' = 0$ có nghiệm kép x_0. Khi đó, hàm số không có cực trị.



TH3. $y' = 0$ vô nghiệm. Khi đó, hàm số không có cực trị.

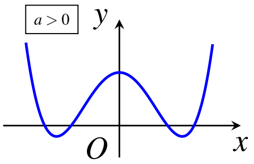


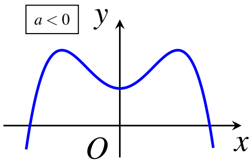
GHI NHỚ

① Hàm số có hai điểm cực trị
$$\begin{cases} a \neq 0 \\ b^2 - 3ac > 0. \end{cases}$$
② Liên hệ tổng tích hai nghiệm
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{2b}{3a} \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{3a} \end{cases}$$
③ Hàm số không có điểm cực trị
$$b^2 - 3ac \leq 0 \text{ hoặc } \begin{cases} a = 0 \\ b = 0. \end{cases}$$
④ Hoành độ điểm uốn là nghiệm phương trình $y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{3a}$. Tọa độ điểm uốn là tâm đối xứng của đồ thị.
⑤ Tiếp tuyến tại điểm uốn $I(x_0;y_0)$ sẽ có hệ số góc nhỏ nhất nếu $a > 0$ và lớn nhất nếu $a < 0$.

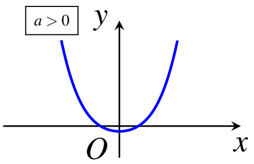
3 Hàm số bậc bốn trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$

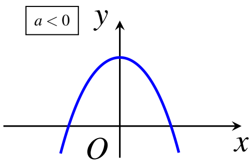
- $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt. Khi đó, hàm số có ba điểm cực trị $x = 0$ và $x = \pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}$.





- $y' = 0$ có đúng 1 nghiệm $x = 0$. Khi đó, hàm số có đúng 1 điểm cực trị.





GHI NHỚ

① Hàm số có ba điểm cực trị

$$ab < 0$$

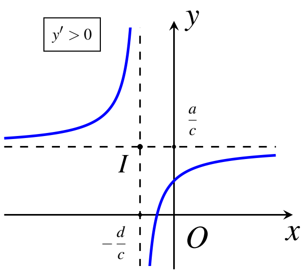
② Hàm số có đúng một điểm cực trị

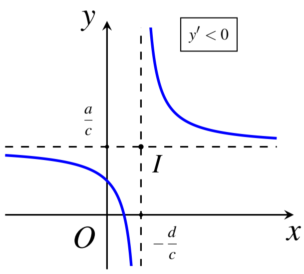
$$\begin{cases} ab \geq 0 \\ a, b \text{ không đồng thời bằng } 0 \end{cases}.$$

③ Hàm số chẵn, đối xứng nhau qua Oy.

4 Hàm nhất biến $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

- Tập xác định $D = \mathbb{R} \backslash \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$
- Hình dạng đồ thị:





GHI NHỚ

① Tiệm cận đứng $x = -\dfrac{d}{c}$.

② Tiệm cận ngang $y = \dfrac{a}{c}$.

③ Giao với Ox: $y = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{b}{a}$.

④ Giao với Oy: $x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{b}{d}$.

⑤ Giao hai đường tiệm cận (điểm I) là tâm đối xứng của đồ thị.

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

DẠNG 1. Nhận dạng đồ thị hàm bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Phương pháp giải.

- Nhìn "dáng điệu" của đồ thị:

  ① Bên phải đi lên thì $a > 0$. ② Bên phải đi xuống thì $a < 0$.

- Nhìn điểm thuộc đồ thị: Thay toạ độ đó vào hàm số phải thoả mãn. Đồ thị qua điểm $(0; d)$.
- Nhìn cực trị:

  ① Đồ thị hàm số có điểm cực đại (cực tiểu) là $(x_0; y_0)$ thì $\begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$.

  ② Mối liên hệ giữa hai điểm cực trị x_1 và x_2 của hàm số: $x_1 + x_2 = -\dfrac{2b}{3a}$ và $x_1 x_2 = \dfrac{c}{3a}$.

Ví dụ 1. Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

A. $y=-x^3-2x^2+5$. **B.** $y=x^3-3x^2+5$.
C. $y=-x^3-3x+5$. **D.** $y=x^3+3x^2+5$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

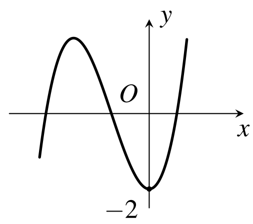
Ví dụ 2. Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

A. $y=x^3-3x^2+x+3$. **B.** $y=x^3-3x+4$.
C. $y=x^3-3x^2+3x+1$. **D.** $y=x^3+3x^2+5$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Ví dụ 3. Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

A. $y=-x^3+x^2-2$. **B.** $y=x^3+3x^2-2$.
C. $y=x^3-3x+2$. **D.** $y=x^2-3x-2$.

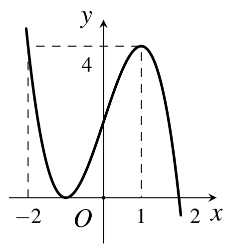


Lời giải

Dựa vào hình dáng đồ thị, ta thấy đây là đồ thị của hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$ với $a>0$ nên loại các hàm $y=x^4+x^2-2$, $y=-x^2-3x-2$. Mặt khác, đồ thị đi qua điểm $(0;-2)$ nên loại hàm $y=x^3-3x+2$.
(Ngoài ra, ta có thể đánh giá dấu của các hệ số $a,\ b,\ c$ thông qua hoành độ 2 điểm cực trị và hoành độ trung điểm của hai điểm cực trị. Trong đồ thị này ta còn thấy hàm số có điểm cực tiểu $x=0$ nên $c=0$)
Chọn đáp án B

Ví dụ 4. Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

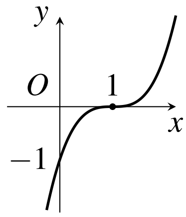
A. $y=x^3+3x-2$. **B.** $y=x^3-3x+2$.
C. $y=-x^3+3x+2$. **D.** $y=-x^3-3x-2$.



Lời giải

Quan sát đồ thị, ta thấy nhánh cuối của đồ thị hướng xuống dưới nên $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$, suy ra hệ số $a<0$.
Như vậy hai hàm số $y=x^3+3x-2; y=x^3-3x+2$ không thỏa mãn.
Mặt khác hàm số có hai điểm cực trị nên hàm số $y=-x^3-3x-2$ có $y'=-3x^2-3<0\ \forall x\in\mathbb{R}$ không thỏa mãn.
Chọn đáp án C

Ví dụ 5. Cho hàm số đa thức bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Hỏi (C) là đồ thị của hàm số nào?

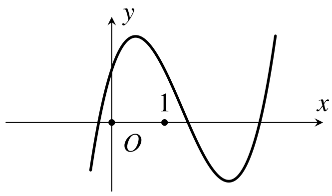


A. $y = x^3 - 1$. **B.** $y = (x+1)^3$.
C. $y = (x-1)^3$. **D.** $y = x^3 + 1$.

Lời giải

(C) tiếp xúc với Ox tại điểm uốn, suy ra $f(x)$ có nghiệm bội ba $x = 1$ nên hàm số có dạng $y = a(x-1)^3$.
Mà $(0; -1) \in (C)$ nên $a = 1$.
Chọn đáp án C

Ví dụ 6. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

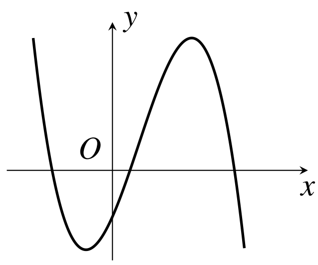


A. $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$. **B.** $a < 0, b < 0, c > 0, d > 0$.
C. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$. **D.** $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.

Lời giải

Nhìn vào đồ thị, ta thấy đồ thị hàm số đi từ $-\infty$ lên $+\infty$ nên $a > 0$.
Giao điểm với trục tung nằm trên trục hoành, do đó $d > 0$.
Hàm số có hai điểm cực trị, và hai điểm cực trị đều dương. Suy ra tổng hai điểm cực trị và tích hai điểm cực trị đều dương.
Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ nên tổng hai điểm cực trị là $\dfrac{-2b}{3a}$. Suy ra $\dfrac{-2b}{3a} > 0$, hay $b < 0$.
Còn tích hai điểm cực trị là $\dfrac{c}{3a}$. Suy ra $\dfrac{c}{3a} > 0$ hay $c > 0$.
Chọn đáp án D

Ví dụ 7. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



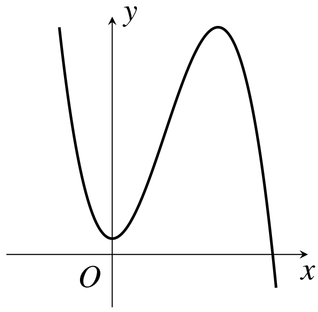
A. $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$. **B.** $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$.
C. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$. **D.** $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.

Lời giải

Dựa vào hình dáng đồ thị suy ra $a < 0$.
Dựa vào vị trí điểm cực đại và điểm cực tiểu, suy ra $x_{\text{CT}} + x_{\text{CĐ}} > 0 \Rightarrow -\dfrac{b}{a} > 0 \Rightarrow b > 0$.
Hai điểm cực trị có hoành độ trái dấu nên $x_{\text{CT}} \cdot x_{\text{CĐ}} < 0 \Rightarrow \dfrac{c}{a} < 0 \Rightarrow c > 0$.
Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d > 0$.
Vậy $a < 0$, $b > 0$, $c > 0$ và $d > 0$.
Chọn đáp án C

Ví dụ 8. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$. **B.** $a < 0, b < 0, c = 0, d > 0$.
C. $a < 0, b > 0, c = 0, d > 0$. **D.** $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.



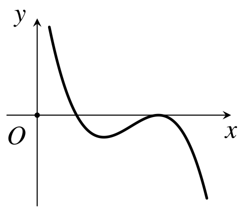
Lời giải

Dựa vào đồ thị ta có thể thấy $a < 0$, đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d > 0$.

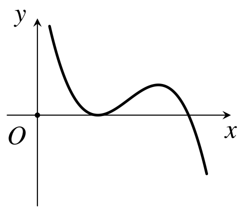
Hàm số có hai cực trị thỏa $\begin{cases} S > 0 \\ P = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{b}{a} > 0 \\ \dfrac{c}{a} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ c = 0. \end{cases}$

Chọn đáp án C

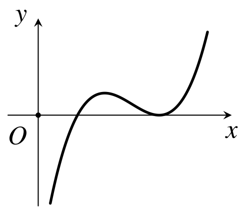
Ví dụ 9. Tìm đồ thị hàm số $y = f(x)$ được cho bởi một trong các phương án dưới đây, biết $f(x) = (a - x)(b - x)^2$ với $a < b$.



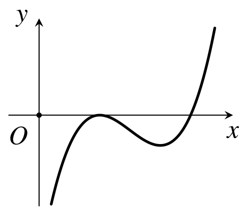
A.



B.



C.



D.

Lời giải

Hàm số đã cho thỏa mãn các điều kiện sau

- Đồ thị hàm số tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ $x = b$ (do $f(b) = f'(b) = 0$).
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \mp\infty$, do $f(x)$ là hàm số bậc ba có hệ số cao nhất âm.

Chọn đáp án A

DẠNG 2. Nhận dạng đồ thị hàm bậc bốn trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$

Phương pháp giải.

- Nhìn "dáng điệu" của đồ thị:

  ① Bên phải đi lên thì $a > 0$. ② Bên phải đi xuống thì $a < 0$.

- Nhìn điểm thuộc đồ thị: Thay toạ độ đó vào hàm số phải thoả mãn. Đồ thị qua điểm $(0; c)$.
- Nhìn điểm cực trị

  ① Đồ thị có 3 điểm cực trị $ab < 0$ ② Đồ thị có một điểm cực trị $ab > 0$.

Ví dụ 10. Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

A. $y = x^4 - 8x^2 + 2$.
B. $y = x^4 + 6x^2 + 2$.
C. $y = x^4 - 6x^2 + 2$.
D. $y = -x^4 + 8x^2 + 2$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\searrow$	-7	$\nearrow$	2	$\searrow$	-7	$\nearrow$	$-\infty$

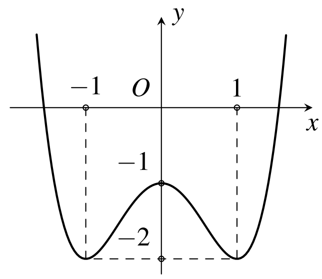
Ví dụ 11. Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

A. $y = -x^4 + 3x^2 + 2$. **B.** $y = -x^4 - 2x^2 + 1$.
C. $y = -x^4 - 3x^2 + 2$. **D.** $y = -x^4 + x^2 + 2$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Ví dụ 12. Đồ thị ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

A. $y = x^4 - 2x^2 - 1$. **B.** $y = 2x^4 - 4x^2 - 1$.
C. $y = -x^4 + 2x^2 - 1$. **D.** $y = -2x^4 + 4x^2 - 1$.

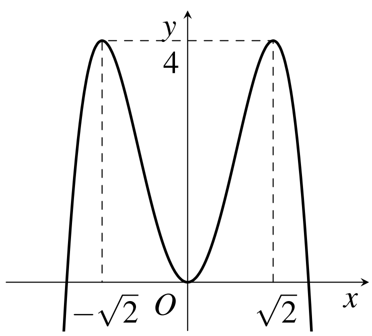


Lời giải

Đồ thị đã cho là đồ thị của hàm số trùng phương với $a > 0$, do đó loại phương án $y = -x^4 + 2x^2 - 1, y = -2x^4 + 4x^2 - 1$.
Đồ thị đi qua điểm $A(1; -2)$ nên thay tọa độ điểm A vào ta có đáp án $y = x^4 - 2x^2 - 1$.
Chọn đáp án A

Ví dụ 13. Đồ thị ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

A. $y = -x^4 + 4x^2$. **B.** $y = x^4 - 3x^2$.
C. $y = -x^4 - 2x^2$. **D.** $y = -\dfrac{1}{4}x^4 + 3x^2$.



Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số đi qua các điểm $O(0;0)$, $A(-\sqrt{2};4)$ và $B(\sqrt{2};4)$. Thay lần lượt tọa độ các điểm O, A, B vào các hàm số trên ta thấy $y = -x^4 + 4x^2$ thỏa mãn.
Chọn đáp án A

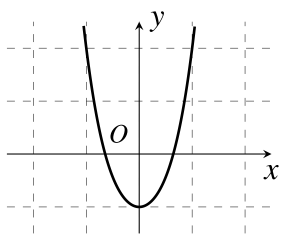
Ví dụ 14. Đồ thị ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

A. $y = x^2 - 1$.

B. $y = x^4 - 2x^2 - 1$.

C. $y = x^4 + 2x^2 - 1$.

D. $y = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 - 1$.



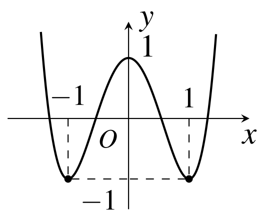
Ví dụ 15. Biết rằng hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị là đường cong hình vẽ bên. Tính giá trị $f(a+b+c)$.

A. $f(a+b+c) = -1$.

B. $f(a+b+c) = 2$.

C. $f(a+b+c) = -2$.

D. $f(a+b+c) = 1$.



Lời giải

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(0;1)$ nên $c = 1$.
Đồ thị hàm số đi qua điểm $(1;-1)$ nên $a + b + c = -1 \Rightarrow a + b = -2$. (1)
Hàm số có $f'(x) = 4ax^3 + 2bx$.
Do hàm số đạt cực trị tại điểm $x = 1$ nên $4a + 2b = 0 \Leftrightarrow 2a + b = 0$. (2)
Từ (1) và (2) ta có $a = 2$, $b = -4$.
Như vậy $a = 2$, $b = -4$, $c = 1$. Do đó $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$ và $a + b + c = -1$.
Từ đó $f(a+b+c) = f(-1) = -1$.
Chọn đáp án A

Ví dụ 16. Biết đồ thị hàm số $y = x^4 + bx^2 + c$ chỉ có một điểm cực trị là điểm có tọa độ $(0;-1)$, khi đó b và c thỏa mãn những điều kiện nào dưới đây?

A. $b < 0$ và $c = -1$. **B.** $b \geq 0$ và $c > 0$. **C.** $b < 0$ và $c < 0$. **D.** $b \geq 0$ và $c = -1$.

Lời giải

- Đồ thị hàm số $y = x^4 + bx^2 + c$ chỉ có một điểm cực trị $\Rightarrow b \geq 0$.
- Điểm cực trị $(0;-1)$ thuộc đồ thị hàm số suy ra $c = -1$.

Chọn đáp án D

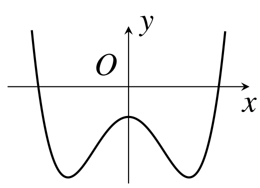
Ví dụ 17. Đường cong trong hình bên là đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ với a, b, c là các tham số thực. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $a < 0, b > 0, c < 0$.

B. $a < 0, b < 0, c < 0$.

C. $a > 0, b < 0, c < 0$.

D. $a > 0, b < 0, c > 0$.



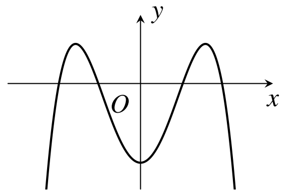
Lời giải

Dựa vào hình dạng của đồ thị ta có $a > 0$.
Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung tại điểm có tung độ $c < 0$.
Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị nên $ab < 0 \Rightarrow b < 0$.

Chọn đáp án (C)

Ví dụ 18. Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $a < 0, b > 0, c > 0$. **B.** $a < 0, b < 0, c < 0$.
C. $a < 0, b > 0, c < 0$. **D.** $a < 0, b < 0, c > 0$.



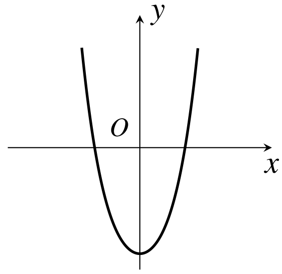
Lời giải

Từ đồ thị của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ta suy ra $a < 0$, đạo hàm của hàm số có 3 nghiệm phân biệt và do đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ c nên $c < 0$.
Ta có $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$, nên $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $2ax^2 = -b$ có 2 nghiệm phân biệt khác $0 \Leftrightarrow ab < 0 \Rightarrow b > 0$.
Như vậy: $a < 0, b > 0, c < 0$.

Chọn đáp án (C)

Ví dụ 19. Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $a < 0, b > 0, c > 0$. **B.** $a > 0, b > 0, c > 0$.
C. $a > 0, b < 0, c > 0$. **D.** $a > 0, b > 0, c < 0$.



Lời giải

Từ đồ thị của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ta suy ra $a < 0$, đạo hàm của hàm số có 3 nghiệm phân biệt và do đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ c nên $c < 0$.
Ta có $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$, nên $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $2ax^2 = -b$ có 2 nghiệm phân biệt khác $0 \Leftrightarrow ab < 0 \Rightarrow b > 0$.
Như vậy: $a < 0, b > 0, c < 0$.

Chọn đáp án (D)

DẠNG 3. Nhận dạng đồ thị hàm nhất biến $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

Phương pháp giải. Chú ý bốn thông số

① Tiệm cận đứng $x = -\dfrac{d}{c}$. ② Tiệm cận ngang $y = \dfrac{a}{c}$.

③ Giao với Ox: $y = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{b}{a}$. ④ Giao với Oy: $x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{b}{d}$.

Ví dụ 20. Bảng biến thiên ở hình bên là của hàm số nào?

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

A. $y=\dfrac{2x-1}{x+3}$. **B.** $y=\dfrac{4x-6}{x-2}$.

C. $y=\dfrac{3-x}{2-x}$. **D.** $y=\dfrac{x+5}{x-2}$.

Lời giải

Xét hàm số $y=\dfrac{x+5}{x-2}$ có

$$\begin{cases} y'=\dfrac{-7}{(x-2)^2}<0, \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{2\} \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} y=1. \end{cases}$$

Chọn đáp án (D)

Ví dụ 21. Bảng biến thiên sau là của hàm số nào trong các hàm số bên dưới?

x	$-\infty$		3		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	-1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1

A. $y=\dfrac{x-1}{x-3}$. **B.** $y=\dfrac{x-1}{-x-3}$.

C. $y=\dfrac{x+5}{-x+3}$. **D.** $y=\dfrac{1}{x-3}$.

Lời giải

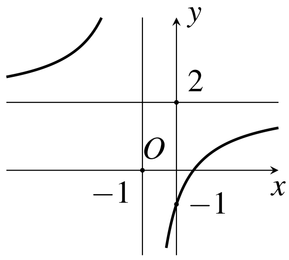
Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra

- Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.
- Đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x=2$ và đường thẳng $y=1$ làm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang.

Vậy ta nhận hàm số $y=\dfrac{x+5}{x-2}$.

Chọn đáp án (C)

Ví dụ 22. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau?



A. $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{1-2x}{x+1}$.

C. $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$.

Lời giải

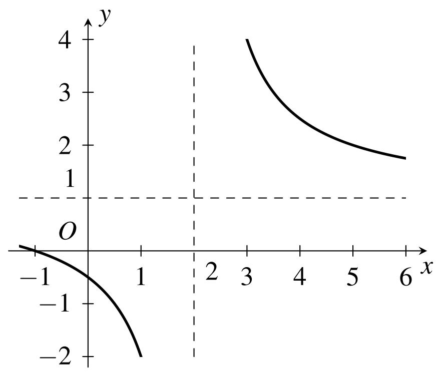
Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=-1$ nên loại đáp án $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0;-1)$ nên loại đáp án $y=\dfrac{1-2x}{x+1}$ và $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$.

Chọn đáp án (A)

Ví dụ 23. Cho hàm số $y = \dfrac{ax+1}{bx-2}$ có đồ thị như hình vẽ.
Tính $T = a + b$

A. $T = 2$.
B. $T = 0$.
C. $T = -1$.
D. $T = 3$.



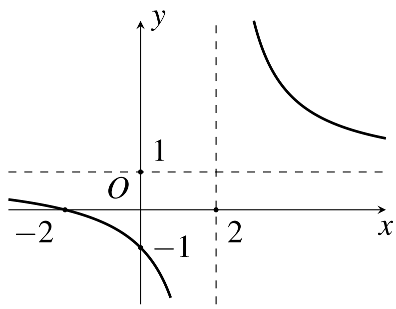
Lời giải

Từ biểu thức của hàm số, suy ra tiệm cận đứng là $x = \dfrac{2}{b}$, tiệm cận ngang là $y = \dfrac{a}{b}$.
Dựa vào hình vẽ, suy ra tiệm cận đứng $x = 2$, tiệm cận ngang $y = 1$.
Từ hai điều trên suy ra $a = 1$, $b = 1$. Vậy $T = 1 + 1 = 2$.

Chọn đáp án (A)

Ví dụ 24. Hãy xác định a, b để hàm số $y = \dfrac{2-ax}{x+b}$ có đồ thị như hình vẽ?

A. $a = 1; b = -2$.
B. $a = b = 2$.
C. $a = -1; b = -2$.
D. $a = b = -2$.



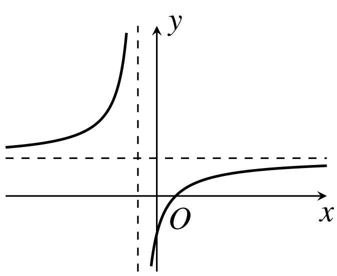
Lời giải

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = 2$ nên $b + 2 = 0 \Leftrightarrow b = -2$.
Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm $(-2;0)$ nên $2 + 2a = 0 \Rightarrow a = -1$.

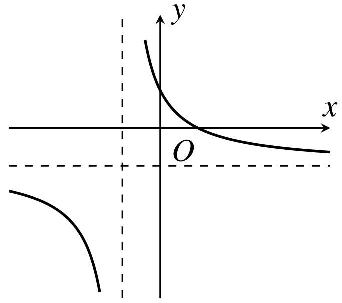
Chọn đáp án (C)

Ví dụ 25. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $ab > 0, bd < 0$.
B. $ab < 0, ad > 0$.
C. $ab < 0, ad < 0$.
D. $bd > 0, ad > 0$.



Ví dụ 26. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. $bd < 0, ab > 0$.
B. $ad > 0, ab < 0$.
C. $ad < 0, ab < 0$.
D. $bd > 0, ad > 0$.

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

1	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	7	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	13	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	19	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	25	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
2	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	8	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	14	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	20	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	26	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
3	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	9	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	15	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	21	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	27	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
4	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	16	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	22	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	28	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
5	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	11	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	17	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	23	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	29	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
6	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	12	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	18	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	24	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	30	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

Câu 1. Đồ thị hàm số nào dưới đây **không** đi qua điểm $A(1;1)$?

A. $y = x$. **B.** $y = 2x^2 - 1$. **C.** $y = 2x^3 - x - 1$. **D.** $y = -x^4 + 2$.

Câu 2. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-2}$ có đồ thị (C). Đồ thị (C) đi qua điểm nào?

A. $M(1;3)$. **B.** $M(0;-2)$. **C.** $M\left(-1;\dfrac{1}{3}\right)$. **D.** $M(3;5)$.

Câu 3. Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau dây. Hỏi đó là hàm số nào?

A. $y = -x^3 - 3x - 2$.

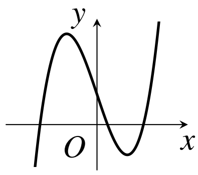
B. $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

C. $y = x^3 + 3x^2 - 1$.

D. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-1	↘	-5	↗	$+\infty$

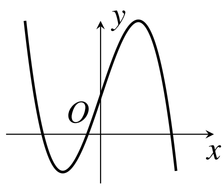
Câu 4. Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào dưới đây?



A. $y = -x^3 + 3x + 1$. **B.** $y = x^3 + 3x + 1$.

C. $y = -x^3 - 3x + 1$. **D.** $y = x^3 - 3x + 1$.

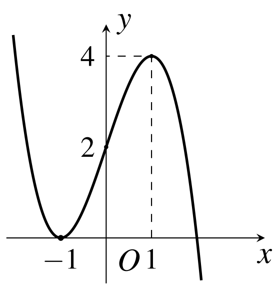
Câu 5. Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào dưới đây?



A. $y = x^3 + 3x^2 - 3x + 1$. **B.** $y = -x^3 - 2x^2 + x - 2$.

C. $y = -x^3 + 3x + 1$. **D.** $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.

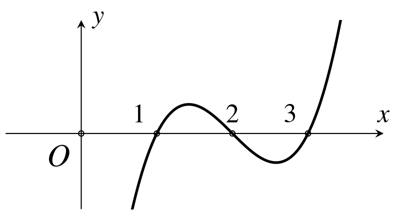
Câu 6. Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào dưới đây?



A. $y = (x+1)^2(1+x)$. **B.** $y = (x+1)^2(1-x)$.

C. $y = (x+1)^2(2-x)$. **D.** $y = (x+1)^2(2+x)$.

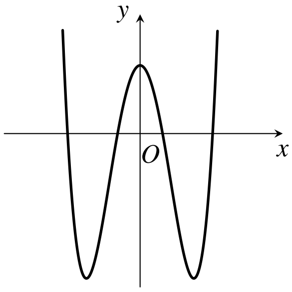
Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. $f(1{,}5) < 0, f(2{,}5) < 0$. **B.** $f(1{,}5) > 0 > f(2{,}5)$.

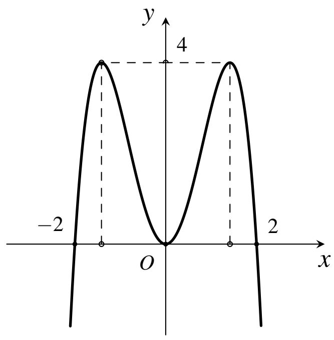
C. $f(1{,}5) > 0, f(2{,}5) > 0$. **D.** $f(1{,}5) < 0 < f(2{,}5)$.

Câu 8. Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



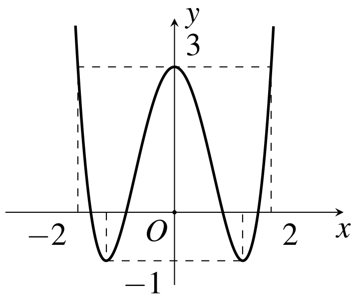
A. $y = x^4 + 5x^2 + 2$. **B.** $y = x^3 - 3x^2 + 2$.
C. $y = x^4 - 5x^2 + 2$. **D.** $y = -x^4 + 5x^2 + 2$.

Câu 9. Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



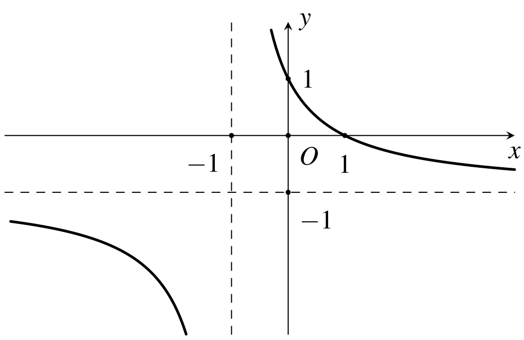
A. $y = x^4 - 3x^2$. **B.** $y = -\frac{1}{4}x^4 + 3x^2$.
C. $y = -x^4 - 2x^2$. **D.** $y = -x^4 + 4x^2$.

Câu 10. Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



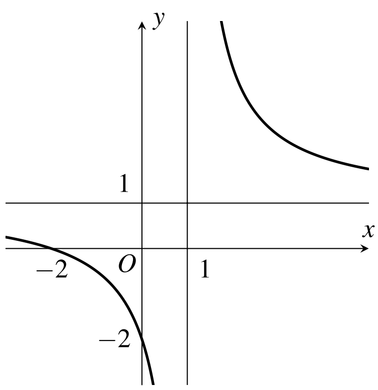
A. $y = -x^4 + 4x^2 + 3$. **B.** $y = -x^4 + 2x^2 + 3$.
C. $y = (x^2 - 2)^2 - 1$. **D.** $y = (x^2 + 2)^2 - 1$.

Câu 11. Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = \dfrac{-2x+1}{2x+1}$. **B.** $y = \dfrac{-x+1}{x+1}$.
C. $y = \dfrac{-x+2}{x+1}$. **D.** $y = \dfrac{-x}{x+1}$.

Câu 12. Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

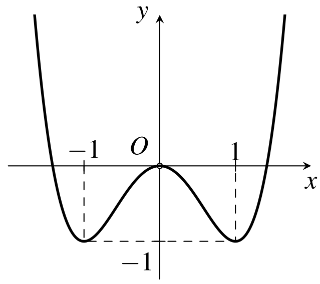


A. $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$. **B.** $y = \dfrac{x+2}{1-x}$.
C. $y = \dfrac{x+2}{x-1}$. **D.** $y = \dfrac{x+1}{x-1}$.

Câu 13. Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = x^4 - 2x^2$. **B.** $y = x^4 - 2x^2 - 3$.

C. $y = -x^4 + 2x^2$. **D.** $y = -x^4 + 2x^2 - 3$.



Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Hàm số không có giá trị lớn nhất và có giá trị nhỏ nhất bằng -2.

B. Hàm số có hai điểm cực trị.

C. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.

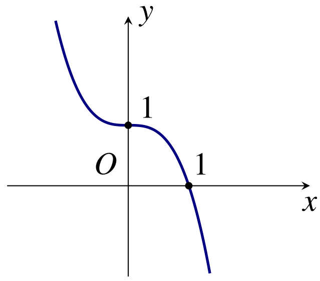
D. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 5 và giá trị nhỏ nhất bằng -2.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	||	$+$	0	$-$	
y	5	$\searrow$	-2	$\nearrow$	4	$\searrow$	-1

Câu 15. Đường cong ở hình bên là đồ thị một trong bốn hàm số cho ở phương án A, B, C, D. Hỏi đó là hàm số nào?

A. $y = -x^3 + 1$. **B.** $y = -2x^3 + x^2$.

C. $y = 3x^2 + 1$. **D.** $y = -4x^3 + 1$.



Câu 16. Hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây có bảng biến thiên như hình bên?

A. $y = \dfrac{2x-3}{x+2}$. **B.** $y = \dfrac{x+4}{x-2}$.

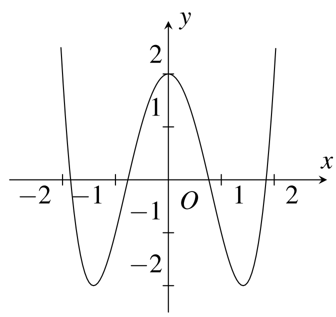
C. $y = \dfrac{2x+3}{x-2}$. **D.** $y = \dfrac{2x-7}{x-2}$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	2	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	2

Câu 17. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $a > 0, b < 0, c > 0$. **B.** $a > 0, b < 0, c < 0$.

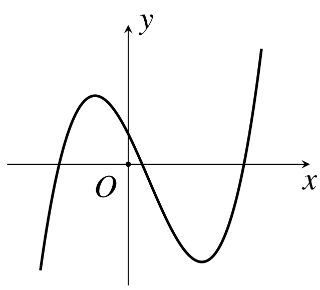
C. $a > 0, b > 0, c > 0$. **D.** $a < 0, b > 0, c > 0$.



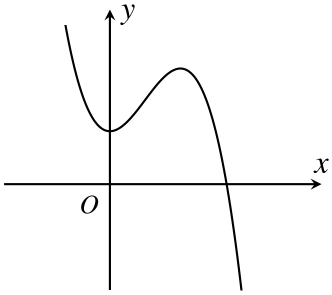
Câu 18. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a > 0, b < 0, c > 0, d < 0$. **B.** $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

C. $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$. **D.** $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.



Câu 19. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây, điểm cực tiểu của đồ thị nằm trên trục tung. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a < 0, b < 0, c = 0, d > 0$. **B.** $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.
C. $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$. **D.** $a < 0, b > 0, c = 0, d > 0$.

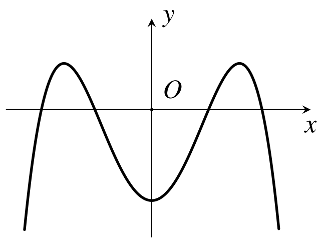
Câu 20. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a \neq 0$. Biết đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $A(1;-1)$, $B(-1;3)$. Tính $f(4)$.

A. $f(4) = 53$. **B.** $f(4) = -17$. **C.** $f(4) = -53$. **D.** $f(4) = 17$.

Câu 21. Cho $A(0;-3)$ là điểm cực đại và $B(-1;-5)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$. Tính giá trị của hàm số tại $x = -2$.

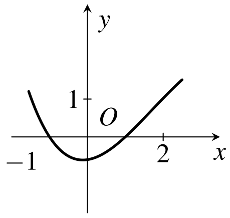
A. $y(-2) = 43$. **B.** $y(-2) = 23$. **C.** $y(-2) = 19$. **D.** $y(-2) = 13$.

Câu 22. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

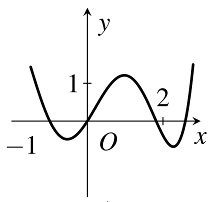


A. $a > 0,\ b < 0,\ c < 0$. **B.** $a < 0,\ b < 0,\ c < 0$.
C. $a < 0,\ b > 0,\ c < 0$. **D.** $a > 0,\ b < 0,\ c > 0$.

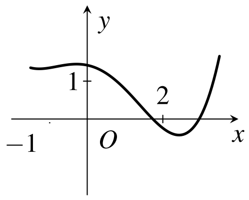
Câu 23. Cho hàm số $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $g'(0) = 0, g''(x) > 0 \quad \forall x \in (-1;2)$. Hỏi đồ thị nào dưới đây có thể là đồ thị của hàm số $g(x)$?

A. 

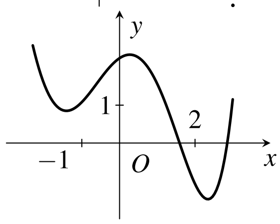
.

B. 

.

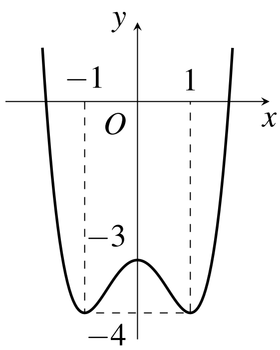
C. 

.

D. 

.

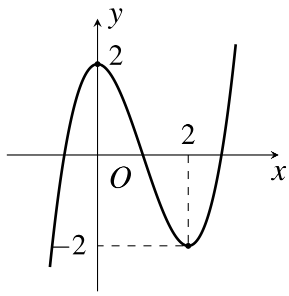
Câu 24. Xác định các hệ số a, b, c để hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên.



A. $a = -\dfrac{1}{4}, b = 3, c = -3$. **B.** $a = 1, b = -2, c = -3$.
C. $a = 1, b = -3, c = 3$. **D.** $a = 1, b = 3, c = -3$.

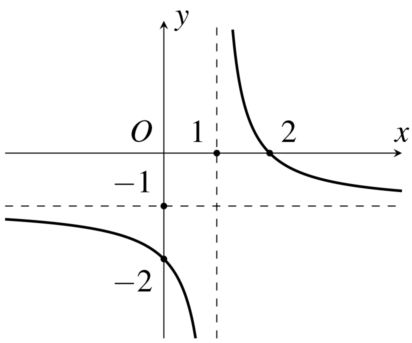
Câu 25. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị là đường cong như hình bên. Tính tổng $S = a + b + c + d$.

A. $S = 0$. B. $S = 6$.
C. $S = -4$. D. $S = 2$.



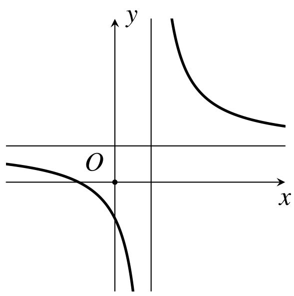
Câu 26. Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{x+c}$ có đồ thị như hình vẽ, với a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $T = a - 3b + 2c$.

A. $T = 12$. B. $T = -7$.
C. $T = 10$. D. $T = -9$.



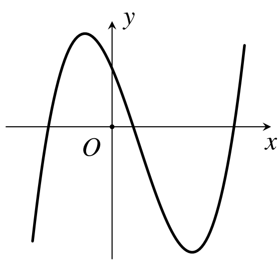
Câu 27. Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $ac > 0$, $bd > 0$, $cd > 0$. B. $ad < 0$, $bc > 0$, $cd > 0$.
C. $ab > 0$, $bc > 0$, $bd < 0$. D. $bc > 0$, $ad < 0$, $ac < 0$.



Câu 28. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $ab < 0, bc > 0, cd < 0$. B. $ab > 0, bc > 0, cd < 0$.
C. $ab < 0, bc < 0, cd > 0$. D. $ab < 0, bc > 0, cd > 0$.

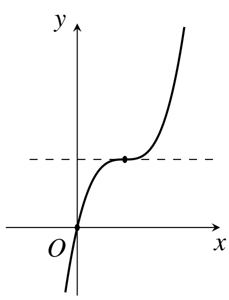


Câu 29. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \in (-1; 0)$, $x_2 \in (1; 2)$. Biết hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1; x_2)$. Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$. B. $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.
C. $a > 0, b > 0, c > 0, d < 0$. D. $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$.

Câu 30. Cho hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + c^2 + b + 2d + 1$.

A. $\dfrac{1}{5}$. B. 1. C. $\dfrac{5}{8}$. D. $\dfrac{1}{3}$.



——HẾT——

§ 6. ỨNG DỤNG ĐỒ THỊ ĐỂ BIỆN LUẬN NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH.

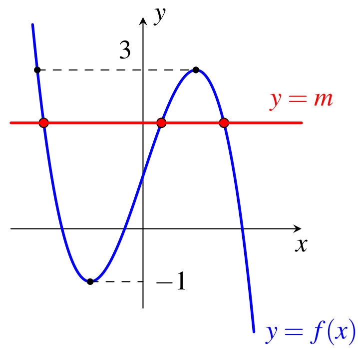
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Ứng dụng đồ thị để biện luận nghiệm phương trình.

- Xét phương trình $f(x)=m$, với m là tham số. Nghiệm của phương trình này có thể coi là hoành độ giao điểm của đồ thị $y=f(x)$ (cố định) với đường thẳng $y=m$ (nằm ngang).
- Từ đó, để biện luận nghiệm phương trình $f(x)=m$, ta có thể thực hiện các bước như sau:

  ① Lập bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ trên miền xác định mà đề bài yêu cầu.

  ② Tịnh tiến đường thẳng $y=m$ theo hướng "*lên, xuống*". Quan sát số giao điểm để quy ra số nghiệm tương ứng.

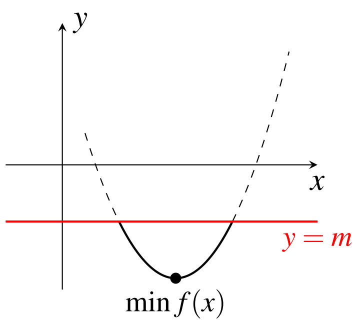


2 Ứng dụng đồ thị để biện luận nghiệm bất phương trình.

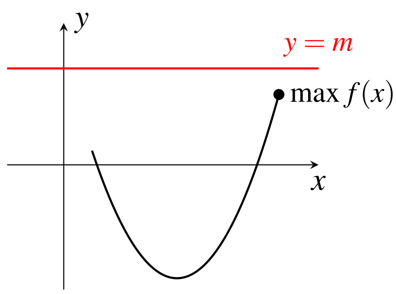
- Xét bất phương trình ở dạng $f(x)<m$ (1), với m là tham số.

  ① **Bài toán 1.** Tìm điều kiện của tham số m để (1) có nghiệm trên miền $\mathscr{D}$: Khi đó, ta tìm điều kiện để đồ thị $y=f(x)$ có phần nằm dưới đường thẳng $y=m$.

  ② **Bài toán 2.** Tìm điều kiện của tham số m để (1) nghiệm đúng với mọi x thuộc miền $\mathscr{D}$: Khi đó, ta tìm điều kiện để đồ thị $y=f(x)$ nằm hoàn toàn phía dưới đường thẳng $y=m$.



Minh họa Bài toán 1



Minh họa Bài toán 2

- Các bài toán tương tự:

① $f(x)>m$ nghiệm đúng $\forall x\in\mathscr{D}$.	② $f(x)>m$ có nghiệm trên miền $\mathscr{D}$.
③ $f(x)\le m$ nghiệm đúng $\forall x\in\mathscr{D}$.	④ $f(x)\le m$ có nghiệm trên miền $\mathscr{D}$.
⑤ $f(x)\ge m$ nghiệm đúng $\forall x\in\mathscr{D}$.	⑥ $f(x)\ge m$ có nghiệm trên miền $\mathscr{D}$.

Nhận xét 1. Khi muốn sử dụng phương pháp đồ thị để biện luận nghiệm của phương trình $f(x,m)=0$ hoặc bất phương trình $f(x,m)>0$, $f(x,m)<0$, ta phải thực hiện "cô lập" tham số m.

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

BUỔI SỐ 1

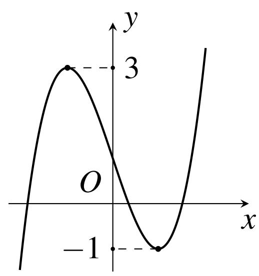
DẠNG 1. Giải, biện luận nghiệm phương trình bằng phương pháp đồ thị

Phương pháp giải.

- Chuyển phương trình đã cho về dạng $f(x)=m$;
- Tịnh tiến đường thẳng $y=m$ lên xuống theo phương ngang. Nhìn giao điểm với đồ thị $y=f(x)$ để quy ra số nghiệm tương ứng.

Ví dụ 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $2f(x)-3=0$ là

A. 2. **B.** 1.
C. 0. **D.** 3.

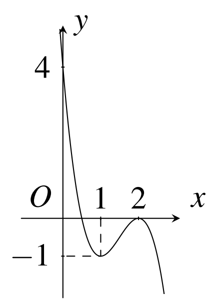


Lời giải

Ta có $2f(x)-3=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{3}{2}$.
Từ đồ thị suy ra phương trình có 3 nghiệm phân biệt.
Chọn đáp án D

Ví dụ 2. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(d\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình $3f(x)-1=0$ bằng

A. 0. **B.** 1.
C. 2. **D.** 3.



Lời giải

Ta có $3f(x)-1=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{1}{3}$.
Khi đó số giao điểm của đồ thị $y=f(x)$ và đường thẳng $y=\dfrac{1}{3}$ chính là số nghiệm của phương trình $3f(x)-1=0$. Dựa vào đồ thị ta có số nghiệm của phương trình là 1.
Chọn đáp án B

Ví dụ 3. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = m+1$ có ba nghiệm thực phân biệt.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

A. $-3 \leq m \leq 3$. **B.** $-2 \leq m \leq 4$.
C. $-2 < m < 4$. **D.** $-3 < m < 3$.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên phương trình $f(x) = m+1$ có ba nghiệm thực phân biệt khi

$$-2 < m+1 < 4 \Leftrightarrow -3 < m < 3.$$

Chọn đáp án D

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên sau. Tìm tập hợp tất các cả thực của tham số m sao cho phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm thực phân biệt.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	‖	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2 ‖ $-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

A. $(-\infty;4]$. **B.** $[-2;4]$.
C. $(-2;4)$. **D.** $(-2;4]$.

Lời giải

Với mỗi tham số m ta có một đường thẳng $y = m$ song song hoặc trùng với Ox.
Phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm thực phân biệt khi đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị tại 3 điểm phân biệt.
Dựa vào bảng biến thiên, phương trình có 3 nghiệm phân biệt khi $-2 < m < 4$.
Chọn đáp án C

Ví dụ 5. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có bảng biến thiên như hình bên. Hỏi phương trình $3|f(x)| - 10 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

A. 2 nghiệm. **B.** 4 nghiệm.
C. 3 nghiệm. **D.** 1 nghiệm.

Lời giải

Từ bảng biến thiên đề bài, ta có bảng biến thiên của hàm số $y = |f(x)|$ như sau

x	$-\infty$				0		1		$+\infty$
$f'(x)$			$-$		‖	$-$	0	$+$	
$\|f(x)\|$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Ta có $3|f(x)|-10=0 \Leftrightarrow |f(x)|=\dfrac{10}{3}$. (1)

Số nghiệm của phương trình (1) bằng số giao điểm của đồ thị $y=|f(x)|$ và đường thẳng $y=3$.

Dựa vào bảng biến thiên trên, suy ra phương trình (1) có 3 nghiệm.

Chọn đáp án C

Ví dụ 6. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau. Hỏi phương trình $f(|x|)=1$ có mấy nghiệm?

A. 6 nghiệm. **B.** 2 nghiệm.
C. 3 nghiệm. **D.** 4 nghiệm.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta có

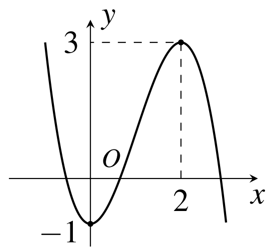
$$\begin{aligned}
& f(|x|)=1 \\
\Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} |x|=a\ (a<0) \\ |x|=b\ (0<b<2) \\ |x|=c\ (c>2) \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} x=\pm b \\ x=\pm c. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình $f(|x|)=1$ có bốn nghiệm.

Chọn đáp án D

Ví dụ 7. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\,(a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2f(|x|)-m=0$ có đúng 4 nghiệm phân biệt.

A. $1<m<3$. **B.** $-1<m<3$.
C. $-2<m<6$. **D.** $2<m<6$.



Lời giải

Ta có $f(|x|)=\begin{cases} f(x),\ x\in[0;+\infty) \\ f(-x),\ x\in(-\infty;0). \end{cases}$

Do đó, đồ thị của hàm số $y=f(|x|)$ gồm hai phần:

- Phần 1: Phần đồ thị bên phải trục Oy của đồ thị hàm số $y=f(x)$.
- Phần 2: Đối xứng với phần 1 qua Oy.

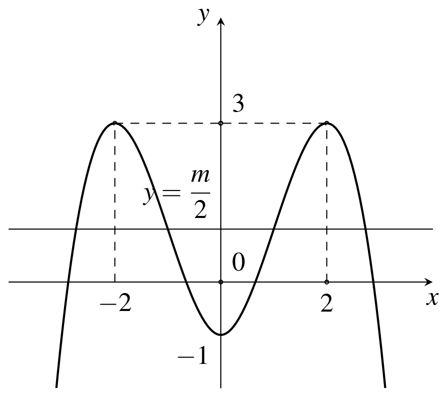
Ta có

$$2f(|x|)=m \Leftrightarrow f(|x|)=\frac{m}{2}. \qquad (1)$$

Số nghiệm của phương trình (1) chính bằng số giao điểm của đường thẳng $d\colon y=\dfrac{m}{2}$ và đồ thị hàm số $y=f(|x|)$.
Do đó, phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow -1<\frac{m}{2}<3 \Leftrightarrow -2<m<6.$$

Vậy giá trị cần tìm của m là $-2<m<6$.



Chọn đáp án (C)

Ví dụ 8. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như sau. Số nghiệm của phương trình $2[f(x)]^2-3f(x)+1=0$ là

A. 2. **B.** 3.
C. 6. **D.** 0.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$\frac{1}{3}$	$\nearrow$	1

Lời giải

Ta có $2[f(x)]^2-3f(x)+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=1 \\ f(x)=\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$
Phương trình $f(x)=1$ có duy nhất nghiệm x_0.
Phương trình $f(x)=\dfrac{1}{2}$ có 2 nghiệm phân biệt khác x_0. Vậy phương trình có ba nghiệm.

Chọn đáp án (B)

Ví dụ 9. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $-x^4+2x^2+3+2m=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

A. $-2\leqslant m\leqslant \dfrac{-3}{2}$. **B.** $\dfrac{-3}{2}<m<2$. **C.** $-2<m<\dfrac{-3}{2}$. **D.** $3<m<4$.

Lời giải

Ta có $-x^4+2x^2+3+2m=0 \Leftrightarrow 2m+3=x^4-2x^2$. Đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2$ và đường thẳng $y=2m+3$.
Số nghiệm của phương trình chính là số giao điểm của hai đồ thị.

Xét hàm số $y=x^4-2x^2$ có $y'=4x^3-4x$. Cho $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-1. \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy để có bốn giao điểm thì

$$-1 < 2m+3 < 0 \Leftrightarrow -4 < 2m < -3 \Leftrightarrow -2 < m < -\frac{3}{2}.$$

Chọn đáp án C

Ví dụ 10. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + mx + 1$ có hai điểm cực trị đều thuộc khoảng $(-1;4)$?

A. 4. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 3.

Lời giải

Để hàm số có hai điểm cực trị đều thuộc khoảng $(-1;4)$ thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $(-1;4)$.
Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow m = 2x - x^2 = g(x)$.
Bảng biến thiên của $g(x)$

x	-1		1		4
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	-8

Để phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $(-1;4)$ thì $-3 < m < 1$.
Vậy có 3 giá trị của m.
Chọn đáp án D

Ví dụ 11. Cho phương trình $\sin^3 x - 3\sin^2 x + 2 - m = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình có nghiệm?

A. 3. **B.** 1. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Đặt $t = \sin x$, điều kiện: $t \in [-1;1]$.
Phương trình đã cho trở thành $t^3 - 3t^2 + 2 - m = 0 \Leftrightarrow t^3 - 3t^2 + 2 = m$.
Xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t^2 + 2$ với $t \in [-1;1]$. Ta có

$f'(t) = 3t^2 - 6t$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = 0 & \text{(nhận)} \\ t = 2 & \text{(loại)}. \end{array}\right.$

Do $f(-1) = -2$, $f(0) = 2$, $f(1) = 0$ nên $f(t) \in [-2;2]$.

Vì vậy, để phương trình đã cho có nghiệm thì $-2 \le m \le 2$, mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2;-1;0;1;2\}$.

Vậy có 5 giá trị m.

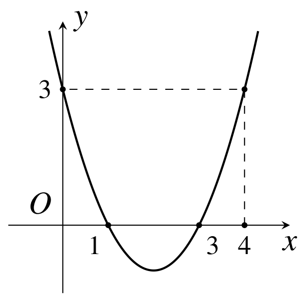
Chọn đáp án C

DẠNG 2. Giải, biện luận nghiệm bất phương trình bằng phương pháp đồ thị

Phương pháp giải.

Ví dụ 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $f(x) \le 3$ là

A. 3. **B.** 5 . **C.** 6. **D.** 2.



Lời giải

Theo hình vẽ, nghiệm của bất phương trình $f(x) \le 3$ là $0 \le x \le 4$. Suy ra các nghiệm nguyên là $x \in \{0;1;2;3;4\}$.

Chọn đáp án B

Ví dụ 13. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (2m - 1)x + 2019$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.

A. $m < \frac{1}{2}$. **B.** $m = \frac{1}{2}$. **C.** $m \ge 0$. **D.** $m \ge \frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 2m - 1$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi $y' \ge 0, \forall x > 2$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad 3x^2 - 6x + 2m - 1 \ge 0, \forall x > 2 \\ &\Leftrightarrow \quad -2m + 1 \le 3x^2 - 6x, \forall x > 2. \end{aligned}$$

Xét $g(x) = 3x^2 - 6x$, $\forall x > 2$. Ta có $g'(x) = 6x - 6 \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \notin (2;+\infty)$.

Bảng biến thiên

x	2	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	0	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $1 - 2m \le g(x), \forall x > 2 \Leftrightarrow 1 - 2m \le 0 \Leftrightarrow m \ge \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án D

Ví dụ 14. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = x^3 + mx - \frac{1}{5x^5}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

A. 5. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 + m + \frac{1}{x^6}$.
Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} & y' = 3x^2 + m + \frac{1}{x^6} \geq 0, \forall x \in (0; +\infty) \\ \Leftrightarrow \quad & -3x^2 - \frac{1}{x^6} \leq m, \forall x \in (0; +\infty). \end{aligned}$$

Xét hàm số $g(x) = -3x^2 - \frac{1}{x^6} \leq m, x \in (0; +\infty)$.
$g'(x) = -6x + \frac{6}{x^7} = \frac{-6\left(x^8 - 1\right)}{x^7}, g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \quad \text{(loại)}. \end{array}\right.$
Bảng biến thiên

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $m \geq -4$, suy ra các giá trị nguyên âm của tham số m là $-4; -3; -2; -1$.
Chọn đáp án D

Ví dụ 15. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $m\sqrt{x^2 - 2x + 2} + m + 2x - x^2 \leq 0$ có nghiệm $x \in [0; 1 + \sqrt{3}]$.

A. $m \leq \frac{2}{3}$. **B.** $m \leq 0$. **C.** $m \geq \frac{2}{3}$. **D.** $m \leq -1$.

Lời giải

$$m\sqrt{x^2 - 2x + 2} + m + 2x - x^2 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{x^2 - 2x}{\sqrt{x^2 - 2x + 2} + 1} \quad (*)$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{\sqrt{x^2 - 2x + 2} + 1}$ trên $[0; 1 + \sqrt{3}]$.
Đặt $t = \sqrt{x^2 - 2x + 2} + 1$, với $x \in [0; 1 + \sqrt{3}] \Rightarrow t \in [2; 3]$.
Khi đó hàm số $f(x)$ trở thành $f(t) = \frac{(t-1)^2 - 2}{t} = t - 2 - \frac{1}{t}$; $t \in [2; 3]$.
Ta có $f'(t) = 1 + \frac{1}{t^2} > 0, \forall t \in [2; 3]$. Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[2; 3]$
$\Rightarrow \max\limits_{[2;3]} f(t) = f(3) = \frac{2}{3}$.
Phương trình $(*)$ có nghiệm $x \in [0; 1 + \sqrt{3}]$ khi và chỉ khi $m \leq \max\limits_{[0;1+\sqrt{3}]} f(x) = \max\limits_{[2;3]} f(t) = \frac{2}{3}$.

Chọn đáp án (A)

Ví dụ 16. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m thuộc $[0;2019]$ để bất phương trình $x^2-m+\sqrt{(1-x^2)^3}\le 0$ đúng với mọi $x\in[-1;1]$. Số phần tử của tập S bằng

A. 1. **B.** 2020. **C.** 2019. **D.** 2.

Lời giải

Ta có $x^2-m+\sqrt{(1-x^2)^3}\le 0 \Leftrightarrow x^2+\sqrt{(1-x^2)^3}\le m$.
Xét hàm số $f(x)=x^2+\sqrt{(1-x^2)^3}$ trên $[-1;1]$.

Với mọi x thuộc $[-1;1]$, ta có: $f'(x)=x(2-3\sqrt{(1-x^2)})$; $f'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm\dfrac{\sqrt5}{3}.\end{array}\right.$

Vì $f(\pm1)=1$, $f(0)=1$, $f\left(\pm\dfrac{\sqrt5}{3}\right)=\dfrac{23}{27}$ nên $\max\limits_{x\in[-1;1]} f(x)=1$.
Do đó, $x^2+\sqrt{(1-x^2)^3}\le m\Leftrightarrow m\ge \max\limits_{x\in[-1;1]} f(x)\Leftrightarrow m\ge 1$.
Vậy có 2019 giá trị nguyên của m thuộc $[0;2019]$ thỏa yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án (C)

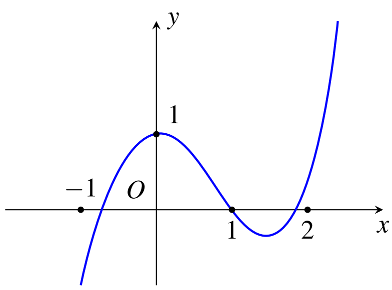
BUỔI SỐ 2

DẠNG 3. Một số bài toán liên quan đến hàm hợp

Phương pháp giải.

Ví dụ 17. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên . Khi đó phương trình $4f(3x^4)-3=0$ có bao nhiêu nghiệm dương?

A. 2. **B.** 4.
C. 5. **D.** 1.



Lời giải

Bảng biến thiên của hàm số $y=3x^4$ Ta có: $4f(3x^4)-3=0\Leftrightarrow f(3x^4)=\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}3x^4=x_1, & x_1\in(-1;0)\\ 3x^4=x_2, & x_2\in(0;1)\\ 3x^4=x_3, & x_3\in(1;2)\end{array}\right.$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $3x^4=x_1$ vô nghiệm; $3x^4=x_2$ có một nghiệm âm một nghiệm dương; $3x^4=x_3$ có một nghiệm âm một nghiệm dương.
Vậy phương trình $4f(3x^4)-3=0$ có 2 nghiệm dương
Chọn đáp án (A)

Ví dụ 18. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Số nghiệm của phương trình $f(3x^4-6x^2+1)=1$ là

A. 4. **B.** 5.
C. 6. **D.** 3.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $f(x)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a\in(-\infty;-2) \\ x=b\in(-2;1) \\ x=c\in(1;+\infty) \end{array}\right.$

Do đó $f(3x^4-6x^2+1)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^4-6x^2+1=a(1) \\ 3x^4-6x^2+1=b(2) \\ 3x^4-6x^2+1=c(3) \end{array}\right.$

Xét hàm số $g(x)=3x^4-6x^2+1$

Có $g'(x)=12x^3-12x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

Dựa vào bảng biến thiên, có:
- Phương trình (1) vô nghiệm.
- Phương trình (2) có đúng 4 nghiệm phân biệt.
- Phương trình (3) có đúng 2 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có tất cả 6 nghiệm.

Chọn đáp án C

Ví dụ 19. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Phương trình $f(4x-x^2)-2=0$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 2. **B.** 6. **C.** 0. **D.** 4.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Lời giải

Đặt $t=4x-x^2$. Khi đó $t=-(x-2)^2+4\le 4$.

Từ mỗi giá trị $t<4$ ta tìm được hai giá trị x. Với $t=4$ ta tìm được $x=2$.

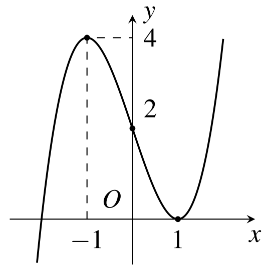
Từ bảng biến thiên, ta thấy phương trình $f(t)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\alpha\in(-\infty;0) \\ t=\beta\in(0;4) \\ t=\gamma\in(4;+\infty) \end{array}\right.$

Vậy phương trình $f(4x-x^2)-2=0$ có 4 nghiệm.

Chọn đáp án D

Ví dụ 20. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm thuộc đoạn $[0;5\pi]$ của phương trình $f(\cos x) = 1$

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.



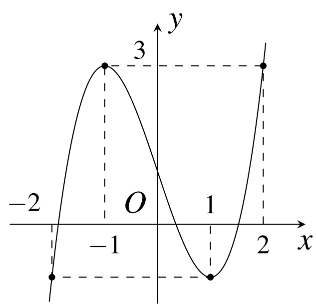
Lời giải

Đặt $t = \cos x$, $t \in [-1;1]$ ta được $f(t) = 1 \Leftrightarrow t = a$ với $a \in (0;1)$
Xét hàm số $g(x) = \cos x$ trên đoạn $[0;5\pi]$
Đồ thị của hàm số $g(x) = \cos x$ tên đoạn $[0;5\pi]$ là

Dựa vào đồ thị ta có $\cos x = a$ có 5 nghiệm trên $[0;5\pi]$
Vậy phương trình $f(\cos x) = 1$ có 5 nghiệm trên $[0;5\pi]$.
Chọn đáp án C

Ví dụ 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(1-\cos 2x) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$ là

A. $[-1;3]$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(-1;3)$. **D.** $(-1;1]$.

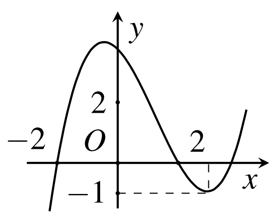


Lời giải

Ta có $x \in (0;\pi)$ thì $\cos 2x \in [-1;1)$ nên $t = 1 - \cos 2x \in (0;2]$.
Phương trình $f(t) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;2]$ khi và chỉ khi $m \in [-1;3]$.
Chọn đáp án A

Ví dụ 22. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $|f(x^3 - 3x)| = \dfrac{2}{3}$ là

A. 6. **B.** 10. **C.** 3. **D.** 9.



Lời giải

Đặt $t = g(x) = x^3 - 3x$ (1).
Ta có $g'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x \pm 1$.
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$	2	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$
	$-\infty$				-2		

Dựa vào bảng biến thiên ta có

- $t \in (-2;2)$ cho ta 3 giá trị x thỏa mãn (1).
- $t \in \{-2;2\}$ cho ta 2 giá trị x thỏa mãn (1).
- $t \in (-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$ cho ta 1 giá trị x thỏa mãn (1).

Phương trình $|f(x^3-3x)| = \dfrac{2}{3}$ (2) trở thành $|f(t)| = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(t) = \dfrac{2}{3} \\ f(t) = -\dfrac{2}{3}. \end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị ta có:

- Phương trình $f(t) = \dfrac{2}{3}$ có 3 nghiệm thỏa mãn $-2 < t_1 < t_2 < 2 < t_3$. Suy ra có 7 nghiệm của phương trình (2).
- Phương trình $f(t) = -\dfrac{2}{3}$ có 3 nghiệm thỏa mãn $t_4 < -2 < 2 < t_5 < t_6$. Suy ra có 3 nghiệm của phương trình (2).

Vậy phương trình đã cho có 10 nghiệm.
Chọn đáp án (B)

Ví dụ 23. Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	2	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$
			-3				-1		

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(4x^2+4x)$ là

A. 5. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 3.

Lời giải

Có $(f(4x^2+4x))' = (8x+4)f'(4x^2+4x)$, $(f(4x^2+4x))' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{2} \\ f'(4x^2+4x) = 0. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	2	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$
		a_1		a_2		a_3		a_4	
			-3				-1		

Từ bảng biến thiên trên ta có $f'(4x^2+4x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^2+4x=a_1\in(-\infty;-1) \\ 4x^2+4x=a_2\in(-1;0) \\ 4x^2+4x=a_3\in(0;1) \\ 4x^2+4x=a_4\in(1;+\infty) \end{array}\right.$. (1)

Xét $g(x)=4x^2+4x$, $g'(x)=8x+4$, $g'(x)=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$ ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

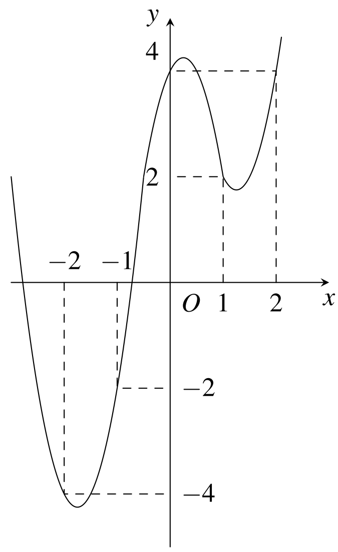
Kết hợp bảng biến thiên của $g(x)$ và hệ (1) ta thấy:

- Phương trình $4x^2+4x=a_1\in(-\infty;-1)$ vô nghiệm.
- Phương trình $4x^2+4x=a_2\in(-1;0)$ tìm được hai nghiệm phân biệt khác $-\dfrac{1}{2}$.
- Phương trình $4x^2+4x=a_2\in(0;1)$ tìm được thêm hai nghiệm mới phân biệt khác $-\dfrac{1}{2}$.
- Phương trình $4x^2+4x=a_2\in(1;+\infty)$ tìm được thêm hai nghiệm phân biệt khác $-\dfrac{1}{2}$.

Vậy hàm số $y=f(4x^2+4x)$ có tất cả 7 điểm cực trị.
Chọn đáp án C

Ví dụ 24. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)-x^2$ là

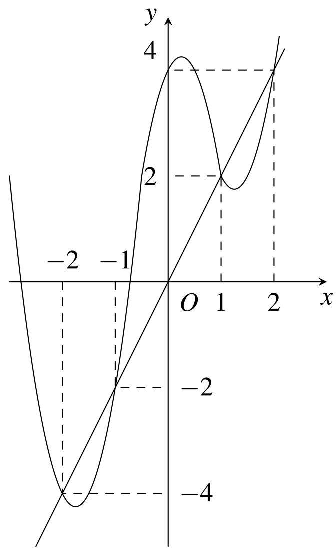
A. 1. **B.** 2.
C. 3. **D.** 4.



Lời giải

Đặt $g(x) = f(x) - x^2$. Khi đó $g'(x) = f'(x) - 2x$.
Trên hình đã cho, ta vẽ thêm đồ thị hàm số $y = 2x$.
Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy phương trình $g'(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt là $-2; -1; 1; 2$.
Dựa vào đồ thị hàm số, ta có bảng xét dấu của đạo hàm $g'(x)$ như sau

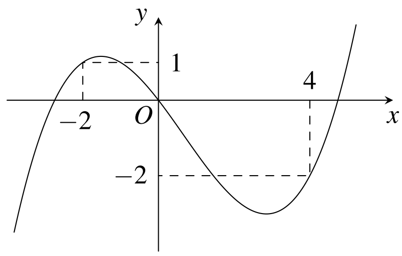
x	$-\infty$		-2		-1		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	



Do đó, hàm số $y = g(x)$ có 4 điểm cực trị.

Chọn đáp án (D)

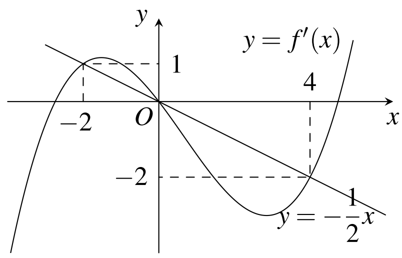
Ví dụ 25. Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x) = f(1-2x) + x^2 - x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $\left(1; \dfrac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$.
C. $(-2; -1)$. **D.** $(2; 3)$.

Lời giải

Xét đường thẳng $d\colon y = -\dfrac{1}{2}x$ đi qua các điểm $A(-2;1)$, $O(0;0)$ và $B(4;-2)$ được bổ sung vào đồ thị đã cho (như hình vẽ).



Và theo đồ thị ta có: $f'(X) > -\dfrac{X}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < X < 0 \\ X > 4. \end{array}\right.$

Với $g(x) = f(1-2x) + x^2 - x$ ta có $g'(x) = -2f'(1-2x) + 2x - 1$.

Từ đó $g'(x) < 0 \Leftrightarrow -2f'(1-2x) + 2x - 1 < 0 \Leftrightarrow f'(1-2x) > -\dfrac{1-2x}{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < 1-2x < 0 \\ 1-2x > 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{2} < x < \dfrac{3}{2} \\ x < -\dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$$

Vậy hàm số $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty; -\dfrac{3}{2}\right)$ và $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$ nên nghịch biến trên khoảng $\left(1; \dfrac{3}{2}\right)$.

Chọn đáp án (A)

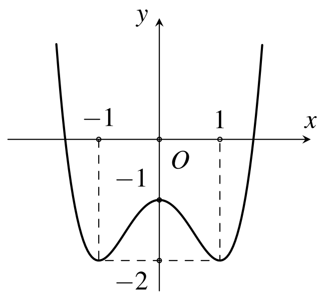
C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

1	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	7	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	13	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	19	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	25	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
2	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	8	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	14	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	20	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	26	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
3	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	9	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	15	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	21	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	27	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
4	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	16	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	22	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	28	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
5	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	11	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	17	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	23	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	29	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
6	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	12	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	18	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	24	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	30	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

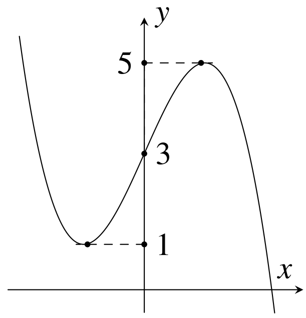
Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị ở hình bên. Số nghiệm dương phân biệt của phương trình $f(x) = -\sqrt{3}$ là



A. 1. **B.** 3.

C. 2. **D.** 4.

Câu 2. Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Phương trình $2f(x) - 5 = 0$ có bao nhiêu nghiệm âm?



A. 0. **B.** 2.

C. 1. **D.** 3.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình bên. Số phần tử tập nghiệm của phương trình $|f(x)| = 2$ là

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$ ↘		-1 ‖ $-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

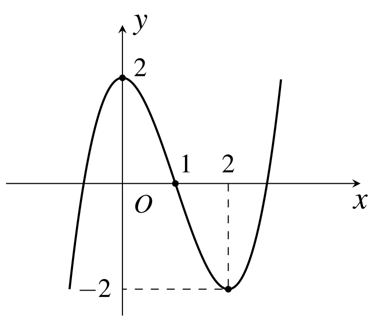
Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Số nghiệm của phương trình $f(x+5) - 4 = 0$ là

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	-2	↗	$+\infty$

A. 0. **B.** 2.

C. 3. **D.** 1.

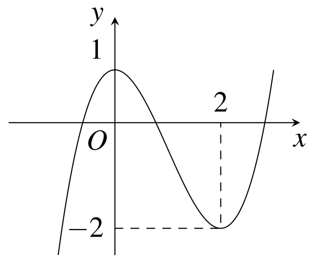
Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số nghiệm của phương trình $f(x) = -x + 1$.



A. 2. **B.** 4.

C. 1. **D.** 3.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tìm số nghiệm của phương trình $2f(x^2) + 3 = 0$.



A. 4. **B.** 2.
C. 3. **D.** 6.

Câu 7. Số nghiệm thực của phương trình $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| - \dfrac{9}{2} = 0$ là

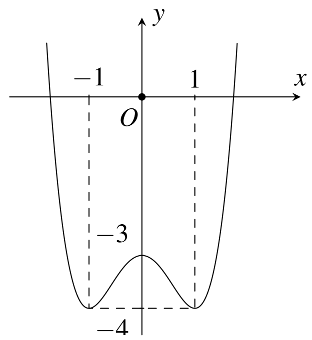
A. 2. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) - 1 = m$ có đúng hai nghiệm.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

A. $\left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m > -1 \end{array}\right.$. **B.** $-2 < m < -1$.
C. $\left[\begin{array}{l} m > 0 \\ m = -1 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m \geq -1 \end{array}\right.$.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $4f(x) + m = 0$ có đúng 4 nghiệm thực phân biệt?



A. 4. **B.** 3.
C. 2. **D.** 0.

Câu 10. Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^3 - 3x^2 - m - 4 = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

A. $4 < m < 8$. **B.** $m < 0$. **C.** $-8 < m < -4$. **D.** $0 \leq m \leq 4$.

Câu 11. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2x^3 - 3x^2 = 2m + 1$ có đúng hai nghiệm phân biệt. Tổng các phần tử của S bằng

A. $-\dfrac{1}{2}$. **B.** $-\dfrac{3}{2}$. **C.** $-\dfrac{5}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

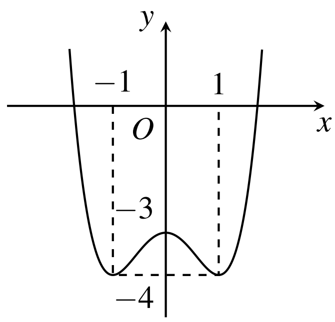
Câu 12. Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - 4x^2 + 3 + m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt là

A. $(-1;3)$. **B.** $(-3;1)$. **C.** $(2;4)$. **D.** $(-3;0)$.

Câu 13. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = 2x^2|x^2 - 2|$ tại 6 điểm phân biệt?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $|f(x)| = m$ có 6 nghiệm phân biệt.



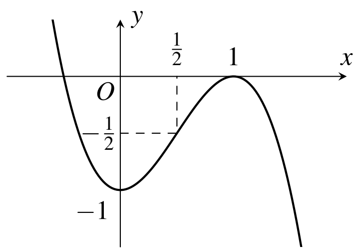
A. $-4 < m < -3$. **B.** $0 < m < 3$.
C. $m > 4$. **D.** $3 < m < 4$.

Câu 15.
Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như hình bên. Khi đó, phương trình $|f(x)| = m$ có bốn nghiệm phân biệt $x_1 < x_2 < x_3 < \dfrac{1}{2} < x_4$ khi và chỉ khi

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

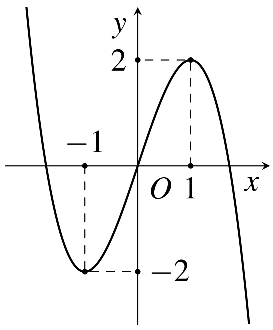
A. $\dfrac{1}{2} < m < 1$. **B.** $\dfrac{1}{2} \le m < 1$.
C. $0 < m < 1$. **D.** $0 < m \le 1$.

Câu 16. Cho hàm số $y = -2x^3 + 3x^2 - 1$ có đồ thị như hình vẽ. Bằng cách sử dụng đồ thị hàm số, xác định m để phương trình $2x^3 - 3x^2 + 2m = 0$ có đúng ba nghiệm phân biệt, trong đó có hai nghiệm lớn hơn $\dfrac{1}{2}$.



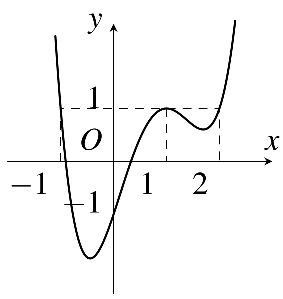
A. $m \in \left(-\dfrac{1}{2}; 0\right)$. **B.** $m \in (-1; 0)$.
C. $m \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right)$. **D.** $m \in \left(\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{2}\right)$.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $f(x) \le 2^m$ có nghiệm đúng với mọi $x \in [0; 1]$.



A. $0 \le m \le 2$. **B.** $m \ge 2$.
C. $0 \le m \le 1$. **D.** $m \ge 1$.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm thực của phương trình $f(x^2 + x) = 1$ là



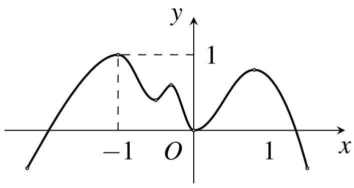
A. 2. **B.** 3.
C. 4. **D.** 5.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau. Số nghiệm của phương trình $f\left(\sqrt{2x-3}\right) + 4 = 0$ là

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2 ‖ $+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm thực của phương trình $f(f(\sin 2x)) = 0$ trong khoảng $(0;\pi)$ là



A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 21. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 - mx - 4$ luôn đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

A. $m \leq -3$. **B.** $m < -3$. **C.** $m \geq 3$. **D.** $m > 3$.

Câu 22. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + (m-1)x + 4m$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$ là

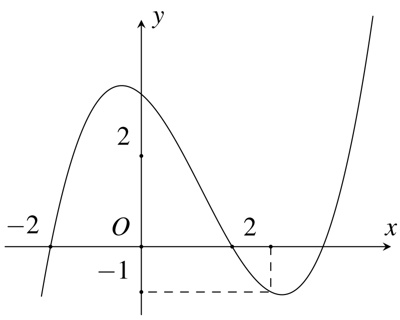
A. $m > 4$. **B.** $m \geq 4$. **C.** $m \leq -8$. **D.** $m < 8$.

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ là

A. 3. **B.** 9.
C. 5. **D.** 7.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	2	↘	-1	↗	$+\infty$

Câu 24. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^3 - 3x\right)\right| = \dfrac{1}{2}$ là

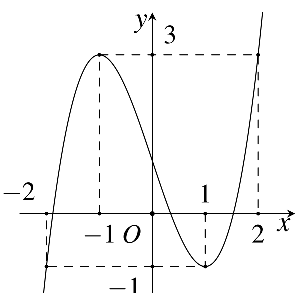


A. 6. **B.** 10. **C.** 12. **D.** 3.

Câu 25. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\dfrac{1}{3}\left|\cos^3 x\right| - 3\cos^2 x + 5|\cos x| - 3 + 2m = 0$ có đúng bốn nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0;2\pi]$.

A. $-\dfrac{3}{2} < m < -\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{3} \leq m < \dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{3} < m < \dfrac{3}{2}$. **D.** $-\dfrac{3}{2} \leq m \leq -\dfrac{1}{3}$.

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x) = f(m)$ có ba nghiệm phân biệt là



A. 5. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 27. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \sqrt{\sin^2 x - 4\cos x + 2m}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. Không có m thỏa mãn. **B.** $m \leq -\dfrac{5}{2}$.
C. $m \geq 2$. **D.** $m \geq -\dfrac{5}{2}$.

Câu 28. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $x + 1 = m\sqrt{2x^2 + 1}$ có hai nghiệm phân biệt.

A. $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} < m < \dfrac{\sqrt{6}}{6}$. **B.** $m < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $m > \dfrac{\sqrt{6}}{6}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2} < m < \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Câu 29. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $x^4+1-x^2+x\sqrt{2mx^4+2m}\geq 0$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$. Biết rằng $S=[a;b]$. Giá trị của $a\sqrt{8}+12b$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 30. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\dfrac{3}{4}x^4-(m-1)x^2-\dfrac{1}{4x^4}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

—-HẾT—-

§ 7. SỰ TƯƠNG GIAO CỦA HAI ĐỒ THỊ

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Phương pháp đại số

Xác định tọa độ giao điểm của hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$, ta thực hiện các bước:

① Giải phương trình hoành độ giao điểm $\boxed{f(x) = g(x)}$. Tìm các nghiệm $x_0 \in \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g$.

② Với x_0 vừa tìm, thay vào 1 trong 2 hàm số ban đầu để tìm y_0.

③ Kết luận giao điểm $(x_0; y_0)$.

2 Phương pháp đồ thị

① Nếu đề bài cho hình ảnh đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$, ta có thể dùng hình vẽ để xác định tọa độ giao điểm giữa chúng.

② Số nghiệm phương trình $f(x) = m$ chính bằng số giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ với đường thẳng $y = m$ (nằm ngang).

B CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

DẠNG 1. Xác định (biện luận) giao điểm của đường thẳng và đồ thị của hàm số bậc ba

Phương pháp giải. Xét hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ có đồ thị (C) và đường thẳng d có phương trình $y = kx + n$.
Lập phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = kx + n \quad (1)$$

Ta có hai trường hợp xảy ra:

☑ Trường hợp 1: Phương trình (1) có "nghiệm đẹp" x_0. Khi đó, ta phân tích (1) về dạng

$$(1) \Leftrightarrow (x - x_0)(Ax^2 + Bx + C) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_0 \\ Ax^2 + Bx + C = 0 \quad (2) \end{array}\right.$$

Các bài toán thường gặp:

① (C) và d có đúng ba điểm chung $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt khác x_0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ Ax_0^2 + Bx_0 + C \neq 0 \end{cases}$$

② (C) và d có đúng hai điểm chung $\Leftrightarrow$ (2) có đúng 1 nghiệm khác x_0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ -\dfrac{B}{2A} \neq x_0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \Delta > 0 \\ -\dfrac{B}{2A} = x_0 \end{cases}$$

③ (C) và d có đúng một điểm chung $\Leftrightarrow$ (2) vô nghiệm hoặc có nghiệm duy nhất và nghiệm đó bằng x_0.

$$\Leftrightarrow \Delta < 0 \text{ hoặc } \begin{cases} \Delta = 0 \\ -\dfrac{B}{2A} = x_0 \end{cases}$$

☑ Trường hợp 2: Phương trình (1) không có "nghiệm đẹp". Khi đó ta tiến hành các bước:

① Cô lập tham số m, chuyển phương trình (1) về dạng $f(x) = m$. Số nghiệm phương trình này chính bằng hoành độ giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ với đường thẳng $y = m$ (nằm ngang).

② Lập bảng biến thiên của hàm $y = f(x)$ trên miền đề bài yêu cầu.

③ Tịnh tiến đường thẳng $y = m$ theo phương song song với Ox, nhìn giao điểm suy ra kết quả.

Ví dụ 1. Đường thẳng $y = -3x + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 - 1$ tại điểm duy nhất có tọa độ $(x_0; y_0)$. Chọn câu trả lời **sai** trong các câu trả lời sau đây.

A. $x_0^3 - 2x_0^2 - 1 - y_0 = 0$.
B. $y_0 + 3x_0 - 1 = 0$.
C. $x_0 + y_0 + 2 = 0$.
D. $x_0^3 - 2 = 2x_0^3 - 3x_0$.

Lời giải

Tọa độ giao điểm của đường thẳng và đồ thị hàm số là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = -3x + 1 \\ y = x^3 - 2x^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = -2. \end{cases}$$

Chọn đáp án C

Ví dụ 2. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = (x-1)(x^2 - 3x + 2)$ và trục hoành là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Phương trình $y = 0$ có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = 2$.
Chọn đáp án C

Ví dụ 3. Đường thẳng $y = x - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2 + x - 1$ tại hai điểm. Tìm tổng tung độ các giao điểm đó.

A. -3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** -1.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3 - x^2 + x - 1 = x - 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = 0 \\ x = 0 \Rightarrow y = -1. \end{array}\right.$$

Tổng tung độ các giao điểm là $0 + (-1) = -1$.
Chọn đáp án D

Ví dụ 4. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^2 - 3x + 1$ tại hai điểm phân biệt A, B. Tính độ dài AB.

A. $AB = 3$. **B.** $AB = 2\sqrt{2}$. **C.** $AB = 2$. **D.** $AB = 1$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = x^2 - 3x + 1 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = -1 \\ y = -1 \end{array}\right..$$

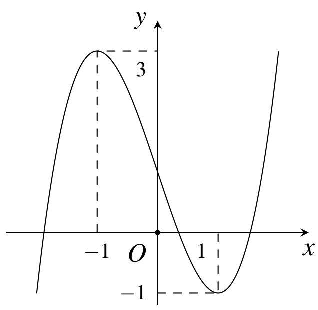
Không mất tính tổng quát, ta giả sử $A(1;-1), B(2;-1)$. Suy ra $\vec{AB} = (1;0) \Rightarrow AB = 1$.

Chọn đáp án D

Ví dụ 5. Đồ thị sau đây là của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$. Với giá trị nào của m thì phương trình $x^3 - 3x - m = 0$ có 3 nghiệm phân biệt?

A. $-2 < m < 2$. **B.** $-1 < m < 3$.

C. $-2 \leq m < 2$. **D.** $-2 < m < 3$.



Lời giải

Ta có $x^3 - 3x - m = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 1 = m + 1$.

Phương trình có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Đường thẳng $y = m + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ tại ba điểm phân biệt

$\Leftrightarrow -1 < m + 1 < 3 \Leftrightarrow -2 < m < 2$.

Chọn đáp án A

Ví dụ 6. Cho hàm số $y = (x-2)(x^2 + mx + m^2 - 3)$. Tìm tập hợp các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

A. $-1 < m < 2$. **B.** $\begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \neq -1 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} -1 < m < 2 \\ m \neq 1 \end{cases}$. **D.** $-2 < m < -1$.

Lời giải

Đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt khi phương trình

$$(x-2)(x^2 + mx + m^2 - 3) = 0$$

có 3 nghiệm phân biệt hay phương trình $x^2 + mx + m^2 - 3 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = -3m^2 + 12 > 0 \\ m^2 + 2m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \neq -1 \end{cases}.$$

Chọn đáp án B

Ví dụ 7. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị (C). Gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(3;20)$ và có hệ số góc là m. Với giá trị nào của m thì d cắt (C) tại ba điểm phân biệt?

A. $\begin{cases} m < \dfrac{15}{4} \\ m \neq 4 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} m < \dfrac{1}{5} \\ m \neq 0 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} m > \dfrac{15}{4} \\ m \neq 24 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} m > \dfrac{1}{5} \\ m \neq 1 \end{cases}$.

Lời giải

Đường thẳng $d \cdot y = m(x-3) + 20$ hay $d\colon y = mx - 3m + 20$.
Hoành độ giao điểm của d và (C) là nghiệm phương trình

$$\begin{aligned} & x^3 - 3x + 2 = mx - 3m + 20 \\ \Leftrightarrow\ & x^3 - (3+m)x + 3m - 18 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-3)(x^2 + 3x + 6 - m) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x^2 + 3x + 6 - m \quad (1) \end{array}\right. \end{aligned}$$

Đường thẳng d cắt (C) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 4m - 15 > 0 \\ 3^2 + 3 \cdot 3 + 6 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{15}{4} \\ m \neq 24 \end{cases}$.

Chọn đáp án C

Ví dụ 8. Biết có hai số m_1, m_2 là hai giá trị của tham số m sao cho đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - 3x + 3m + 2$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 15$. Tính $m_1 + m_2$.

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\begin{aligned} & x^3 - 3mx^2 - 3x + 3m + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-1)[x^2 + (1-3m)x - 3m - 2] = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ g(x) = x^2 + (1-3m)x - 3m - 2 = 0. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Để (C) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt thì $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 1.

$$\begin{cases} \Delta_g > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 + 6m + 9 > 0 \\ -6m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 0.$$

Theo định lí Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3m - 1 \\ x_1 x_2 = -3m - 2 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 15 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = 14 \\ \Leftrightarrow\ & (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 14 = 0 \\ \Rightarrow\ & (3m-1)^2 - 2(-3m-2) - 14 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 9m^2 - 9 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 1. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy $m_1 + m_2 = 0$.
Chọn đáp án (A)

Ví dụ 9. Cho hàm số $y = x^3 + mx^2 - x - m \quad (C_m)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (C_m) cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng ?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và Ox :

$$\begin{aligned} & x^3 + mx^2 - x - m = 0 \\ \Leftrightarrow & (x+m)(x^2-1) = 0 \\ \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} x = -m \\ x = \pm 1 \end{array}\right. . \end{aligned}$$

Từ đó có ba trường hợp:

1. Trường hợp 1. Thứ tự các số hạng của cấp số cộng là $-m, -1, 1$.
   Khi đó $m = 3$.
2. Trường hợp 2. Thứ tự các số hạng của cấp số cộng là $-1, -m, 1$.
   Khi đó $m = 0$.
3. Trường hợp 3. Thứ tự các số hạng của cấp số cộng là $-m, 1, -1$.
   Khi đó $m = -3$.

Vậy có 3 giá trị của m thỏa mãn.
Chọn đáp án (B)

Ví dụ 10. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng $\Delta : y = x + 4$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4$ tại ba điểm phân biệt $A(0;4)$, B và C sao cho diện tích tam giác MBC bằng 4, với $M(1;3)$.

A. $m = 2$ hoặc $m = 3$. **B.** $m = -2$ hoặc $m = 3$.
C. $m = 3$. **D.** $m = -2$ hoặc $m = -3$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm

$x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4 = x + 4 \Leftrightarrow x^3 + 2mx^2 + (m+2)x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 + 2mx + m + 2 = 0 \end{array}\right.$.

Đường thẳng Δ cắt đồ thị tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow x^2 + 2mx + m + 2 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - m - 2 > 0 \\ m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2,\ m < -1 \\ m \neq -2 \end{cases}$.

Gọi hoành độ giao điểm của B, C là b, c. Ta có $B(b; b+4), C(c; c+4)$ và $c + b = -2m, bc = m + 2$.

$$BC = \sqrt{(c-b)^2 + (c+4-b-4)^2} = \sqrt{2\left[(c+b)^2 - 4bc\right]} = 2\sqrt{2(m^2 - m - 2)}.$$

Đường thẳng $\Delta : x - y + 4 = 0$. Khoảng cách $d(M, BC) = d(M, \Delta) = \sqrt{2}$.
Diện tích tam giác MBC bằng 4 nên

$$\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2(m^2 - m - 2)} \cdot \sqrt{2} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{m^2 - m - 2} = 2 \Leftrightarrow m = 3 \vee m = -2.$$

$m = -2$ không thõa mãn điều kiện. Vậy $m = 3$ là giá trị cần tìm
Chọn đáp án C

DẠNG 2. Xác định (biện luận) giao điểm của đường thẳng và đồ thị của hàm số bậc bốn trùng phương

Phương pháp giải. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c (a \neq 0)$ có đồ thị (C) và đường thẳng $y = k$ có đồ thị d.
Lập phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d:

$$ax^4 + bx^2 + c = k \quad (1)$$

Đặt $t = x^2 (t \geq 0)$ ta có phương trình $at^2 + bt + c - k = 0 \quad (2)$.
Các bài toán thường gặp:

① (C) và d có bốn điểm chung $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$$

② (C) và d có ba điểm chung $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm dương và một nghiệm $t = 0$.

③ (C) và d có hai điểm chung $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm kép dương hoặc có hai nghiệm trái dấu.

④ (C) và d có một điểm chung $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $t = 0$ và một nghiệm âm.

⑤ (C) và d không có điểm chung $\Leftrightarrow$ (2) vô nghiệm hoặc chỉ có nghiệm âm.

! Có thể chuyển bài toán về biện luận giao điểm của đồ thị cố định với một đường thẳng nằm ngang.

Ví dụ 11. Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ với trục Ox.

A. 1 . **B.** 2 . **C.** 3 . **D.** 4 .

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm là

$$x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Vậy có hai giao điểm.
Chọn đáp án B

Ví dụ 12. Đồ thị hàm số $y = 2x^4 - 3x^2$ và đồ thị hàm số $y = -x^2 + 2$ có bao nhiêu điểm chung?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Ta có:

$$2x^4-3x^2=-x^2+2 \Leftrightarrow 2x^4-2x^2-2=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{(loại)} \\ x^2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}.$$

Chọn đáp án A

Ví dụ 13. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị của hàm số $y=x^4-2x^2-3$ tại bốn điểm phân biệt.

A. $m>-1$. **B.** $-1<m<1$. **C.** $m<-4$. **D.** $-4<m<-3$.

Lời giải

Xét hàm số $y=x^4-2x^2-3$. Ta có $y'=4x^3-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-4	↗	-3	↘	-4	↗	$+\infty$

Suy ra với $-4<m<-3$ thì hai đồ thị đã cho cắt nhau tại 4 điểm phân biệt.
Chọn đáp án D

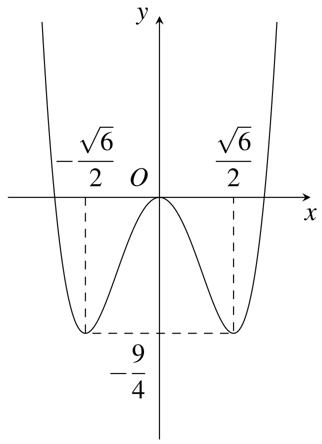
Ví dụ 14. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-3x^2-m-1$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.

A. $\left[\begin{array}{l} m>-1 \\ m=-\dfrac{13}{4} \end{array}\right.$. **B.** $m>-1$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m\geq -1 \\ m=-\dfrac{13}{4} \end{array}\right.$. **D.** $m\geq -1$.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=x^4-3x^2$, có $f'(x)=4x^3-6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2} \end{array}\right.$.

Tính các giá trị $f(0)=0$; $f\left(\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)=-\dfrac{9}{4}$, suy ra đồ thị (C) của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ.



Để phương trình $f(x)=m+1$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+1>0 \\ m+1=-\dfrac{9}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>-1 \\ m=-\dfrac{13}{4}. \end{array}\right.$$

Chọn đáp án (A)

Ví dụ 15. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=2x^2|x^2-2|$ tại 6 điểm phân biệt?

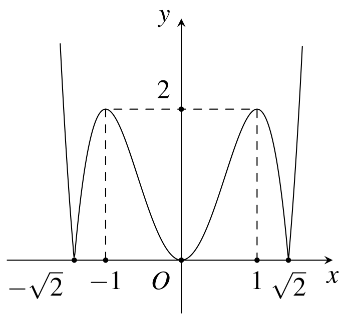
A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

$$y=2x^2|x^2-2|=\begin{cases}2x^2(x^2-2) \text{ khi } \left[\begin{array}{l}x\le -\sqrt{2}\\ x\ge\sqrt{2}\end{array}\right.\\ -2x^2(x^2-2) \text{ khi } -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}.\end{cases}$$

Vẽ đồ thị hàm số $f(x)=2x^2(x^2-2)$, từ đó suy ra đồ thị hàm số đã cho như hình.

Do đó, đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=2x^2|x^2-2|$ tại 6 điểm phân biệt khi và chỉ khi $0<m<2$. Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m=1$.



Chọn đáp án (A)

Ví dụ 16. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m trong khoảng $(-3;5)$ để đồ thị hàm số $y=x^4+(m-5)x^2-mx+4-2m$ tiếp xúc với trục hoành?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\begin{aligned}&x^4+(m-5)x^2-mx+4-2m=0\\ \Leftrightarrow\ &(x+1)(x-2)(x^2+x+m-2)=0\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=2\\ x^2+x+m-2=0.\qquad(1)\end{array}\right.\end{aligned}$$

Để đồ thị hàm số $y=x^4+(m-5)x^2-mx+4-2m$ tiếp xúc với trục hoành thì phương trình (1) phải có nghiệm $x=-1$ hoặc $x=2$ hoặc có nghiệm kép khác -1 và -2

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-1+m-2=0\\ 4+2+m-2=0\\ 1-4(m-2)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\ m=-4 \text{ (loại)}\\ m=\dfrac{9}{4}.\end{array}\right.$$

Vậy có 2 giá trị m thỏa mãn đề.

Chọn đáp án (A)

Ví dụ 17. Cho hàm số: $y=x^4-(2m-1)x^2+2m$ có đồ thị (C). Tất cả có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đường thẳng $d\colon y=2$ cắt đồ thị (C) tại bốn điểm phân biệt đều có hoành độ bé hơn 3?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm giữa d và (C)

$$x^4-(2m-1)x^2+2m=2 \Leftrightarrow x^4-(2m-1)x^2+2m-2=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-2m+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2=1\\x^2=2m-2\end{array}\right..$$

Từ đó suy ra để d cắt (C) tại bốn điểm phân biệt có hoành độ bé hơn 3 khi và chỉ khi

$$\begin{cases}0<2m-2<9\\2m-2\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1<m<\dfrac{11}{2}\\m\neq\dfrac{3}{2}\end{cases}.$$

Vậy có 4 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn.
Chọn đáp án D

DẠNG 3. Xác định (biện luận) giao của đường thẳng và đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

Phương pháp giải. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, $(ad-bc\neq 0)$ có đồ thị (C) và đường thẳng d có phương trình $y=kx+n$.
Lập phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d:

$$\frac{ax+b}{cx+d}=kx+n \Leftrightarrow \begin{cases}Ax^2+Bx+C=0 \ (1)\\x\neq -\dfrac{d}{c}=x_0\end{cases}$$

Các bài toán thường gặp

① (C) và d có hai điểm chung $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác $x_0 \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\Ax_0^2+Bx_0+C\neq 0\end{cases}$

② Giả sử hai đồ thị trên cắt nhau tại hai điểm phân biệt $M(x_1;kx_1+n)$ và $N(x_2;kx_2+n)$. Khi đó

$$MN=\sqrt{k^2+1}\sqrt{\frac{\Delta}{A^2}}$$

Ví dụ 18. Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ cắt hai trục Ox và Oy tại A và B. Khi đó diện tích của tam giác OAB (với O là gốc tọa độ) bằng

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** 2. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có $A(1;0), B(0;-1)$. Diện tích $S_{\triangle OAB}=\dfrac{OA\cdot OB}{2}=\dfrac{1}{2}$.
Chọn đáp án D

Ví dụ 19. Biết đường thẳng $y = x - 2$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{x}{x-1}$ tại 2 điểm phân biệt A, B. Tìm hoành độ trọng tâm tam giác OAB với O là gốc tọa độ.

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** 2. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** 4.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x - 2 = \dfrac{x}{x-1}$ (Điều kiện $x \neq 1$).
$\Rightarrow (x-2)(x-1) = x \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = 0\,(1)$.
Khi đó $A(x_1; x_1 - 2)$, $B(x_2; x_2 - 2)$ với x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình (1) thỏa mãn
$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1.x_2 = 2 \end{cases}$. Gọi $G\,(x_G; y_G)$ là trọng tâm tam giác OAB.
$\Rightarrow x_G = \dfrac{0 + x_1 + x_2}{3} = \dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án C

Ví dụ 20. Gọi M, N là giao điểm của đường thẳng $y = x + 1$ và đường cong $y = \dfrac{2x+4}{x-1}$. Tìm hoành độ trung điểm của đoạn thẳng MN.

A. $x = -1$. **B.** $x = 1$. **C.** $x = -2$. **D.** $x = 2$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x + 1 = \dfrac{2x+4}{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 - 2x - 5 = 0 \end{cases}$
$\Rightarrow x_M + x_N = 2 \Rightarrow x_I = \dfrac{x_M + x_N}{2} = 1$.

Chọn đáp án B

Ví dụ 21. Cho hàm số $y = \dfrac{2x}{x+1}$ có đồ thị (C). Gọi A, B là giao điểm của đường thẳng $d: y = x$ với đồ thị (C). Tính độ dài đoạn AB.

A. $AB = \sqrt{2}$. **B.** $AB = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $AB = 1$. **D.** $AB = 2$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm
$\dfrac{2x}{x+1} = x, (x \neq -1) \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow A\,(0;0) \\ x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow B\,(1;1) \end{array}\right.$
Vậy $AB = \sqrt{2}$.

Chọn đáp án A

Ví dụ 22. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-14; 15]$ sao cho đường thẳng $y = mx + 3$ cắt đồ thị của hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt.

A. 17. **B.** 16. **C.** 20. **D.** 15.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $mx+3=\dfrac{2x+1}{x-1} \Leftrightarrow mx^2+x(1-m)-4=0\ (*)$.
• Với $m=0$ thì phương trình $(*)$ có một nghiệm $x=4$.
• Với $m\neq 0$, xét biệt thức $\Delta=m^2+14m+1$.
Đồ thị của hai hàm số cắt nhau tại hai điểm phân biệt nên

$$\Delta>0 \Leftrightarrow m^2+14m+1>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>-7+4\sqrt{3} \\ m<-7-4\sqrt{3} \end{array}\right..$$

Suy ra, có 16 giá trị nguyên của $m\in[-14;15]$ thỏa mãn.
Chọn đáp án B

Ví dụ 23. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C). Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng $d\colon y=x+m-1$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho $AB=2\sqrt{3}$.

A. $m=4\pm\sqrt{3}$. **B.** $m=2\pm\sqrt{3}$. **C.** $m=4\pm\sqrt{10}$. **D.** $m=2\pm\sqrt{10}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d

$$\begin{aligned} & \frac{2x+1}{x+1}=x+m-1 \\ \Leftrightarrow\ & x^2+(m-2)x+m-2=0,\ (x\neq-1) \qquad (1) \end{aligned}$$

Để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt khác -1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ (-1)^2+(m-2)\cdot(-1)+m-2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2-8m+12>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>6 \\ m<2. \end{array}\right. \qquad (*)$$

Khi đó d cắt (C) tại $A(x_1;x_1+m-1)$, $B(x_2;x_2+m-1)$. Ta có

$$\begin{aligned} & AB=2\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow\ & (x_2-x_1)^2=6 \Leftrightarrow (x_2+x_1)^2-4x_1x_2=6 \\ \Leftrightarrow\ & (m-2)^2-4(m-2)-6=0 \\ \Leftrightarrow\ & m=4\pm\sqrt{10} \quad \text{(thỏa mãn điều kiện (*))}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C

Ví dụ 24. Biết rằng có hai giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}\,(C)$ và đường thẳng $d\colon y=mx+3$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O (với O là gốc tọa độ). Tổng của hai giá trị đó bằng

A. 0. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 6.

Lời giải

Với điều kiện $x \neq 1$ ta có phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là

$$\frac{2x+1}{x-1} = y = mx+3 \Rightarrow 2x+1 = (mx+3)(x-1) \Leftrightarrow mx^2-(m-1)x-4=0. \qquad (*)$$

Rõ ràng $x=1$ không là nghiệm của phương trình $(*)$. Như vậy đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt, tức là

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ (m-1)^2+16m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2+14m+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} m<-7-4\sqrt{3} \\ m>-7+4\sqrt{3} \end{array}\right. \end{cases} \qquad (**)$$

Gọi các giao điểm của d và (C) là $A(x_1;mx_1+3)$ và $B(x_2;mx_2+3)$, trong đó x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $(*)$.
Theo giả thiết, tam giác OAB vuông tại O nên

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0 \Leftrightarrow x_1x_2+(mx_1+3)(mx_2+3)=0 \Leftrightarrow x_1x_2+m^2x_1x_2+3m(x_1+x_2)+9=0 \\ \Leftrightarrow\ & (m^2+1)x_1x_2+3m(x_1+x_2)+9=0 \Leftrightarrow \frac{-4(m^2+1)}{m}+\frac{3m(m-1)}{m}+9=0 \\ \Leftrightarrow\ & -4(m^2+1)+3m(m-1)+9m=0 \Leftrightarrow -m^2+6m-4=0 \\ \Leftrightarrow\ & m=3\pm\sqrt{5}. \text{ (thỏa mã điều kiện } (**)) \end{aligned}$$

Vậy $m=3\pm\sqrt{5}$ là các giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán và tổng của chúng bằng 6.
Chọn đáp án D

Ví dụ 25. Cho hàm số $y=\dfrac{3x-2}{x+1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(-5;5)$. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y=-x+m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt M, N sao cho tứ giác $OAMN$ là hình bình hành (O là gốc tọa độ).

A. $m=3$.
B. $m=2+\sqrt{5}$.
C. $m=2+\sqrt{5}, m=2-\sqrt{5}$.
D. $m=2-\sqrt{5}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $y=\dfrac{3x-2}{x+1}$ và $y=-x+m$ là

$$\frac{3x-2}{x+1}=-x+m \Leftrightarrow x^2+(4-m)x-2-m=0 \quad (*).$$

Ta có $\Delta=(4-m)^2-4(-2-m)=m^2-4m+24=(m-2)^2+20>0$, với mọi m.
Suy ra đồ thị (C) luôn cắt đường thẳng d tại hai điểm phân biệt $M(x_1;-x_1+m)$ và $N(x_2;-x_2+m)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình $(*)$.
Ta có $OAMN$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}=\overrightarrow{NM} \Leftrightarrow x_1-x_2=-5 \quad (1)$.
Theo định lí Vi-ét, ta có $\begin{cases} x_1+x_2=m-4 & (2) \\ x_1x_2=-2-m & (3) \end{cases}$ Từ (1) & (2), ta được $x_1=\dfrac{m-9}{2}$ và $x_2=\dfrac{m+1}{2}$, thay vào (3), ta được

$$\frac{m-9}{2}\cdot\frac{m+1}{2}=-2-m \Leftrightarrow m^2-4m-1=0 \Leftrightarrow m=2\pm\sqrt{5}.$$

Chọn đáp án C

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

1	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	7	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	13	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	19	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	25	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
2	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	8	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	14	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	20	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	26	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
3	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	9	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	15	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	21	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	27	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
4	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	16	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	22	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	28	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
5	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	11	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	17	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	23	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	29	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
6	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	12	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	18	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	24	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	30	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

Câu 1. Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 1$ và đường thẳng $y = 2$.

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 2. Đồ thị hàm số $y = x^4 - x^3 - 3$ cắt trục tung tại mấy điểm?

A. 1 điểm. **B.** 2 điểm. **C.** 4 điểm. **D.** 3 điểm.

Câu 3. Đồ thị hàm số $y = x^4 - 5x^2 + 4$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm?

A. 0. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 4. Tìm số giao điểm n của hai đồ thị $(C_1)\colon y = x^4 - 3x^2 + 2$ và $(C_2)\colon y = x^2 - 2$.

A. $n = 1$. **B.** $n = 4$. **C.** $n = 2$. **D.** $n = 0$.

Câu 5. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{4x+4}{x-1}$ và $y = x^2 - 1$ cắt nhau tại bao nhiêu điểm?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 6. Biết rằng đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2 - x + 2$ và đồ thị hàm số $y = -x^2 - x + 5$ cắt nhau tại điểm duy nhất có tọa độ $(x_0; y_0)$. Tìm y_0.

A. 0. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 7. Đồ thị hàm số nào sau đây cắt trục tung tại điểm có tung độ âm?

A. $y = \dfrac{4x+1}{x+2}$. **B.** $y = \dfrac{-2x+3}{x+1}$. **C.** $y = \dfrac{3x+4}{x-1}$. **D.** $y = \dfrac{2x-3}{x-1}$.

Câu 8. Biết đường thẳng $y = x - 2$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ lần lượt là x_A, x_B. Khi đó

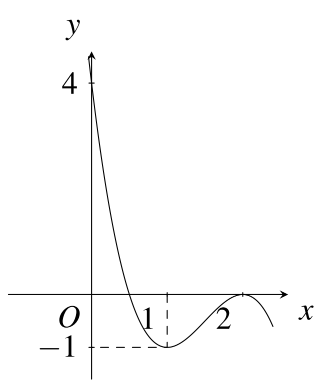
A. $x_A + x_B = 5$. **B.** $x_A + x_B = 2$. **C.** $x_A + x_B = 1$. **D.** $x_A + x_B = 3$.

Câu 9. Biết rằng đồ thị hàm số $y = x^3 - 4x^2 + 5x - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = 1$ tại hai điểm phân biệt A và B. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

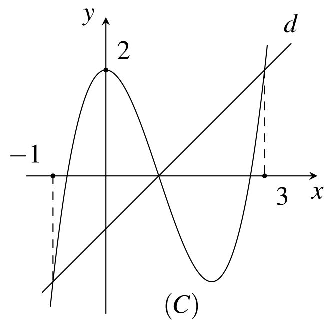
A. $AB = 2$. **B.** $AB = 3$. **C.** $AB = 2\sqrt{2}$. **D.** $AB = 1$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\,(d \neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $3f(x) - 1 = 0$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.



Câu 11. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ, đường thẳng d có phương trình $y = x - 1$. Biết phương trình $f(x) = 0$ có ba nghiệm $x_1 < x_2 < x_3$. Giá trị của x_1x_3 bằng



A. -2. B. $-\frac{5}{2}$. C. $-\frac{7}{3}$. D. -3.

Câu 12. Cho hàm số $y = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 1$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d : y = -m$. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để d cắt (C) tại ba điểm phân biệt.

A. $\left[\frac{1}{3};1\right]$. B. $\left[-1;-\frac{1}{3}\right]$. C. $\left(\frac{1}{3};1\right)$. D. $\left(-1;-\frac{1}{3}\right)$.

Câu 13. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + m$ cắt trục hoành bốn điểm phân biệt.

A. $m > 0$. B. $0 < m < 1$. C. $m > 1$. D. $m < 1$.

Câu 14. Có bao nhiêu số m nguyên âm để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (1-m)x + m + 1$ cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt.

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 15. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3x + m$ cắt trục hoành tại đúng 3 điểm phân biệt.

A. $m \in (2;+\infty)$. B. $m \in (-2;2)$. C. $m \in \mathbb{R}$. D. $m \in (-\infty;-2)$.

Câu 16. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (3m-1)x + 6m$ có đồ thị là (C). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để (C) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2x_3 = 20$. Tính tổng các phần tử của tập S.

A. $\frac{4}{3}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{5}{3}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 17. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 9x - 7$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

A. $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = \frac{-1 \pm \sqrt{15}}{2} \end{array}\right.$. B. $m = \frac{-1+\sqrt{15}}{2}$. C. $m = \frac{-1-\sqrt{15}}{2}$. D. $m = 1$.

Câu 18. Giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx$ cắt trục hoành tại ba điểm A, B, C phân biệt và cách đều nhau là

A. 2. B. 1. C. -2. D. 0.

Câu 19. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $-x^4 + 2x^2 + 3 + 2m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

A. $-2 \leqslant m \leqslant \frac{-3}{2}$. B. $\frac{-3}{2} < m < 2$. C. $-2 < m < \frac{-3}{2}$. D. $3 < m < 4$.

Câu 20. Tìm tất cả các giá trị m nguyên để phương trình $x^4 - 2x^2 + 3 - m = 0$ có bốn nghiệm thực.

A. 1. B. 2. C. 3. D. Không có giá trị m.

Câu 21. Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^2|x^2 - 3|$ và đường thẳng $y = 2$.

A. 8. B. 2. C. 6. D. 4.

Câu 22. Có bao nhiêu đường thẳng cắt đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{5x-3}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt mà hai giao điểm đó có hoành độ và tung độ là các số nguyên?

A. 15. B. 4. C. 2. D. 6.

Câu 23. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-3}{x+1}$ cắt đường thẳng $y=x+m$ tại hai điểm phân biệt khi

A. $m>-2$. **B.** $m>6$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m<-2\\ m>6\end{array}\right.$. **D.** $m<-2$.

Câu 24. Cho hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ $(b<0, a\neq 0)$. Biết rằng đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt trong đó có hai giao điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ. Tính giá trị của biểu thức $T=2(ab-c)+3$.

A. $T=5$. **B.** $T=2$. **C.** $T=3$. **D.** $T=1$.

Câu 25. Cho hàm số $y=\dfrac{3x+2}{x+2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y=ax+2b-4$. Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm A và B đối xứng nhau qua gốc tọa độ O. Tính $a+b$.

A. $T=2$. **B.** $T=\dfrac{5}{2}$. **C.** $T=4$. **D.** $T=\dfrac{7}{2}$.

Câu 26. Đường thẳng d đi qua $A(2;1)$ với hệ số góc k cắt đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x-8}{x-4}$ tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi

A. $k>0$. **B.** $-1<k<1$. **C.** $k<1$ hoặc $k>3$. **D.** $k<0$ hoặc $k>4$.

Câu 27. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C). Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y=x+m-1$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB=2\sqrt{3}$.

A. $m=4\pm\sqrt{3}$. **B.** $m=4\pm\sqrt{10}$. **C.** $m=2\pm\sqrt{10}$. **D.** $m=2\pm\sqrt{3}$.

Câu 28. Tìm giá trị của tham số m để đường thẳng $d\colon y=2x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ (C) tại hai điểm A, B phân biệt sao cho đoạn AB ngắn nhất.

A. $m=0$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=1$.

Câu 29. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $(d)\colon y=mx-m-1$ cắt đồ thị $(C)\colon y=x^3-3x^2+1$ tại 3 điểm A, B, C phân biệt (B thuộc đoạn AC), sao cho tam giác AOC cân tại O (với O là gốc toạ độ).

A. $m=-1$. **B.** $m=1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-2$.

Câu 30. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\begin{cases}a+c>b+1\\ a+b+c+1<0\end{cases}$. Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ và trục Ox.

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

—-HẾT—-

§ 8. TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

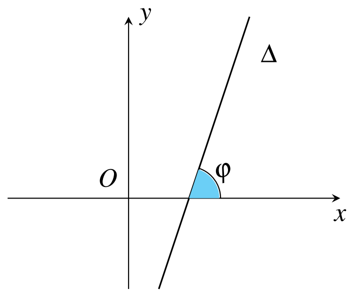
☑ Đường thẳng đi qua điểm $M(x_0;y_0)$ có hệ số góc k có phương trình là $y=k(x-x_0)+y_0$.

Lưu ý:

① $k=\tan\varphi$, với φ là góc hợp bởi đường thẳng Δ với chiều dương của trục Ox và $\varphi \neq 90^\circ$.

② Cho hai đường thẳng $\Delta_1: y=k_1x+m_1$ và $\Delta_2: y=k_2x+m_2$.

- $\Delta_1 \parallel \Delta_2 \Leftrightarrow k_1=k_2$ và $m_1 \neq m_2$.
- $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$.

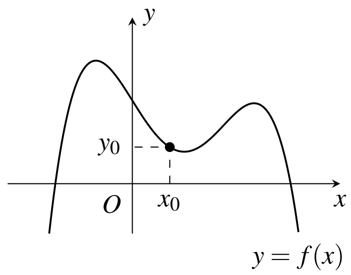


☑ Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(x_0;y_0)$:

① Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến d của đồ thị hàm số tại điểm $M(x_0;y_0)$ có phương trình là $\boxed{y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0}$ (lúc này $k=f'(x_0)$).

Trong đó

- x_0 gọi là hoành độ tiếp điểm;
- y_0 là tung độ tiếp điểm, với $y_0=f(x_0)$;
- $f'(x_0)$ gọi là hệ số góc của tiếp tuyến.



B CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

DẠNG 1. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm $(x_0;y_0)$ cho trước

Phương pháp giải.

- Tính $f'(x)$. Từ đây tính $f'(x_0)$ hoặc bấm máy $\dfrac{d}{dx}(f(x))\Big|_{x=x_0}$.
- Thay vào công thức $\boxed{y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0}$, thu gọn kết quả về dạng $y=Ax+B$.

! Trong nhiều trường hợp, đề bài chưa cho đầy đủ $(x_0;y_0)$. ta thường gặp các loại sau:

① Cho biết trước x_0 hoặc y_0. Ta chỉ việc thay giá trị đó vào hàm số $y=f(x)$, sẽ tính được đại lượng còn lại.

② Cho trước 1 điều kiện giải. Ta chỉ việc giải điều kiện đó, tìm x_0.

Ví dụ 1. Cho hàm số $y=x^4-4x^2+4$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm $M(1;1)$.

A. $y=-x+2$. **B.** $y=-2x+3$. **C.** $y=-3x+4$. **D.** $y=-4x+5$.

Lời giải

Ta có: $y'=4x^3-8x$, $y'(1)=-4$.
Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $M(1;1)$ là: $y=y'(1)(x-1)+1 \Leftrightarrow y=-4x+5$.
Chọn đáp án D

Ví dụ 2. Tiếp tuyến với đồ thị của hàm số $f(x)=\dfrac{3}{2x-1}$ tại điểm có hoành độ $x_0=2$ có hệ số góc là

A. $-\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** 2. **D.** -2.

Lời giải

Ta có $f'(x)=-\dfrac{6}{(2x-1)^2}$ nên $f'(2)=-\dfrac{6}{9}=-\dfrac{2}{3}$.
Chọn đáp án A

Ví dụ 3. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^2-3x+1$ tại điểm có hoành độ bằng 3 là

A. $y=3x-8$. **B.** $y=3x-10$. **C.** $y=-3x+10$. **D.** $y=-3x-8$.

Lời giải

Ta có $x_0=3$, nên $y_0=1$. Mà $y'=2x-3$ nên $y'(3)=3$. Phương trình tiếp tuyến $y=3x-8$.
Chọn đáp án A

Ví dụ 4. Tìm hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3-4x}{x-2}$ tại điểm có tung độ $y=-\dfrac{7}{3}$.

A. $\dfrac{9}{5}$. **B.** $-\dfrac{5}{9}$. **C.** $\dfrac{5}{9}$. **D.** -10.

Lời giải

Ta có $y'=\dfrac{5}{(x-2)^2}$. Gọi $M\left(x_0;-\dfrac{7}{3}\right)$ là tiếp điểm, ta có

$$\begin{aligned}\frac{3-4x_0}{x_0-2}=-\frac{7}{3} &\Leftrightarrow 5x_0=-5\\ &\Leftrightarrow x_0=-1.\end{aligned}$$

Vậy hệ số góc tiếp tuyến tại $M\left(x_0;-\dfrac{7}{3}\right)$ là $k=y'(-1)=\dfrac{5}{9}$.
Chọn đáp án C

Ví dụ 5. Tiếp tuyến của đường cong $(C)\colon y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ tại điểm $M(2;5)$ cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A và B. Tính diện tích tam giác OAB.

A. $\dfrac{121}{6}$. **B.** $-\dfrac{121}{6}$. **C.** $\dfrac{121}{3}$. **D.** $-\dfrac{121}{3}$.

Lời giải

Ta có $y'=\dfrac{-3}{(x-1)^2}, \forall x\neq 1$.
Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M là $k=y'(2)=-3$.
Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M là $y=-3x+11$.
Tiếp tuyến cắt các trục tọa độ tại $A\left(\dfrac{11}{3};0\right), B(0;11)$, do đó diện tích tam giác OAB là

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{11}{3}\cdot 11=\frac{121}{6}.$$

Chọn đáp án A

Ví dụ 6. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)=-x^3-3x^2+4$ tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục Ox là

A. $y=9x+9$. **B.** $y=-9x+9$ và $y=0$.
C. $y=9x-9$ và $y=0$. **D.** $y=-9x-9$.

Lời giải

Gọi phương trình tiếp tuyến có dạng: $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.
Giao điểm của đồ thị hàm số với trục Ox là: $\begin{cases}y=0\\ y=-x^3-3x^2+4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ y=0\end{cases} \vee \begin{cases}x=-2\\ y=0\end{cases}$.

- $x=1; y=0; f'(1)=-9 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=-9(x-1)\Leftrightarrow y=-9x+9$.
- $x=-2; y=0; f'(-2)=0\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=0$.

Chọn đáp án B

Ví dụ 7. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $(d)\colon y=-2x+m-1$ (m là tham số thực). Gọi k_1, k_2 là hệ số góc của tiếp tuyến tại giao điểm của (d) và (C). Khi đó $k_1\cdot k_2$ bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** 2.

Lời giải

Ta có $y'=\dfrac{1}{(x+2)^2}$.
Phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{x+1}{x+2}=-2x+m-1, (x\neq -2)\Leftrightarrow 2x^2+(6-m)x-2m+3=0.\quad(1)$
Ta thấy $\Delta=(m-6)^2-8(-2m+3)=(m+2)^2+8>0,\ \forall m\in\mathbb{R}$.
Do vậy, phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

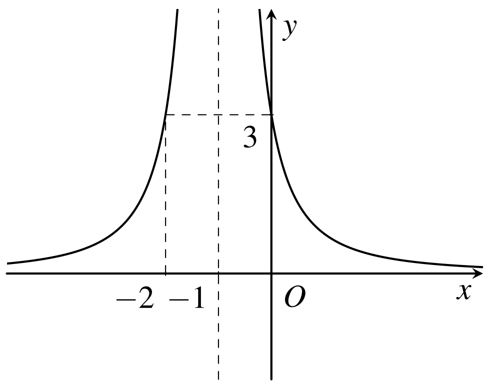
Ta có $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{m-6}{2} \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{-2m+3}{2} \end{cases}$.
Ta có

$$k_1\cdot k_2=\frac{1}{(x_1+2)^2\cdot(x_2+2)^2}=\frac{1}{\left[x_1\cdot x_2+2(x_1+x_2)+4\right]^2}=\frac{1}{\left[\dfrac{-2m+3}{2}+2\cdot\dfrac{m-6}{2}+4\right]^2}=4.$$

Chọn đáp án (B)

Ví dụ 8. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, $(a,b,c,d\in\mathbb{R}$; $c\neq 0, d\neq 0)$ có đồ thị (C). Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Biết (C) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành.

A. $x-3y+2=0$. **B.** $x+3y-2=0$.
C. $x+3y+2=0$. **D.** $x-3y-2=0$.



Lời giải

Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$. Khi đó $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

Do (C) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2 nên $-\dfrac{b}{d}=2\Leftrightarrow b=-2d$ (1).

Do đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ có tiệm cận đứng $x=-1$ nên $-\dfrac{d}{c}=-1\Leftrightarrow d=c$ (2).

Do đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ cắt trục Oy tại điểm $(0;3)$ nên $\dfrac{ad-bc}{d^2}=3$ (3).

Từ (1), (2), (3) ta có $ad+2d^2=3d^2\Leftrightarrow d(a-d)=0\Leftrightarrow a-d=0\Leftrightarrow a=d$.

Khi đó $y=\dfrac{dx-2d}{dx+d}=\dfrac{x-2}{x+1}$. Nên $y'=\dfrac{3}{(x+1)^2}$.

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm. Khi đó $x_0=2$, $y_0=0$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(2;0)$ là

$$y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0=\frac{1}{3}(x-2)+0\Leftrightarrow 3y=x-2\Leftrightarrow x-3y-2=0.$$

Chọn đáp án (D)

DẠNG 2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ khi biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng k_0

Phương pháp giải.

- Tính $f'(x)$. Giải phương trình $f'(x)=k_0$, tìm nghiệm x_0.
- Thay x_0 vào $y=f(x)$, tìm y_0.
- Viết phương trình tiếp tuyến tại $(x_0;y_0)$ theo công thức $\boxed{y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0}$.

Trong nhiều trường hợp, ta gặp các dạng sau:

① Biết tiếp tuyến song song với $\Delta\colon y = ax + b$. Khi đó $k_0 = a$ hay $f'(x_0) = a$.

② Biết tiếp tuyến vuông góc với $\Delta\colon y = ax + b$. Khi đó $k_0 \cdot a = -1$ hay $f'(x_0) = -\dfrac{1}{a}$.

③ Biết tiếp tuyến tạo với Ox một góc φ thì $k_0 = \pm \tan \varphi$.

④ Biết tiếp tuyến cắt Ox, Oy lần lượt tại hai điểm A, B thỏa $OA = m \cdot OB$ thì $k_0 = \pm\dfrac{OB}{OA}$.

⑤ Biết tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất (hoặc lớn nhất) thì $k_0 = \min f'(x)$ (hoặc $\max f'(x)$).
Đối với hàm bậc ba thì $k_{\max}$ hoặc $k_{\min}$ đạt được tại x_0 thỏa $f''(x) = 0$.

Ví dụ 9. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^4 - x^2 + 6$, biết tiếp tuyến có hệ số góc $k = 6$.

A. $y = 6x + 6$. **B.** $y = -6x + 1$. **C.** $y = -6x + 10$. **D.** $y = 6x + 10$.

Lời giải

Ta có $y' = -4x^3 - 2x$. Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Khi đó

$$k = 6 \Leftrightarrow y'(x_0) = 6 \Leftrightarrow -4x_0^3 - 2x_0 = 6 \Leftrightarrow x_0 = -1.$$

Vậy $M(-1; 4)$. Phương trình tiếp tuyến là

$$\Delta\colon y = 6(x+1) + 4 \Leftrightarrow \Delta\colon y = 6x + 10.$$

Chọn đáp án D

Ví dụ 10. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 9x + 5$ có hệ số góc lớn nhất là

A. $y = 12x + 18$. **B.** $y = 9x - 9$. **C.** $y = 12x + 6$. **D.** $y = 4x + 4$.

Lời giải

Ta có $f'(x) = -3x^2 - 6x + 9 = -3(x^2 + 2x + 1) + 12 = -3(x+1)^2 + 12 \le 12$.
Hệ số góc lớn nhất là 12 khi $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -6$.
Vậy phương trình tiếp tuyến: $y = 12(x+1) - 6 \Leftrightarrow y = 12x + 6$.
Chọn đáp án C

Ví dụ 11. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 5$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số có hệ số góc nhỏ nhất là

A. $y = -x + \dfrac{17}{3}$. **B.** $y = -x + \dfrac{23}{3}$. **C.** $y = 5$. **D.** $y = \dfrac{19}{3}$.

Lời giải

• $y' = x^2 - 4x + 3$ nên $\min y' = y'(2) = -1$.

• $\Delta\colon y = y'(2)(x-2) + y(2) \Rightarrow \Delta\colon y = -x + \dfrac{23}{3}$.

Chọn đáp án B

Ví dụ 12. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số song song với đường thẳng $y = -2x - 1$. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) là

A. $y = -2x + \dfrac{10}{3}; y = -2x - 22$.
B. $y = -2x - 10; y = -2x - \dfrac{22}{3}$.
C. $y = -2x + \dfrac{10}{3}; y = -2x + \dfrac{22}{3}$.
D. $y = -2x + \dfrac{10}{3}; y = -2x - \dfrac{22}{3}$.

Lời giải

Ta có $y' = x^2 - 6x + 3$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(x_0; y_0)$ là $y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0)$ (Δ). Đường thẳng Δ song song với đường thẳng $y = -2x - 1$ suy ra $y'(x_0) = -2 \Leftrightarrow x_0^2 - 6x_0 + 3 = -2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ x_0 = 5 \end{array}\right.$.

Với $x_0 = 1$, $\Delta: y = -2(x-1) + \dfrac{4}{3} = -2x + \dfrac{10}{3}$.

Với $x_0 = 5$, $\Delta: y = -2(x-5) - \dfrac{52}{3} = -2x - \dfrac{22}{3}$.

Chọn đáp án D

Ví dụ 13. Cho $(C_m): y = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{3m+4}{2}x^2 + 3m + 3$. Gọi $A \in (C_m)$ có hoành độ 1. Tìm m để tiếp tuyến tại A song song với đường thẳng $d: y = 6x + 2017$?

A. $m = -3$. **B.** $m = 3$. **C.** $m = 5$. **D.** $m = 0$.

Lời giải

Ta có $y' = x^3 - (3m+4)x \Rightarrow y'(1) = -3m - 3$.
Gọi Δ là tiếp tuyến tại A của $(C_m) \Rightarrow$ hệ số góc của Δ là $y'(1) = -3m - 3$.
Vì $\Delta \parallel d$ nên $y'(1) = 6 \Leftrightarrow -3m - 3 = 6 \Leftrightarrow m = -3$.
Thử lại với $m = -3 \Rightarrow y = \dfrac{1}{4}x^3 + \dfrac{5}{2}x^2 - 6, A\left(1; -\dfrac{13}{4}\right)$.
Tiếp tuyến $\Delta: y = y'(1)(x-1) - \dfrac{13}{4} \Rightarrow \Delta: y = 6(x-1) - \dfrac{13}{4}$

$\Rightarrow \Delta: y = 6x - \dfrac{37}{4}$ (thỏa mãn $\Delta \parallel d$).

Chọn đáp án A

Ví dụ 14. Tìm điểm M có hoành độ âm trên đồ thị $(C)\colon y = \dfrac{1}{3}x^3 - x + \dfrac{2}{3}$ sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}$.

A. $M(-2; -4)$. **B.** $M\left(-1; \dfrac{4}{3}\right)$. **C.** $M\left(2; \dfrac{4}{3}\right)$. **D.** $M(-2; 0)$.

Lời giải

Ta có $y' = x^2 - 1$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là hoành độ tiếp điểm. Do tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ nên ta có $y'(x_0) = 3 \Leftrightarrow x_0^2 - 1 = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -2 \\ x_0 = 2. \end{array}\right.$

Do $x_0 < 0$ nên $x_0 = -2 \Rightarrow M(-2; 0)$.

Chọn đáp án D

Ví dụ 15. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3$ có đồ thị (C). Số tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{9}x + 2017$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Tập xác định của hàm số $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = -3x^2 + 6x$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của đồ thị (C) thỏa mãn bài toán.

Từ giả thiết suy ra

$$y'(x_0) \cdot \frac{1}{9} = -1 \Leftrightarrow -3x_0^2 + 6x_0 = -9 \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \\ x_0 = 3. \end{array}\right.$$

- Khi $x_0 = -1$ suy ra $y_0 = 1$ nên phương trình tiếp tuyến tại M là $y = -9x - 8$.

- Khi $x_0 = 3$ suy ra $y_0 = -3$ nên phương trình tiếp tuyến tại M là $y = -9x + 24$.

Vậy số lượng tiếp tuyến thỏa mãn bài toán là 2.

Chọn đáp án A

Ví dụ 16. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu tiếp tuyến của (C) cắt trục Ox, Oy lần lượt tại hai điểm A và B thỏa mãn điều kiện $OA = 4OB$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

- $y' = -\frac{1}{(x-1)^2} < 0, \forall x \neq 1$.
- Do $OA = 4OB$ nên suy ra $k = f'(x_0) = \pm\frac{OB}{OA} = \pm\frac{1}{4}$.
- Với $f'(x_0) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{(x_0-1)^2} = \frac{1}{4}$ (vô nghiệm).

  Với $f'(x_0) = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{(x_0-1)^2} = -\frac{1}{4}$ (có hai nghiệm phân biệt).
- Vậy, có hai tiếp tuyến thỏa yêu cầu.

Chọn đáp án A

DẠNG 3. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$, biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(x_A; y_A)$

Phương pháp giải.

- Gọi $d\colon y = k(x - x_A) + y_A \quad (1)$ là đường thẳng đi qua điểm A và có hệ số góc k.
- d là tiếp tuyến khi hệ $\begin{cases} f(x) = k(x - x_A) + y_A \\ f'(x) = k \end{cases} \quad (2)$ có nghiệm x.
- Giải hệ (2), tìm x và k.
- Thay k vào (1), ta được kết quả.

Ví dụ 17. Cho hàm số $y = x^3 - 9x^2 + 17x + 2$ có đồ thị (C). Qua điểm $M(-2;5)$ kẻ được tất cả bao nhiêu tiếp tuyến đến (C)?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Tiếp tuyến (Δ) tại $M(x_0; x_0^3 - 9x_0^2 + 17x_0 + 2)$ của (C) có dạng

$$y = \left(3x_0^2 - 18x_0 + 17\right)(x - x_0) + x_0^3 - 9x_0^2 + 17x_0 + 2.$$

Vì (Δ) qua $M(-2;5)$ nên ta có

$$\begin{aligned} & 5 = \left(3x_0^2 - 18x_0 + 17\right)(-2 - x_0) + x_0^3 - 9x_0^2 + 17x_0 + 2 \\ \Leftrightarrow\ & 2x_0^3 - 3x_0^2 - 36x_0 + 37 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1 - 3\sqrt{33}}{4} \\ x = 1 \\ x = \dfrac{1 + 3\sqrt{33}}{4}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy qua $M(-2;5)$ kẻ được 3 tiếp tuyến đến (C).

Chọn đáp án D

Ví dụ 18. Cho đường cong $(C)\colon y = x^4 - 4x^2 + 2$ và điểm $A(0;a)$. Nếu qua A kẻ được 4 tiếp tuyến với (C) thì a phải thỏa mãn điều kiện

A. $a \in \left(2; \dfrac{10}{3}\right)$. **B.** $a \in (2; +\infty)$.

C. $a \in (-\infty; 2) \cup \left(\dfrac{10}{3}; +\infty\right)$. **D.** $a \in \left(-\infty; \dfrac{10}{3}\right)$.

Lời giải

Ta có $y' = 4x^3 - 8x$. Gọi tọa độ tiếp điểm là $M_0(x_0; x_0^4 - 4x_0^2 + 2) \Rightarrow y'(x_0) = 4x_0^3 - 8x_0$. Do đó, phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M_0 là

$$y = (4x_0^3 - 8x_0)(x - x_0) + x_0^4 - 4x_0^2 + 2.$$

Vì tiếp tuyến đi qua điểm $A(0;a)$ nên ta có

$$a=(4x_0^3-8x_0)(0-x_0)+x_0^4-4x_0^2+2 \Leftrightarrow a=-3x_0^4+4x_0^2+2. \quad (*)$$

Xét $f(t)=-3t^4+4t^2+2$, có $f'(t)=-12t^3+8t$. Do đó, $f'(t)=0 \Leftrightarrow t=0, t=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Ta có bảng biến thiên

t	$-\infty$		$-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$		0		$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{10}{3}$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\dfrac{10}{3}$	$\searrow$	$-\infty$

Để qua $A(0;a)$ kẻ được 4 tiếp tuyến đến (C) thì phương trình $(*)$ phải có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow a \in \left(2;\dfrac{10}{3}\right)$.

Chọn đáp án (A)

Ví dụ 19. Đường thẳng $x+y=2m$ là tiếp tuyến của đường cong $y=-x^3+2x+4$ khi m bằng

A. -3 hoặc 1. **B.** 1 hoặc 3. **C.** -1 hoặc 3. **D.** -3 hoặc -1.

Lời giải

$x+y=2m \Leftrightarrow y=-x+2m$ (d). Đường thẳng d tiếp xúc với đường cong $y=-x^3+2x+4$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases}-3x^2+2=-1\\ -x^3+2x+4=-x+2m\end{cases}$$

Suy ra $m=1$ hoặc $m=3$.

Chọn đáp án (B)

Ví dụ 20. Cho hàm số $y=\dfrac{2x}{x+1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(0;a)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của a để từ A kẻ được hai tiếp tuyến AM, AN đến (C) với M, N là các tiếp điểm và $MN=4$. Tổng các phần tử của S bằng bao nhiêu?

A. 4. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 1.

Lời giải

Ta có $y'=\dfrac{2}{(x+1)^2}$.

Gọi d là đường thẳng đi qua $A(0;a)$ và có hệ số góc k, ta có $d\colon\ y=kx+a$.

Đường thẳng d là tiếp tuyến của (C) khi chỉ khi hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{2x}{x+1}=kx+a & (1)\\ \dfrac{2}{(x+1)^2}=k & (2)\end{cases}$ có nghiệm.

Thế (2) vào (1), ta có $\dfrac{2x}{x+1}=\dfrac{2x}{(x+1)^2}+a \Leftrightarrow (a-2)x^2+2ax+a=0 \quad (*)$

Yêu cầu bài toán thỏa khi chỉ khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt (lưu ý phương trình không thể nhận $x=-1$ làm nghiệm) $\Leftrightarrow \begin{cases} a-2\neq 0 \\ \Delta'>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 2 \\ a>0. \end{cases}$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $(*)$, suy ra $M(x_1;2-\dfrac{2}{x_1+1})$, $N(x_2;2-\dfrac{2}{x_2+1})$.

Ta có

$$\begin{aligned} MN^2 &= (x_2-x_1)^2+4\frac{(x_1-x_2)^2}{[x_1x_2+(x_1+x_2)+1]^2} \\ &= \left[\frac{8a}{(a-2)^2}\right]\left[1+(a-2)^2\right] \\ &= \frac{8(a^3-4a^2+5a)}{a^2-4a+4}. \end{aligned}$$

Trong đó

- ☑ $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\dfrac{4a^2}{(a-2)^2}-\dfrac{4a}{a-2}=\dfrac{8a}{(a-2)^2}$.
- ☑ $x_1x_2+(x_1+x_2)+1=\dfrac{a}{a-2}-\dfrac{2a}{a-2}+1=-\dfrac{2}{a-2}$.

Mà $MN=4\Leftrightarrow 16=\dfrac{8(a^3-4a^2+5a)}{a^2-4a+4}\Leftrightarrow a^3-6a^2+13a-8=0\Leftrightarrow a=1$.

Chọn đáp án D

Ví dụ 21. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ (1). Biết trên trục tung có đúng hai điểm M,N mà từ đó chỉ kẻ được tới đồ thị của hàm số (1) đúng một tiếp tuyến. Độ dài đoạn MN là

A. $\sqrt{5}$. **B.** 2. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

$y'=\dfrac{-2}{(x-1)^2}$, tiếp tuyến tại điểm có hoành độ x_0 có phương trình

$$y=\frac{-2}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\frac{x_0+1}{x_0-1}\ (\Delta)$$

Đường thẳng Δ đi qua điểm $K(0;m)$ khi

$$m=\frac{-2}{(x_0-1)^2}(-x_0)+\frac{x_0+1}{x_0-1}\Leftrightarrow (m-1)x_0^2-2(m+1)x_0+m+1=0\ (2)$$

Từ K kẻ được đúng một tiếp tuyến khi phương trình (2) có đúng một nghiệm

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ \Delta'=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-1 \end{array}\right.$$

Khi đó, $M(0;1), N(0;-1)$, $MN=2$.

Chọn đáp án B

DẠNG 4. Bài tập tổng hợp

Phương pháp giải.

Ví dụ 22. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{2x+3}$ có đồ thị (C). Đường thẳng d có phương trình $y=ax+b$ là tiếp tuyến của (C), biết d cắt trục hoành tại A và cắt trục tung tại B sao cho tam giác OAB cân tại O, với O là gốc tọa độ. Tính $a+b$.

A. -1. **B.** -2. **C.** 0. **D.** -3.

Lời giải

Hàm số $y=\dfrac{x+2}{2x+3}$ có $y'=-\dfrac{1}{(2x+3)^2}<0$.

Gọi tiếp điểm của tiếp tuyến cần tìm là $M\left(x_0;\dfrac{x_0+2}{2x_0+3}\right)$. Vì tiếp tuyến tại M của đồ thị (C) tạo với hai trục tọa độ một tam giác cân nên $f'(x_0)=\pm 1$ hay $-\dfrac{1}{(2x_0+3)^2}=\pm 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-1 \\ x_0=-2 \end{array}\right.$.

Ta xét hai trường hợp sau

TH 1. Nếu $x_0=-1$ thì tiếp điểm $M(-1;1)$. Khi đó tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M là $y=-(x+1)+1$ hay $y=-x$ loại (vì đường thẳng này không tạo với hai trục tọa độ thành một tam giác).

TH 2. Nếu $x_0=-2$ thì tiếp điểm $M(-2;0)$. Khi đó tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M là $y=-(x+2)$ hay $y=-x-2$. Hay $a=-1, b=-2$ hay $a+b=-3$.

Vậy $a+b=-3$.

Chọn đáp án D

Ví dụ 23. Cho các hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Nếu hệ số góc tiếp tuyến của các đồ thị hàm số đã cho tại điểm có hoành độ x_0 bằng nhau và khác không thì

A. $f(x_0)>\dfrac{1}{4}$. **B.** $f(x_0)\le\dfrac{1}{4}$. **C.** $f(x_0)\le\dfrac{1}{2}$. **D.** $f(x_0)<\dfrac{1}{4}$.

Lời giải

Gọi k_1, k_2, k_3 lần lượt là hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tại điểm có hoành độ x_0 . Khi đó $k_1=f'(x_0)$, $k_2=g(x_0)$.

Ta có
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{(g(x))^2}\Rightarrow k_3=\frac{f'(x_0)g(x_0)-g'(x_0)f(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Mặt khác $k_1=k_2=k_3\neq 0 \Rightarrow f'(x_0)=g'(x_0)=\dfrac{f'(x_0)g(x_0)-g'(x_0)f(x_0)}{(g(x_0))^2}=k$.

Ta có
$$\frac{k\cdot g(x_0)-k\cdot f(x_0)}{(g(x_0))^2}=k\Leftrightarrow (g(x_0))^2-g(x_0)+f(x_0)=0. \quad (1)$$

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi $1^2-4f(x_0)\ge 0\Leftrightarrow f(x_0)\le\dfrac{1}{4}$. Vậy $f(x_0)\le\dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án B

Ví dụ 24. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{2x-1}$, có đồ thị (H). Biết $A\left(x_1;y_1\right)$, $B\left(x_2;y_2\right)$ là hai điểm phân biệt thuộc (H) sao cho tiếp tuyến của (H) tại A, B song song với nhau. Tìm độ dài nhỏ nhất của đoạn thẳng AB.

A. $2\sqrt{6}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** $3\sqrt{2}$.

Lời giải

Ta có $y'=\dfrac{-3}{(2x-1)^2}$, $\forall x\neq\dfrac{1}{2}$.
Gọi $A\left(x_1;\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2\left(2x_1-1\right)}\right)$ và $B\left(x_2;\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2\left(2x_2-1\right)}\right)$, với $x_1\neq x_2\neq\dfrac{1}{2}$.
Vì tiếp tuyến của (H) tại A, B song song với nhau nên

$$\frac{-3}{\left(2x_1-1\right)^2}=\frac{-3}{\left(2x_2-1\right)^2}\Leftrightarrow\left(2x_1-1\right)^2=\left(2x_2-1\right)^2\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&2x_1-1=-2x_2+1\\&2x_1-1=2x_2-1\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x_2=1-x_1\\&x_2=x_1\text{ (loại)}.\end{aligned}\right.$$

$\Rightarrow B\left(1-x_1;\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2\left(1-2x_1\right)}\right)$. Khi đó, theo bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$AB^2=\left(1-2x_1\right)^2+\frac{9}{\left(1-2x_1\right)^2}\geq 6.$$

Vậy $\min AB=\sqrt{6}$ khi và chỉ khi $x_1=2$, khi đó $A(2;1)$ và $B(-1;1)$.
Chọn đáp án C

Ví dụ 25. Cho hàm số $y=\dfrac{-x+1}{2x-1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $(d)\colon y=x+m$. Với mọi giá trị của m đường thẳng (d) luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B. Gọi k_1,k_2 lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A và B. Giá trị nhỏ nhất của $T=k_1^{2020}+k_2^{2020}$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d)

$$\frac{-x+1}{2x-1}=x+m\Leftrightarrow 2x^2+2mx-m-1=0,\left(x\neq\frac{1}{2}\right).\qquad(1)$$

Gọi x_1,x_2 là nghiệm của phương trình (1), ta có $\begin{cases}x_1+x_2=-m\\ x_1x_2=-\dfrac{m+1}{2}.\end{cases}\qquad(2)$

Ta được $\begin{cases}k_1=-\dfrac{1}{(2x_1-1)^2}\\ k_2=-\dfrac{1}{(2x_2-1)^2}.\end{cases}$

Ta thấy

$$\begin{aligned}&k_1^{2020}+k_2^{2020}\\=&\frac{1}{(2x_1-1)^{4040}}+\frac{1}{(2x_2-1)^{4040}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq 2\sqrt{\frac{1}{(2x_1-1)^{4040}}\cdot\frac{1}{(2x_2-1)^{4040}}}\\
&= 2\frac{1}{[(2x_1-1)(2x_2-1)]^{2020}}\\
&= 2\frac{1}{[4x_1x_2-2(x_1+x_2)+1]^{2020}}\\
&\overset{(2)}{=} 2.
\end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của T bằng 2.
Chọn đáp án B

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

1	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	7	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	13	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	19	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	25	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
2	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	8	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	14	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	20	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	26	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
3	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	9	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	15	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	21	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	27	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
4	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	16	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	22	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	28	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
5	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	11	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	17	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	23	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	29	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
6	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	12	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	18	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	24	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	30	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

Câu 1. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=-x^2+4x+7$ tại điểm $A(-1;2)$ có hệ số góc là

A. 2. **B.** 4. **C.** -2. **D.** 6.

Câu 2. Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x-2}{2x-1}$ tại điểm có hoành độ 2 là

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** -1. **C.** $\dfrac{1}{9}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Câu 3. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=-2x^4+x^2+3$ tại điểm $M(1;2)$ là

A. $y=-6x+8$. **B.** $y=-6x+6$. **C.** $y=-6x-6$. **D.** $y=-6x-8$.

Câu 4. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)=x^3-2x^2+3x+1$ tại điểm có hoành độ $x_0=2$.

A. $y=-x-7$. **B.** $y=7x-14$. **C.** $y=7x-7$. **D.** $y=-x+9$.

Câu 5. Số tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^4+2x^2+2$ tại điểm có tung độ bằng 2 là

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 6. Cho hàm số $y=-x^3+3x-2$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.

A. $y=-2x+1$. **B.** $y=2x+1$. **C.** $y=3x-2$. **D.** $y=-3x-2$.

Câu 7. Cho hàm số $y=-x^3+3x-2$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M, biết M là giao điểm của (C) với đường thẳng có phương trình $y=-x-2$ và $x_M>0$.

A. $y=-9x-12$. **B.** $y=-9x+12$. **C.** $y=-9x+14$. **D.** $y=-9x-14$.

Câu 8. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}+3x^2-2(\mathscr{C})$ có hệ số góc $k=-9$ là đường thẳng

A. $(d): y-16=-9(x+3)$. **B.** $(d): y=-9(x+3)$.

C. $(d): y+16=-9(x+3)$. **D.** $(d): y-16=-9(x-3)$.

Câu 9. Số tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2-8x+1$ song song với đường thẳng $(d): y=x+28$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 10. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x+1}$ song song với đường thẳng $y=5x+17$ có phương trình là

A. $y=5x+17; y=5x+3$. **B.** $y=5x+3$.

C. $y=5x-3$. **D.** $y=5x+17; y=5x-3$.

Câu 11. Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=-x^3+2x^2$ song song với đường thẳng $y=x$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 12. Cho đường cong (C) có phương trình $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$. Tìm phương trình tiếp tuyến của đường cong (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: y=-4x+3$.

A. $y=\frac{1}{4}x-\frac{7}{4}$.
B. $y=\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$ và $y=\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$.
C. $y=\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$ và $y=\frac{1}{4}x+\frac{13}{4}$.
D. $y=\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$.

Câu 13. Tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$ vuông góc với đường thẳng $x-3y+1=0$ có phương trình là

A. $x-3y+3=0$. **B.** $3x-y-3=0$. **C.** $3x+y-3=0$. **D.** $3x+y-1=0$.

Câu 14. Cho hàm số $y=\frac{x^2+x}{x-2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d\colon y=-2x$. Biết d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B. Tích các hệ số góc của các tiếp tuyến của (C) tại A, B bằng

A. 0. **B.** 4. **C.** $-\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

Câu 15. Cho hàm số $y=4x+2\cos 2x$ có đồ thị là (C). Hoành độ của các điểm trên (C) mà tại đó tiếp tuyến của (C) song song hoặc trùng với trục hoành là

A. $x=\frac{\pi}{4}+k\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$.
B. $x=\pi+k\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$.
C. $x=\frac{\pi}{2}+k\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$.
D. $x=k2\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$.

Câu 16. Ký hiệu d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^4-4x^2+2m^2+1\quad(C)$ tại giao điểm của (C) với trục hoành đồng thời (C) đi qua điểm $A(1;0)$. Hỏi có bao nhiêu đường thẳng d thỏa mãn bài toán?

A. 3. **B.** 2. **C.** 8. **D.** 4.

Câu 17. Đồ thị hàm số $y=\frac{ax+b}{x-1}$ cắt trục tung tại điểm $A(0;-1)$, tiếp tuyến của đồ thị tại điểm A có hệ số góc $k=-3$. Giá trị của a và b là

A. $a=1;b=1$. **B.** $a=2;b=2$. **C.** $a=2;b=1$. **D.** $a=1;b=2$.

Câu 18. Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+(m+1)x-m$. Gọi A là giao điểm của đồ thị hàm số với trục Oy. Tìm giá trị của m để tiếp tuyến của đồ thị tại A vuông góc với đường thẳng $y=2x-3$.

A. $m=-\frac{3}{2}$. **B.** $m=-\frac{1}{2}$. **C.** $m=-3$. **D.** $m=1$.

Câu 19. Cho parabol $(P): y=x^2-3x$. Tiếp tuyến của (P) đi qua điểm $A(5;10)$ có phương trình là

A. $y=5x-15$. **B.** $y=7x-25$. **C.** $y=x+5$. **D.** $y=3x-5$.

Câu 20. Cho đồ thị $(C): y=\frac{x-1}{2x}$ và d_1, d_2 là hai tiếp tuyến của (C) song song với nhau. Khoảng cách lớn nhất giữa d_1 và d_2 là

A. 3. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** 2. **D.** $2\sqrt{2}$.

Câu 21. Biết đồ thị hàm số $(C)\colon y=x^3-3x+2$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $(C')\colon y=ax^2+b$ tại điểm có hoành độ $x\in(0;2)$. Giá trị lớn nhất của $S=a+b$ là

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** -3.

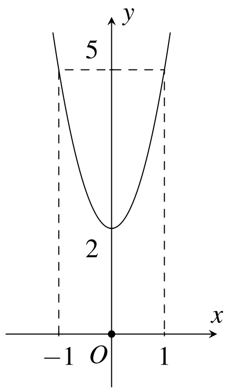
Câu 22. Cho các hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=\frac{f(x)+3}{g(x)+1}$. Hệ số góc tiếp tuyến của các đồ thị hàm số đã cho tại điểm có hoành độ $x=1$ bằng nhau và khác 0. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $f(1)\le-\frac{11}{4}$. **B.** $f(1)<-\frac{11}{4}$. **C.** $f(1)>-\frac{11}{4}$. **D.** $f(1)\ge-\frac{11}{4}$.

Câu 23. Cho hàm số $y=-x^3+3x^2+2$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) mà có hệ số góc lớn nhất là

A. $y=3x+1$. **B.** $y=-3x+1$. **C.** $y=3x-1$. **D.** $y=-3x-1$.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ có đồ thị là (C). Biết đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng $x = 1$.



A. $y = x + 2$. **B.** $y = x + 4$. **C.** $y = 5x + 2$. **D.** $y = 5x - 2$.

Câu 25. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (m-1)x + 2m$ có đồ thị là (C_m). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m để từ $M(1;2)$ kẻ được đúng hai tiếp tuyến với (C_m). Tính tổng các phần tử của S.

A. $\dfrac{4}{3}$. **B.** $\dfrac{81}{109}$. **C.** $\dfrac{3}{4}$. **D.** $\dfrac{217}{81}$.

Câu 26. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị là (C). Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm thuộc đồ thị (C) với hoành độ $x_0 = 0$ cắt hai đường tiệm cận của đồ thị (C) tại hai điểm A, B. Tính diện tích tam giác IAB, với I là giao điểm hai đường tiệm cận của đồ thị (C).

A. $S_{\triangle IAB} = 6$. **B.** $S_{\triangle IAB} = 3$. **C.** $S_{\triangle IAB} = 12$. **D.** $S_{\triangle IAB} = 6\sqrt[3]{2}$.

Câu 27. Đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2$ có bao nhiêu tiếp tuyến song song với trục Ox.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 28. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$ có đồ thị (C) và điểm $A(0;a)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của a để có đúng hai tiếp tuyến của (C) đi qua A. Tích các giá trị các phần tử của S là

A. 1. **B.** -1. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 29. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{7}{2}x^2$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1;y_1)$, $N(x_2;y_2)$ (M, N khác A) thỏa mãn $y_1 - y_2 = 6(x_1 - x_2)$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 30. Cho hàm số $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 3$ có đồ thị (C). Tồn tại hai tiếp tuyến của (C) phân biệt và có cùng hệ số góc k, đồng thời đường thẳng đi qua các tiếp điểm của hai tiếp tuyến đó cắt các trục Ox, Oy tương ứng tại A và B sao cho $OA = 2017 \cdot OB$. Hỏi có bao nhiêu giá trị của k thoả mãn yêu cầu bài toán?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

—-HẾT—-

§ 9. ĐỀ TỔNG ÔN

A ĐỀ SỐ 1

Câu 1. Xét các khẳng định sau

① Nếu hàm số $y = f(x)$ có giá trị cực đại là M và giá trị cực tiểu là m thì $M > m$.

② Đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, $(a \neq 0)$ luôn có ít nhất một điểm cực trị.

③ Tiếp tuyến (nếu có) tại điểm cực trị của đồ thị hàm số luôn song song với trục hoành.

Số khẳng định **đúng** là

A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

Câu 2. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{2x-5}{x-3}$ trên đoạn $[0;2]$.

A. $\max\limits_{x\in[0;2]} y = 3$. B. $\max\limits_{x\in[0;2]} y = 2$. C. $\max\limits_{x\in[0;2]} y = \dfrac{5}{3}$. D. $\max\limits_{x\in[0;2]} y = 1$.

Câu 3. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + 4x$ với trục hoành là

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định $\mathscr{D}$ $(\mathscr{D} \subset \mathbb{R})$ đạt cực tiểu tại x_0. Hãy chọn khẳng định đúng

A. Hàm số đã cho có giá trị bé nhất bằng $f(x_0)$.

B. Nếu hàm số có đạo hàm tại x_0 thì tiếp tuyến với đồ thị tại điểm $M(x_0; f(x_0))$ song song với trục hoành.

C. Nếu hàm số có đạo hàm tại x_0 thì tiếp tuyến với đồ thị tại điểm $M(x_0; f(x_0))$ song song với trục tung.

D. Hàm số có đạo hàm cấp một tại x_0 và $f'(x_0) = 0$.

Câu 5. Biết rằng hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0. Hãy chọn khẳng định đúng?

A. Đạo hàm $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua x_0 .

B. Đạo hàm $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x đi qua x_0.

C. $f'(x_0) = 0$.

D. $f''(x_0) = 0$.

Câu 6. Giá trị bé nhất của hàm số $y = \dfrac{x-2}{x+3}$ trên đoạn $[-8;-4]$ bằng

A. 2. B. 6. C. -2. D. -6.

Câu 7. Hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2016x + 2017$ có 2 điểm cực trị là x_1, x_2 thì tích $x_1 \cdot x_2$ có giá trị bằng

A. 2016. B. 672. C. -672. D. -2016.

Câu 8. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-2}$ tạo với các trục toạ độ một đa giác có diện tích bằng (đơn vị diện tích)

A. 1. B. 3. C. 2. D. 4.

Câu 9. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ tại giao điểm của đồ thị với trục tung có phương trình là

A. $y = 3x + 1$. B. $y = 3x - 2$. C. $y = 3x = 2$. D. $y = 3x - 1$.

Câu 10. Hàm số $y = \sqrt{x^3 + x - 2} + x$ là hàm số đồng biến trên khoảng

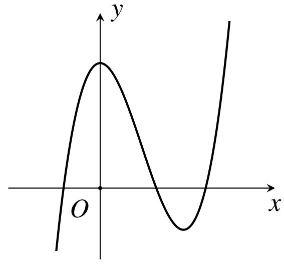
A. $(-1;0)$. B. $(-1;+\infty)$. C. $(0;1)$. D. $(1;+\infty)$.

Câu 11. Cho hàm số có bảng biến thiên như hình bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

A. $(-2;0)$. **B.** $(2;+\infty)$.
C. $(0;2)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Câu 12. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên?



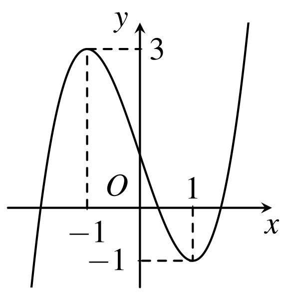
A. $y=x^3-3x^2+3$. **B.** $y=-x^3+3x^2+3$.
C. $y=x^4-2x^2+3$. **D.** $y=-x^4+2x^2+3$.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

A. $x=2$. **B.** $x=1$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=-3$.

Câu 14. Đồ thị trong hình bên dưới là đồ thị của hàm số nào?



A. $y=x^3-6x+1$.
B. $y=2x^3-3x^2+1$.
C. $y=-x^3+3x+1$.
D. $y=x^3-3x+1$.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathscr{D}$ có bảng biến thiên như hình bên dưới. Hãy chọn khẳng định đúng?

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

A. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.
B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị bé nhất bằng -1.
C. Hàm số có đúng một cực trị.
D. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=1$.

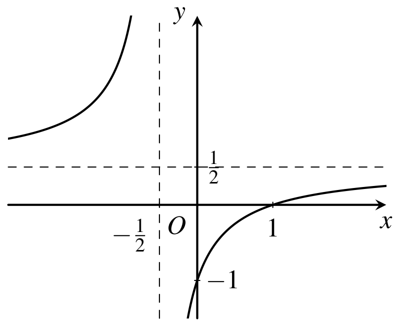
Câu 16. Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ tại giao điểm của đồ thị với trục tung bằng

A. 1. **B.** -1. **C.** 2. **D.** -1.

Câu 17. Đường thẳng có phương trình $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số nào bên dưới?

A. $y=\dfrac{1-2x^2}{1-x-x^2}$. **B.** $y=\dfrac{2x^2+1}{1-x-x^2}$. **C.** $y=\dfrac{x-1}{2x-1}$. **D.** $y=\dfrac{2x-1}{1-x}$.

Câu 18. Đồ thị trong hình bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?



A. $y=\dfrac{x+1}{1-2x}$. **B.** $y=\dfrac{x+1}{2x+1}$.

C. $y=\dfrac{x+1}{2x-1}$. **D.** $y=\dfrac{x-1}{2x+1}$.

Câu 19. Số điểm cực tiểu của hàm số $y=\sqrt{16-x^{2016}}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2016. **D.** 2015.

Câu 20. Biết rằng đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+4$ cắt đường thẳng có phương trình $y=7-x$ tại một điểm duy nhất. Tung độ giao điểm y_0 đó là

A. $y_0=3$. **B.** $y_0=4$. **C.** $y_0=5$. **D.** $y_0=6$.

Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Số nghiệm thực của phương trình $2f(x)-3=0$ là

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 22. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-3x+2$ trên đoạn $[-3;3]$ là

A. -16. **B.** 20. **C.** 0. **D.** 4.

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x+2)^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 24. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
y	2	$\searrow$	$-4 \,\|\, +\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

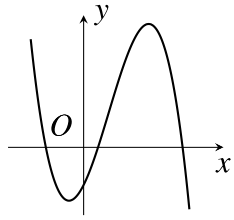
Câu 25. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=x+\sqrt{1-x^2}$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 26. Số điểm cực trị của hàm số $y=\sin^2 x-\cos x$ trên đoạn $[0;\pi]$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 27. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên dưới. Hãy chọn khẳng định đúng



A. $a > 0; b > 0; c > 0; d < 0$.

B. $a < 0; b < 0; c > 0; d < 0$.

C. $a > 0; b > 0; c > 0; d > 0$.

D. $a < 0; b > 0; c > 0; d < 0$.

Câu 28. Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x - 1 - \sqrt{x^2 + x + 3}}{x^2 - 5x + 6}$.

A. $x = -3$ và $x = -2$. **B.** $x = 3$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = 3$ và $x = 2$.

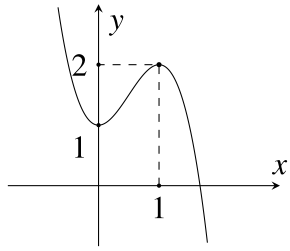
Câu 29. Hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m - 1)x + m^3$ đạt cực đại tại điểm $x = 1$ thì giá trị của tham số m bằng

A. $m = 0$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 3 \end{array}\right.$. **C.** $m = 3$. **D.** $m = -3$.

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + ax + b$ $(a \neq b)$. Biết rằng tiếp tuyến với đồ thị tại các điểm có hoành độ $x = a$ và $x = b$ song song với nhau. Khi đó giá trị $f(1)$ bằng

A. $f(1) = 1$. **B.** $f(1) = a + b$. **C.** $f(1) = -1$. **D.** $f(1) = a - b$.

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau. Điều kiện của tham số m để đồ thị hàm số $y = |2f(x) - m|$ có 5 điểm cực trị là



A. $1 \leq m \leq 2$. **B.** $2 \leq m \leq 4$.

C. $1 < m < 2$. **D.** $2 < m < 4$.

Câu 32. Giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{mx + 4}{x + m}$ nghịch biến trong khoảng $(-\infty; 1)$ là

A. $-2 < m \leq -1$. **B.** $-2 \leq m \leq 2$. **C.** $-1 \leq m < 2$. **D.** $-2 < m < 2$.

Câu 33. Hàm số $y = 2x^3 - 3(m + 2)x^2 + 6(m + 1)x + m^{2016} + 2017$ đồng biến trong khoảng $(5; +\infty)$ thì tham số m thoả điều kiện

A. $m > 4$. **B.** $m < 4$. **C.** $m \leq 4$. **D.** $m \geq 4$.

Câu 34. Với giá trị nào của tham số m thì đồ thị hàm số $y = x^3 - (m^2 - m - 2)x^2 + (m^{2016} - 2017)x + 2018$ có 2 điểm cực trị cách đều trục tung?

A. $m = 1$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 2 \end{array}\right.$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = -1$.

Câu 35. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + ax + b$ có điểm cực tiểu $A(2; -2)$ thì tổng $(a + b)$ có giá trị bằng

A. -2. **B.** 2. **C.** -3. **D.** 3.

Câu 36. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên mỗi nửa khoảng $(-\infty; -2]$ và $[2; +\infty)$, có bảng biến thiên như hình bên. Tìm tập hợp các giá trị m để phương trình $f(x) = m$ có hai nghiệm phân biệt.

x	$-\infty$		-2		2		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$				$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	22		2	$\searrow$	$\frac{7}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

A. $\left(\dfrac{7}{4}; 2\right] \cup [22; +\infty)$. **B.** $\left(\dfrac{7}{4}; +\infty\right)$. **C.** $[22; +\infty)$. **D.** $\left[\dfrac{7}{4}; 2\right] \cup [22; +\infty)$.

Câu 37. Biết $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ là hai điểm thuộc hai nhánh khác nhau của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ sao cho đoạn thẳng AB có độ dài nhỏ nhất. Tính $P=x_A^2+x_B^2+y_A\cdot y_B$.

A. $P=5$. **B.** $P=6$. **C.** $P=6+\sqrt{2}$. **D.** $P=5+\sqrt{2}$.

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau.

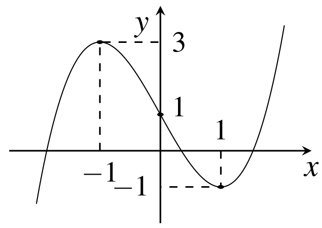
x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=3f(x+2)-x^3+3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(0;2)$.

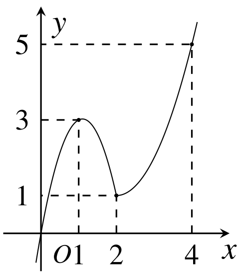
Câu 39. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\sin x)=m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$ là

A. $[-1;3)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(-1;3)$. **D.** $[-1;1)$.



Câu 40. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$và có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left[4\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)\right]=m$ có nghiệm.

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.



Câu 41. Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(3-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

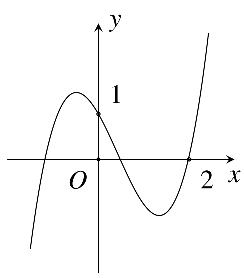
A. $(4;+\infty)$. **B.** $(-2;1)$. **C.** $(2;4)$. **D.** $(1;2)$.

Câu 42. Cho hàm số $y=x^3+ax^2-3x+b$ có đồ thị (C). Hỏi có bao nhiêu cặp (a,b) nguyên dương để (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt?

A. vô số. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 4.

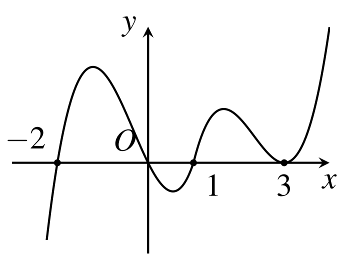
Câu 43. Cho hàm số $y=f(x)$, hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Bất phương trình $f(x)<x+m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x\in(0;2)$ khi và chỉ khi

A. $m\ge f(2)-2$. **B.** $m\ge f(0)$. **C.** $m>f(2)-2$. **D.** $m>f(0)$.



Câu 44. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới. Số nghiệm nhiều nhất của phương trình $f(x^2)=m$ (với m là số thực) là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 2.



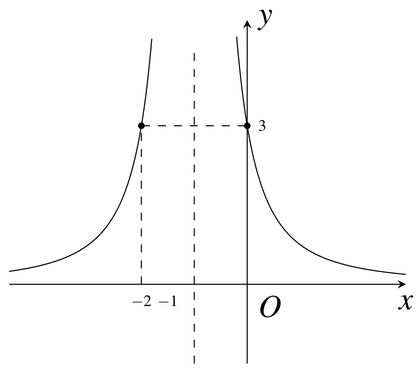
Câu 45. Cho hàm số $y = mx^3 - 3mx^2 + (2m+1)x - m + 3$ có đồ thị (C) và điểm $M\left(\frac{1}{2};4\right)$. Giả sử đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là A, B. Khi đó khoảng cách lớn nhất từ M đến đường thẳng AB là

A. $\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** 1. **D.** $2\sqrt{3}$.

Câu 46. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $(a,b,c,d \in \mathbb{R}; c \neq 0, d \neq 0)$ có đồ thị (C). Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Biết (C) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành.

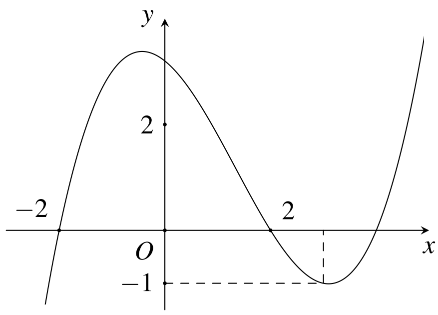
A. $x - 3y - 2 = 0$. **B.** $x + 3y + 2 = 0$.

C. $x + 3y - 2 = 0$. **D.** $x - 3y + 2 = 0$.



Câu 47. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $|f(x^3 - 3x)| = \dfrac{4}{3}$ là

A. 3. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 4.



Câu 48. Cho hàm số $y = f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$ ↘	-3 ↗	2 ↘	-1 ↗	$+\infty$

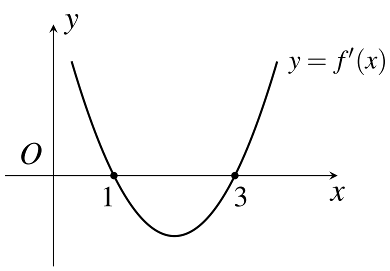
Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ là

A. 9. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 5.

Câu 49. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên, với $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = f(m)$ có ba nghiệm thực phân biệt.

A. $f(3) < m < f(1)$. **B.** $0 < m < 4$ và $m \neq 1, m \neq 3$.

C. $1 < m < 3$. **D.** $0 < m < 4$.



Câu 50. Cho hai hàm số $y = \dfrac{x-3}{x-2} + \dfrac{x-2}{x-1} + \dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x}{x+1}$ và $y = |x+2| - x + m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là

A. $(-\infty;2]$. **B.** $[2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

—HẾT—

B ĐỀ SỐ 2

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ và có bảng biến thiên như hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 2.
B. Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.
C. $f(-5) > f(-4)$.
D. Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	$-\infty \ \|\| \ +\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Câu 2. Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?
A. $(-2;1)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$. **D.** $(0;2)$.

Câu 3. Hàm số nào sau đây không có điểm cực trị?
A. $y = -x^4 + 2x^2 - 5$. **B.** $y = x^3 + 6x - 2019$. **C.** $y = x^4 + 2x^2 - 5$. **D.** $y = -\frac{1}{4}x^4 + 6$.

Câu 4. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ trên đoạn $[-2;0]$ bằng
A. -2. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 3.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$, khẳng định nào sau đây là **đúng**?
A. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì nó không có đại hàm tại x_0.
B. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.
C. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì $f''(x_0) > 0$ hoặc $f''(x_0) < 0$.
D. Nếu hàm số đạt cực trị tại x_0 thì hàm số không có đạo hàm tại x_0 hoặc $f'(x_0) = 0$.

Câu 6. Cho hàm số $y = \dfrac{x+3}{x-2}$ có đồ thị $(\mathscr{C})$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có tung độ $y_0 = -4$ là
A. $x + 5y - 1 = 0$. **B.** $5x - y + 1 = 0$. **C.** $5x + y - 1 = 0$. **D.** $5x + y + 1 = 0$.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f(x+5) - 4 = 0$ là
A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 8. Cho hàm số $y = x + \dfrac{1}{x+2}$. Giá trị nhỏ nhất m của hàm số trên $[-1;2]$ là
A. $m = 2$. **B.** $m = 0$. **C.** $m = \dfrac{1}{2}$. **D.** $m = \dfrac{9}{4}$.

Câu 9. Giá trị của m để hàm số $y = x^3 + 2(m-1)x^2 + (m-1)x + 5$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là
A. $m \in \left(1;\dfrac{7}{4}\right)$. **B.** $m \in \left[1;\dfrac{7}{4}\right]$.
C. $m \in (-\infty;1]\cup\left[\dfrac{7}{4};+\infty\right)$. **D.** $m \in (-\infty;1)\cup\left(\dfrac{7}{4};+\infty\right)$.

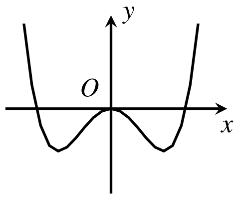
Câu 10. Biết $A(0;a)$; $B(b;1)$ thuộc đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2 - 1$, khi đó giá trị $a + b$ là
A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 11. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Điểm cực đại của đồ thị hàm số là

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

A. $(-1;2)$. **B.** $(1;-2)$.
C. $(-1;0)$. **D.** $(1;0)$.

Câu 12. Đường cong bên là đồ thị hàm số nào?



A. $y = x^4 - 2x^2$. **B.** $y = x^4 - 2x^2 + 1$.
C. $y = -x^4 + 2x^2 - 1$. **D.** $y = -x^4 + 2x^2$.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, dấu của đạo hàm được cho bởi bảng dưới đây

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = f(2x-2)$ nghịch biến trong khoảng nào?
A. $(-1;1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Câu 14. Gọi A, B lần lượt là giao điểm của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x+1}$ với các trục Ox, Oy. Diện tích tam giác OAB bằng
A. $\dfrac{9}{2}$. **B.** $\dfrac{9}{4}$. **C.** 2. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

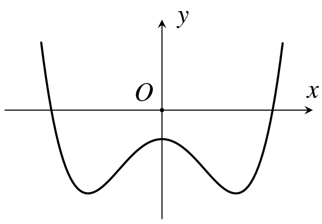
Câu 15. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-3}{x+1}$ cắt đường thẳng $y = x + m$ tại hai điểm phân biệt khi
A. $\left[\begin{array}{l} m < -2 \\ m > 6 \end{array}\right.$. **B.** $m > 6$. **C.** $m < -2$. **D.** $m > -2$.

Câu 16. Đồ thị hàm số nào dưới đây có tiệm cận ngang?
A. $y = \dfrac{3x+1}{x-1}$. **B.** $y = \dfrac{x^2+x+1}{x-1}$.
C. $y = -x^3 + 3x^2 + 3x + 1$. **D.** $y = x^4 + x^2$.

Câu 17. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = (2x-1)\left(x^2+x+2\right)$ với trục hoành là
A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 18. Đường thẳng $y = x - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2 + x - 1$ tại hai điểm. Tìm tổng tung độ các giao điểm đó.
A. 0. **B.** -1. **C.** -3. **D.** 2.

Câu 19. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm Khẳng định đúng.
A. $ac > 0$. **B.** $a - b < 0$. **C.** $ab > 0$. **D.** $bc > 0$.



Câu 20. Biết trên đồ thị $(C)\colon y = \dfrac{x-1}{x+2}$ có hai điểm mà tiếp tuyến tại các điểm đó đều song song với đường thẳng $(d)\colon 3x - y + 15 = 0$. Tìm tổng S các tung độ của các tiếp điểm.
A. $S = 3$. **B.** $S = 6$. **C.** $S = 2$. **D.** $S = -4$.

Câu 21. Bảng biến thiên sau là của hàm số nào?

A. $y=x^3-3x^2-1$.

B. $y=x^3+3x^2-1$.

C. $y=-x^3+3x^2-1$.

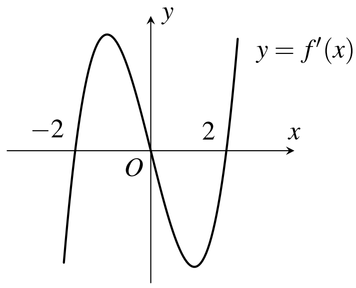
D. $y=-x^3-3x^2-1$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$		$+$		$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $f(x)$ đạt cực đại tại $x=0$. **B.** $f(x)$ đạt cực đại tại $x=1$.

C. $f(x)$ đạt cực đại tại $x=-1$. **D.** $f(x)$ đạt cực đại tại $x=\pm 2$.



Câu 23. Tìm quỹ tích điểm uốn của đồ thị hàm số $y=x^3-mx^2+x-1$ (m là tham số).

A. $y=x^3-x^2+x-1$. **B.** $y=x^3-x+1$. **C.** $y=2x^3+x^2-1$. **D.** $y=-2x^3+x-1$.

Câu 24. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=2x+\dfrac{1}{x}$ trên miền $(-\infty;0)$ là

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $-2\sqrt{2}$. **C.** 4. **D.** Không tồn tại.

Câu 25. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ đồng thời có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Phát biểu nào sau đây là **sai**?

A. Phương trình $f(x)+2=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

B. Phương trình $f(x)-1=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

C. Phương trình $f(x)-5=0$ có 2 nghiệm phân biệt.

D. Phương trình $f(x)=-3$ có 2 nghiệm phân biệt.

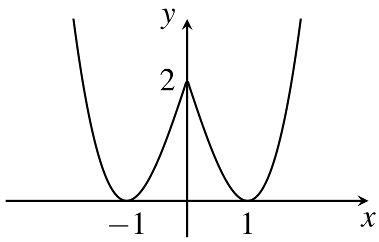
Câu 26. Hàm số $y=mx^4+(m-1)x^2+1-2m$ có một điểm cực trị khi

A. $m<0 \vee m>1$. **B.** $0\le m\le 1$. **C.** $m\le 0\vee m\ge 1$. **D.** $m=0$.

Câu 27. Đồ thị hình dưới là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

A. $y=x^2-2|x|^2+2$. **B.** $y=\left|x^3\right|-3|x|+2$.

C. $y=x^4-2x^2+2$. **D.** $y=2(x^2-1)^2$.



Câu 28. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2-2mx+4}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.

A. $\left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2 \end{array}\right.$. **B.** $m>2$. **C.** Không tồn tại m. **D.** $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-2 \end{array}\right. \\ m\ne -\dfrac{5}{2} \end{cases}$.

Câu 29. Trên nửa khoảng $(0;3]$, kết luận nào đúng cho hàm số $y = x + \dfrac{1}{x}$?

A. Cả $\max\limits_{(0;3]} y$ và $\min\limits_{(0;3]} y$ đều không tồn tại.

B. $\max\limits_{(0;3]} y = \dfrac{10}{3}$ và $\min\limits_{(0;3]} y = 2$.

C. $\max\limits_{(0;3]} y = +\infty$, $\min\limits_{(0;3]} y = 2$.

D. $\max\limits_{(0;3]} y$ không tồn tại và $\min\limits_{(0;3]} y = 2$.

Câu 30. S là tập tất cả các số nguyên m để phương trình $\cos^2 x = m + \sin x$ có nghiệm. Tìm tổng các phần tử của S.

A. 0. B. 1. C. 3. D. 2.

Câu 31. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm M thuộc (C) có tung độ là số nguyên dương sao cho khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng bằng 3 lần khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang của đồ thị (C).

A. 0. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 32. Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d\colon y = mx + 1$ cắt đồ thị $(C)\colon y = x^3 - x^2 + 1$ tại 3 điểm A, $B(0;1)$, C phân biệt sao cho tam giác AOC vuông tại $O(0;0)$?

A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.

Câu 33. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(2m-1)x + 1$ đồng biến trên tập xác định?

A. $m = 1$. B. $m \in \mathbb{R}$. C. Không tồn tại m. D. $m \neq 1$.

Câu 34. Tồn tại bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = \dfrac{x-2}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$?

A. 3. B. 4. C. 2. D. Vô số.

Câu 35. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ có đồ thị (C). Từ một điểm bất kì trên đường thẳng nào dưới đây luôn kẻ được đúng một tiếp tuyến đến đến đồ thị (C).

A. $x = 1$. B. $x = 2$. C. $x = 0$. D. $x = -1$.

Câu 36. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sqrt[3]{m + 3\sqrt[3]{m + 3\cos x}} = \cos x$ có nghiệm thực?

A. 3. B. 7. C. 2. D. 5.

Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2019	$\searrow$	-2019	$\nearrow$	$+\infty$

Hỏi đồ thị hàm số $y = |f(x-2018) + 2019|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. B. 4. C. 2. D. 5.

Câu 38. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2-1)x - m^3 - m$, ($m$ là tham số) và điểm $I(2;-2)$. Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số. Biết có hai giá trị m_1 và m_2 để ba điểm I, A, B tạo thành tam giác nội tiếp đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{5}$. Tính $m_1 + m_2$.

A. $\dfrac{14}{17}$. B. $\dfrac{20}{17}$. C. $\dfrac{4}{17}$. D. $-\dfrac{2}{17}$.

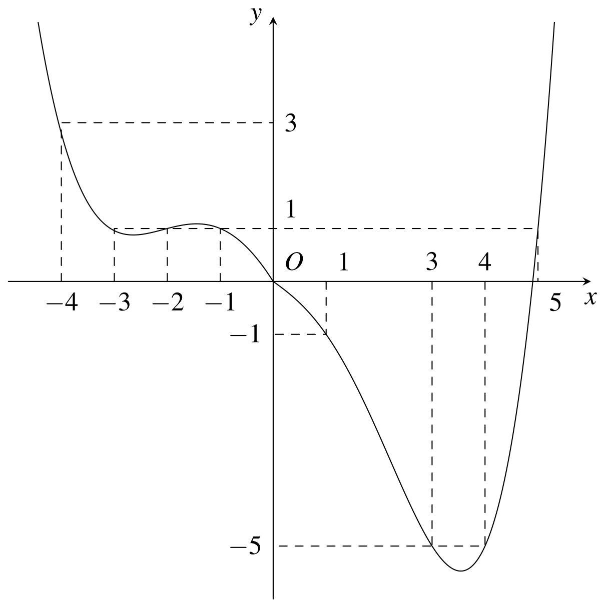
Câu 39. Tổng các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left|x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \dfrac{m}{2}\right|$ có 5 điểm cực trị bằng

A. -2016. B. -496. C. 1952. D. 2016.

Câu 40. Cho hàm số $f(x)=mx^3-3mx^2+(3m-2)x+2-m$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-10;10]$ để hàm số $g(x)=|f(x)|$ có 5 điểm cực trị ?

A. 7. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 11.

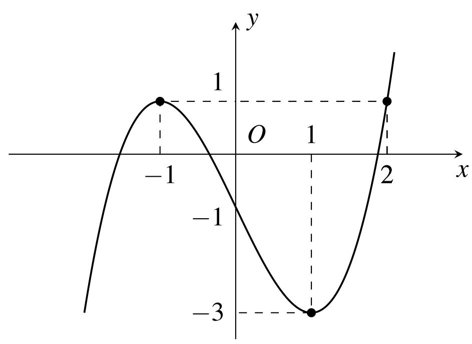
Câu 41. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2f\left(3-3\sqrt{-9x^2+30x-21}\right)=m-2019$ có nghiệm.



A. 15. **B.** 13. **C.** 10. **D.** 14.

Câu 42. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x)=f(x)-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+x-2019$. Biết $g(-1)+g(1)>g(0)+g(2)$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ trên đoạn $[-1;2]$ là

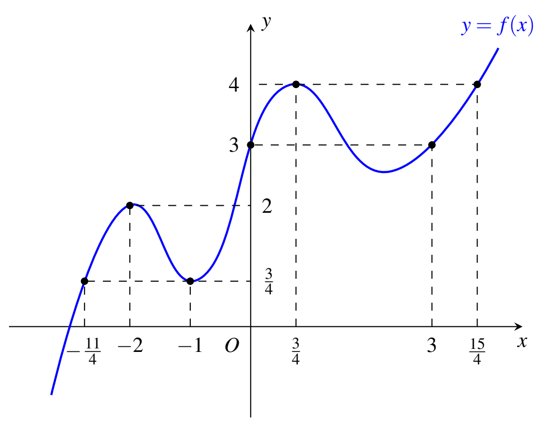
A. $g(2)$. **B.** $g(1)$. **C.** $g(-1)$. **D.** $g(0)$.



Câu 43. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sin x+\dfrac{\sqrt{21}}{2}\cos x+\dfrac{1}{2}\right)=f\left(m^3+3m\right)$ có nghiệm?

A. 0. **B.** 1.

C. 4. **D.** 3 .



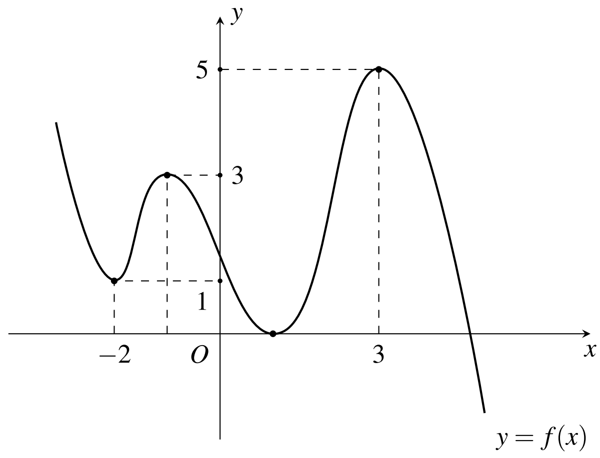
Câu 44. Cho đồ thị $(C): y=\dfrac{x-1}{2x}$ và d_1,d_2 là hai tiếp tuyến của (C) song song với nhau. Khoảng cách lớn nhất giữa d_1 và d_2 là

A. 3. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** 2. **D.** $2\sqrt{2}$.

Câu 45. Cho hàm số $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{7}{2}x^2$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1;y_1)$, $N(x_2;y_2)$ (M, N khác A) thỏa mãn $y_1-y_2=6(x_1-x_2)$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 46. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên (giảm trên $(-\infty;-2)$ và $(3;+\infty)$)

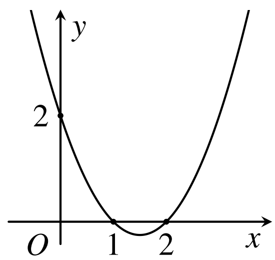


Gọi m_0 là giá trị dương của tham số m để phương trình $\frac{m^3+m}{\sqrt{f^2(x)+1}}=f^2(x)+2$ có ba nghiệm thực phân biệt. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m_0\in(1;2)$. **B.** $m_0\in(0;1)$. **C.** $m_0\in(2;3)$. **D.** $m_0\in(3;4)$.

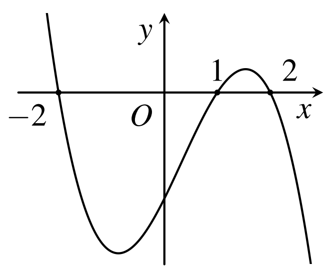
Câu 47. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Hỏi hàm số $g(x)=f(x-x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $(1;2)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(-\infty;2)$. **D.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.



Câu 48. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới và $f(-2)=f(2)=0$. Hàm số $g(x)=[f(3-x)]^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(2;5)$. **D.** $(5;+\infty)$.

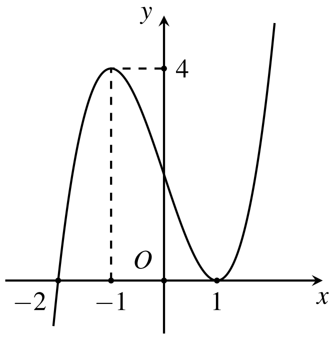


Câu 49. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2(3x^4+mx^3+1)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $g(x)=f(x^2)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 50. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0) < 0$, đồng thời đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f^2(x)$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

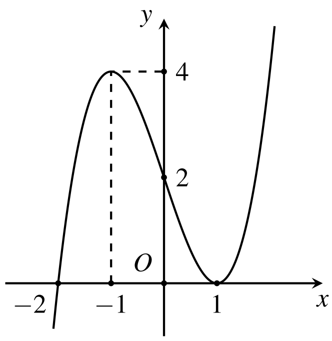


Câu 51. Cho hàm số $y = \dfrac{-2x-2}{x+3}$ có đồ thị hàm số (C). Xét điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị (C) có $x_0 > -3$. Tiếp tuyến Δ của (C) tại điểm M lần lượt cắt các đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của (C) tại E và F. Tính $2x_0 - y_0$ khi độ dài EF đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $2x_0 - y_0 = 0$. **B.** $2x_0 - y_0 = 2$. **C.** $2x_0 - y_0 = -3$. **D.** $2x_0 - y_0 = -2$.

Câu 52. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x - 2017) - 2018x + 2019$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.



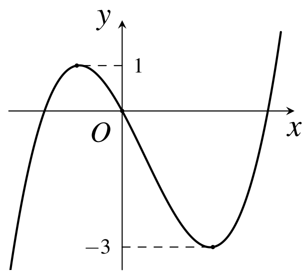
Câu 53. Cho hàm bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $g(x) = |f(x) + m|$ có 3 điểm cực trị là

A. $m \leqslant -1$ hoặc $m \geqslant 3$.

B. $m \leqslant -3$ hoặc $m \geqslant 1$.

C. $m = -1$ hoặc $m = 3$.

D. $1 \leqslant m \leqslant 3$.



Câu 54. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới

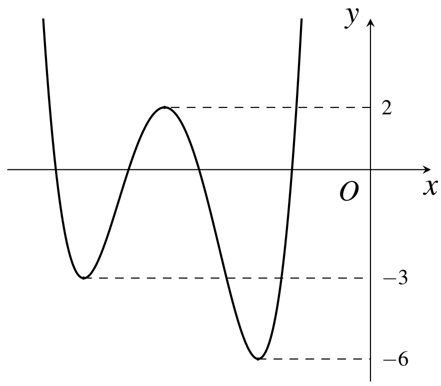
x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	11	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị hàm số $g(x) = |f(x) - 2m|$ có 5 điểm cực trị khi

A. $m \in (4; 11)$. **B.** $m \in \left[2; \dfrac{11}{2}\right]$. **C.** $m \in \left(2; \dfrac{11}{2}\right)$. **D.** $m = 3$.

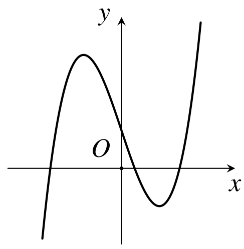
Câu 55. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu số nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = |f(x+2018)+m|$ có 7 điểm cực trị ?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.



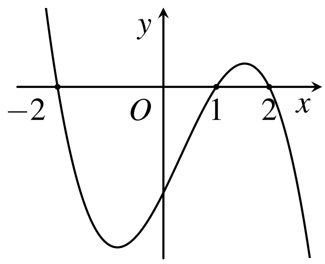
Câu 56. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $g(x) = f(|x|)+2018$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.



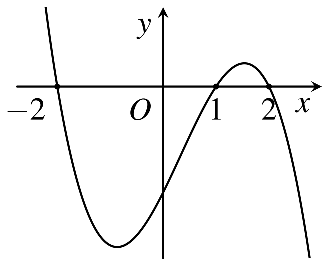
Câu 57. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x+m|)$ có 5 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** Vô số.



Câu 58. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x|+m)$ có 5 điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** Vô số.



Câu 59. Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $\begin{cases} -8+4a-2b+c > 0 \\ 8+4a+2b+c < 0 \end{cases}$. Hàm số $g(x) = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 60. Cho hàm số $y = mx^3 + x^2 + (1-4m)x - 6\,(C_m)$. Giao điểm của đồ thị (C_m) với các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt là A, B. Gọi C là điểm thuộc (C_m) sao cho diện tích tam giác ABC không đổi với mọi giá trị $m \in \mathbb{R}$. Khi đó diện tích tam giác ABC bằng

A. 10. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 7.

—HẾT—