



Tổng hợp lý thuyết

CHƯƠNG 02

KHỐI TRÒN XOAY **NÓN - TRỤ - CẦU**

KHÓA 2023 - 2024

TÀI LIỆU DÀNH CHO KHỐI 12

Biên soạn

LÊ MINH TÂM



Mục lục

Chương 02

Chủ đề 01. KHỐI NÓN

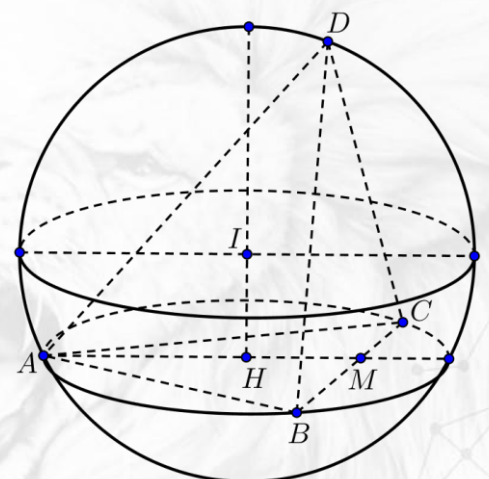
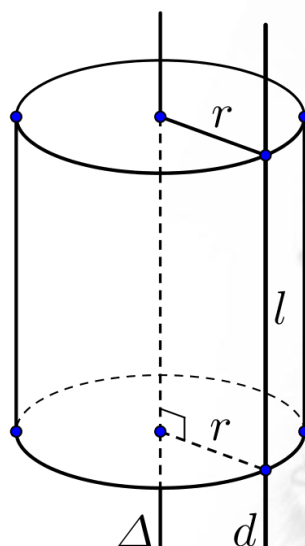
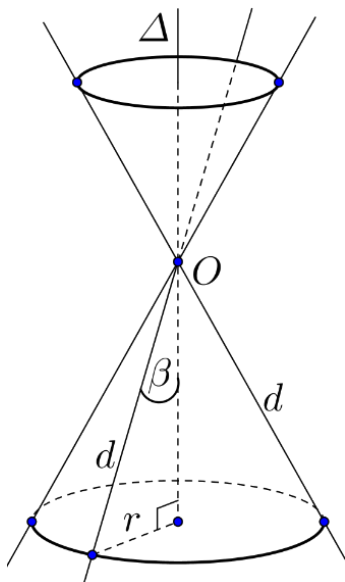
Đạng 1.1.	Tính độ dài đường sinh, bán kính đáy, đường cao	5
Đạng 1.2.	Tính diện tích xung quanh – toàn phần – thể tích	6
Đạng 1.3.	Thiết diện	8
Đạng 1.4.	Nội – ngoại tiếp	9
Đạng 1.5.	Min – max liên quan khối nón	11
Đạng 1.6.	Bài toán thực tế	13

Chủ đề 02. KHỐI TRỤ

Đạng 2.1.	Tính độ dài đường sinh, bán kính đáy, đường cao	18
Đạng 2.2.	Tính diện tích xung quanh – toàn phần – thể tích	19
Đạng 2.3.	Thiết diện	21
Đạng 2.4.	Nội – ngoại tiếp	24
Đạng 2.5.	Min – max liên quan khối trụ	26
Đạng 2.6.	Bài toán thực tế	29

Chủ đề 03. KHỐI CẦU

Đạng 3.1.	Tính bán kính khối cầu cơ bản	39
Đạng 3.2.	Tính diện tích mặt cầu – thể tích khối cầu	40
Đạng 3.3.	Thiết diện	42
Đạng 3.5.	Nội – ngoại tiếp	44
Đạng 3.6.	Min – max liên quan khối nón	47



Hình học

Chủ đề 01

KHOẢNG TRÒN XOAY

KHOẢNG NÓN

A. LÝ THUYẾT CHUNG.

1. Định nghĩa.

Trong mặt phẳng (P) :

→ Cho 2 đường thẳng d, Δ cắt nhau tại O và chúng tạo thành góc β với $0^\circ < \beta < 90^\circ$.

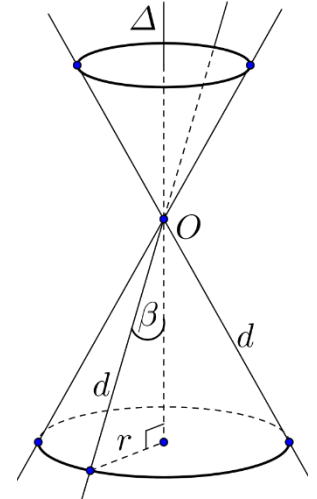
→ Quay (P) xung quanh trục Δ với góc β không thay đổi được gọi là mặt nón tròn xoay đỉnh O .

→ Người ta thường gọi tắt mặt nón tròn xoay là mặt nón.

→ Đường thẳng Δ gọi là trục,

→ Đường thẳng d được gọi là đường sinh,

→ Góc 2β gọi là góc ở đỉnh.



2. Hình nón tròn xoay.

Cho $\triangle OIM$ vuông tại I quay quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OIM tạo thành một hình, gọi là hình nón tròn xoay (gọi tắt là hình nón).

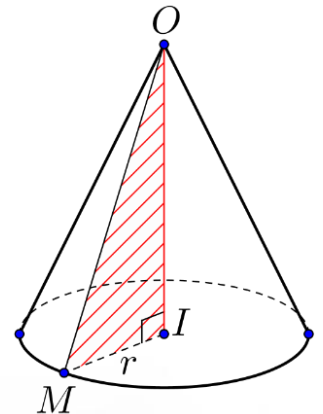
→ Đường thẳng OI gọi là trục,

→ O là đỉnh,

→ OI gọi là đường cao,

→ OM gọi là đường sinh của hình nón.

→ Hình tròn tâm I , bán kính $R = IM$ là đáy của hình nón.



3. Diện tích - Thể tích.

Cho hình nón có chiều cao là h , bán kính đáy r và đường sinh là ℓ thì có:

→ Diện tích xung quanh:

$$S_{xq} = \pi \cdot r \cdot \ell.$$

→ Diện tích đáy (hình tròn):

$$S_d = \pi r^2.$$

→ Diện tích toàn phần hình tròn:

$$S_{tp} = S_{xq} + S_d$$

→ Thể tích khối nón:

$$V = \frac{1}{3} B \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$$

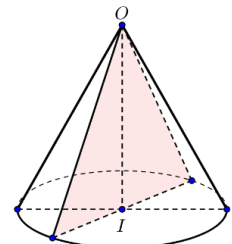
4. Tính chất.

Nếu cắt mặt nón tròn xoay bởi mặt phẳng:

→ **Đi qua đỉnh** thì có các trường hợp sau xảy ra:

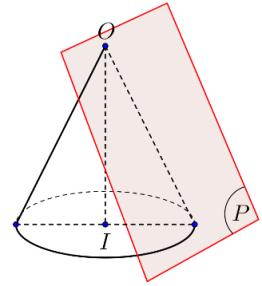
① Mặt phẳng cắt mặt nón theo 2 đường sinh

→ Thiết diện là tam giác cân.

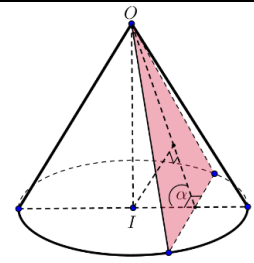


② Mặt phẳng tiếp xúc với mặt nón theo một đường sinh

→ Mặt phẳng tiếp diện của mặt nón.



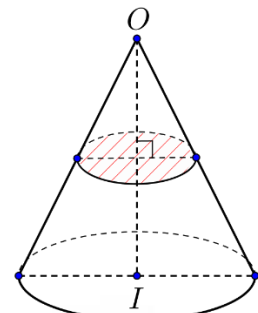
③ Mặt phẳng cắt mặt nón tạo góc α



→ **Không đi qua đỉnh** thì có các trường hợp sau xảy ra:

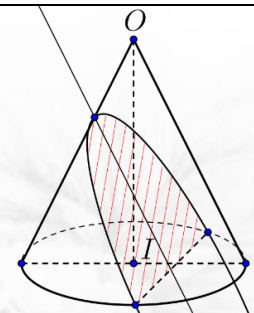
① Mặt phẳng cắt vuông góc với trục hình nón

→ Giao tuyến là một đường tròn.



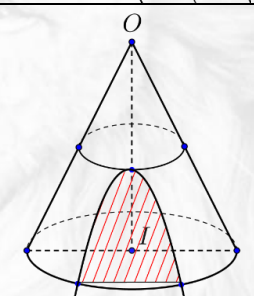
② Mặt phẳng cắt song song với 1 đường sinh hình nón

→ Giao tuyến là đường parabol.



③ Mặt phẳng cắt song song với 2 đường sinh hình nón

→ Giao tuyến là 2 nhánh của 1 hypebol.



5. Mối liên hệ thường gặp.

	Trường hợp	Nội dung	Công thức	Hình minh họa
Loại 1		Quay quanh cạnh góc vuông C_1 và C_2 là cạnh góc vuông còn lại.	$\begin{cases} h = C_1 \\ R = C_2 \\ l = c/\text{huyền} \end{cases}$	
Loại 2	Δ VUÔNG	Quay quanh cạnh huyền → tạo 2 nón: + Nón trên (nón chứa C). + Nón dưới (nón chứa B).	$\begin{cases} c/\text{huyền} = h_1 + h_2 \\ \frac{1}{R_1^2} = \frac{1}{R_2^2} = \frac{1}{C_1^2} + \frac{1}{C_2^2} \\ l_1 = C_1 \text{ \& } l_2 = C_2 \end{cases}$	
Loại 3		Quay quanh đường cao = Thiết diện qua trục là tam giác đều.	$\begin{cases} h = \frac{l\sqrt{3}}{2} \\ l = 2R \end{cases}$	
Loại 4	Δ ĐỀU	Quay quanh 1 cạnh → tạo 2 nón bằng nhau.	$\begin{cases} l_1 = l_2 = C \\ R_1 = R_2 = \frac{C}{2} \\ h_1 = h_2 = \frac{C\sqrt{3}}{2} \end{cases}$	
Thiết diện	Qua trục	Δ VUÔNG	$\begin{cases} h = R \\ 2R = l\sqrt{2} \end{cases}$	
		Δ ĐỀU	$\begin{cases} l = 2R \\ h = \frac{l\sqrt{3}}{2} \end{cases}$	
	Không qua trục	+ Vẽ trung điểm của dây. + Nối với tâm → kí hiệu vuông góc. + Xem giả thiết: $\varphi \left(t/\text{dien}; m/\text{day} \right) = \alpha$. $\varphi \left(t/\text{dien}; d/\text{cao} \right) = \beta$. $\varphi \left(O; t/\text{dien} \right) = d$.		

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

➤ Dạng 1.1. Tính độ dài đường sinh, bán kính đáy, đường cao

☑ Trường hợp đơn giản, áp dụng công thức đã có.

→ Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi.r.l$.

→ Diện tích đáy (hình tròn): $S_d = \pi r^2$.

→ Diện tích toàn phần hình tròn: $S_{tp} = S_{xq} + S_d$

→ Thể tích khối nón: $V = \frac{1}{3}B.h = \frac{1}{3}\pi r^2.h$

➤ Ví dụ 1.1.1

Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB=a$ và $AC=a\sqrt{3}$. Tính độ dài đường sinh ℓ của hình nón nhận được khi quay tam giác ABC xung quanh trục AB .

A. a .

B. $a\sqrt{3}$.

C. $2a$.

D. $3a$.

Lời giải

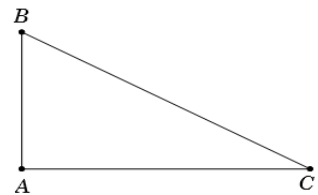
Chọn C

Hình nón có đỉnh là B , Tâm đường tròn đáy là A ,

Bán kính đáy là $AC = a\sqrt{3}$,

Chiều cao hình nón là $AB = a$.

Vậy độ dài đường sinh là: $\ell = BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a$.



➤ Ví dụ 1.1.2

Cho hình nón có đường sinh $\ell = 2a$ và hợp với đáy góc $\alpha = 60^\circ$. Tính đường kính d của hình nón đó.

A. $d = 2a$.

B. $d = a + \sqrt{3}$.

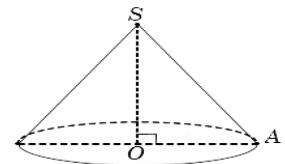
C. $d = a$.

D. $d = a\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\begin{cases} SA = \ell = 2a \\ \angle SAO = 60^\circ \end{cases} \rightarrow R = OA = SA \cdot \cos 60^\circ = a \rightarrow d = 2a$



➤ Ví dụ 1.1.3

Cho hình nón đỉnh S với đáy là đường tròn tâm O bán kính R . Gọi I là một điểm nằm trên mặt phẳng đáy sao cho $OI = R\sqrt{3}$. Giả sử A là điểm nằm trên đường tròn $(O; R)$ sao cho $OA \perp OI$. Biết rằng tam giác SAI vuông cân tại S . Tính đường cao của hình nón.

A. $R\sqrt{2}$.

B. R .

C. $2R$.

D. $R + \sqrt{2}$.

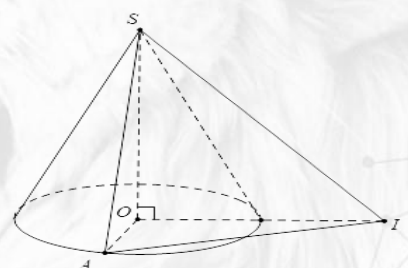
Lời giải

Chọn B

Xét $\triangle AOI$ có: $IA^2 = OA^2 + OI^2 = 4R^2 \Rightarrow IA = 2R$

$\triangle SAI$ vuông cân tại $S \Rightarrow SA = \frac{IA}{\sqrt{2}} = \frac{2R}{\sqrt{2}} = R\sqrt{2}$.

Xét $\triangle SOA$ ta có: $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{2R^2 - R^2} = R$.



Dạng 1.2. Tính diện tích xung quanh - toàn phần - thể tích

- ☑ Cho hình nón (H) có bán kính đáy bằng r , chiều cao $SO = h$ và độ dài đường sinh là l .

Ký hiệu S_{xq} , S_{tp} lần lượt là diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình nón (H), khi đó ta có

→ Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi.r.l$.

→ Diện tích đáy (hình tròn): $S_d = \pi r^2$.

→ Diện tích toàn phần hình tròn: $S_{tp} = S_{xq} + S_d$

→ Thể tích khối nón: $V = \frac{1}{3} B.h = \frac{1}{3} \pi r^2 .h$

☑ **Lưu ý:**

① $\triangle SAB$ là tam giác cân đỉnh S và được gọi là thiết diện qua trục của khối nón.

② $l^2 = h^2 + r^2$.

☞ **Ví dụ 1.2.1**

Cho hình nón có đường sinh $l = 5$, bán kính đáy $r = 3$. Tính diện tích xung quanh của hình nón đó.

A. π .

B. 15π .

C. $15\pi^2$.

D. 2π .

Lời giải

Chọn B

Diện tích xung quanh của hình nón đó là $S_{xq} = \pi r l = \pi .3.5 = 15\pi$.

☞ **Ví dụ 1.2.2**

Tính diện tích toàn phần của hình nón có chiều cao bằng $a\sqrt{3}$ và bán kính đáy bằng a .

A. $2\pi a^2$.

B. $3\sqrt{3}\pi a^2$.

C. $32\pi a^2$.

D. $3\pi a^2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $h = a\sqrt{3}$, $r = a \Rightarrow l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{3a^2 + a^2} = 2a$.

Vậy $S_{tp} = \pi r l + \pi r^2 = \pi .a.2a + \pi .a^2 = 3\pi a^2$.

☞ **Ví dụ 1.2.3**

Tính diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay ngoại tiếp tứ diện đều cạnh bằng a .

A. $\frac{\pi a^2}{3}$.

B. $\frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{2\pi a^2}{5}$.

D. $\frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{2}$.

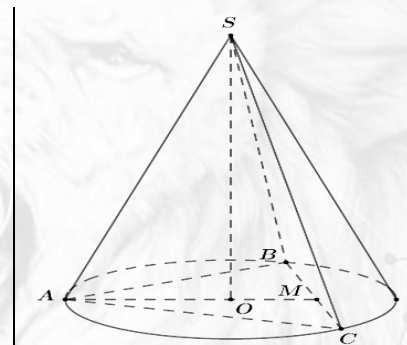
Lời giải

Chọn B

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ và M là trung điểm BC .

Ta có $AO = \frac{2}{3} AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

$S_{xq} = \pi .OA.SA = \pi .\frac{a\sqrt{3}}{3} .a = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{3}$.



Ví dụ 1.2.4

Tính diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay ngoại tiếp tứ diện đều cạnh bằng a .

- A. πa^2 . B. $\pi a^2 2\sqrt{3}$. C. $\frac{\pi\sqrt{3}a^3}{3}$. D. $\pi a^2 2\sqrt{2}$.

Lời giải

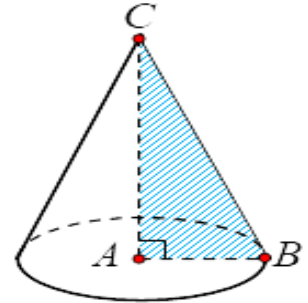
Chọn C

Ta có $l = CB = 2a$, $BCA = 30^\circ$.

$$\text{Xét } \triangle ABC: \sin 30^\circ = \frac{AB}{CB} = \frac{r}{l} \Rightarrow r = l \cdot \sin 30^\circ = 2a \cdot \frac{1}{2} = a.$$

$$\cos 30^\circ = \frac{CA}{CB} = \frac{h}{l} \Rightarrow h = l \cdot \cos 30^\circ = 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Suy ra } V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi a^2 \cdot a\sqrt{3} = \frac{\pi\sqrt{3}a^3}{3}.$$



Ví dụ 1.2.5

Cho khối nón có độ dài đường sinh bằng 10 và diện tích xung quanh bằng 60π . Tính thể tích của khối nón đã cho.

- A. $\frac{\pi a^2}{3}$. B. $\frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{2\pi a^2}{5}$. D. $\frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

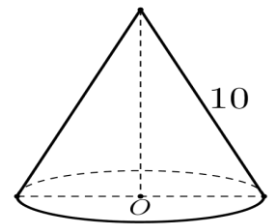
Chọn B

Ta có: $l = 10$

$$S_{xq} = 60\pi \Leftrightarrow \pi r l = 60\pi \Leftrightarrow 10\pi r = 60\pi \Leftrightarrow r = 6.$$

$$h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8.$$

$$\text{Do đó thể tích là: } V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 96\pi.$$



Ví dụ 1.2.6

Cho khối nón có đường cao $h = 5$, khoảng cách từ tâm đáy đến đường sinh bằng 4. Thể tích của khối nón đã cho bằng

- A. $\frac{2000\pi}{9}$. B. $\frac{2000\pi}{27}$. C. $\frac{16\pi}{3}$. D. $\frac{80\pi}{3}$.

Lời giải

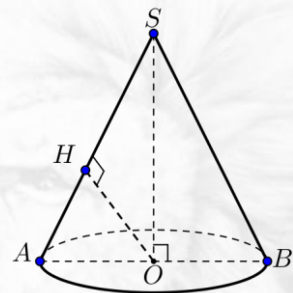
Chọn B

Khối nón có $h = SO = 5$, $d(O, SA) = OH = 4$.

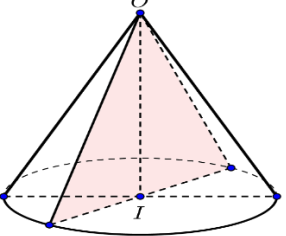
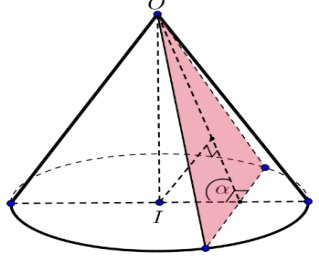
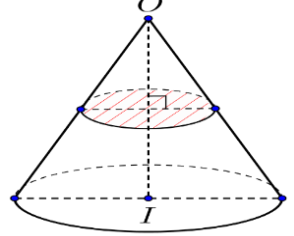
$$\text{Xét } \triangle SAO: \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OA^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{OA^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} = \frac{9}{4^2 \cdot 5^2} \Rightarrow OA^2 = \frac{400}{9}.$$

$$\text{Thể tích khối nón: } V = \frac{1}{3}\pi \cdot OA^2 \cdot SO = \frac{2000\pi}{27}.$$



Dạng 1.3. Thiết diện

☑ Mặt phẳng (P) đi qua trục, cắt khối chóp theo một thiết diện là $\triangle SAB$ cân tại đỉnh S.	☑ Mặt phẳng (P) đi qua đỉnh của hình nón và cắt mặt nón theo 2 đường sinh $\Rightarrow$ Thiết diện là $\triangle$ cân.	☑ Mặt phẳng cắt vuông góc với trục hình nón $\Rightarrow$ Thiết diện là đường tròn.
		

Ví dụ 1.3.1

Cho hình nón tròn xoay có chiều cao $h = 20(\text{cm})$, bán kính đáy $r = 25(\text{cm})$. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là $12(\text{cm})$. Tính diện tích của thiết diện đó.

- A. $500(\text{cm}^2)$. B. $5(\text{cm}^2)$. C. $260(\text{cm}^2)$. D. $350(\text{cm}^2)$.

Lời giải

Chọn A

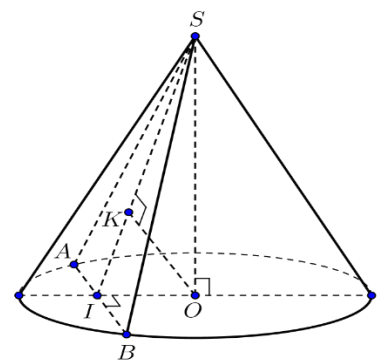
Theo bài ra ta có $AO = r = 25$; $SO = h = 20$; $OK = 12$.

$$\text{Lại có } \frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{OS^2} \Rightarrow OI = 15(\text{cm})$$

$$AB = 2AI = \sqrt{25^2 - 15^2} = 40(\text{cm});$$

$$SI = \sqrt{SO^2 + OI^2} = 25(\text{cm})$$

$$\Rightarrow S_{\triangle SAB} = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 40 = 500(\text{cm}^2).$$



Ví dụ 1.3.2

Cho một khối nón có bán kính đáy là 9cm , góc giữa đường sinh và mặt đáy là 30° . Tính diện tích thiết diện của khối nón cắt bởi mặt phẳng đi qua hai đường sinh vuông góc với nhau.

- A. $12(\text{cm}^2)$. B. $54(\text{cm}^2)$. C. $20(\text{cm}^2)$. D. $10(\text{cm}^2)$.

Lời giải

Chọn B

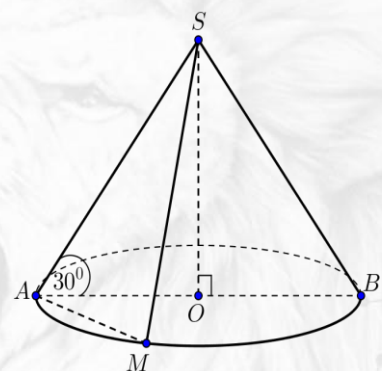
Mặt phẳng đi qua hai đường sinh vuông góc là SA và AM cắt khối nón theo thiết diện là $\triangle SAM$

Góc giữa đường sinh và mặt đáy là $\angle SAO = 30^\circ$.

$$\text{Ta có } SM = SA = \frac{r}{\cos 30^\circ} = 6\sqrt{3}.$$

Vì $SA \perp AM$ nên $\triangle SAM$ vuông tại S.

$$\text{Diện tích } \triangle SAM \text{ là: } S = \frac{1}{2} SA \cdot SM = 54(\text{cm}^2).$$



➤ **Dạng 1.4. Nội - ngoại tiếp**

☑ **Bài toán 1:** Hình nón ngoại tiếp hình chóp

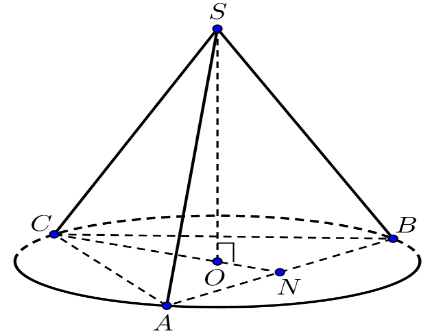
♦ **Loại 1:** Hình nón ngoại tiếp hình chóp tam giác đều

Khi đó hình nón có:

+ Đường sinh l là cạnh bên của hình chóp

+ Chiều cao h là chiều cao của hình chóp

+ Bán kính đáy r bằng $\frac{AB\sqrt{3}}{3}$.



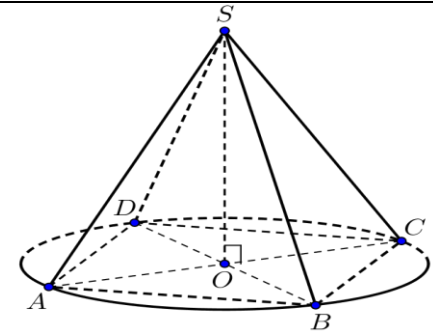
♦ **Loại 2:** Hình nón ngoại tiếp hình chóp tứ giác đều

Khi đó hình nón có:

+ Đường sinh l là cạnh bên của hình chóp

+ Chiều cao h là chiều cao của hình chóp

+ Bán kính đáy r bằng $\frac{AB\sqrt{2}}{2}$



☑ **Bài toán 1:** Hình nón ngoại tiếp hình chóp

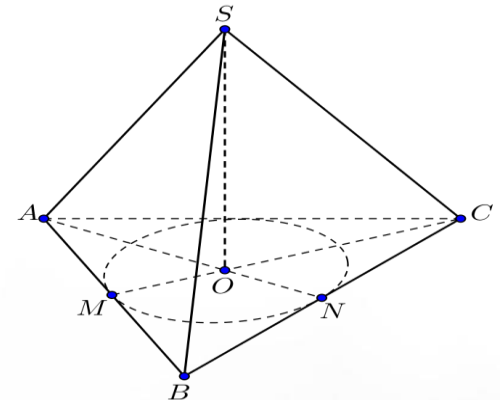
♦ **Loại 1:** Hình nón nội tiếp hình chóp tam giác đều

Khi đó hình nón có:

+ Đường sinh l là SN.

+ Chiều cao h là chiều cao của hình chóp.

+ Bán kính đáy $r = OM = \frac{AB\sqrt{3}}{6}$.



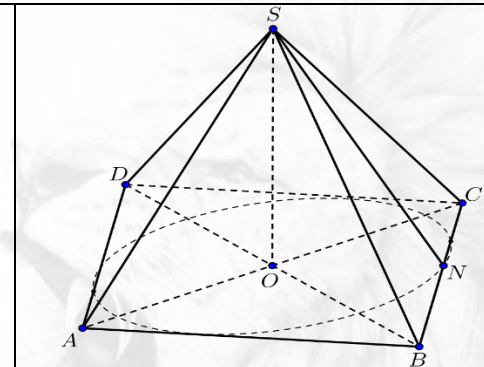
♦ **Loại 2:** Hình nón nội tiếp hình chóp tứ giác đều

Khi đó hình nón có:

+ Đường sinh l là SN.

+ Chiều cao h là chiều cao của hình chóp.

+ Bán kính đáy $r = \frac{AB}{2}$



Ví dụ 1.4.1

Cho hình chóp lục giác đều $S.ABCDEF$ có cạnh bên bằng $2a$ và tạo với đáy một góc 60° . Tính thể tích hình nón ngoại tiếp hình chóp đã cho

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{\pi a^3}{3}$. C. $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a^3}{3}$.

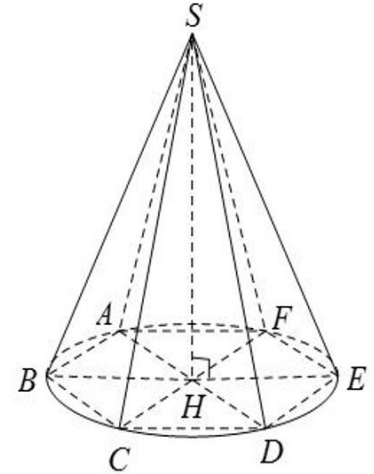
Lời giải

Chọn C

Bán kính đáy: $r = HB = SB \cdot \cos 60^\circ = 2a \cdot \frac{1}{2} = \frac{2a}{2} = a$.

Chiều cao: $h = SH = SB \cdot \sin 60^\circ = 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Thể tích hình nón $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi a^2 \cdot a\sqrt{3} = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$



Ví dụ 1.4.2

Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , góc giữa mặt bên và đáy bằng 60° . Tính diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S , có đáy là hình tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{\pi a^3}{3}$. C. $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi I là tâm đường tròn $(ABC) \Rightarrow IA = r = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

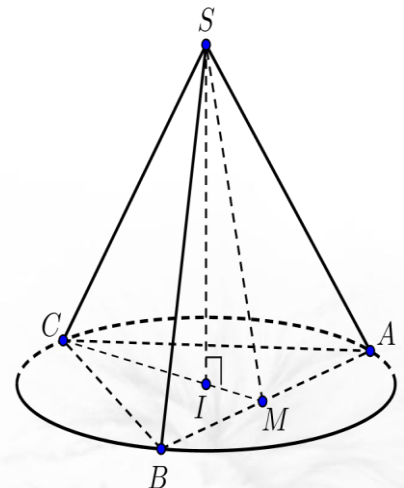
Gọi M là trung điểm của $AB \Rightarrow AB \perp (SMC)$

$\Rightarrow$ Góc giữa mặt bên và mặt đáy là góc $SMC = 60^\circ$

$\Rightarrow SM = 2IM = \frac{2a\sqrt{3}}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow SA = \sqrt{SM^2 + MA^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$.

$S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{21}}{6} = \frac{\pi a^2\sqrt{7}}{6}$.



Dạng 1.5. Min - max liên quan khối nón

- ☑ Xây dựng công thức cần tìm *min - max*.
- ☑ Dùng các cách dưới đây để tìm *min - max*.

	Dạng	Dấu "=" xảy ra khi
BĐT Bunyakovsky	$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$	$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$
	$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$	$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$
BĐT AM - GM	$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$	$a = b$
	$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \quad (n \geq 1)$	$a_1 = a_2 = \dots = a_n$
Khảo sát hàm số trên khoảng xác định	Tính đạo hàm rồi lập BBT, từ đó kết luận theo yêu cầu bài toán.	
Đánh giá lượng giác	$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin(AB; AC).$ Khi đó, để $[S_{ABC}]_{\max}$ $\Leftrightarrow [\sin(AB; AC)]_{\max} \Leftrightarrow \sin(AB; AC) = 1 \Leftrightarrow (AB; AC) = 90^\circ \Leftrightarrow AB \perp AC$	

Ví dụ 1.5.1

Cho mặt nón tròn xoay đỉnh S đáy là đường tròn tâm O có thiết diện qua trục là một tam giác đều cạnh bằng a . A, B là hai điểm bất kỳ trên (O) . Thể tích khối chóp $S.OAB$ đạt giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{48}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A

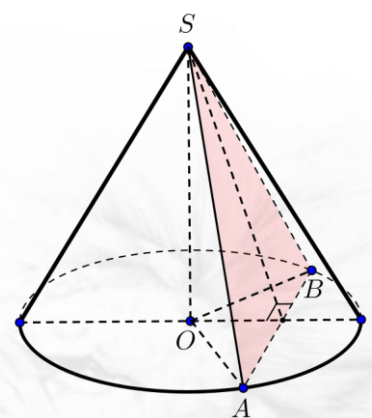
Ta có $V_{S.OAB} = \frac{1}{3} S_{\Delta OAB} \cdot SO$.

Lại có $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin AOB$.

Mặt khác $OA = OB = \frac{a}{2}$, $SO = h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do đó $[V_{S.OAB}]_{\max}$ khi $\sin AOB = 1 \Rightarrow OA \perp OB$.

Khi đó $V_{\max} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{48}$.



Ví dụ 1.5.2

Hình nón gọi là nội tiếp mặt cầu nếu đỉnh và đường tròn đáy của hình nón nằm trên mặt cầu. Tìm chiều cao h của hình nón có thể tích lớn nhất nội tiếp mặt cầu có bán kính R cho trước.

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{\pi a^3}{3}$. C. $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn C

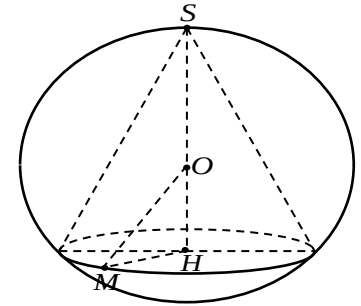
Gọi chiều cao của hình nón là x , ($0 < x < 2R$).

Gọi bán kính đáy của hình nón là r

Ta có $r^2 = OM^2 - OH^2$

$$= R^2 - (x - R)^2 = 2Rx - x^2 = x(2R - x).$$

$$\rightarrow V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot x = \frac{1}{3} \pi x^2 (2R - x).$$



$$\text{Mặt khác } \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot (2R - x) \leq \left(\frac{\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + 2R - x}{3} \right)^3 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} (2R - x) \leq \frac{8R^3}{27}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \pi x^2 (2R - x) \leq \frac{32\pi R^3}{27} \Rightarrow V_{\max} = \frac{32\pi R^3}{27}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \frac{x}{2} = 2R - x \Leftrightarrow x = \frac{4R}{3}$$

Ví dụ 1.5.3

Một công ty sản xuất một loại cốc giấy hình nón có thể tích 27 cm^3 , với chiều cao h và bán kính đáy r . Giá trị r để lượng giấy tiêu thụ ít nhất:

$$\text{A. } r = \sqrt[4]{\frac{3^6}{2\pi^2}}. \quad \text{B. } r = \sqrt[6]{\frac{3^8}{2\pi^2}}. \quad \text{C. } r = \sqrt[4]{\frac{3^8}{2\pi^2}}. \quad \text{D. } r = \sqrt[6]{\frac{3^6}{2\pi^2}}.$$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có thể tích cốc hình nón } V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = 27 \Rightarrow h = \frac{81}{\pi r^2}.$$

$$\text{Khi đó } l = \sqrt{\left(\frac{81}{\pi r^2} \right)^2 + r^2}. \text{ Suy ra } S_{xq} = \pi r \cdot \sqrt{\left(\frac{81}{\pi r^2} \right)^2 + r^2} = \pi \sqrt{\frac{3^8}{\pi^2 r^2} + r^4}.$$

Để lượng giấy tiêu thụ ít nhất thì diện tích xung quanh phải nhỏ nhất.

$$\text{Ta xét } f(r) = \pi \sqrt{\frac{3^8}{\pi^2 r^2} + r^4} \Rightarrow f'(r) = \pi \frac{4r^3 - \frac{2 \cdot 3^8}{\pi^2 r^3}}{2 \sqrt{\frac{3^8}{\pi^2 r^2} + r^4}}.$$

$$f'(r) = 0 \Rightarrow r = \sqrt[6]{\frac{3^8}{2\pi^2}} = r_0.$$

r	0	r_0	$+\infty$
f'		-	0
$f(r)$	$+\infty$	$f(r_0)$	$+\infty$

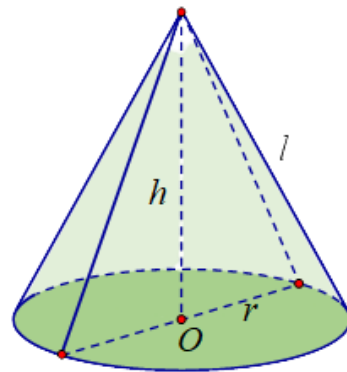
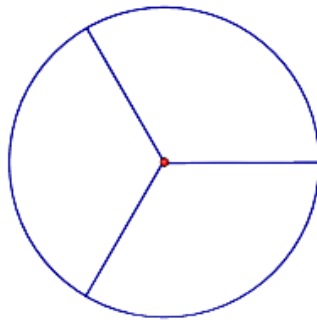
$$\text{Vậy để lượng giấy tiêu thụ ít nhất thì } r = \sqrt[6]{\frac{3^8}{2\pi^2}}.$$

Dạng 1.6. Bài toán thực tế

- ☑ **Bài toán 1:** Các bài toán thực tế đã được mô hình hóa bằng một bài toán hình học.
- Sử dụng công cụ hình học, đại số (nếu cần) giải quyết bài toán.
 - Lưu ý các điều kiện ràng buộc của biến số và kết quả thu được có phù hợp với bài toán thực tế đã cho chưa.
- ☑ **Bài toán 2:** Các bài toán thực tế mà mô hình thực tiễn chưa chuyển về mô hình toán học.
- Bước 1:** Dựa trên các giả thiết và yếu tố của đề bài, ta xây dựng mô hình Hình học cho vấn đề đang xét, tức là diễn tả “dưới dạng ngôn ngữ Hình học” cho mô hình mô phỏng thực tiễn.
- Bước 2:** Sử dụng công cụ giải quyết bài toán hình học được hình thành từ bước 1.
- Lưu ý các điều kiện ràng buộc của biến số và kết quả thu được có phù hợp với bài toán thực tế đã cho chưa.

Ví dụ 1.6.1

Người thợ gia công của một cơ sở chất lượng cao X cắt một miếng tôn hình tròn với bán kính 60cm thành ba miếng hình quạt bằng nhau. Sau đó người thợ ấy uốn và hàn ba miếng tôn đó để được ba cái phễu hình nón. Hỏi thể tích V của mỗi cái phễu đó bằng bao nhiêu?



A. $\frac{16\sqrt{2}\pi}{3}$.

B. $\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$.

C. $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Đổi 60cm = 6dm.

Đường sinh của hình nón tạo thành là $l = 6$ dm.

Chu vi đường tròn ban đầu là $C = 2\pi R = 16\pi$.

Gọi r là bán kính đường tròn đáy của hình nón tạo thành.

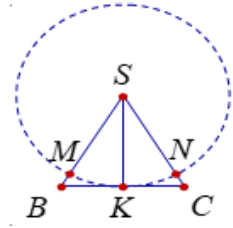
Chu vi đường tròn đáy của hình nón tạo thành là $2\pi \cdot r = \frac{2\pi \cdot 6}{3} = 4\pi$ dm $\Rightarrow r = \frac{4\pi}{2\pi} = 2$ dm.

Đường cao của khối nón tạo thành là $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}$.

Thể tích của mỗi cái phễu là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 4\sqrt{2} = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3}$ dm³ = $\frac{16\sqrt{2}\pi}{3}$ lít.

Ví dụ 1.6.2

Một tấm tôn hình tam giác đều SBC có độ dài cạnh bằng 3. K là trung điểm BC . Người ta dùng compa có tâm là S , bán kính SK vạch một cung tròn MN . Lấy phần hình quạt gò thành hình nón không có mặt đáy với đỉnh là S , cung MN thành đường tròn đáy của hình nón (hình vẽ). Tính thể tích khối nón trên.



- A. $\frac{\pi\sqrt{2}}{64}$. B. $\frac{\pi 2\sqrt{3}}{5}$. C. $\frac{\pi\sqrt{105}}{64}$. D. $\frac{\pi\sqrt{103}}{12}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } SK = SB \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

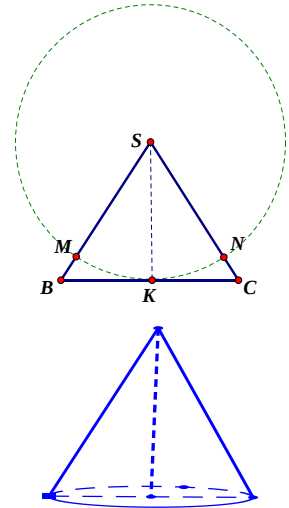
$$\text{Diện tích phần hình quạt là } S_{\text{quạt}} = \frac{1}{6} \pi SK^2 = \frac{1}{6} \pi \frac{27}{4} = \frac{9\pi}{8}.$$

Gọi r là bán kính đáy của hình nón.

$$\text{Suy ra } 2\pi r = \frac{1}{6} 2\pi SK \Rightarrow r = \frac{SK}{6} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

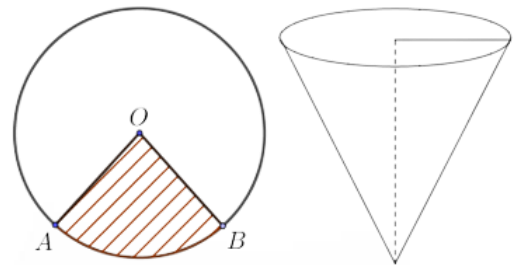
$$\text{Chiều cao của khối nón bằng } h = \sqrt{SK^2 - r^2} = \frac{\sqrt{105}}{4}.$$

$$\text{Thể tích bằng } V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \frac{3}{16} \cdot \frac{\sqrt{105}}{4} = \frac{\pi\sqrt{105}}{64}.$$



Ví dụ 1.6.3

Bạn Hoàn có một tấm bìa hình tròn như hình vẽ, Hoàn muốn biến hình tròn đó thành một hình cái phễu hình nón. Khi đó Hoàn phải cắt bỏ hình quạt tròn AOB rồi dán hai bán kính OA và OB lại với nhau (diện tích chỗ dán nhỏ không đáng kể). Gọi 500 là góc ở tâm hình quạt tròn dùng làm phễu. Tìm x để thể tích phễu lớn nhất?



- A. $\frac{\pi\sqrt{2}}{64}$. B. $\frac{\pi 2\sqrt{3}}{5}$. C. $\frac{\pi\sqrt{105}}{64}$. D. $\frac{\pi\sqrt{103}}{12}$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào hình vẽ, độ dài cung 57 lớn bằng 500 , bán kính hình nón n

Đường cao của hình nón $500.(1+0,005)^n 10 10$

Thể tích khối nón (phễu) $n 10 n$

Theo Cauchy ta có $10.(1+0,005)^n 10.$

Dấu bằng xảy ra khi $n-110.(1+0,005)^{n-1}.$

Vậy thể tích phễu lớn nhất khi $10.$

-----Hết-----

Hình học

Chủ đề 02

KHOẢNG TRỌNG

KHOẢNG TRỌNG

A. LÝ THUYẾT CHUNG.

1. Định nghĩa.

Trong mặt phẳng (P) :

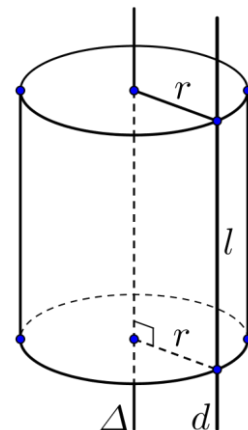
- Cho 2 đường thẳng d, Δ song song với nhau, cách nhau một khoảng bằng r .
- Quay (P) xung quanh trục Δ thì ℓ sinh ra một mặt tròn xoay, được gọi là mặt trụ.

→ Người ta thường gọi tất mặt nón tròn xoay là mặt nón.

→ Đường thẳng Δ gọi là trục,

→ Đường thẳng ℓ được gọi là đường sinh,

→ r gọi là bán kính.



2. Hình trụ tròn xoay.

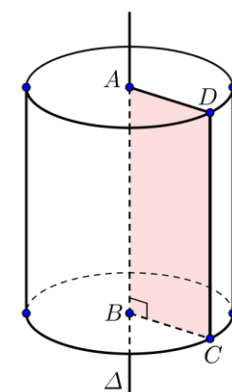
Cho hình chữ nhật $ABCD$ quay quanh AB thì đường gấp khúc $ADCB$ tạo thành một hình, gọi là hình trụ tròn xoay (gọi tắt là hình trụ).

→ Đường thẳng Δ gọi là trục,

→ AB gọi là đường cao,

→ CD gọi là đường sinh của hình nón.

→ Hình tròn tâm B , bán kính $R = BC$ là đáy của hình nón.



3. Diện tích - Thể tích.

Cho hình trụ có chiều cao là h , bán kính đáy r và đường sinh là ℓ thì có:

→ Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2\pi.r.l$.

→ Diện tích đáy (hình tròn): $S_d = \pi r^2$.

→ Diện tích toàn phần hình trụ: $S_{tp} = S_{xq} + 2S_d$

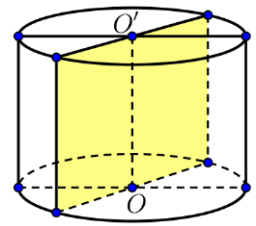
→ Thể tích khối trụ: $V = B.h = \pi r^2.h$

4. Tính chất.

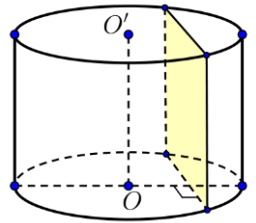
Nếu cắt mặt trụ tròn xoay bởi mặt phẳng:

→ **Cắt 2 mặt đáy** thì có các trường hợp sau xảy ra:

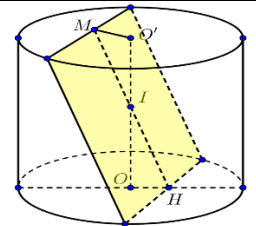
① Mặt phẳng cắt mặt trụ theo 2 đường sinh
→ Thiết diện là tứ giác (hình vuông/hình chữ nhật).



② Mặt phẳng cắt mặt trụ theo 2 đường sinh, song song với trục

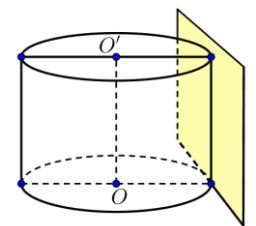


③ Mặt phẳng cắt mặt trụ theo 2 đường sinh, cắt trục

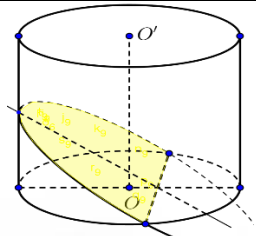


→ **Chỉ cắt 1 mặt đáy** thì có các trường hợp sau xảy ra:

Mặt phẳng tiếp xúc với mặt trụ theo một đường sinh
→ Mặt phẳng tiếp diện của mặt trụ.

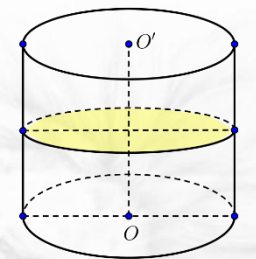


④ Mặt phẳng cắt 1 đường sinh hình trụ và 1 mặt đáy
→ Giao tuyến là đường parabol.



→ **Song song 2 đáy** thì có trường hợp sau xảy ra:

① Mặt phẳng cắt vuông góc với trục hình nón
→ Giao tuyến là một đường tròn.



5. Mối liên hệ thường gặp.

	Trường hợp	Nội dung	Công thức	Hình minh họa
Thiết diện	Qua trục	Thiết diện là hình vuông	$h = l = 2R$	
	Không qua trục	Song song với trục: + Vẽ trung điểm của dây. + Nối với tâm mặt đáy. + Xem giả thiết: cách trục 1 khoảng $d \rightarrow d = OH$		
		Cắt trục tại I: + Vẽ trung điểm hai dây. + Nối hai trung điểm $\rightarrow$ cắt trục tại I. + Xem giả thiết: $\Rightarrow (t/dien; m/day) = O'MI = OHI$. $\Rightarrow (t/dien; truc) = OIH = O'IM$.		
Liên quan với khối hộp – lăng trụ	Nội tiếp	Nội tiếp hình hộp đứng $\rightarrow \begin{cases} h = l = c/ben \\ R = \frac{1}{2} c/day \end{cases}$		
	Ngoại tiếp	Ngoại tiếp hình hộp đứng $\rightarrow \begin{cases} h = canh \\ R = \frac{c/day\sqrt{2}}{2} \end{cases}$		
		Ngoại tiếp lăng trụ đứng $\rightarrow \begin{cases} h = c / ben \\ R = r \end{cases}$ Với r là bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy.		

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

➤ Dạng 2.1. Tính độ dài đường sinh, bán kính đáy, đường cao

☑ Trường hợp đơn giản, áp dụng công thức đã có.

→ Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2\pi \cdot r \cdot l$.

→ Diện tích đáy (hình tròn): $S_d = \pi r^2$.

→ Diện tích toàn phần hình tròn: $S_{tp} = S_{xq} + 2S_d$

→ Thể tích khối trụ: $V = B \cdot h = \pi r^2 \cdot h$

☞ Ví dụ 1.1.1

Cho hình trụ có diện tích xung quanh bằng $8\pi a^2$ và bán kính đáy bằng a . Độ dài đường sinh của hình trụ bằng:

A. $4a$.

B. $a\sqrt{3}$.

C. $2a$.

D. $3a$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $S_{xq} = 2\pi Rl \Rightarrow l = \frac{S_{xq}}{2\pi R} = \frac{8\pi a^2}{2\pi a} = 4a$.

☞ Ví dụ 1.1.2

Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $BC = 3, AC = 5$. Tính độ dài đường sinh l của khối trụ sinh ra khi quay hình chữ nhật $ABCD$ xung quanh trục AB .

A. 5.

B. 4.

C. 6.

D. 9.

Lời giải

Chọn B

Độ dài đường sinh của khối trụ là: $l = AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.

☞ Ví dụ 1.1.3

Cho hình trụ có diện tích xung quanh bằng 50π và độ dài đường sinh bằng đường kính của đường tròn đáy. Tính bán kính r của đường tròn đáy.

A. $r = 5\sqrt{\pi}$.

B. $r = 5$.

C. $r = \frac{5\sqrt{2\pi}}{2}$.

D. $r = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Diện tích xung quanh của hình trụ: $2\pi rl$ (l : độ dài đường sinh) có $l = 2r$

$S_{xq} = 2\pi rl \Leftrightarrow 2\pi rl = 50\pi \Leftrightarrow 2\pi r 2r = 50\pi \Leftrightarrow r = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

☞ Ví dụ 1.1.4

Cắt một khối trụ bởi một mặt phẳng qua trục ta được thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$ có AB và CD thuộc hai đáy của khối trụ. Biết $AC = 5a$ và bán kính đáy của khối trụ bằng $2a$. Tính độ dài đường sinh của khối trụ đã cho.

A. $3a$.

B. $6a$.

C. $a\sqrt{21}$.

D. $4a$.

Lời giải

Chọn A

Xét $\triangle ABC$ có $AB = 2r = 4a$.

Đường sinh của khối trụ đã cho là $l = BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 3a$.

Dạng 2.2. Tính diện tích xung quanh - toàn phần - thể tích

- ☑ Cho hình trụ (H) có bán kính đáy bằng r , chiều cao h và độ dài đường sinh là l . Ký hiệu S_{xq} , S_{tp} lần lượt là diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ (H), khi đó ta có

→ Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2\pi.r.l$.

→ Diện tích đáy (hình tròn): $S_d = \pi r^2$.

→ Diện tích toàn phần hình tròn: $S_{tp} = S_{xq} + 2S_d$

→ Thể tích khối trụ: $V = B.h = \pi r^2.h$

Ví dụ 2.2.1

Một hình trụ có bán kính đáy a , có thiết diện qua trục là một hình vuông. Tính diện tích xung quanh của hình trụ.

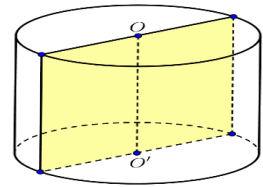
- A. πa^2 . B. $2\pi a^2$. C. $3\pi a^2$. D. $4\pi a^2$.

Lời giải

Chọn D

Hình trụ có bán kính đáy a ,
Thiết diện qua trục là một hình vuông
Nên chiều cao hình trụ bằng $2a$.

Diện tích xung quanh hình trụ: $S_{xq} = 2\pi R h = 2\pi.a.2a = 4\pi a^2$



Ví dụ 2.2.2

Tính diện tích toàn phần của hình trụ có bán kính đáy a và đường cao $a\sqrt{3}$.

- A. $2\pi a^2(1+\sqrt{3})$. B. $2\pi a^2(\sqrt{3}-1)$. C. $\pi a^2\sqrt{3}$. D. $\pi a^2(1+\sqrt{3})$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $S_{xq} = 2\pi a.a\sqrt{3} = 2\pi a^2\sqrt{3}$; $S_{day} = \pi a^2 \rightarrow S_{tp} = 2\pi a^2\sqrt{3} + 2\pi a^2 = 2\pi a^2(1+\sqrt{3})$

Ví dụ 2.2.3

Cho hình trụ có chiều cao bằng $5\sqrt{3}$. Cắt hình trụ đã cho bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng 1, thiết diện thu được có diện tích bằng 30. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

- A. $10\sqrt{3}\pi$. B. $5\sqrt{39}\pi$. C. $20\sqrt{3}\pi$. D. $10\sqrt{39}\pi$.

Lời giải

Chọn C

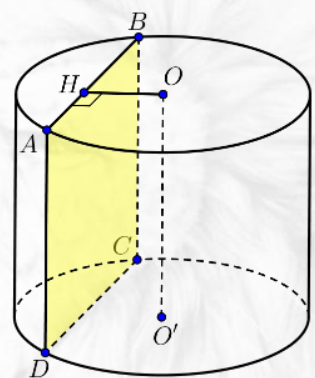
Gọi O, O' lần lượt là tâm của hai đáy
 $ABCD$ là thiết diện song song trục; $A, B \in (O)$;
 $C, D \in (O')$.

Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow OH = d(OO', (ABCD)) = 1$.

$S_{ABCD} = 30 \Leftrightarrow AB.BC = 30 \Rightarrow AB = 2\sqrt{3} \Rightarrow HA = HB = \sqrt{3}$.

$r = \sqrt{OH^2 + HA^2} = \sqrt{3+1} = 2$.

$S_{xq} = 2\pi r h = 2\pi.2.5\sqrt{3} = 20\sqrt{3}\pi$



Ví dụ 2.2.4

Tính thể tích V của khối trụ có bán kính đáy $r = 4$ và chiều cao $h = 4\sqrt{2}$.

- A. $V = 32\pi$. B. $V = 64\sqrt{2}\pi$. C. $V = 128\pi$. D. $V = 32\sqrt{2}\pi$.

Lời giải

Chọn B

Thể tích của khối trụ là $V = \pi r^2 h = 4^2 \cdot 4\sqrt{2}\pi = 64\sqrt{2}\pi$

Ví dụ 2.2.5

Một hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông, diện tích xung quanh bằng 4π .
Thể tích khối trụ là

- A. $\frac{2}{3}\pi$. B. 2π . C. 4π . D. $\frac{4}{3}\pi$.

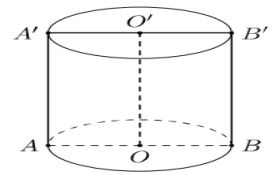
Lời giải

Chọn B

Ta có $ABB'A'$ là hình vuông $\Rightarrow h = 2r$.

$$S_{xq} = 2\pi r h = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2 = 4\pi = 1 \Rightarrow h = 2.$$

Thể tích khối trụ $V = \pi r^2 h = \pi \cdot l^2 \cdot 2 = 2\pi$.



Ví dụ 2.2.6

Cắt mặt xung quanh của một hình trụ dọc theo một đường sinh rồi trải ra trên mặt phẳng ta được hình vuông có chu vi bằng 8π . Thể tích khối trụ đã cho bằng

- A. $2\pi^2$. B. $2\pi^3$. C. 4π . D. $4\pi^2$.

Lời giải

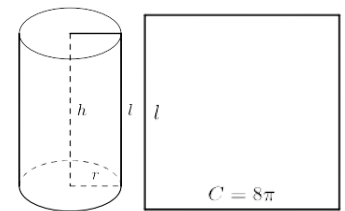
Chọn A

Chu vi hình vuông bằng 8π

Nên cạnh hình vuông bằng 2π .

Do đó hình trụ có bán kính $R = 1$, đường sinh $l = 2R$.

Vậy thể tích của hình trụ là $V = \pi R^2 h = 2\pi^2$.



Ví dụ 2.2.7

Cho hình trụ có các đáy là 2 hình tròn tâm O và O' , bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a . Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A , trên đường tròn đáy tâm O' lấy điểm B sao cho $AB = 2a$. Thể tích khối tứ diện $OO'AB$ theo a là.

- A. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{6}$. B. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. C. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{8}$. D. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Kẻ đường sinh AA' .

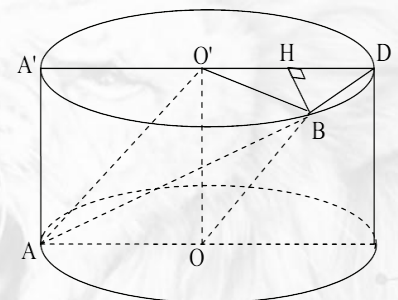
Gọi D là điểm đối xứng với A' qua O' và

H là hình chiếu của B trên đường thẳng $A'D$.

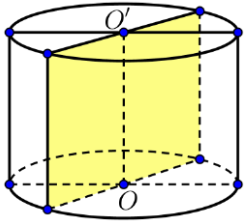
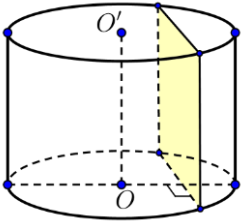
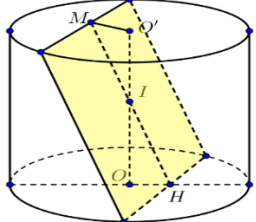
Do $BH \perp A'D$, $BH \perp AA' \Rightarrow BH \perp (AOO'A')$.

$$A'B = \sqrt{AB^2 - A'A^2} = a\sqrt{3} \Rightarrow BD = \sqrt{A'D^2 - A'B^2} = a.$$

$$\Delta O'BD \text{ đều nên } BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}; S_{\Delta AOO'} = \frac{a^2}{2} \rightarrow V = \frac{\sqrt{3}a^3}{12}.$$



➤ Dạng 2.3. Thiết diện

Qua trục	Không qua trục	Cắt trục
☑ Thiết diện là hình vuông $h = l = 2R$	☑ Song song với trục: + Vẽ trung điểm của dây. + Nối với tâm mặt đáy. + Xem giả thiết: cách trục 1 khoảng $d \rightarrow d = OH$	☑ Cắt trục tại I: + Vẽ trung điểm hai dây. + Nối hai trung điểm $\rightarrow$ cắt trục tại I. + Xem giả thiết: ☞ $(t/dien; m/day) = O'MI = OHI$. ☞ $(t/dien; truc) = OIH = O'IM$.
		

☞ Ví dụ 2.3.1

Một hình trụ có bán kính đáy bằng a , mặt phẳng qua trục cắt hình trụ theo một thiết diện có diện tích bằng $8a^2$. Tính diện tích xung quanh của hình trụ?

A. $4\pi a^2$.

B. $8\pi a^2$.

C. $16\pi a^2$.

D. $2\pi a^2$.

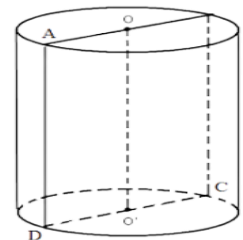
Lời giải

Chọn B

Thiết diện qua trục của hình trụ là hình chữ nhật, có độ dài một cạnh là $2a$, có diện tích là $8a^2$,

Suy ra chiều cao của hình trụ là $h = \frac{8a^2}{2a} = 4a$.

Vậy diện tích xung quanh của hình trụ là: $S_{xq} = 2\pi rh$
 $= 2 \cdot \pi \cdot a \cdot 4a = 8\pi a^2$.



☞ Ví dụ 2.3.2

Một hình trụ có bán kính đáy $r = 5\text{cm}$ và khoảng cách giữa hai đáy $h = 7\text{cm}$. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng (P) song song với trục và cách trục 3cm . Diện tích của thiết diện được tạo thành là:

A. $S = 56(\text{cm}^2)$.

B. $S = 55(\text{cm}^2)$.

C. $S = 53(\text{cm}^2)$.

D. $S = 46(\text{cm}^2)$.

Lời giải

Chọn A

(P) cắt (O) , (O') theo hai dây cung AB , CD

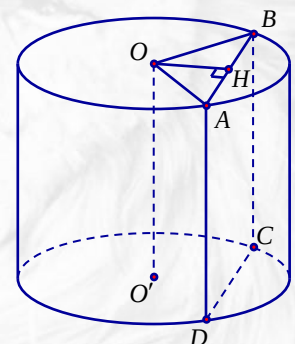
Và cắt mặt xung quanh theo hai đường sinh AD , BC .

Khi đó $ABCD$ là hình chữ nhật.

Gọi H là trung điểm của AB .

Ta có $OH \perp AB$; $OH \perp AD \Rightarrow OH \perp (ABCD)$

$\Rightarrow d(OO', (P)) = d(O, (ABCD)) = OH = 3\text{cm}$.



Khi đó, $AB = 2AH = 2\sqrt{OA^2 - OH^2} = 2\sqrt{5^2 - 3^2} = 8$; $AD = OO' = h = 7\text{cm}$.

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là: $S_{ABCD} = AB \cdot AD = 56(\text{cm}^2)$.

Ví dụ 2.3.3

Cho hình trụ có chiều cao bằng $6\sqrt{2}$ (cm). Biết rằng một mặt phẳng không vuông góc với đáy và cắt hai mặt đáy theo hai dây cung song song AB , $A'B'$ và $AB = A'B' = 6$ (cm), diện tích hình chữ nhật $ABB'A'$ bằng 60 (cm²). Tính bán kính đáy của hình trụ.

A. 12.

B. 4.

C. 25.

D. 8.

Lời giải

Chọn B

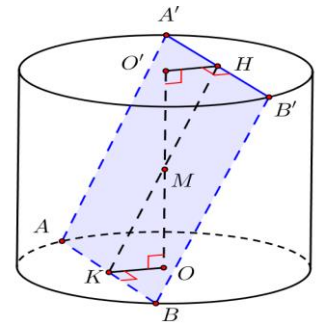
Diện tích hình chữ nhật $ABB'A'$ bằng 60 (cm²)

Nên $AB \cdot BB' = 60 \Leftrightarrow 6 \cdot BB' = 60 \Leftrightarrow BB' = 10 \rightarrow MK = 5$

Chiều cao hình trụ bằng $6\sqrt{2}$ (cm) nên $MO = 3\sqrt{2}$.

$OK = \sqrt{MK^2 - MO^2} = \sqrt{25 - 18} = \sqrt{7}$; $AB = 6 \Rightarrow KB = 3$.

$BO = \sqrt{OK^2 + KB^2} = \sqrt{7 + 9} = 4$.



Ví dụ 2.3.4

Một hình trụ có bán kính đáy bằng 4 (cm) và có chiều cao bằng 5 (cm). Gọi AB là dây cung đáy dưới sao cho $AB = 4\sqrt{3}$ (cm). Người ta dựng mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A , B và tạo với đáy hình trụ góc 60° như hình vẽ. Tính diện tích thiết diện của hình trụ cắt bởi mặt phẳng (P) .

A. 12.

B. 4.

C. 25.

D. 8.

Lời giải

Chọn B

Thiết diện hình trụ cắt bởi (P) có hình chiếu lên mặt đáy

là miền cung tròn nhỏ AB

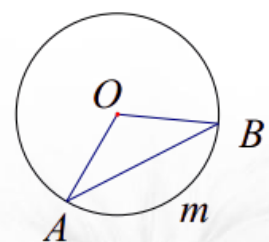
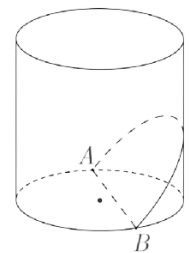
Gọi S là diện tích thiết diện

Và S' diện tích hình chiếu của thiết diện lên mặt đáy.

$$\cos AOB = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2OA \cdot OB} = \frac{-1}{2} \Rightarrow AOB = 120^\circ$$

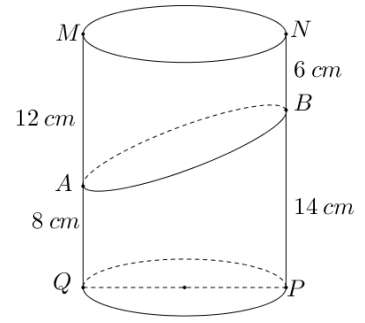
$$\begin{cases} S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin AOB = 4\sqrt{3} \\ S_{OAmB} = \frac{1}{2} \cdot l_{AB} \cdot R = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi \cdot 4 \cdot 120^\circ}{180^\circ} \cdot 4 = \frac{16\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow S' = S_{AmB} = S_{OAmB} - S_{\Delta OAB} = \frac{4(4\pi - 3\sqrt{3})}{3}$$

$$\text{Lại có: } S' = S \cdot \cos((P), (OAB)) \Rightarrow S = \frac{S'}{\cos((P), (OAB))} = \frac{8(4\pi - 3\sqrt{3})}{3}$$



Ví dụ 2.3.5

Cho khối trụ có chiều cao 20 cm . Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng được thiết diện là hình elip có độ dài trục lớn bằng 10 cm . Thiết diện chia khối trụ ban đầu thành hai nửa, nửa trên có thể tích là V_1 , nửa dưới có thể tích là V_2 (như hình vẽ). Khoảng cách từ một điểm thuộc thiết diện gần đáy dưới nhất và điểm thuộc thiết diện xa đáy dưới nhất lần lượt là 8 cm và 14 cm . Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.



A. $\frac{V_1}{V_2} = 12$.

B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{9}{11}$.

C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}$.

D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{3}$.

Lời giải

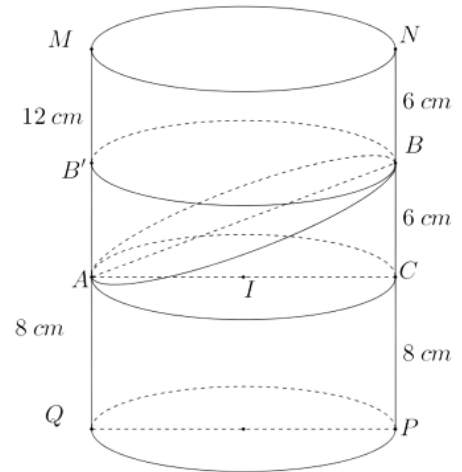
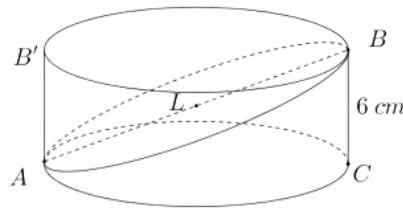
Chọn B

Qua A và B , dựng mặt phẳng vuông góc với đường sinh và cắt khối trụ theo thiết diện là một đường tròn (Kí hiệu các điểm như hình vẽ)

Ta có $\begin{cases} BC = 6\text{ cm} \\ AB = 10\text{ cm} \end{cases} \rightarrow AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 8\text{ cm}.$

Phân chia khối hình, sử dụng phép đối xứng tâm.

Xét khối trụ ở giữa:



Thiết diện qua A, B cắt trụ thành hai phần có thể tích bằng nhau (Phần này có được bằng phép đối xứng tâm phần kia qua tâm L , với L là trung điểm của AB)

Và bằng một nửa khối trụ và bằng $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 6 = 48\pi (\text{cm}^2)$.

Từ đó suy ra thể tích nửa trên là: $V_1 = \pi \cdot 4^2 \cdot 6 + 48\pi = 144\pi (\text{cm}^2)$.

Thể tích nửa dưới là: $V_2 = \pi \cdot 4^2 \cdot 8 + 48\pi = 176\pi (\text{cm}^2)$.

Tỉ số thể tích $\frac{V_1}{V_2} = \frac{9}{11}$.

➤ **Dạng 2.4. Nội - ngoại tiếp**

☑ **Bài toán 1:** Hình trụ ngoại tiếp

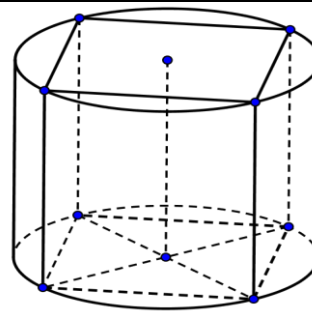
♦ **Loại 1:** Hình trụ ngoại tiếp hình hộp đứng

Khi đó hình trụ có:

+ Đường sinh l là cạnh bên của hình hộp

+ Chiều cao h là chiều cao của hình hộp

+ Bán kính đáy r bằng $\frac{c/day\sqrt{2}}{2}$.



♦ **Loại 2:** Hình trụ ngoại tiếp hình lăng trụ đứng

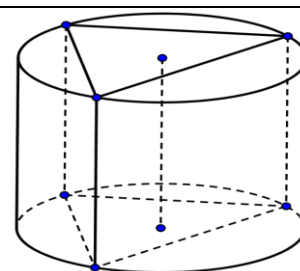
Khi đó hình trụ có:

+ Đường sinh l là cạnh bên của hình lăng trụ

+ Chiều cao h là chiều cao của hình lăng trụ

+ Bán kính đáy r bằng r_d .

Với r_d là bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy



☑ **Bài toán 2:** Hình trụ nội tiếp

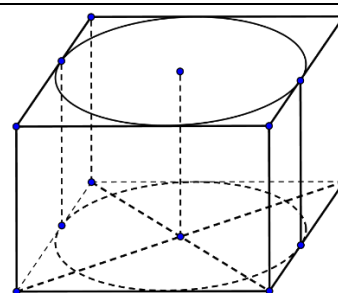
♦ **Loại 1:** Hình trụ nội tiếp hình hộp đứng

Khi đó hình trụ có:

+ Đường sinh l là cạnh bên của hình hộp

+ Chiều cao h là chiều cao của hình hộp

+ Bán kính đáy r bằng $\frac{c/day}{2}$.



♦ **Loại 2:** Hình trụ nội tiếp hình lăng trụ đứng

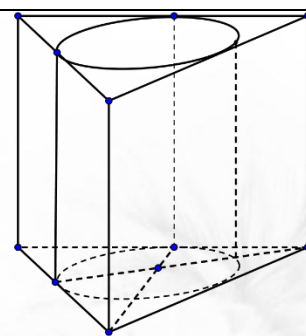
Khi đó hình trụ có:

+ Đường sinh l là cạnh bên của hình lăng trụ

+ Chiều cao h là chiều cao của hình lăng trụ

+ Bán kính đáy r bằng $r_d = \frac{2}{3}h_d = \frac{c/day\sqrt{3}}{3}$.

Với r_d là bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy



Ví dụ 1.4.1

Một hình lăng trụ tứ giác đều có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$ và cạnh bên bằng $2a$ nội tiếp trong một hình trụ. Tính diện tích toàn phần của hình trụ.

- A. $6\pi a^2$. B. $\pi a^2(1+2\sqrt{2})$. C. $3\pi a^2$. D. $\frac{\pi a^2(1+2\sqrt{2})}{2}$.

Lời giải

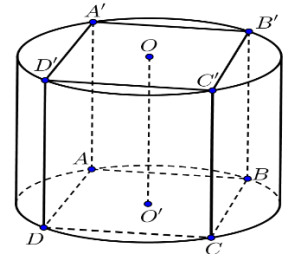
Chọn A

Đáy là hình tròn ngoại tiếp hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$

Nên có $r = a$.

Diện tích toàn phần hình trụ là

$$S_{tp} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi \cdot a \cdot 2a + 2\pi a^2 = 6\pi a^2.$$



Ví dụ 1.4.2

Một hình tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Xét hình trụ có một đáy là đường tròn nội tiếp tam giác ABC và chiều cao bằng chiều cao hình tứ diện. Diện tích xung quanh của hình trụ đó bằng:

- A. $\frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{2\pi a^2 \sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{2\pi a^2 \sqrt{3}}{3}$.

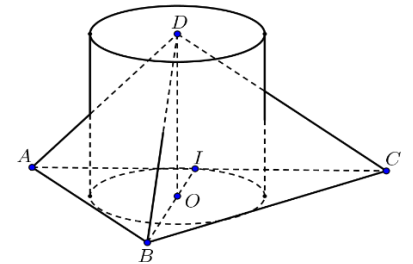
Lời giải

Chọn B

Đáy là đường tròn nội tiếp $\triangle ABC \rightarrow r = \frac{1}{3} \cdot BI = a \frac{\sqrt{3}}{6}$

Đường cao tứ diện $ABCD$ là $DO = \sqrt{DB^2 - OB^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Diện tích xung quanh: $S = 2\pi rh = 2\pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{3}$.



Ví dụ 1.4.3

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , góc giữa AC' và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng 30° . Tính thể tích của khối trụ ngoại tiếp khối lăng trụ đã cho.

- A. $4\pi a^3$. B. $\pi a^3 \sqrt{2}$. C. $2\pi a^3 \sqrt{2}$. D. $\pi a^3 \sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi bán kính của hình trụ là R .

Ta có: $CC' \perp (ABC) \Rightarrow CC' \perp AI$

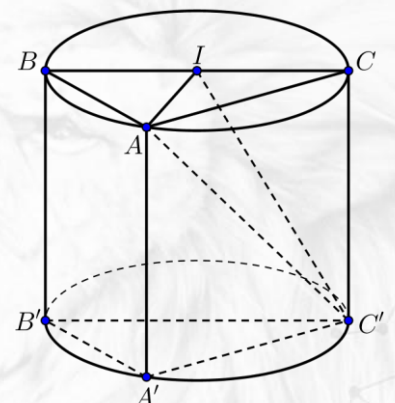
Mà $\triangle ABC$ vuông cân tại $A \rightarrow AI \perp BC$

$\rightarrow AI \perp (BCC'B')$ hay $(AC'; (BCC'B')) = \angle IC'A = 30^\circ$.

Xét $\triangle AIC'$: $IC' = \frac{AI}{\tan \angle IC'A} = R\sqrt{3}$.

Xét $\triangle CIC'$: $IC'^2 = IC^2 + CC'^2 \Leftrightarrow 3R^2 = R^2 + 4a^2 \Rightarrow R = a\sqrt{2}$.

$\rightarrow V = \pi r^2 h = \pi \cdot (a\sqrt{2})^2 \cdot 2a = 4\pi a^3$



➤ **Dạng 2.5. Min - max liên quan khối trụ**

- ☑ Xây dựng công thức cần tìm *min - max*.
- ☑ Dùng các cách dưới đây để tìm *min - max*.

	Dạng	Dấu "=" xảy ra khi
BĐT Bunyakovsky	$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$	$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$
	$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$	$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$
BĐT AM - GM	$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$	$a = b$
	$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \quad (n \geq 1)$	$a_1 = a_2 = \dots = a_n$
Khảo sát hàm số trên khoảng xác định	Tính đạo hàm rồi lập BBT, từ đó kết luận theo yêu cầu bài toán.	
Đánh giá lượng giác	$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin(AB; AC)$ Khi đó, để $[S_{ABC}]_{\max}$ $\Leftrightarrow [\sin(AB; AC)]_{\max} \Leftrightarrow \sin(AB; AC) = 1 \Leftrightarrow (AB; AC) = 90^\circ \Leftrightarrow AB \perp AC$	

➤ **Ví dụ 2.5.1**

Bạn An muốn làm một chiếc thùng hình trụ không đáy từ nguyên liệu là mảnh tôn hình tam giác đều ABC có cạnh bằng 90 (cm). Bạn muốn cắt mảnh tôn hình chữ nhật MNPQ từ mảnh tôn nguyên liệu (M, N thuộc cạnh BC; P và Q tương ứng thuộc cạnh AC và AB) để tạo thành hình trụ có chiều cao bằng MQ. Thể tích lớn nhất của chiếc thùng mà bạn An có thể làm được là:

- A. $\frac{91125}{4\pi} (cm^3)$. B. $\frac{91125}{2\pi} (cm^3)$.
 C. $\frac{108000\sqrt{3}}{\pi} (cm^3)$. D. $\frac{13500\sqrt{3}}{\pi} (cm^3)$.

Lời giải

Chọn D

Gọi I là trung điểm BC. Suy ra I là trung điểm MN

Đặt $MN = x, 0 < x < 90$

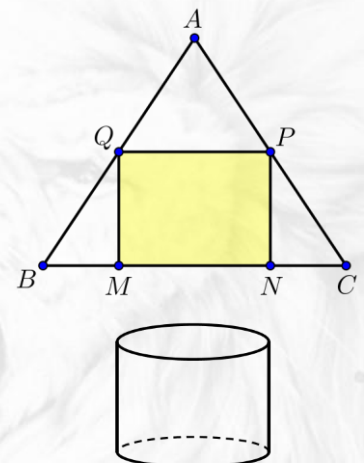
Ta có: $\frac{MQ}{AI} = \frac{BM}{BI} \Rightarrow MQ = \frac{\sqrt{3}}{2}(90 - x)$

Gọi R là bán kính của trụ $\Rightarrow R = \frac{x}{2\pi}$

$\Rightarrow V_T = \pi \left(\frac{x}{2\pi} \right)^2 \frac{\sqrt{3}}{2}(90 - x) = \frac{\sqrt{3}}{8\pi} (-x^3 + 90x^2)$

Xét $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{8\pi} (-x^3 + 90x^2)$ với $0 < x < 90$.

Khi đó: $\max_{x \in (0; 90)} f(x) = \frac{13500\sqrt{3}}{\pi}$ khi $x = 60$.





Ví dụ 2.5.2

Cho $\triangle ABC$ cân tại A , $AB = AC = 5a$, $BC = 6a$. Hình chữ nhật $MNPQ$ có M, N lần lượt thuộc cạnh AB, AC và P, Q thuộc cạnh BC . Quay hình chữ nhật $MNPQ$ (và miền trong nó) quanh trục đối xứng của tam giác ABC được một khối tròn xoay. Tính độ dài đoạn MN để thể tích khối tròn xoay lớn nhất.

- A. $MN = a$. B. $MN = 2a$. C. $MN = 5a$. D. $MN = 4a$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $BH = 3a$; $AH = 4a$.

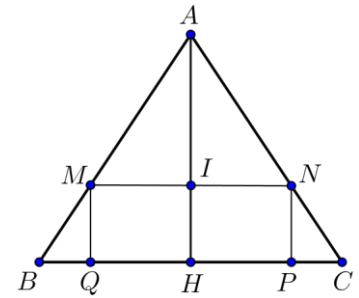
Đặt $HQ = x \Rightarrow BQ = 3a - x$ ($0 < x < 3a$).

Ta có: $\frac{MQ}{AH} = \frac{BQ}{BH} \Rightarrow MQ = \frac{4(3a - x)}{3}$.

Khi đó: $V_T = \pi \cdot x^2 \cdot \frac{4(3a - x)}{3} = 4\pi \left(ax^2 - \frac{x^3}{3} \right)$ ($0 < x < 3a$).

Xét hàm số $f(x) = x^2 - \frac{x^3}{3}$ ($0 < x < 3a$) $\rightarrow f'(x) = 2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 (L) \\ x = 2 (N) \end{cases}$

Hàm số $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = 2a \Rightarrow MN = 4a$.



Ví dụ 2.5.3

Cho hình nón có chiều cao h . Tính chiều cao x của khối trụ có thể tích lớn nhất nội tiếp trong hình nón theo h .

- A. $x = \frac{h}{2}$. B. $x = \frac{h}{3}$. C. $x = \frac{2h}{3}$. D. $x = \frac{h}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn B

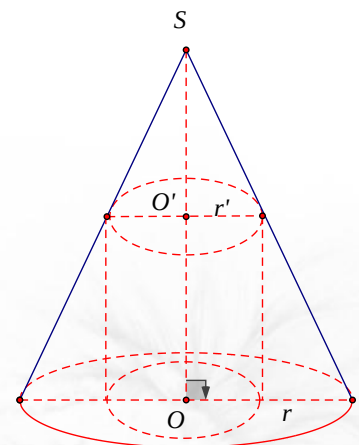
Theo Ta-Let: $\frac{SO'}{SO' + x} = \frac{h - x}{h} = \frac{r'}{r}$, ($0 < x < h$).

Ta có: $V = \pi r'^2 x = \pi \frac{[(h - x)r]^2}{h^2} \cdot x = \frac{\pi r^2}{h^2} x(h - x)^2$.

Xét $M(x) = x(h - x)^2$

$$= 4 \cdot \frac{h - x}{2} \cdot \frac{h - x}{2} \cdot x \leq 4 \left(\frac{\frac{h - x}{2} + \frac{h - x}{2} + x}{3} \right)^3 = \frac{4h^3}{27}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{h - x}{2} = x \Leftrightarrow x = \frac{h}{3}$.



➤ Dạng 2.6. Bài toán thực tế

- ☑ **Bài toán 1:** Các bài toán thực tế đã được mô hình hóa bằng một bài toán hình học.
- Sử dụng công cụ hình học, đại số (nếu cần) giải quyết bài toán.
 - Lưu ý các điều kiện ràng buộc của biến số và kết quả thu được có phù hợp với bài toán thực tế đã cho chưa.
- ☑ **Bài toán 2:** Các bài toán thực tế mà mô hình thực tiễn chưa chuyển về mô hình toán học.

Bước 1: Dựa trên các giả thiết và yếu tố của đề bài, ta xây dựng mô hình Hình học cho vấn đề đang xét, tức là diễn tả “dưới dạng ngôn ngữ Hình học” cho mô hình mô phỏng thực tiễn.

Bước 2: Sử dụng công cụ giải quyết bài toán hình học được hình thành từ bước 1.

- Lưu ý các điều kiện ràng buộc của biến số và kết quả thu được có phù hợp với bài toán thực tế đã cho chưa.

☞ Ví dụ 2.6.1

Một công ty dự kiến làm một đường ống thoát nước thải hình trụ dài 1(km), đường kính trong của ống (không kể lớp bê tông) bằng 1(m), độ dày của lớp bê tông bằng 10(cm). Biết rằng cứ một mét khối bê tông phải dùng 8 bao xi măng. Số bao xi măng công ty phải dùng để xây dựng đường ống thoát nước là bao nhiêu?

- A. 2765. B. 11234. C. 2000. D. 1255.

Lời giải

Chọn A

Đường kính của đường ống là $(1+0,1.2)=1,2(m)$

Thể tích: $V = \pi r^2 h = \pi \cdot (0,6)^2 \cdot 1000 = 360\pi (m^3)$.

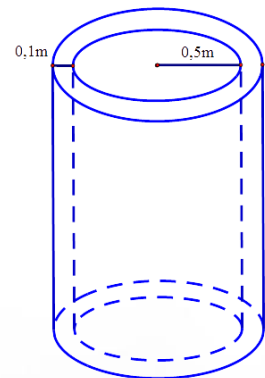
Thể tích của khối trụ không chứa bê tông (phần rỗng) là

$$V_1 = \pi r^2 l = \pi \cdot (0,5)^2 \cdot 1000 = 250\pi (m^3)$$

Thể tích phần bê tông: $V_2 = V - V_1 = 110\pi (m^3)$.

Số bao xi măng công ty cần phải dùng:

$$110\pi \cdot 8 \approx 2765 (\text{bao}).$$



☞ Ví dụ 2.6.2

Người ta làm tạ tập cơ tay như hình vẽ với hai đầu là hai khối trụ bằng nhau và tay cầm cũng là khối trụ. Biết hai đầu là hai khối trụ đường kính đáy bằng 12, chiều cao bằng 6, chiều dài tạ bằng 30 và bán kính tay cầm là 2. Hãy tính thể tích vật liệu làm nên tạ tay đó.

- A. 108π . B. 6480π . C. 502π . D. 504π .

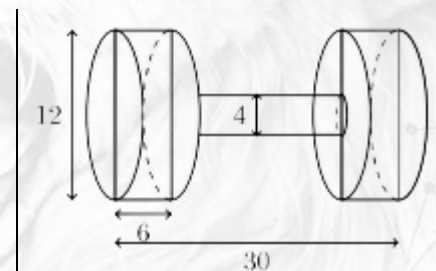
Lời giải

Chọn D

Gọi h_1, R_1, V_1 là chiều cao, bán kính đáy, thể tích khối trụ nhỏ mỗi đầu.

$$\rightarrow V_1 = h_1 \pi \cdot R_1^2 = 6 \cdot \pi \cdot 6^2 = 216\pi.$$

Gọi h_2, R_2, V_2 là chiều cao, bán kính đáy, thể tích của tay cầm.



$$\longrightarrow V_2 = h_2 \pi \cdot R_2^2 = (30 - 2.6) \cdot \pi \cdot 2^2 = 72\pi.$$

Thể tích vật thể làm nên tạ tay bằng $V = 2V_1 + V_2 = 504\pi$

Ví dụ 2.6.3

Một cái mũ bằng vải của nhà ảo thuật với các kích thước như hình vẽ. Hãy tính tổng diện tích vải cần có để làm nên cái mũ đó (không kể viền, mép, phần thừa).

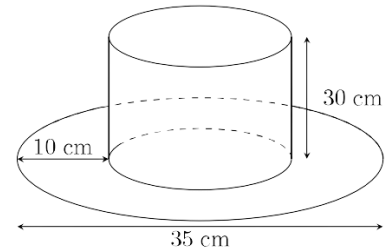
- A. $750,25\pi \text{ cm}^2$. B. $700\pi \text{ cm}^2$. C. $756,25\pi \text{ cm}^2$. D. $754,25\pi \text{ cm}^2$.

Lời giải

Chọn C

Tổng diện tích được tính bằng tổng diện tích xung quanh của hình trụ và diện tích một đáy, với diện tích hình vành khăn.

$$\text{Ta có: } S = 2\pi \cdot 7,5 \cdot 30 + \pi \cdot 7,5^2 + \pi(17,5^2 - 7,5^2) = 756,25\pi.$$



Ví dụ 2.6.4

Người ta thả một viên bi có dạng hình cầu có bán kính 2,7 cm vào một chiếc cốc hình trụ đang chứa nước (tham khảo hình vẽ). Biết rằng bán kính của phần trong đáy cốc 5,4 cm và chiều cao của mực nước ban đầu trong cốc bằng 4,5 cm. Khi đó chiều cao của mực nước trong cốc là

- A. 5,4 cm. B. 5,7 cm.
C. 5,6 cm. D. 5,5 cm.

Lời giải

Chọn A

Gọi $R = 2,7 \text{ cm}$ là bán kính của viên bi.

Ta có bán kính phần trong đáy cốc là $2R$.

Thể tích nước ban đầu là $V_1 = \pi(2R)^2 \cdot 4,5 = 18\pi R^2$.

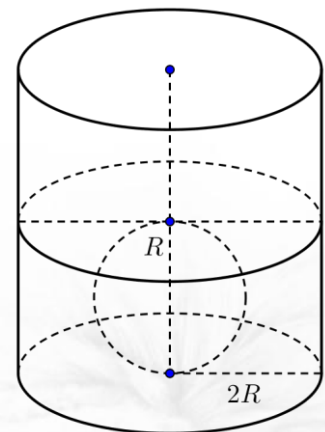
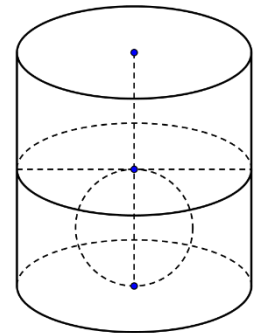
Thể tích viên bi là $V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Thể tích nước sau khi thả viên bi:

$$V = V_1 + V_2 = 2\pi R^2 \left(9 + \frac{2}{3}R \right).$$

Gọi h là chiều cao mực nước sau khi thả viên bi vào.

$$\text{Mà } V = \pi(2R)^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi(2R)^2} = \frac{9 + \frac{2}{3}R}{2} = 5,4 \text{ cm}.$$



Hình học

Chủ đề 03

KHOẢNG TRÒN XOAY

KHOẢNG CẦU

A. LÝ THUYẾT CHUNG.

1. Định nghĩa.

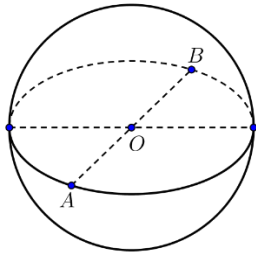
⌘ Tập hợp các điểm M trong không gian cách điểm O cố định một khoảng R .
Gọi là mặt cầu tâm O , bán kính R , ký hiệu: $S(O; R)$. Khi đó $S(O; R) = \{M \mid OM = R\}$.

2. Vị trí tương đối của một điểm với mặt cầu.

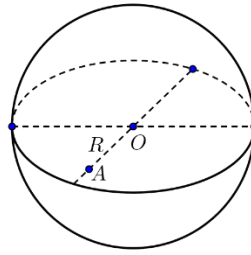
⌘ Cho mặt cầu $S(O; R)$ và một điểm A bất kì, khi đó:

① Nếu $OA = R$
 $\Leftrightarrow A \in S(O; R)$.

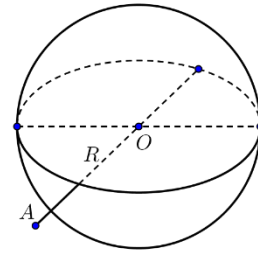
OA là bán kính mặt cầu.



② Nếu $OA < R \Leftrightarrow A$
nằm trong mặt cầu.



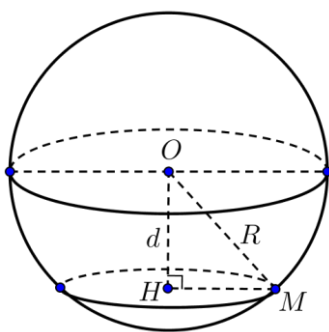
③ Nếu $OA > R \Leftrightarrow A$
nằm ngoài mặt cầu.



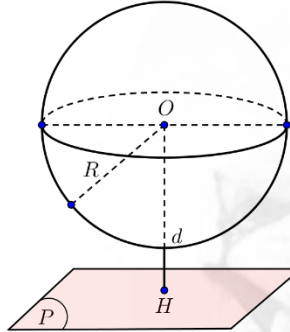
3. Vị trí tương đối của mặt phẳng với mặt cầu.

⌘ Cho mặt cầu $S(O; R)$ và một (P) . Gọi d là khoảng cách từ tâm O của mặt cầu đến (P) và H là hình chiếu của O trên $(P) \Rightarrow d = OH$.

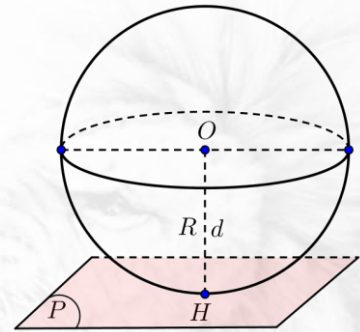
① Nếu $d < R \Leftrightarrow (P) \cap S(O; R)$
theo giao tuyến là đường
tròn trên (P) tâm H , bán
kính $r = HM$
 $= \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{R^2 - OH^2}$.



② Nếu $d > R \Leftrightarrow (P)$
không cắt mặt cầu
 $S(O; R)$.



③ Nếu $d = R \Leftrightarrow (P)$ có
một điểm chung duy
nhất. Ta nói mặt cầu
 $S(O; R)$ tiếp xúc (P) .



Do đó, điều kiện cần và đủ để (P) tiếp xúc với mặt cầu $S(O; R)$ là $d(O, (P)) = R$.

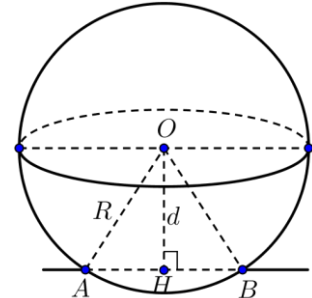
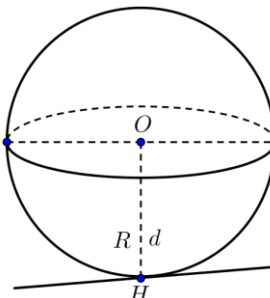
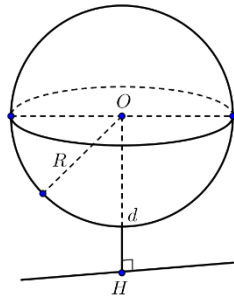
4. Vị trí tương đối của mặt phẳng với mặt cầu.

Cho mặt cầu $S(O; R)$ và một đường thẳng Δ . Gọi H là hình chiếu của O trên đường thẳng Δ và $d = OH$ là khoảng cách từ tâm O của mặt cầu đến Δ . Khi đó:

① Nếu $d > R \Leftrightarrow \Delta$ không cắt mặt cầu $S(O; R)$.

② Nếu $d < R \Leftrightarrow \Delta$ cắt mặt cầu $S(O; R)$ tại hai điểm phân biệt.

③ Nếu $d = R \Leftrightarrow \Delta$ và mặt cầu tiếp xúc nhau (tại một điểm duy nhất).



Do đó: điều kiện cần và đủ để Δ tiếp xúc với mặt cầu là $d = d(O, \Delta) = R$.

5. Định lý.

Nếu điểm A nằm ngoài mặt cầu $S(O; R)$ thì:

- ☞ Qua A có vô số tiếp tuyến với mặt cầu $S(O; R)$.
- ☞ Độ dài đoạn thẳng nối A với các tiếp điểm đều bằng nhau.
- ☞ Tập hợp các điểm này là một đường tròn nằm trên mặt cầu $S(O; R)$.

6. Diện tích - Thể tích.

Diện tích mặt cầu: $S_C = 4\pi R^2$.

Thể tích khối cầu: $V_C = \frac{4}{3}\pi R^3$

7. Một cầu ngoại tiếp khối đa diện.

Trục đa giác đáy (Trục đáy):

Đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp của đa giác đáy và vuông góc với mặt phẳng chứa đa giác đáy.

Bất kì một điểm nào nằm trên trục của đa giác thì cách đều các đỉnh của đa giác đó.

Đường trung trực của đoạn thẳng:

Đường thẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng và vuông góc với đoạn thẳng đó.

Bất kì một điểm nào nằm trên đường trung trực thì cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng.

Mặt trung trực của đoạn thẳng:

Mặt phẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng và vuông góc với đoạn thẳng đó.

Bất kì một điểm nào nằm trên mặt trung trực thì cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng.

8. Tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp:

Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp:

Là điểm cách đều các đỉnh của hình chóp.

Hay nói cách khác, nó chính là giao điểm I của trục đường tròn ngoại tiếp mặt phẳng đáy và mặt phẳng trung trực của một cạnh bên hình chóp.

Bán kính:

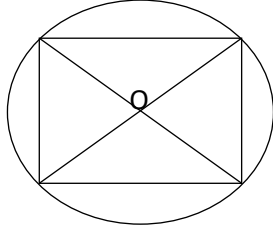
Là khoảng cách từ I đến các đỉnh của hình chóp.

9. Mặt cầu ngoại tiếp đa diện:

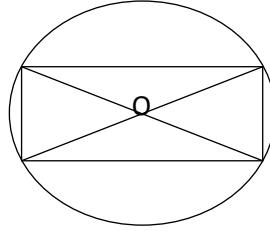
9.1. Kỹ thuật xác định đường tròn ngoại tiếp đa giác:

➤ Khi xác định tâm mặt cầu, ta cần xác định trục của mặt phẳng đáy.

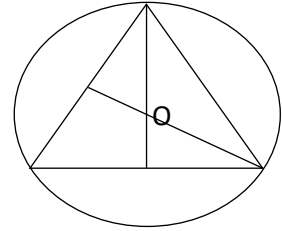
Trục đáy là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng đáy tại tâm O của đường tròn ngoại tiếp đáy.



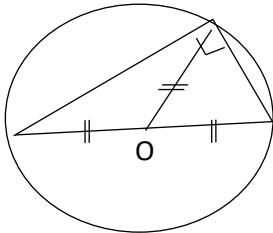
Hình vuông: O là giao điểm 2 đường chéo.



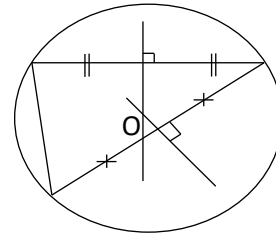
Hình chữ nhật: O là giao điểm của hai đường chéo.



Δ đều: O là giao điểm của 2 đường trung tuyến (trọng tâm).



Δ vuông: O là trung điểm của cạnh huyền.



Δ thường: O là giao điểm của hai đường trung trực của hai cạnh Δ .

9.2. Kỹ năng xác định trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy

➤ **Định nghĩa:**

Trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy là đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp đáy và vuông góc với mặt phẳng đáy.

➤ **Tính chất:**

$\forall M \in \Delta: MA = MB = MC$. Suy ra:

$MA = MB = MC \Leftrightarrow M \in \Delta$.

❖ **Bước 1:**

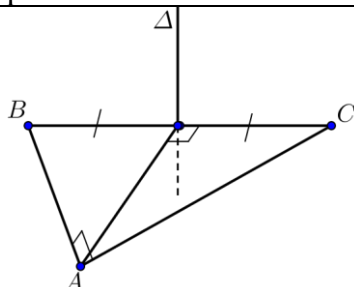
Xác định tâm H của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.

❖ **Bước 2:**

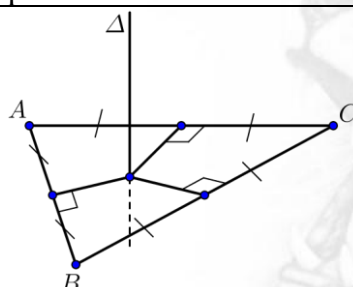
Qua H dựng Δ vuông góc với mặt phẳng đáy.

➤ **Một số trường hợp đặc biệt:**

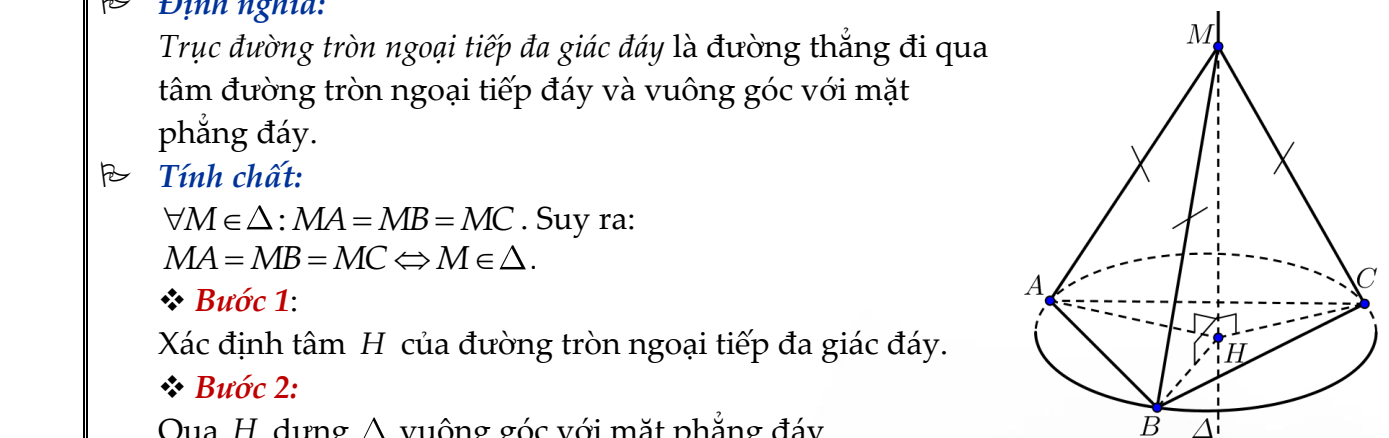
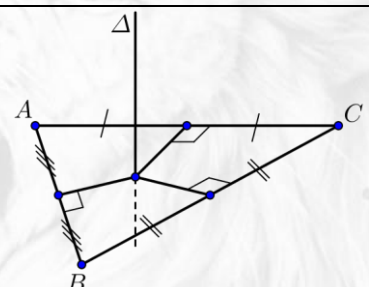
ΔABC vuông tại A ,
có H là trung điểm BC .
→ Khi đó trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC là Δ qua H .



Δ đều ABC ,
có H là trọng tâm ΔABC .
→ Khi đó trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC là Δ qua H .

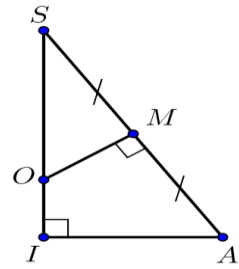


Δ thường ABC , gọi H là giao điểm của 3 đường trung trực.
→ Khi đó trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC là Δ qua H .



9.3. Kỹ năng tam giác đồng dạng:

⇒ $\triangle SMO$ đồng dạng với $\triangle SIA \Rightarrow \frac{SO}{SA} = \frac{SM}{SI}$.



9.4. Nhận xét quan trọng:

⇒ $\exists M, S: \begin{cases} MA = MB = MC \\ SA = SB = SC \end{cases} \Rightarrow SM$ là trục đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$

9.5. Kỹ thuật xác định mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

⇒ Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ (thỏa mãn điều kiện tồn tại mặt cầu ngoại tiếp).

Thông thường, để xác định mặt cầu ngoại tiếp hình chóp ta thực hiện theo hai bước:

❖ Bước 1:

Xác định tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.

Dựng Δ : trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.

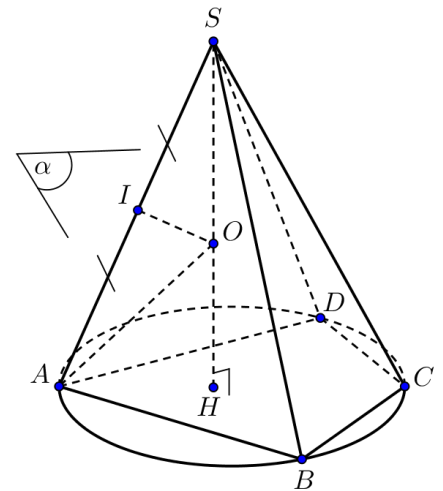
❖ Bước 2:

Lập mặt phẳng trung trực (α) của một cạnh bên.

Lúc đó:

– Tâm O của mặt cầu: $\Delta \cap (\alpha) = \{O\}$

– Bán kính: $R = SA (= SO)$. Tùy vào từng trường hợp.



9.2. Cách xác định tâm và bán kính mặt cầu của một số hình đa diện:

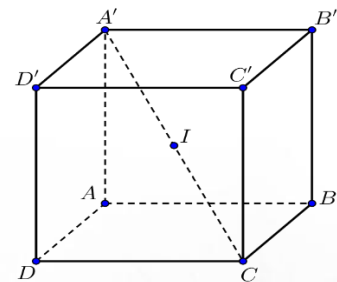
1. Hình hộp chữ nhật, hình lập phương:

→ Tâm:

⇒ Tâm là I , là trung điểm của AC' .

→ Bán kính:

⇒ Bán kính: $R = \frac{AC'}{2}$.



2. Hình lăng trụ đứng có đáy nội tiếp đường tròn:

Xét hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$, trong đó có 2 đáy $ABCD$ và $A'B'C'D'$ nội tiếp đường tròn (O) và (O') .

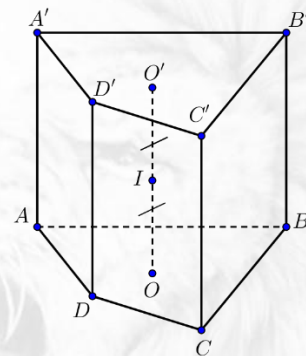
Lúc đó, mặt cầu nội tiếp hình lăng trụ đứng có:

→ Tâm:

⇒ I với I là trung điểm của OO' .

→ Bán kính:

⇒ Bán kính: $R = IA' = IA = IB = IB' = \dots$



3. Hình chóp có các đỉnh nhìn đoạn thẳng nối 2 đỉnh còn lại dưới 1 góc vuông:

Chóp $S.ABC$ có $SAC = SBC = 90^\circ$.

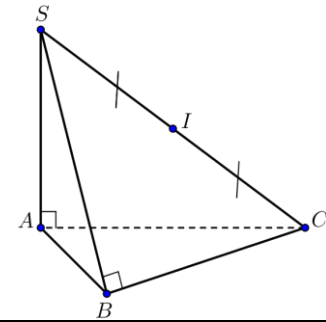
Lúc đó, mặt cầu nội tiếp chóp có:

→ **Tâm:**

⇒ I là trung điểm của SC .

→ **Bán kính:**

⇒ Bán kính: $R = \frac{SC}{2} = IA = IB = IC$.



Chóp $S.ABCD$ có $SAC = SBC = SDC = 90^\circ$.

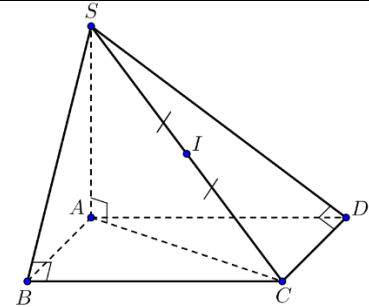
Lúc đó, mặt cầu nội tiếp chóp có:

→ **Tâm:**

⇒ I là trung điểm của SC .

→ **Bán kính:**

⇒ Bán kính: $R = \frac{SC}{2} = IA = IB = IC = ID$.



4. Hình chóp đều:

Cho hình chóp đều $S.ABC\dots$

→ **Tâm:**

⇒ Gọi O là tâm của đáy ⇒ SO là trục của đáy.

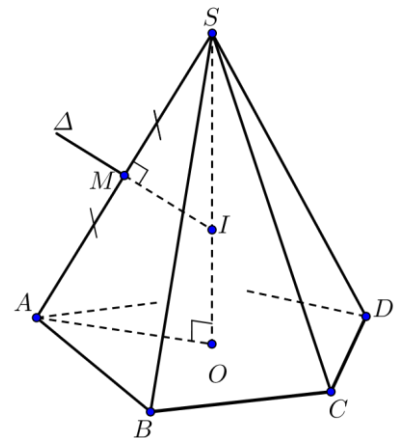
⇒ Trong (SAO) , ta vẽ đường trung trực của cạnh

SA là $\Delta \cap SA = M$ và $\Delta \cap SO = I$

⇒ I là tâm mặt cầu

→ **Bán kính:** $\Delta SMI \sim \Delta SOA \Rightarrow \frac{SM}{SO} = \frac{SI}{SA}$

⇒ Bán kính: $R = IS = \frac{SM \cdot SA}{SO} = \frac{SA^2}{2SO} = IA = IB = \dots$



5. Hình chóp có cạnh bên vuông góc với mặt phẳng đáy:

Cho hình chóp $S.ABC\dots$ có cạnh bên

$SA \perp (ABC\dots)$ và đáy $ABC\dots$ nội tiếp được trong

đường tròn tâm O .

→ **Tâm:**

⇒ Từ tâm O ngoại tiếp của đường tròn đáy, ta vẽ

đường thẳng d vuông góc với $(ABC\dots)$ tại O .

⇒ Trong $(d; SA)$, dựng đường trung trực Δ của

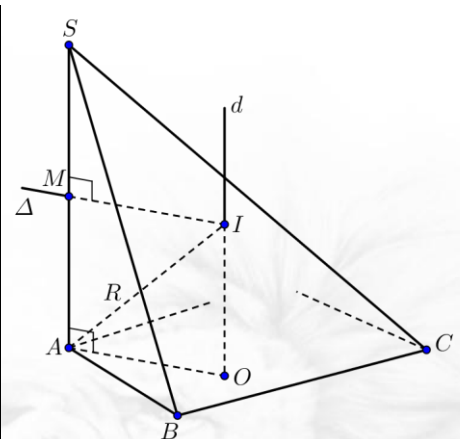
cạnh SA là $\Delta \cap SA = M$ và $\Delta \cap d = I$

⇒ I là tâm mặt cầu

→ **Bán kính:**

⇒ Ta có: $MIOA$ là hình chữ nhật.

⇒ Xét ΔMAI vuông tại M có: $R = AI = \sqrt{MI^2 + MA^2} = \sqrt{AO^2 + \left(\frac{SA}{2}\right)^2}$.



6. Hình chóp có mặt bên vuông góc với mặt phẳng đáy:

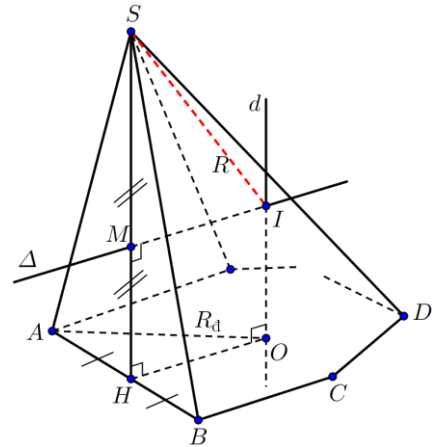
Cho hình chóp $S.ABC\dots$ có mặt bên $(SAB) \perp (ABC\dots)$ và đáy $ABC\dots$ nội tiếp được trong đường tròn tâm O .

→ **Tâm:**

⇒ Từ tâm O ngoại tiếp của đường tròn đáy, ta vẽ đường thẳng d vuông góc với $(ABC\dots)$ tại O .

⇒ Trong $(d; SH)$, dựng đường trung trực Δ của cạnh SH là $\Delta \cap SH = M$ và $\Delta \cap d = I$

⇒ I là tâm mặt cầu.



→ **Bán kính:**

⇒ Xét $\triangle SMI$ vuông tại M có: $R = SI = \sqrt{SM^2 + MI^2} = \sqrt{R_b^2 + HO^2} \quad (*)$.

⇒ Xét $\triangle AHO$ vuông tại H có: $HO = \sqrt{AO^2 - AH^2} = \sqrt{R_d^2 - \left(\frac{1}{2}AB\right)^2} \quad (**)$

⇒ Từ $(*)$ & $(**)$ → $R = \sqrt{R_b^2 + R_d^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2}$

7. Hình chóp khác:

→ **Tâm:**

⇒ Dựng trục Δ của đáy.

⇒ Dựng mặt phẳng trung trực (α) của một cạnh bên bất kì.

⇒ $\Delta \cap (\alpha) = I \rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

⇒ I là tâm mặt cầu

→ **Bán kính:**

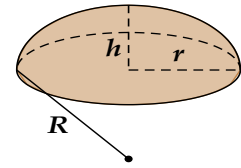
⇒ khoảng cách từ I đến các đỉnh của hình chóp.

10. Tổng hợp các công thức đặc biệt về khối tròn xoay:

1. **Chỏm cầu:**

$$S_{xq} = 2\pi Rh = \pi(r^2 + h^2)$$

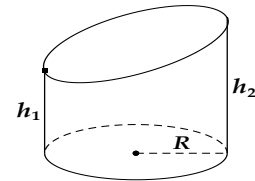
$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right) = \frac{\pi h}{6} (h^2 + 3r^2)$$



2. **Hình trụ cụt:**

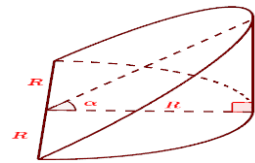
$$S_{xq} = \pi R(h_1 + h_2)$$

$$V = \pi R^2 \left(\frac{h_1 + h_2}{2} \right)$$



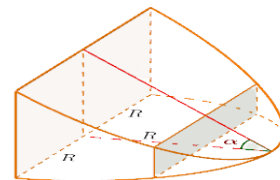
3. **Hình nêm loại 1:**

$$V = \frac{2}{3} R^3 \tan \alpha$$



4. **Hình nêm loại 2:**

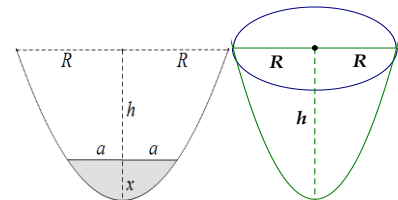
$$V = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) R^3 \tan \alpha$$



5. **Parabol bậc hai-Paraboloid tròn xoay:**

$$S_{parabol} = \frac{4}{3} Rh$$

$$V = \frac{1}{2} \pi R^2 h = \frac{1}{2} V_{tru}$$

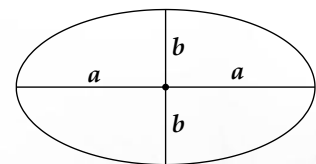


6. **Diện tích Elip và Thể tích khối tròn xoay sinh bởi Elip:**

$$S = \pi a.b$$

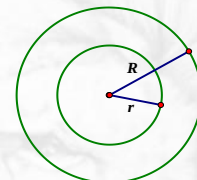
$$V_{xoay quanh 2b} = \frac{4}{3} \pi a^2 b$$

$$V_{xoay quanh 2a} = \frac{4}{3} \pi a b^2$$



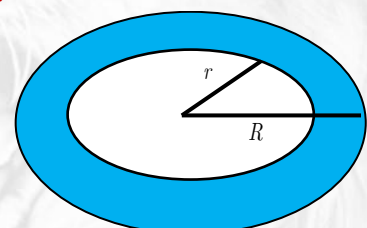
7. **Diện tích Elip và Thể tích khối tròn xoay sinh bởi Elip:**

$$S = \pi(R^2 - r^2)$$



8. **Diện tích Elip và Thể tích khối tròn xoay sinh bởi Elip:**

$$V = 2\pi^2 \left(\frac{R+r}{2} \right) \left(\frac{R-r}{2} \right)^2$$



11. Tổng hợp tính bán kính mặt cầu:

	Nội dung		Công thức
Loại 1	Cạnh bên $SA \perp (đáy)$.	Đáy bất kỳ.	$R_{mc} = \sqrt{R_d^2 + \frac{h^2}{4}}$
		$\triangle ABC$ vuông tại B .	$R = \frac{SC}{2}$
		$\triangle ABC$ vuông tại C .	$R = \frac{SB}{2}$
Loại 2	Chóp đều.		$R = \frac{SA^2}{2.SO}$
Loại 3	Mặt bên vuông góc với đáy.		$R = \sqrt{R_b^2 + R_d^2 - \frac{AB^2}{4}}$
Loại 4	Ngoại tiếp khối lăng trụ đứng và đáy nội tiếp đường tròn.		$R_{mc} = \sqrt{R_d^2 + \frac{h^2}{4}}$
Loại 5	Ngoại tiếp khối hộp chữ nhật dài; rộng; cao lần lượt $a; b; c$.		$R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2}$
Loại 6	Nội tiếp hình lập phương cạnh a .		$R = \frac{a}{2}$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

➤ Dạng 3.1. Tính bán kính khối cầu cơ bản

☑ Trường hợp đơn giản, áp dụng công thức đã có.

* Diện tích mặt cầu: $S_C = 4\pi R^2$.

* Thể tích khối cầu: $V_C = \frac{4}{3}\pi R^3$.

➤ Ví dụ 3.1.1

Tính bán kính của khối cầu có thể tích bằng 36π (cm³)?

- A. 6 (cm). B. 3 (cm). C. 9 (cm). D. $\sqrt{6}$ (cm).

Lời giải

Chọn B

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \Leftrightarrow 36\pi = \frac{4}{3}\pi R^3 \Leftrightarrow R = 3 \text{ (cm)}.$$

➤ Ví dụ 3.1.2

Mặt cầu đi qua các đỉnh của hình hộp chữ nhật có ba kích thước 2, 3, 6 có bán kính:

- A. $\frac{7}{2}$. B. 7. C. 49. D. 5.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Mặt cầu đi qua các đỉnh của hình hộp chữ nhật có bán kính } R = \frac{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}}{2} = \frac{7}{2}.$$

➤ Ví dụ 3.1.3

Nếu tăng diện tích hình tròn lớn của một hình cầu lên 4 lần thì bán kính khối cầu đó tăng lên bao nhiêu lần?

- A. 8. B. 2. C. 4. D. 16.

Lời giải

Chọn B

Gọi R là bán kính khối cầu lúc đầu, R' là bán kính khối cầu sau khi tăng.

Theo đề ta có: $\pi R'^2 = 4\pi R^2 \Leftrightarrow R' = 2R$

➤ Ví dụ 3.1.4

Cho mặt cầu (S) tâm O và các điểm A, B, C nằm trên mặt cầu (S) sao cho $AB=3, AC=4, BC=5$ và khoảng cách từ O đến (ABC) bằng 1. Bán kính của khối cầu (S) bằng

- A. $\frac{\sqrt{29}}{2}$. B. $\sqrt{29}$. C. $\frac{5}{2}$. D. 5.

Lời giải

Chọn A

Ta có $AB^2 + AC^2 = 25 = BC^2 \Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại A .

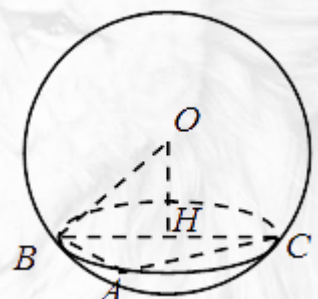
Gọi H là hình chiếu của O trên (ABC)

$\Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Vì $\triangle ABC$ vuông tại A nên H là trung điểm BC .

Vì khoảng cách từ O đến (ABC) bằng 1 nên $OH=1$.

$$\triangle OHB: OB = \sqrt{OH^2 + BH^2} = \frac{\sqrt{29}}{2} \rightarrow R = OB = \frac{\sqrt{29}}{2}.$$



Dạng 3.2. Tính diện tích mặt cầu – thể tích khối cầu

☑ Trường hợp đơn giản, áp dụng công thức đã có.

→ Diện tích mặt cầu: $S_C = 4\pi R^2$.

→ Thể tích khối cầu: $V_C = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Ví dụ 3.2.1

Cho khối cầu (S) có thể tích bằng 36π (cm^3). Diện tích mặt cầu bằng bao nhiêu?

- A. 16π (cm^2). B. 18π (cm^2). C. 36π (cm^2). D. 27π (cm^2).

Lời giải

Chọn C

Ta có: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi \Rightarrow R^3 = 27 \Rightarrow R = 3 \Rightarrow S = 4\pi R^2 = 36\pi$.

Ví dụ 3.2.2

Cho mặt cầu (S_1) bán kính R_1 , mặt cầu (S_2) bán kính R_2 . Biết rằng $R_2 = 2R_1$, tính tỉ số diện tích mặt cầu (S_2) và mặt cầu (S_1).

- A. 3. B. 2. C. 4. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $R_2 = 2R_1; \begin{cases} S_1 = 4\pi R_1^2 \\ S_2 = 4\pi R_2^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{S_2}{S_1} = \frac{4\pi R_2^2}{4\pi R_1^2} = \frac{R_2^2}{R_1^2} = 4$.

Ví dụ 3.2.3

Khinh khí cầu của Montgolfier nhà phát minh ra khinh khí cầu dùng khí nóng. Coi khinh khí cầu này là một mặt cầu có đường kính 11m thì thể tích của khinh khí cầu là bao nhiêu? (lấy $\pi \approx \frac{22}{7}$ và làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ 2).

- A. 380,29. B. 697,19. C. 190,14. D. 95,07.

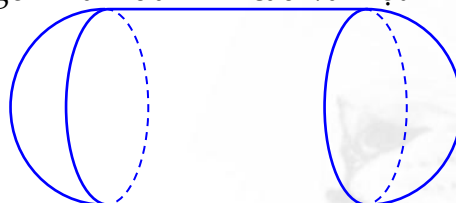
Lời giải

Chọn B

Bán kính của khí cầu là $R = \frac{11}{2}$ (m) $\rightarrow V = \frac{4}{3}\pi R^3 \approx 697,19$ (m^3).

Ví dụ 3.2.3

Một cái bồn chứa nước gồm hai nửa hình cầu và một hình trụ (như hình vẽ).



Đường sinh của hình trụ bằng hai lần đường kính của hình cầu. Biết thể tích của bồn chứa nước là $\frac{128\pi}{3}$ (m^3). Tính diện tích xung quanh của cái bồn chứa nước theo đơn vị m^2 .

- A. 48π . B. 18π . C. 36π . D. 27π .

Lời giải

Chọn A

Gọi $4x(\text{m})$ là đường sinh hình trụ.

Khi đó đường tròn đáy hình trụ và mặt cầu có bán kính là $x(\text{m})$.

Thể tích bồn chứa nước này chính là thể tích của khối trụ có bán kính đáy $R = x$ đường sinh $l = h = 4x$ và thể tích khối cầu có bán kính $R = x$.

$$\text{Do đó: } \pi \left(x^2 \cdot 4x + \frac{4}{3} x^3 \right) = \frac{128\pi}{3} \Leftrightarrow x = 2(\text{m}) \quad \pi \left(x^2 \cdot 4x + \frac{4}{3} x^3 \right) = \frac{128\pi}{3} \Leftrightarrow x = 2(\text{m}).$$

Vậy diện tích xung quanh bồn nước là: $\pi(4x^2 + 2 \cdot x \cdot 4x) = 48\pi(\text{m}^2)$.

Ví dụ 3.2.4

Cho đường tròn tâm O có đường kính $AB = 2a$ nằm trong mặt phẳng (P) . Gọi I là điểm đối xứng với O qua A . Lấy điểm S sao cho $SI \perp (P)$ và $SI = 2a$. Tính diện tích mặt cầu đi qua đường tròn đã cho và điểm S .

A. $S = 65\pi a^2$. B. $S = \frac{65\pi a^2}{4}$. C. $S = \frac{65\pi a^2}{2}$. D. $S = \frac{65\pi a^2}{16}$.

Lời giải

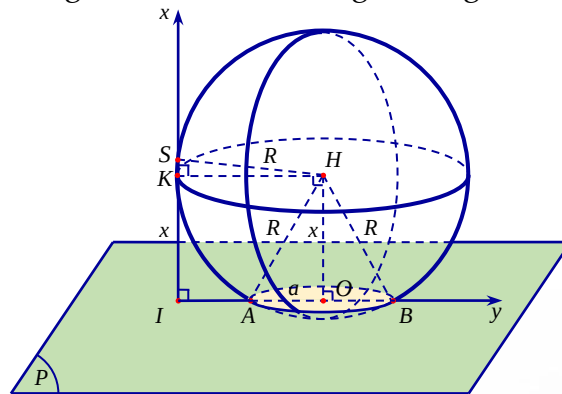
Chọn B

Nhận xét: $\begin{cases} SI \subset (SAB) \\ SI \perp (P) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \perp (P)$.

Mặt khác: (SAB) chứa đường kính của đường tròn tâm O

Nên (SAB) cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn lớn đi qua ba điểm S, A, B .

Do đó tâm của mặt cầu cũng chính là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle SAB$.



Gọi mặt cầu tâm H qua đường tròn tâm O và điểm S .

Khi đó ta có tứ giác $HOIS$ là hình thang vuông tại O và I .

Ta có $SI = OI = 2a = 2OA$. Gọi $R = HA = HS = HB$ là bán kính mặt cầu cần tìm.

$$\text{Kẻ } HK \perp SI \text{ (} K \in SI \text{), đặt } HO = x = KI \text{ (} x > 0 \text{)} \Rightarrow \begin{cases} HA = \sqrt{HO^2 + OA^2} = \sqrt{x^2 + a^2} \\ HS = \sqrt{HK^2 + SK^2} = \sqrt{(2a - x)^2 + 4a^2} \end{cases}$$

$$\text{Vì } HA = HS \text{ nên } \sqrt{(2a - x)^2 + 4a^2} = \sqrt{x^2 + a^2} \Rightarrow x = \frac{7a}{4}.$$

$$\text{Suy ra } R = HA = \sqrt{\left(\frac{7a}{4}\right)^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{65}}{4}. \text{ Vậy } S = \frac{65\pi a^2}{4}.$$

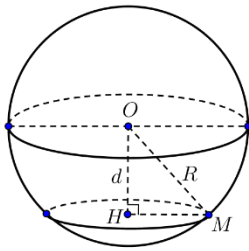
Dạng 3.3. Thiết diện

➔ Cho mặt cầu $S(O; R)$ và một (P) . Gọi d là khoảng cách từ tâm O của mặt cầu đến (P) và H là hình chiếu của O trên $(P) \Rightarrow d = OH$.

① Nếu $d < R \Leftrightarrow (P) \cap S(O; R)$

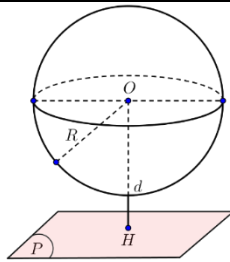
theo giao tuyến là đường tròn trên (P) tâm H , bán kính

$$r = HM = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{R^2 - OH^2}.$$



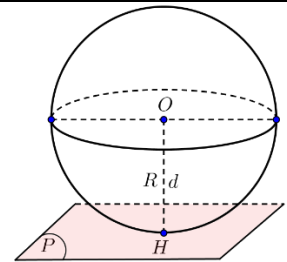
② Nếu $d > R \Leftrightarrow (P)$ không

cắt mặt cầu $S(O; R)$.



③ Nếu $d = R \Leftrightarrow (P)$ có một

điểm chung duy nhất. Ta nói mặt cầu $S(O; R)$ tiếp xúc (P) .



Do đó, điều kiện cần và đủ để (P) tiếp xúc với mặt cầu $S(O; R)$ là $d(O, (P)) = R$.

Ví dụ 3.3.1

Cho hình cầu đường kính $4a\sqrt{3}$. Mặt phẳng (P) cắt hình cầu theo thiết diện là hình tròn có bán kính bằng $a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách từ tâm hình cầu đến (P) .

A. $\sqrt{10}a$.

B. $10a$.

C. $a\sqrt{5}$.

D. $\frac{a\sqrt{10}}{2}$.

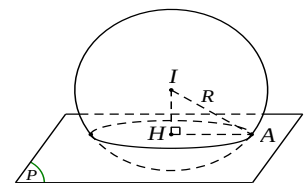
Lời giải

Chọn A

Bán kính hình cầu đã cho là $R = 2a\sqrt{3}$.

Khoảng cách từ tâm hình cầu đến mặt phẳng (P) là

$$d = \sqrt{(2a\sqrt{3})^2 - (a\sqrt{2})^2} = \sqrt{10}a.$$



Ví dụ 3.3.2

Cho mặt cầu $S(O; \sqrt{2}R)$, A là một điểm trên mặt cầu (S) và (P) là mặt phẳng qua A sao cho $(OA, (P)) = 60^\circ$. Diện tích của giao tuyến giữa khối cầu và (P) :

A. $\frac{\pi R^2}{8}$.

B. πR^2 .

C. $\frac{\pi R^2}{4}$.

D. $\frac{\pi R^2}{2}$.

Lời giải

Chọn D

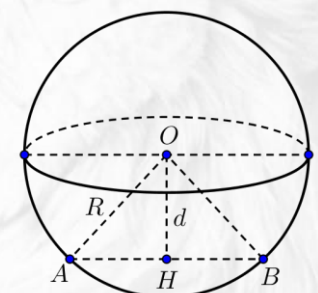
Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên (P) thì.

* H là tâm của đường tròn giao tuyến (P) và (S) .

* $(OA, (P)) = (OA, AH) = 60^\circ$.

Đường tròn giao tuyến có: $r = HA = OA \cdot \cos 60^\circ = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Diện tích đường tròn giao tuyến: $\pi r^2 = \pi \left(\frac{\sqrt{2}R}{2} \right)^2 = \frac{\pi R^2}{2}$.



Ví dụ 3.3.3

Cho mặt cầu (S) có tâm O , bán kính $R=3$. Đường thẳng Δ cố định cách O một khoảng bằng 1. Mặt phẳng (P) thay đổi chứa Δ và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) . Tính bán kính nhỏ nhất của đường tròn (C) .

A. $2\sqrt{2}$.

B. 2.

C. 4.

D. $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi I là hcvg của O trên $\Delta \Rightarrow OI = d(O, \Delta) = 1$.

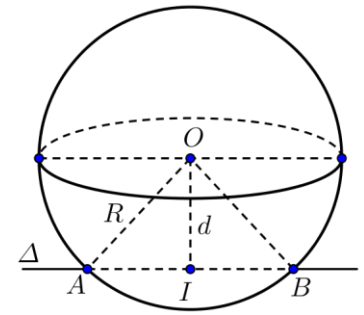
Ta có $d(O, (P)) \leq OI$.

Gọi x là bán kính $(C) \rightarrow x = \sqrt{R^2 - (d(O, (P)))^2}$.

$\Rightarrow (x)_{\min}$ khi $(d(O, (P)))_{\max} \Rightarrow (d(O, (P)))_{\max}$ khi $d(O, (P)) = OI$.

Khi $d(O, (P)) = OI = 1 \Rightarrow x = \sqrt{R^2 - OI^2} = 2\sqrt{2}$.

Vậy bán kính đường tròn (C) nhỏ nhất bằng $2\sqrt{2}$.



Ví dụ 3.3.4

Cho mặt cầu $S(O; R)$ và (P) cách O một khoảng bằng h ($0 < h < R$). Gọi (L) là đường tròn giao tuyến của mặt cầu (S) và (P) có bán kính r . Lấy A là một điểm cố định thuộc (L) . Một góc vuông xAy trong (P) quay quanh điểm A . Các cạnh Ax, Ay cắt (L) ở C và D . Đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P) cắt mặt cầu ở B . Tính diện tích lớn nhất của $\triangle BCD$.

A. $\sqrt{2}r\sqrt{r^2 + 4h^2}$.

B. $r\sqrt{r^2 + 4h^2}$.

C. $2\sqrt{r^2 + 4h^2}$.

D. $2r\sqrt{r^2 + h^2}$.

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng qua A và vuông góc (P) cắt mặt cầu ở B

$\Rightarrow B \in (L')$ là đáy của mặt trụ nội tiếp $(S) \Rightarrow AB = 2h$.

Gọi H là hình chiếu của A lên CD .

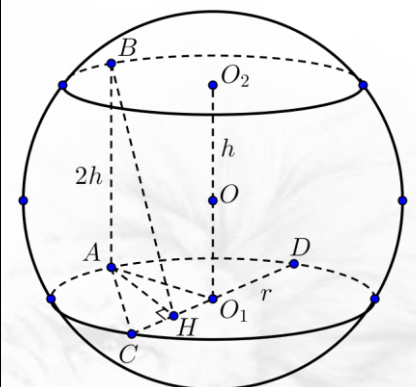
Ta có: $AH \leq AO_1 = r$, với O_1 là tâm đường tròn (L) .

Xét $\triangle ABH, A = 90^\circ$

$$\Rightarrow BH = \sqrt{AB^2 + AH^2} \leq \sqrt{(2h)^2 + r^2} = \sqrt{4h^2 + r^2}.$$

$$S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} BH \cdot CD \leq \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4h^2 + r^2} \cdot 2r = r\sqrt{r^2 + 4h^2}.$$

Vậy diện tích $\triangle BCD$ lớn nhất bằng $r\sqrt{r^2 + 4h^2}$.



Dạng 3.5. Nội - ngoại tiếp

→ Tóm tắt các dạng bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện.

	Nội dung		Công thức
Loại 1	Cạnh bên $SA \perp (đáy)$.	Đáy bất kỳ.	$R_{mc} = \sqrt{R_d^2 + \frac{h^2}{4}}$
		$\triangle ABC$ vuông tại B .	$R = \frac{SC}{2}$
		$\triangle ABC$ vuông tại C .	$R = \frac{SB}{2}$
Loại 2	Chóp đều.		$R = \frac{SA^2}{2.SO}$
Loại 3	Mặt bên vuông góc với đáy.		$R = \sqrt{R_b^2 + R_d^2 - \frac{AB^2}{4}}$
Loại 4	Ngoại tiếp khối lăng trụ đứng và đáy nội tiếp đường tròn.		$R_{mc} = \sqrt{R_d^2 + \frac{h^2}{4}}$
Loại 5	Ngoại tiếp khối hộp chữ nhật dài; rộng; cao lần lượt $a; b; c$.		$R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2}$
Loại 6	Nội tiếp hình lập phương cạnh a .		$R = \frac{a}{2}$

Ví dụ 3.5.1

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với độ dài đường chéo bằng $\sqrt{2}a$, cạnh SA có độ dài bằng $2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$?

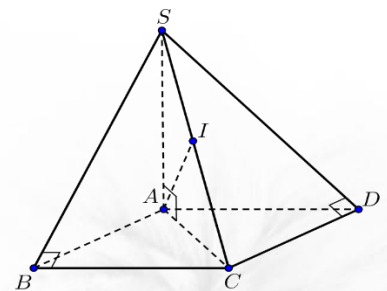
- A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. B. $2a$. C. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{10}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi I là trung điểm của SC ,
 Các $\triangle SAC, SBC, SCD$ là $\triangle$ vuông cạnh huyền SC
 Nên S, A, B, C, D nằm trên mặt cầu đường kính SC có tâm I ,

$$\text{Bán kính } R = \frac{1}{2}SC = \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 + AC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 4a^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$



Ví dụ 3.5.2

Cho hình chóp $S.ABC$, $SA \perp (ABC)$. $\triangle ABC$ vuông tại A , $SA = BC = 2a$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp.

- A. $a\sqrt{6}$. B. $a\sqrt{5}$. C. $a\sqrt{2}$. D. $a\sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi M là trung điểm BC .

Gọi d là đường thẳng qua M và vuông góc (ABC) .

Khi đó, d là trục của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ (1).

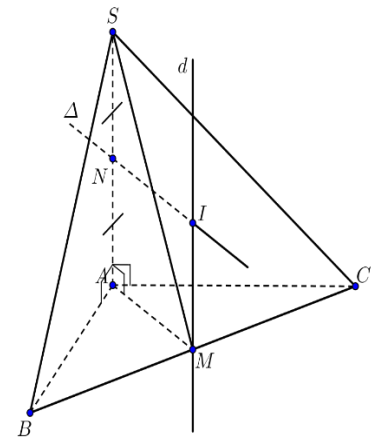
Gọi N là trung điểm SA ,

Dựng Δ qua N song song với AM và $\Delta \cap d = I$.

Khi đó, NI là đường trung trực của đoạn SA (2)

Từ (1) và (2) $\rightarrow IA = IB = IC = ID$ hay I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

$$\rightarrow R = IA = \sqrt{NA^2 + AM^2} = \sqrt{\frac{SA^2}{4} + \frac{BC^2}{4}} = a\sqrt{2}$$



Ví dụ 3.5.3

Tính theo a bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp tam giác đều $S.ABC$, biết các cạnh đáy có độ dài bằng a , cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$.

A. $\frac{a}{2}$.

B. $\frac{3\sqrt{6}a}{8}$.

C. a .

D. $\frac{a\sqrt{10}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

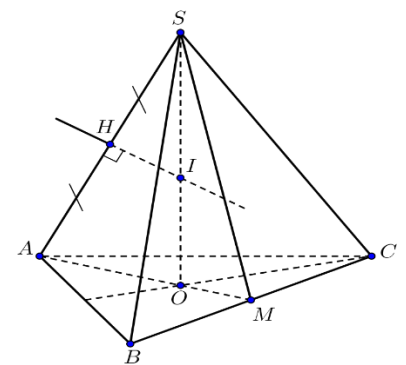
Gọi H là trung điểm của SA .

Trong (SAO) kẻ d qua H và $d \perp SA$ cắt $d \cap SO = I$.

Khi đó $IS = IA = IB = IC$.

Ta có $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \frac{2\sqrt{6}a}{3}$

Do $\triangle SHI \sim \triangle SOA$: $\frac{SI}{SA} = \frac{SH}{SO} \Rightarrow SI = \frac{SH \cdot SA}{SO} = \frac{3\sqrt{6}a}{8}$.



Ví dụ 3.5.4

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$ và $\angle AC'A' = 45^\circ$. Thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật đó bằng

A. $\frac{4\pi a^3 \sqrt{2}}{3}$.

B. $\frac{4\pi a^3}{3}$.

C. $\frac{8\pi a^3 \sqrt{2}}{3}$.

D. $\frac{16\pi a^3 \sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn C

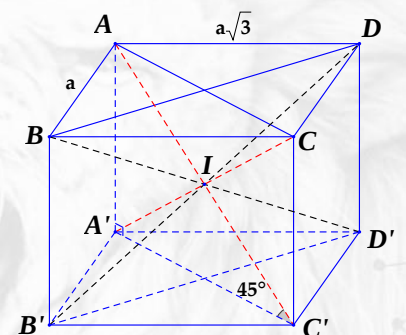
Gọi I là giao điểm của AC' và $A'C$

Khi đó I là trung điểm của AC' và I là tâm khối cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

Ta có: $A'C' = \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a \Rightarrow AC' = \frac{A'C'}{\cos 45^\circ} = 2a\sqrt{2}$

$\Rightarrow R = \frac{AC'}{2} = a\sqrt{2}$.

Vậy thể tích khối cầu là: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi (a\sqrt{2})^3 = \frac{8\pi a^3 \sqrt{2}}{3}$



Ví dụ 3.5.5

Cho hình lập phương có cạnh bằng 1. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương bằng

A. π .

B. 2π .

C. 3π .

D. 6π .

Lời giải

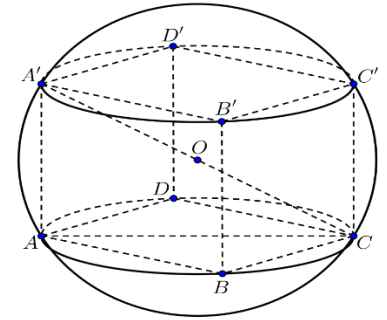
Chọn C

Gọi R là bán kính của mặt cầu.

$$\text{Ta có } R = \frac{1}{2}\sqrt{A'C^2} = \frac{1}{2}\sqrt{A'A^2 + AC^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{A'A^2 + AB^2 + BC^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = 3\pi$.



Ví dụ 3.5.6

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = BC = 3a\sqrt{2}$, $SAB = SCB = 90^\circ$. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $2a\sqrt{3}$. Tính thể tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $72\sqrt{18}\pi a^3$.

B. $18\sqrt{18}\pi a^3$.

C. $6\sqrt{18}\pi a^3$.

D. $24\sqrt{18}\pi a^3$.

Lời giải

Chọn D

Gọi I, H lần lượt là trung điểm của cạnh SB và AC

Ta có $\triangle SAB, \triangle SCB$ lần lượt là các $\triangle$ vuông tại A và C

$\Rightarrow IA = IB = IC = IS$

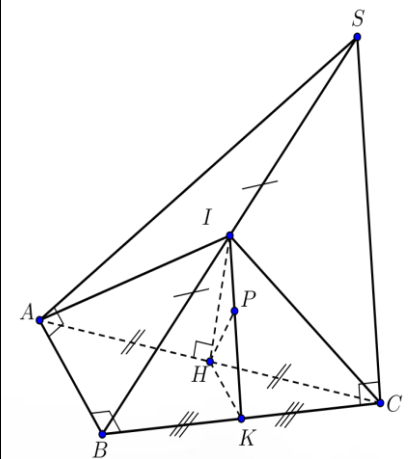
$\Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$

$\triangle ABC$ vuông tại B

$\Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$

$\Rightarrow IH \perp (ABC)$

$$\text{Ta có: } \frac{d(A, (SBC))}{d(H, (SBC))} = \frac{AC}{HC} = 2 \Rightarrow d(H, (SBC)) = a\sqrt{3}$$



Gọi K là trung điểm $BC \Rightarrow HK \perp BC (HK // AB, AB \perp BC)$

Lại có: $BC \perp IH (IH \perp (ABC)) \Rightarrow BC \perp (IHK)$

Mặt khác: $BC \subset (SBC) \Rightarrow (SBC) \perp (IHK)$ theo giao tuyến IK

Trong (IHK) , gọi $HP \perp IK \Rightarrow HP \perp (SBC)$ tại $P \Rightarrow HP = d(H, (SBC)) = a\sqrt{3}$

$$\text{Xét } \triangle IHK: \frac{1}{HP^2} = \frac{1}{HI^2} + \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HI^2} + \frac{1}{\frac{AB^2}{4}} \Rightarrow HI = 3a.$$

$$\text{Xét } \triangle IHB: IB = \sqrt{IH^2 + HB^2} = 3a\sqrt{2} = R. \text{ Vậy } V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 24\sqrt{18}\pi a^3$$

Dạng 3.6. Min - max liên quan khối nón

- ☑ Xây dựng công thức cần tìm *min - max*.
- ☑ Dùng các cách dưới đây để tìm *min - max*.

	Dạng	Dấu "=" xảy ra khi
BĐT Bunyakovsky	$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$	$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$
	$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$	$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$
BĐT AM - GM	$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$	$a = b$
	$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \quad (n \geq 1)$	$a_1 = a_2 = \dots = a_n$
Khảo sát hàm số trên khoảng xác định	Tính đạo hàm rồi lập BBT, từ đó kết luận theo yêu cầu bài toán.	
Đánh giá lượng giác	$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin(AB; AC)$. Khi đó, để $[S_{ABC}]_{\max}$ $\Leftrightarrow [\sin(AB; AC)]_{\max} \Leftrightarrow \sin(AB; AC) = 1 \Leftrightarrow (AB; AC) = 90^\circ \Leftrightarrow AB \perp AC$	

Ví dụ 3.6.1

Hình nón có thể tích lớn nhất nội tiếp một mặt cầu bán kính $R = a\sqrt{3}$ cho trước bằng

- A. $\frac{64\sqrt{3}\pi a^3}{27}$. B. $\frac{32\pi^2 a^3}{81}$. C. $\frac{32\sqrt{3}\pi a^3}{27}$. D. $\frac{64\pi^2 a^3}{81}$.

Lời giải

Chọn C

Bán kính đáy hình nón là x ,

Chiều cao hình nón là y ($0 < x \leq R, 0 < y < 2R$).

SS' là đường kính của mặt cầu ngoài tiếp hình nón

Thì ta có $x^2 = y(2R - y)$.

Gọi V_1 là thể tích khối nón thì ta có:

$$V_1 = \frac{1}{3} \pi x^2 y = \frac{1}{3} \pi y \cdot y(2R - y)$$

$$= \frac{\pi}{6} (4R - 2y) \cdot y \cdot y \leq \frac{\pi}{6} \left(\frac{4R - 2y + y + y}{3} \right)^3 = \frac{32\pi R^3}{81}$$

Vậy thể tích V_1 đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{32\pi R^3}{81} = \frac{32\sqrt{3}\pi a^3}{27}$

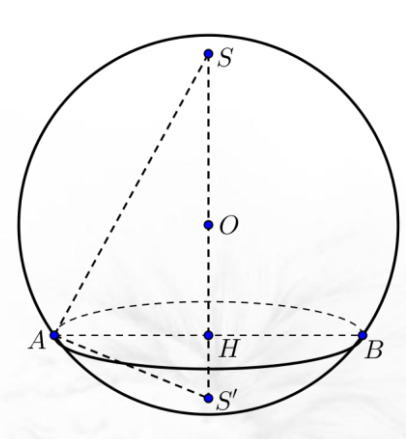
$$\Leftrightarrow 4R - 2y = y \Leftrightarrow y = \frac{4R}{3}, \text{ từ đó } x^2 = \frac{4R}{3} \left(2R - \frac{4R}{3} \right) = \frac{8R^2}{9} \text{ hay } x = \frac{2R\sqrt{2}}{3} = \frac{2a\sqrt{6}}{3}.$$

Ví dụ 3.6.2

Cho mặt cầu có bán kính R , và một hình chóp tam giác đều ngoại tiếp mặt cầu.

Thể tích nhỏ nhất của khối chóp bằng

- A. $4\sqrt{3}R^3$. B. $6\sqrt{3}R^3$. C. $8\sqrt{3}R^3$. D. $16\sqrt{3}R^3$.



Lời giải

Chọn C

Tâm mặt cầu $I \in SH$ ($SH \perp (ABC)$ tại H).

Đặt $AB = a, SH = h$

Do mặt cầu R tiếp xúc với 4 mặt nên $IH = IJ = R$
 $\Rightarrow SI = h - R$.

Ta có $\triangle SHM \sim \triangle SJI$

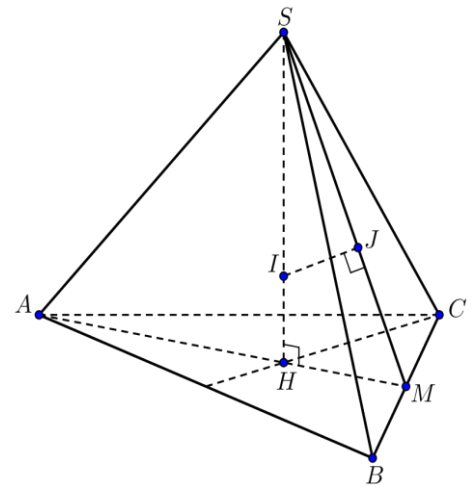
$$\rightarrow \frac{SI}{SM} = \frac{IJ}{HM} \Leftrightarrow \frac{h-R}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2}} = \frac{R}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} \Leftrightarrow h = \frac{2Ra^2}{a^2 - 12R^2}$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2Ra^2}{a^2 - 12R^2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{a^4}{a^2 - 12R^2}$$

Xét hàm $f(a) = \frac{a^4}{a^2 - 12R^2}$ trên $(2R\sqrt{3}; +\infty)$.

$$\text{Ta có } f'(a) = \frac{2a^5 - 48R^2a^3}{(a^2 - 12R^2)^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = \pm 2R\sqrt{6} \end{cases}$$

Suy ra $f_{\min} = f(2R\sqrt{6}) = 48R^2$. Vậy $V_{\min} = 8R^3\sqrt{3}$.



a	$2R\sqrt{3}$	$2R\sqrt{6}$	$+\infty$
$f'(a)$	-	0	+
$f(a)$	$+\infty$	$48R^2$	$+\infty$

Ví dụ 3.6.3

Cho mặt cầu (S) có bán kính $R = 5(\text{cm})$. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có chu vi bằng $8\pi(\text{cm})$. Bốn điểm A, B, C, D thay đổi sao cho A, B, C thuộc đường tròn (C) , $D \in (S)$ ($D \notin (C)$) và $\triangle ABC$ là tam giác đều. Tính thể tích lớn nhất của tứ diện $ABCD$.

- A. $32\sqrt{3}$. B. $2\sqrt{5}$. C. $18\sqrt{3}$. D. 12.

Lời giải

Chọn A

Gọi I là tâm của mặt cầu (S)

và H là hình chiếu của I trên (P) .

$\rightarrow H$ là tâm đường tròn (C) và là trọng tâm của $\triangle ABC$

Đường tròn (C) có chu vi bằng $8\pi \rightarrow r = 4 \Rightarrow IH = 3$.

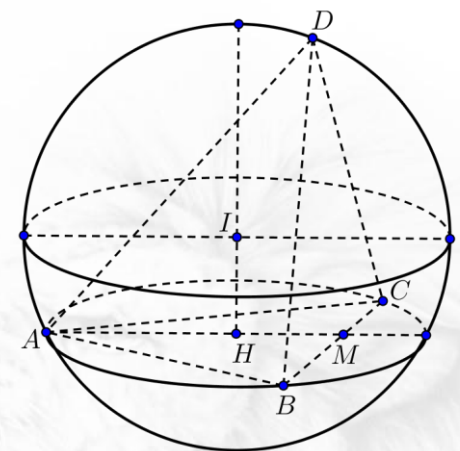
Và $\triangle$ đều ABC nội tiếp đường tròn (C) nên có cạnh bằng $4\sqrt{3}$ và có diện tích không đổi.

Do đó thể tích của tứ diện $ABCD$ lớn nhất

$\Leftrightarrow$ khoảng cách từ D đến (ABC) là lớn nhất

$\Leftrightarrow H, I, D$ thẳng hàng. Khi đó $DH = 8$.

$$\text{Vậy } V_{\max} = \frac{1}{3} DH \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot \left(4\sqrt{3}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 32\sqrt{3}.$$



-----Hết-----

