


ĐỀ CHÍNH THỨC
Câu I.

1. Cho hàm số $y = \frac{mx+9}{x+m}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

2. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 6x^2 + (9-m)x + 2m - 2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $g(x) = |f(x)|$ có đúng 5 điểm cực trị.

Câu II.

Từ tập hợp tất cả các số tự nhiên có 5 chữ số mà các chữ số đều khác 0, lấy ngẫu nhiên một số. Tính xác suất để trong số tự nhiên lấy ra được chỉ có mặt ba chữ số khác nhau.

Câu III.

Giải hệ phương trình sau trên tập số thực:
$$\begin{cases} y(x+y) + \sqrt{x+y} = 2x^2 + \sqrt{2x} & (1) \\ xy^2 - 5y^2 + 7x + 7y - 4 = 6\sqrt{xy-y+1} & (2) \end{cases}$$

Câu IV.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là ΔABC vuông tại B , $AB = a\sqrt{3}$, $\angle ACB = 60^\circ$, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là trọng tâm của tam giác ABC , gọi E là trung điểm cạnh AC , biết góc giữa SE và mặt phẳng đáy bằng 30° .

a) Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) .

b) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC) .

Câu V.

Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp đường tròn (O) , có đường cao AD ($D \in BC$). Kẻ DE , DF lần lượt vuông góc với AB , AC ($E \in AB$, $F \in AC$). $BF \cap CE = I$, $K = BF \cap DE$, $L = CE \cap DF$, hai điểm M , N lần lượt là trung điểm của AD và AI . Chứng minh rằng:

a) Đường thẳng KL song song với đường thẳng BC .

b) M , N , O thẳng hàng.

Câu VI.

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $3x + y + z = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy$. Tìm giá trị

nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{20}{\sqrt{x+z}} + \frac{20}{\sqrt{y+2}} + x + y + z$.

Câu VII.

Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $n^4 + n^3 + 1$ là số chính phương.

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu I.

1. Cho hàm số $y = \frac{mx+9}{x+m}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
2. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 6x^2 + (9-m)x + 2m - 2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $g(x) = |f(x)|$ có đúng 5 điểm cực trị.

Lời giải

1. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

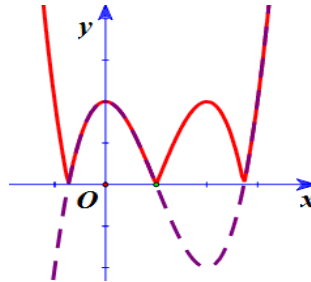
Ta có: $y' = \frac{m^2 - 9}{(x+m)^2}$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1) \Leftrightarrow y' < 0, \forall x < 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 9 < 0 \\ -m \notin (-\infty; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < m < 3 \\ m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m \leq -1$$

Vậy với $-3 < m \leq -1$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

2. Hàm số $g(x) = |f(x)|$ có đúng 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị và $y_{CD} \cdot y_{CT} < 0$



Cách 1: Hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị và $y_{CD} \cdot y_{CT} < 0 \Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + (9-m)x + 2m - 2 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 4x + 1 - m) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 - m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\text{khác 2} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m + 3 > 0 \\ 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -3$$

Vậy với $m > -3$ thì hàm số $g(x) = |f(x)|$ có đúng 5 điểm cực trị.

Cách 2: Hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị và $y_{CD} \cdot y_{CT} < 0$

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 - m$

Hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị $x_1, x_2 \Leftrightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 - m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \Delta' = 3m + 9 > 0 \Leftrightarrow m > -3 \quad (1)$$

Mặt khác $f(x) = (\frac{1}{3}x - \frac{2}{3})f'(x) - (\frac{2m}{3} + 2)x + 4 + \frac{4m}{3}$ nên phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là $y = -(\frac{2m}{3} + 2)x + 4 + \frac{4m}{3} = -(\frac{2m}{3} + 2)(x - 2)$

Do đó $y_{CD} \cdot y_{CT} < 0 \Leftrightarrow (\frac{2m}{3} + 2)^2(x_1 - 2)(x_2 - 2) < 0 \Leftrightarrow (\frac{2m}{3} + 2)^2[x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4] < 0$

$$\Leftrightarrow (\frac{2m}{3} + 2)^2 \left[3 - \frac{m}{3} - 2.4 + 4 \right] < 0 \Leftrightarrow (\frac{2m}{3} + 2)^2 \left[-\frac{m}{3} - 1 \right] < 0 \Leftrightarrow m > -3 \text{ (thỏa mãn Đk (1))}$$

Câu II.

Cách 1

Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 5 chữ số mà các chữ số đều khác 0.

Số phần tử của S là: $n(S) = 9^5$.

Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử ngẫu nhiên: "lấy ngẫu nhiên 1 số thuộc tập S" $\Rightarrow n(\Omega) = 9^5$

Gọi biến cố A: "Số lấy ra được chỉ có mặt ba chữ số khác nhau".

Trường hợp 1: Số đó có một chữ số xuất hiện 3 lần và 2 chữ số còn lại xuất hiện 1 lần

Vậy có: $n_1 = C_9^3 \cdot C_3^1 \cdot C_5^3 \cdot 2 = 5040$

Trường hợp 2:

Số đó có hai chữ số xuất hiện 2 lần và chữ số còn lại xuất hiện 1 lần

Vậy có: $n_2 = C_9^3 \cdot C_3^1 \cdot 5 \cdot C_4^2 \cdot 1 = 7560$

$$\Rightarrow n(A) = n_1 + n_2 = 12600 \Rightarrow P(A) = \frac{12600}{9^5} = \frac{1400}{6561}$$

Cách 2

Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 5 chữ số mà các chữ số đều khác 0.

Số phần tử của S là: $n(S) = 9^5$.

Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử ngẫu nhiên: "lấy ngẫu nhiên 1 số thuộc tập S" $\Rightarrow n(\Omega) = 9^5$

Gọi biến cố A: "Số lấy ra được chỉ có mặt ba chữ số khác nhau".

Gọi số có 5 chữ số mà có 3 chữ số khác nhau a, b, c lấy từ tập $S = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$

Trường hợp 1: Cả 2 chữ số còn lại cùng bằng 1 trong 3 chữ số a, b, c: có 3 cách; mỗi hoán vị từ 5! hoán vị của 5 chữ số (chẳng hạn) a, a, a, b, c tạo ra từ một số tự nhiên n; nhưng cứ 3! hoán vị của các vị trí mà a, a, a chiếm chỗ thì chỉ tạo ra cùng một số n, nên trong trường hợp 1 này có:

$$C_9^3 \cdot 3 \cdot \frac{5!}{3!} = 5040 \text{ số tự nhiên.}$$

Trường hợp 2: 1 trong 2 chữ số còn lại bằng 1 trong 3 chữ số a, b, c và chữ số kia bằng 1 chữ số khác trong ba chữ số đó: có 3 cách; mỗi hoán vị từ 5! hoán vị của 5 chữ số (chẳng hạn) a, a, b, b, c tạo ra một số tự nhiên n; nhưng cứ 2! hoán vị của các vị trí mà a, a chiếm chỗ và 2! hoán vị của các vị trí mà b, b chiếm chỗ thì chỉ tạo ra cùng một số tự nhiên n, nên trong trường hợp 2 có:

$$C_9^3 \cdot 3 \cdot \frac{5!}{2!2!} = 7560 \text{ số tự nhiên.}$$

$$\text{Vậy } n(A) = 5040 + 7560 = 12600 \Rightarrow P(A) = \frac{12600}{9^5} = \frac{1400}{6561}.$$

Câu III. Giải hệ phương trình sau trên tập số thực:
$$\begin{cases} y(x+y) + \sqrt{x+y} = 2x^2 + \sqrt{2x} & (1) \\ xy^2 - 5y^2 + 7x + 7y - 4 = 6\sqrt[3]{xy - y + 1} & (2) \end{cases}$$

Lời giải

Cách 1

Điều kiện:
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x + y \geq 0 \end{cases}.$$

Thay $x = y = 0$ vào phương trình (2) thấy không thỏa mãn, do đó ta xét với $x + y > 0$.

Vì $x + y > 0$ nên $\sqrt{x+y} + \sqrt{2x} > 0$.

Nên từ phương trình (1) ta có:

$$y(x+y) + \sqrt{x+y} = 2x^2 + \sqrt{2x} \Leftrightarrow xy - x^2 + y^2 - x^2 + \sqrt{x+y} - \sqrt{2x} = 0$$

$$\Leftrightarrow x(y-x) + (y-x)(y+x) + \frac{y-x}{\sqrt{x+y} + \sqrt{2x}} = 0 \Leftrightarrow (y-x) \left(2x + y + \frac{1}{\sqrt{x+y} + \sqrt{2x}} \right) = 0$$

$$\begin{cases} x = y & (3) \\ 2x + y + \frac{1}{\sqrt{x+y} + \sqrt{2x}} = 0 & (4) \end{cases}.$$

Nhận xét:

Vì $\begin{cases} x \geq 0 \\ x + y > 0 \end{cases} \Rightarrow 2x + y > 0$, và $\frac{1}{\sqrt{x+y} + \sqrt{2x}} > 0$ suy ra phương trình (4) vô nghiệm.

Từ (3) thay $x = y$ phương trình (2) ta có

$$x^3 - 5x^2 + 14x - 4 = 6\sqrt[3]{x^2 - x + 1} \Leftrightarrow (x-1)^3 - 2(x-1)(x+1) + 9(x-1) + 6(1 - \sqrt[3]{x^2 - x + 1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \left(x^2 - 4x + 8 - \frac{6x}{1 + \sqrt[3]{x^2 - x + 1} + \sqrt[3]{(x^2 - x + 1)^2}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 & (5) \\ x^2 - 4x + 8 - \frac{6x}{1 + \sqrt[3]{x^2 - x + 1} + \sqrt[3]{(x^2 - x + 1)^2}} = 0 & (6) \end{cases}.$$

Từ (5) ta có nghiệm của hệ là $(x; y) = (1; 1)$.

Nhận thấy phương trình (6) vô nghiệm, thật vậy:

$$\text{Ta có } x^2 - 4x + 8 = (x-2)^2 + 4 \geq 4$$

Mặt khác nhận thấy $x^2 - x + 1 \geq \left(\frac{x}{2} - 1\right)^2 + \frac{3}{4}x^2 \geq \frac{3}{4}x^2$. Từ đó

$$1 + \sqrt[3]{x^2 - x + 1} + \sqrt[3]{(x^2 - x + 1)^2} \geq 1 + \sqrt[3]{\frac{3}{4}x^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{3}{4}x^2\right)^2} \geq 1 + 2\sqrt[6]{\left(\frac{3}{4}\right)^3 x^6} > \sqrt{3}x$$

$$\text{Nên } x^2 - 4x + 8 - \frac{6x}{1 + \sqrt[3]{x^2 - x + 1} + \sqrt[3]{(x^2 - x + 1)^2}} > 4 - 2\sqrt{3} > 0 \text{ nên phương trình (6) vô nghiệm.}$$

Vậy hệ phương trình có 1 nghiệm $(x; y) = (1; 1)$.

Cách 2: Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x + y \geq 0 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có 1 nghiệm $(x; y) = (1; 1)$.

Với $x = 0$ thì hệ là :

$$\begin{cases} y^2 + \sqrt{y} = 0 \\ -5y^2 + 7y - 4 = 6\sqrt[3]{-y+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -4 = 6 \end{cases}. \text{ Vậy hệ vô nghiệm.}$$

Với $x > 0$, ta có $\sqrt{2x} + \sqrt{x+y} \neq 0$

$$(1) \Leftrightarrow (\sqrt{2x} - \sqrt{x+y}) + (2x^2 - y^2 - xy) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y}{\sqrt{2x} + \sqrt{x+y}} + (x-y)(2x+y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y) \left(\frac{1}{\sqrt{2x} + \sqrt{x+y}} + 2x + y \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \frac{1}{\sqrt{2x} + \sqrt{x+y}} + 2x + y = 0 \end{cases}$$

$$\text{Vì } \begin{cases} x > 0 \\ x + y \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{nên } A = \frac{1}{\sqrt{2x} + \sqrt{x+y}} + 2x + y = \frac{1}{\sqrt{2x} + \sqrt{x+y}} + x + (x+y) > 0$$

Vậy $A = 0$ vô nghiệm.

Thế $x = y$ vào (2) ta được phương trình:

$$y^3 - 5y^2 + 14y - 4 = 6\sqrt[3]{y^2 - y + 1}$$

$$\Leftrightarrow y^3 - 5y^2 + 14y - 4 = 3\sqrt[3]{8y^2 - 8y + 8}$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{8y^2 - 8y + 8} + (8y^2 - 8y + 8) = 3(y+1) + (y+1)^3 \quad (3)$$

Xét hàm số: $f(t) = 3t + t^3; (t \in \mathbb{R}) \Rightarrow f'(t) = 3 + 3t^2 > 0; \forall t \in \mathbb{R}$

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và từ (3) ta có:

$$f\left(\sqrt[3]{8y^2 - 8y + 8}\right) = f(y+1)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{8y^2 - 8y + 8} = y+1$$

$$\Leftrightarrow 8y^2 - 8y + 8 = (y+1)^3 \Leftrightarrow y^3 - 5y^2 + 11y - 7 = 0 \Leftrightarrow (y-1)(y^2 - 4y + 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y^2 - 4y + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 1. \text{ Vậy nghiệm của hệ phương trình là } (x; y) = (1; 1)$$

Cách 3: Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x+y \geq 0 \end{cases}$

Với $x=0$ thì hệ là :

$$\begin{cases} y^2 + \sqrt{y} = 0 \\ -5y^2 + 7y - 4 = 6\sqrt{-y+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -4 = 6 \end{cases} \cdot \text{Vậy hệ vô nghiệm.}$$

Với $x > 0$, ta có $\sqrt{2x} + \sqrt{x+y} \neq 0$ (1) $\Leftrightarrow (\sqrt{2x} - \sqrt{x+y}) + (2x^2 - y^2 - xy) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y}{\sqrt{2x} + \sqrt{x+y}} + (x-y)(2x+y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y) \left(\frac{1}{\sqrt{2x} + \sqrt{x+y}} + 2x+y \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \frac{1}{\sqrt{2x} + \sqrt{x+y}} + 2x+y = 0 \end{cases}$$

Vì $\begin{cases} x > 0 \\ x+y \geq 0 \end{cases}$ nên $A = \frac{1}{\sqrt{2x} + \sqrt{x+y}} + 2x+y = \frac{1}{\sqrt{2x} + \sqrt{x+y}} + x + (x+y) > 0$

Vậy $A=0$ vô nghiệm. Thế $x=y$ vào (2) ta được phương trình:

$$y^3 - 5y^2 + 14y - 4 = 6\sqrt[3]{y^2 - y + 1} \Leftrightarrow y^3 - 5y^2 + 8y - 4 = 6(\sqrt[3]{y^2 - y + 1} - y)$$

$$\Leftrightarrow (y-1)(y^2 - 4y + 4) = \frac{6(y^2 - y + 1 - y^3)}{\sqrt[3]{(y^2 - y + 1)^2} + \sqrt[3]{(y^2 - y + 1)} \cdot y + y^2}$$

$$\Leftrightarrow (y-1) \left((y-2)^2 + \frac{6(y^2+1)}{\sqrt[3]{(y^2 - y + 1)^2} + \sqrt[3]{(y^2 - y + 1)} \cdot y + y^2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow y-1=0 \Leftrightarrow y=1$$

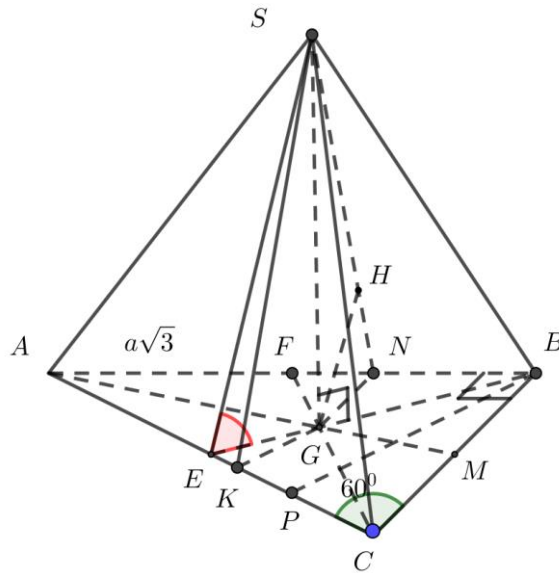
$$\text{Vì } (y-2)^2 + \frac{6(y^2+1)}{\sqrt[3]{(y^2 - y + 1)^2} + \sqrt[3]{(y^2 - y + 1)} \cdot y + y^2} > 0; \forall y > 0$$

Câu IV. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là $\triangle ABC$ vuông tại B , $AB = a\sqrt{3}$, $\angle ACB = 60^\circ$, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là trọng tâm của tam giác ABC , gọi E là trung điểm cạnh AC , biết góc giữa SE và mặt phẳng đáy bằng 30° .

a) Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) .

b) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC) .

Lời giải



Trong $\triangle ABC$, kẻ $BP \perp AC \Rightarrow BP = \frac{BC \cdot BA}{\sqrt{BC^2 + BA^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Kẻ } GK \parallel BP \Rightarrow \begin{cases} GK \perp AC \\ GK = \frac{1}{3}BP = \frac{a\sqrt{3}}{6} \end{cases}$$

Ta có, $\begin{cases} AC \perp GK \\ AC \perp SG \end{cases} \Rightarrow AC \perp SK \Rightarrow ((SAC), (ABC)) = SKG$.

Trong $\triangle SGK$ vuông tại G, có $\tan SKG = \frac{SG}{GK} = \frac{2}{3}$.

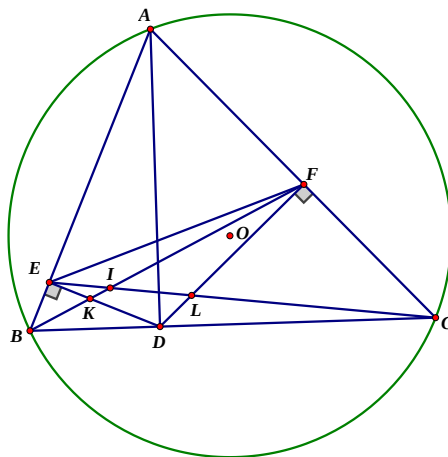
Vậy $((SAC), (ABC)) = SKG = \arctan \frac{2}{3}$.

Câu V. Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp đường tròn (O) , có đường cao AD ($D \in BC$). Kẻ DE, DF lần lượt vuông góc với AB, AC ($E \in AB, F \in AC$). $BF \cap CE = I, K = BF \cap DE, L = CE \cap DF$, hai điểm M, N lần lượt là trung điểm của AD và AI . Chứng minh rằng:

a) Đường thẳng KL song song với đường thẳng BC .

b) M, N, O thẳng hàng.

Lời giải



a)

Cách 1

: Ta sẽ đi chứng minh: $\frac{KI}{KB} = \frac{LI}{LC}$.

Áp dụng định lí Menelaus trong tam giác BIC với hai cát tuyến $\overline{D,L,F}$ và $\overline{D,K,E}$ có:

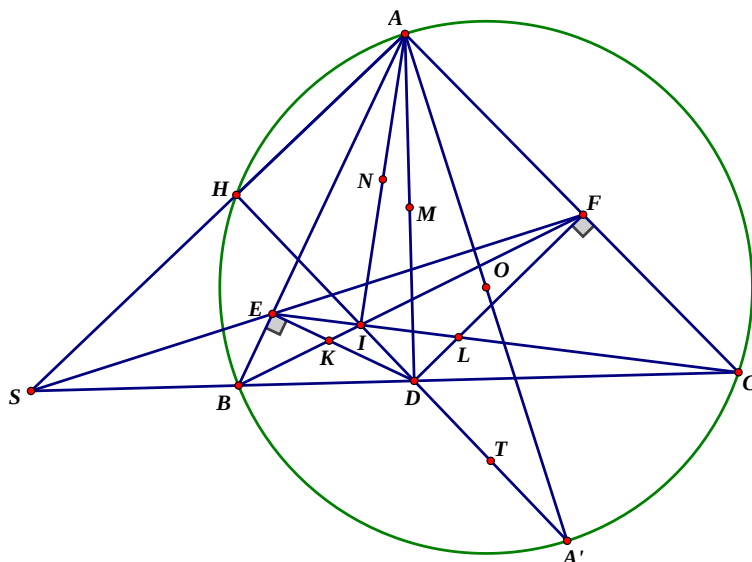
$$\frac{LI}{LC} \cdot \frac{DC}{DB} \cdot \frac{FB}{FI} = 1; \frac{KI}{KB} \cdot \frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EI} = 1 \text{ suy ra ta cần chứng minh:}$$

$$\frac{DC}{DB} \cdot \frac{FB}{FI} = \frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EI} \Leftrightarrow \left(\frac{DC}{DB} \right)^2 = \frac{EC}{EI} \cdot \frac{FI}{FB}$$

Để chứng minh tứ giác $FECB$ nội tiếp. Khi đó, ta có: $\frac{EC}{FB} = \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{AC}{AB} = \frac{\frac{DC}{\sin DAC}}{\frac{DB}{\sin DAB}} \quad (1)$

$$\frac{IF}{IE} = \frac{FC}{EB} = \frac{DC \cdot \sin FDC}{DB \cdot \sin EDB} = \frac{DC \cdot \sin DAC}{DB \cdot \sin DAB} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.



Cách 2: 1. Ta có $\angle AED = \angle AFD = 90^\circ$ nên tứ giác $AEDF$ nội tiếp
 $\Rightarrow \angle AEF = \angle ADF = 90^\circ - \angle DAC = \angle ACB$
 $\Rightarrow \angle BEF + \angle AEF = \angle BEF + \angle ACB = 180^\circ$
 $\Rightarrow$ Tứ giác $EFCB$ nội tiếp
 $\Rightarrow \angle BEC = \angle CFB \Rightarrow \angle KEL = \angle BEC - 90^\circ = \angle CFB - 90^\circ = \angle LFK$
 $\Rightarrow$ Tứ giác $EFLK$ nội tiếp. $\Rightarrow \angle ILK = \angle EFI = \angle BCI \Rightarrow KL \parallel BC$

b)

Cách 1:

AA' là đường kính. Để chứng minh M, O, N thẳng hàng ta đi chứng minh I, D, A' thẳng hàng.
 $[AD] \cap (O) = AH$. Có: $AHD = 90^\circ = AHA' \Rightarrow \overline{H, D, A'}$
 Áp dụng tính chất trục đẳng phương của 3 đường tròn $[AD], (O), (BEFC)$ ta có AH, BC, EF đồng quy tại S .

Lời giải

Ta có $3 \sqrt{x+y+z} = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy = (x+y+z)^2 \geq \frac{(x+y+z)^2}{B.C.S.} \geq \frac{(x+y+z)^2}{2}$

$$\Leftrightarrow x+y+z \leq 6 \sqrt{x+y+z} \Leftrightarrow x+y+z \leq 6 \text{ (do } x+y+z > 0 \text{)}$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\frac{16}{\sqrt{x+z}} + \sqrt{x+z} = \frac{8}{\sqrt{x+z}} + \frac{8}{\sqrt{x+z}} + \sqrt{x+z} \geq 3\sqrt{\frac{8}{\sqrt{x+z}} \cdot \frac{8}{\sqrt{x+z}} \cdot \sqrt{x+z}} = 12$$

$$\frac{16}{\sqrt{y+2}} + \sqrt{y+2} = \frac{8}{\sqrt{y+2}} + \frac{8}{\sqrt{y+2}} + \sqrt{y+2} \geq 3\sqrt{\frac{8}{\sqrt{y+2}} \cdot \frac{8}{\sqrt{y+2}} \cdot \sqrt{y+2}} = 12$$

Khi đó

$$\begin{aligned} P &= \frac{20}{\sqrt{x+z}} + \frac{20}{\sqrt{y+2}} + x+y+z \\ &= \frac{5}{4} \left[\frac{16}{\sqrt{x+z}} + \sqrt{x+z} + \frac{16}{\sqrt{y+2}} + \sqrt{y+2} \right] - \frac{1}{4} (x+y+z) - \frac{5}{2} \\ &\geq \frac{5}{4} (12+12) - \frac{1}{4} \cdot 6 - \frac{5}{2} = 26. \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi
$$\begin{cases} x+y=z \\ x+z=4 \\ y+2=4 \\ x+y+z=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P bằng 6 khi $x=1, y=2, z=3$.

Câu VII. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $n^4 + n^3 + 1$ là số chính phương.

Lời giải

Vì n là số nguyên dương nên $n^4 < n^4 + n^3 + 1 < n^4 + 2n^3 + n^2 \Leftrightarrow (n^2)^2 < n^4 + n^3 + 1 < (n^2 + n)^2$.

Theo yêu cầu đề bài thì $n^4 + n^3 + 1$ có dạng $(n^2 + k)^2$ với $k \in \mathbb{Z}, 1 \leq k < n$. (*)

$$n^4 + n^3 + 1 = (n^2 + k)^2 \Leftrightarrow n^3 + 1 = 2n^2k + k^2 \Leftrightarrow k^2 - 1 = n^2(n - 2k) \Rightarrow (k^2 - 1) : n^2.$$

+) Trường hợp 1: $k^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow k = 1 \Rightarrow n = 2$ (thỏa mãn).

+) Trường hợp 2: $k^2 - 1 > 0$, từ $n^2(n - 2k) = k^2 - 1 > 0 \Rightarrow k^2 - 1 > n^2 \Rightarrow k > n$ (mâu thuẫn (*))

Vậy $n = 2$.

----- HẾT -----