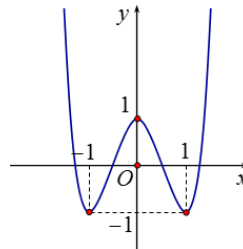


ĐỀ GỐC
(Đề gồm có trang)

Mã đề thi
172

Họ và tên: Lớp:

Câu 1. Hàm số $y = f(x)$ với đồ thị như hình vẽ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Hướng dẫn giải

3

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm mệnh đề đúng?

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$				2	

A diagram showing a path on a coordinate system. The horizontal axis is labeled x and has points $-\infty$, -1 , 1 , and $+\infty$. The vertical axis is labeled y and has points $+\infty$, 2 , and $-\infty$. A path starts at $(-\infty, +\infty)$, goes down and right to $(-1, -2)$, then up and right to $(1, 2)$, and finally down and right to $(+\infty, -\infty)$.

A. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.

B. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

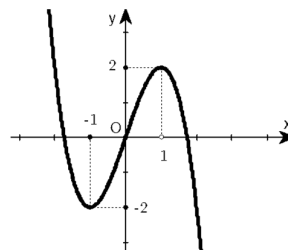
C. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 2)$.

D. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Hàm số đồng biến trên $(-1; 1)$.

Câu 3. Đường cong trong hình vẽ là đồ thị của hàm số nào?



A. $y = -x^3 + 3x$.

B. $y = x^3 - 3x$.

C. $y = -x^2 + x - 1$.

D. $y = x^4 - x^2 + 1$.

Hướng dẫn giải

$$y = -x^3 + 3x$$

Câu 4. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ với bảng biến thiên như hình vẽ có tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng bằng bao nhiêu?

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
y'	+		+	0 -
y	-1	$+\infty$	$-\infty$	2

A. -2.

B. 0.

C. 1.

D. 3.

Hướng dẫn giải

2

Câu 5. Biến đổi biểu thức $A = \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}$ (với a là số thực dương khác 1) về dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ ta được

A. $A = a^{\frac{7}{6}}$.

B. $A = a^2$.

C. $A = a$.

D. $A = a^{\frac{7}{2}}$.

Hướng dẫn giải

$$A = a^{\frac{7}{6}}$$

Câu 6. Phương trình $6 \cdot 4^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 9^x = 0$ có tập nghiệm

A. $S = \{-1, 1\}$.

B. $S = \{\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\}$.

C. $S = \{0, 1\}$.

D. $S = \{1\}$.

Hướng dẫn giải

$$S = \{-1, 1\}$$

Câu 7. Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x^3 - \frac{1}{x^2}$ là

A. $F(x) = x^4 + \frac{1}{x} + C$.

B. $F(x) = 12x^2 + \frac{1}{x} + C$.

C. $F(x) = x^4 - \frac{1}{x} + C$.

D. $F(x) = x^4 + \ln|x^2| + C$.

Hướng dẫn giải

$$F(x) = x^4 + \frac{1}{x} + C$$

Câu 8. Cho số phức $z = (1+i)^2(1+2i)$. Số phức z có phần ảo là

A. -2.

B. 4.

C. -2.

D. $2i$.

Hướng dẫn giải

$$z = 2$$

Câu 9. Tổng $S = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots$ có giá trị là

A. $-\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{1}{4}$.

D. $\frac{1}{9}$.

Hướng dẫn giải

$$S = \frac{1}{2}$$

Câu 10. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 3a$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

A. $V = a^3$.

B. $V = 6a^3$.

C. $V = 3a^3$.

D. $V = 2a^3$.

Hướng dẫn giải

$$V = a^3$$

Câu 11. Một khối nón tròn xoay có độ dài đường sinh $l = 13 \text{ (cm)}$ và bán kính đáy $r = 5 \text{ (cm)}$. Khi đó thể tích khối nón bằng

A. $V = 100\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$

B. $V = 300\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$

C. $V = \frac{325}{3}\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$

D. $V = 20\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$

Hướng dẫn giải

$$V = 100\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua các điểm $A(-1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; -2)$ có phương trình là

A. $-2x + y - z - 2 = 0.$

B. $-2x + y + z - 2 = 0.$

C. $-2x - y - z + 2 = 0.$

D. $-2x + y - z + 2 = 0.$

Hướng dẫn giải

$$\frac{x}{-1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{-2} = 1 \Leftrightarrow -2x + y - z - 2 = 0$$

Câu 13. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng đi qua $M(1; 4; 3)$ và vuông góc với trục Oy có phương trình là

A. $y - 4 = 0.$

B. $x - 1 = 0.$

C. $z - 3 = 0.$

D. $y + 4 = 0.$

Hướng dẫn giải

Mặt phẳng cần tìm có VTPT là $\vec{j} = (0; 1; 0)$ nên phương trình mặt phẳng là:

$$0(x - 1) + 1(y - 4) + 0(z - 3) = 0 \Leftrightarrow y - 4 = 0.$$

Câu 14. Tổ hợp chập k của n phần tử được tính bởi công thức

A. $\frac{n!}{k!(n-k)!}.$

B. $\frac{n!}{(n-k)!}.$

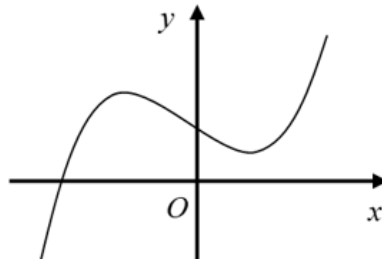
C. $\frac{n!}{k!}.$

D. $n!.$

Hướng dẫn giải

Công thức: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Đạo hàm $f'(x)$ đổi dấu khi đi qua chỉ 1 điểm nên có 1 cực trị.

Câu 16. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ trên đoạn $[3; 5]$. Khi đó $M - m$ bằng

A. $-\frac{1}{2}$.

B. $\frac{7}{2}$.

C. 2.

D. $\frac{3}{8}$.

Hướng dẫn giải

$$f(3) = 2, f(5) = \frac{3}{2}$$

Vậy $M - m = \frac{1}{2}$.

Câu 17. Cho $\log_5 2 = m$, $\log_3 5 = n$. Tính $A = \log_{25} 2000 + \log_9 675$ theo m, n .

A. $A = 3 + 2m + n$.

B. $A = 3 + 2m - n$.

C. $A = 3 - 2m + n$.

D. $A = 3 - 2m - n$.

Hướng dẫn giải

$$A = \log_{25} 2000 + \log_9 675 = \log_{5^2} (5^3 \cdot 2^4) + \log_{3^2} (3^3 \cdot 5^2)$$

$$= \frac{3}{2} \log_5 5 + \frac{4}{2} \log_5 2 + \frac{3}{2} \log_3 3 + \frac{2}{2} \log_3 5 = \frac{3}{2} + 2m + \frac{3}{2} + n = 3 + 2m + n$$

Câu 18. Đạo hàm của hàm số $y = x + \ln^2 x$ là

A. $y' = 1 + \frac{2 \ln x}{x}$.

B. $y' = 1 + 2 \ln x$.

C. $y' = 1 + \frac{2}{x \ln x}$.

D. $y' = 1 + 2x \ln x$.

Hướng dẫn giải

$$y' = (x + \ln^2 x)' = x' + (\ln^2 x)' = 1 + 2 \ln x (\ln x)' = 1 + \frac{2}{x} \ln x$$

Câu 19. Tập nghiệm S của bất phương trình $5^{x+2} < \left(\frac{1}{25}\right)^{-x}$ là

A. $S = (2; +\infty)$.

B. $S = (1; +\infty)$.

C. $S = (-\infty; 1)$.

D. $S = (-\infty; 2)$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } 5^{x+2} < \left(\frac{1}{25}\right)^{-x} \Leftrightarrow 5^{x+2} < 5^{2x} \Leftrightarrow x+2 < 2x \Leftrightarrow x > 2$$

Câu 20. Hàm số $f(x) = \frac{\cos x}{\sin^5 x}$ có một nguyên hàm $F(x)$ bằng

A. $-\frac{1}{4 \sin^4 x} + 2019$.

B. $\frac{1}{4 \sin^4 x} + 2019$.

C. $\frac{4}{\sin^4 x} + 2018$.

D. $\frac{-4}{\sin^4 x} + 2018$.

Hướng dẫn giải

$$F(x) = \int \frac{\cos x}{\sin^5 x} dx. \text{ Đặt } t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx \Rightarrow \int \frac{\cos x}{\sin^5 x} dx = \int \frac{dt}{t^5} = -\frac{1}{4t^4} + C$$

Vậy một nguyên hàm là: $-\frac{1}{4 \sin^4 x}$

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Nếu $\int_1^5 2f(x)dx = 2$ và $\int_1^3 f(x)dx = 7$ thì $\int_3^5 f(x)dx$ có giá trị bằng

A. -6.

B. -9.

C. 9.

D. 5.

Hướng dẫn giải

$$\int_1^5 f(x)dx = \int_1^3 f(x)dx + \int_3^5 f(x)dx \Rightarrow \int_3^5 f(x)dx = \int_1^5 f(x)dx - \int_1^3 f(x)dx = 1 - 7 = -6$$

Câu 22. Gọi z_1 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2 + 2z + 3 = 0$. Điểm biểu diễn hình học của số phức z_1 là

- A.** $M(-1; -\sqrt{2})$. **B.** $M(-1; \sqrt{2})$. **C.** $M(-1; -2)$. **D.** $M(-1; -\sqrt{2}i)$.

Hướng dẫn giải

$$z^2 + 2z + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = -1 + \sqrt{2}i \\ z = -1 - \sqrt{2}i \end{cases}$$

Nghiệm phức có phần ảo âm là $z = -1 - \sqrt{2}i \Rightarrow M(-1; -\sqrt{2})$.

Câu 23. Số phức z thỏa $2z - 3i\bar{z} + 6 + i = 0$ có phần ảo là

- A.** -4 . **B.** 3 . **C.** 2 . **D.** 1 .

Hướng dẫn giải

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có:

$$2(x + yi) - 3i(x - yi) + 6 + i = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y + 6 + (-3x + 2y + 1)i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y + 6 = 0 \\ -3x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$$

Vậy phần ảo là $y = 4$.

Câu 24. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $2a$. Diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S và đáy là hình tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$ bằng

- A.** $\frac{\pi a^2 \sqrt{17}}{4}$. **B.** $\frac{\pi a^2 \sqrt{15}}{4}$. **C.** $\frac{\pi a^2 \sqrt{15}}{2}$. **D.** $\frac{\pi a^2 \sqrt{17}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Theo giả thiết, bán kính hình tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$ là $r = \frac{a}{2}$

Gọi M là trung điểm của AB nên $l = SM$ là độ dài đường sinh của hình chóp.

$$\text{Gọi } O \text{ là tâm của hình vuông } ABCD \text{ suy ra } l = SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = \frac{a\sqrt{17}}{2}.$$

$$\text{Vậy } S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{17}}{2} = \frac{\pi a^2 \sqrt{17}}{4}.$$

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(-4; 9; -9)$, $B(2; 12; -2)$ và $C(-m-2; 1-m; m+5)$. Tìm giá trị của m để tam giác ABC vuông tại B .

- A.** $m = -4$. **B.** $m = 4$. **C.** $m = -3$. **D.** $m = 3$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{BA} = (-6; -7; -3), \overrightarrow{BC} = (-m-4; -m-11; m+7).$$

Mặt khác: $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ nên $m = -4$.

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2; 1; 1)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 1 = 0$. Mặt cầu tâm A tiếp xúc với mặt phẳng (P) có phương trình

- A.** $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 4$. **B.** $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9$.
C. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 3$. **D.** $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Bán kính mặt cầu là: } r = d(A; (P)) = \frac{|2 \cdot 2 - 1 + 2 \cdot 1 + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 2.$$

Vậy được phương trình mặt cầu: $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 4$.

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua hai điểm $A(1; -1; 2)$ và $B(-3; 2; 1)$ có phương trình tham số là

A. $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -1 - 3t \ (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2 + t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = -3 + 2t \ (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1 + t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -1 + 3t \ (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2 + t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = -3 - t \ (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Đường thẳng d đi qua hai điểm $A(1; -1; 2)$ và $B(-3; 2; 1)$ có vector chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (-4; 3; -1)$ hay $\vec{u} = (4; -3; 1)$.

Phương trình đường thẳng d : $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -1 - 3t \\ z = 2 + t \end{cases}$

Câu 28. Gọi d là tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 9x - 11$. Hỏi đường thẳng d đi qua điểm nào dưới đây?

A. $P\left(5; -\frac{2}{3}\right)$.

B. $M\left(-5; \frac{2}{3}\right)$.

C. $P\left(2; -\frac{5}{3}\right)$.

D. $P\left(-2; \frac{5}{3}\right)$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y' = 2x^2 - 8x + 9$, $y'' = 4x - 8$

Tiếp tuyến d có hệ số góc nhỏ nhất là tiếp tuyến tại điểm uốn của đồ thị hàm số $U\left(2; -\frac{11}{3}\right)$.

Phương trình d : $y = y'(2)(x-2) - \frac{11}{3} \Leftrightarrow y = x - \frac{17}{3}$

Vậy d đi qua điểm $P\left(5; -\frac{2}{3}\right)$.

Câu 29. Có bao nhiêu điểm M thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x+2}{x-2}$ sao cho khoảng cách từ điểm M đến tiệm cận ngang bằng 5 lần khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng?

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Gọi $M\left(a; \frac{a+2}{a-2}\right) \in (C)$ với $a \neq 2$.

Ta có: $5|a-2| = \left|\frac{a+2}{a-2} - 1\right| \Leftrightarrow 5|a-2| = \frac{4}{|a-2|} \Leftrightarrow 5(a^2 - 4a + 4) = 4$.

$\Leftrightarrow 5a^2 - 20a + 16 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{10 \pm 2\sqrt{5}}{5}$.

Vậy có hai điểm cần tìm.

Câu 30. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $(\log_2 x)^2 - \log_2(x^2) + 3 - m = 0$ có nghiệm $x \in [1; 8]$.

A. $2 \leq m \leq 6$.

B. $6 \leq m \leq 9$.

C. $3 \leq m \leq 6$.

D. $2 \leq m \leq 3$.

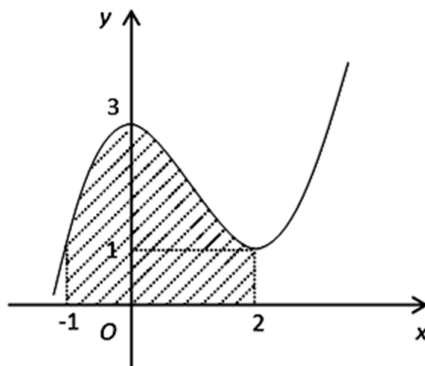
Hướng dẫn giải

Đặt $t = \log_2 x$. Vì $x \in [1; 8]$ nên $t \in [0; 3]$. Phương trình $(\log_2 x)^2 - \log_2(x^2) + 3 - m = 0$ trở thành $t^2 - 2t + 3 - m = 0 \Leftrightarrow m = t^2 - 2t + 3, t \in [0; 3]$. Ta có bảng biến thiên của hàm số $m = t^2 - 2t + 3$:

t	0	1	3
m'		—	+
		0	
m	3		6

Vậy: $m \in [2; 6]$.

Câu 31. Tính diện tích S của miền hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, các đường thẳng $x = -1, x = 2$ và trục hoành (miền gạch chéo cho trong hình vẽ).



A. $S = \frac{51}{8}$.

B. $S = \frac{52}{8}$.

C. $S = \frac{50}{8}$.

D. $S = \frac{53}{8}$.

Hướng dẫn giải

Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, các đường thẳng $x = -1, x = 2$ và trục hoành được chia thành hai phần:

Miền D_1 là hình chữ nhật có hai kích thước lần lượt là 1 và 3 $\Rightarrow S_1 = 3$.

Miền D_2 gồm: $\begin{cases} f(x) = ax^3 + bx^2 + c \\ y = 1 \\ x = -1; x = 2 \end{cases}$.

(C) đi qua 3 điểm $A(-1; 1), B(0; 3), C(2; 1)$ nên đồ thị (C) có phương trình

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3 \Rightarrow S_2 = \int_{-1}^2 \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3 - 1 \right) dx = \frac{27}{8}.$$

Vậy diện tích hình phẳng cần tìm là $S = S_1 + S_2 = \frac{51}{8}$.

- Câu 32.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ và thỏa mãn $f(x) = 6x^2 f(x^3) - \frac{6}{\sqrt{3x+1}}$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$.
- A.** -4 . **B.** 2 . **C.** -1 . **D.** 6 .

Hướng dẫn giải

$$f(x) = 6x^2 f(x^3) - \frac{6}{\sqrt{3x+1}} \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 6x^2 f(x^3)dx - \int_0^1 \frac{6}{\sqrt{3x+1}}dx$$

Đặt $t = x^3 \Rightarrow dt = 3x^2 dx$, đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = 1 \Rightarrow t = 1$.

$$\text{Ta có: } \int_0^1 6x^2 f(x^3)dx = \int_0^1 2f(t)dt = \int_0^1 2f(x)dx, \int_0^1 \frac{6}{\sqrt{3x+1}}dx = 4.$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 2f(x)dx - 4 \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = 4$$

- Câu 33.** Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z = (1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{10}$.
- A.** Phần thực của z là 31, phần ảo của z là 33. **B.** Phần thực của z là 31, phần ảo của z là $33i$.
C. Phần thực của z là 33, phần ảo của z là 31. **D.** Phần thực của z là 33, phần ảo của z là $31i$.

Hướng dẫn giải

Số phức cần tìm là tổng của 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân có số hạng đầu tiên là $1+i$ và công bội $q = 1+i$.

Do đó:

$$\begin{aligned} z &= u_1 \cdot \frac{1-q^{10}}{1-q} = (1+i) \cdot \frac{1-(1+i)^{10}}{1-(1+i)} = \frac{(1+i)}{-i} \cdot \left(1 - [(1+i)^2]^5\right) \\ &= (-1+i) \cdot (1 - (2i)^5) = (-1+i)(1 - 2^5 \cdot i^5) \\ &= (-1+i)(1 - 32i) = 31 + 33i. \end{aligned}$$

- Câu 34.** Số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) là số phức có môđun nhỏ nhất trong tất cả các số phức thỏa điều kiện $|z + 3i| = |z + 2 - i|$, khi đó giá trị $z \cdot \bar{z}$ bằng
- A.** $-\frac{1}{5}$. **B.** 5 . **C.** 3 . **D.** $\frac{3}{25}$.

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{Gọi } z = a + bi, \text{ khi đó } |z + 3i| &= |z + 2 - i| \Leftrightarrow a^2 + (b+3)^2 = (a+2)^2 + (b-1)^2 \\ \Leftrightarrow 4a - 8b &= 4 \Leftrightarrow a = 1 + 2b \end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } a^2 + b^2 = (1+2b)^2 + b^2 = 5b^2 + 4b + 1 = 5\left(b + \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} \geq \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = \frac{1}{5}.$$

- Câu 35.** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ cạnh đáy bằng $2a$ và chiều cao bằng $a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ tâm O của đáy ABC đến một mặt bên.

A. $-\frac{a\sqrt{30}}{10}$.

B. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

C. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{a\sqrt{10}}{5}$.

Hướng dẫn giải

Gọi d là khoảng cách từ O đến $mp(SBC)$.

Ta có: $\frac{1}{d^2} = \frac{1}{(a\sqrt{3})^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{9}{3a^2} = \frac{10}{3a^2}$

Vậy khoảng cách từ O đến mặt bên là: $d = \frac{a\sqrt{30}}{10}$.

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = 2a$, $AD = 4a$, $SA \perp (ABCD)$ và cạnh SC tạo với đáy góc 60° . Gọi M là trung điểm của BC , N là điểm trên cạnh AD sao cho $DN = a$. Khoảng cách giữa MN và SB là

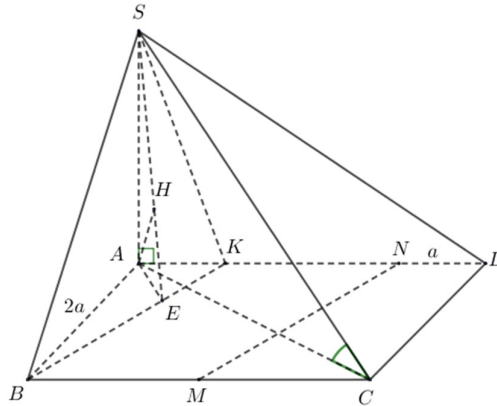
A. $-\frac{2a\sqrt{285}}{19}$.

B. $\frac{a\sqrt{285}}{19}$.

C. $\frac{2a\sqrt{95}}{19}$.

D. $\frac{8a}{\sqrt{19}}$.

Hướng dẫn giải



Lấy K trên AD sao cho $AK = a$ thì $MN \parallel (SBK)$. $AC = 2a\sqrt{5}$.

$\Rightarrow d(MN, SB) = d(MN, (SBK)) = d(N, (SBK)) = 2d(A, (SBK))$.

Vẽ $AE \perp BK$ tại E , $AH \perp SE$ tại H .

Ta có $(SAE) \perp (SBK)$, $(SAE) \cap (SBK) = SE$, $AH \perp SE$

$\Rightarrow AH \perp (SBK) \Rightarrow d(A, (SBK)) = AH$. $SA = AC \cdot \sqrt{3} = 2a\sqrt{15}$.

$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AK^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{(2a\sqrt{15})^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2}$

$= \frac{1}{(2a\sqrt{15})^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2}$

$\Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{285}}{19} \Rightarrow d(MN, SB) = \frac{2a\sqrt{285}}{19}$.

Câu 37. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và $B'C'$. Mặt phẳng $(A'MN)$ cắt cạnh BC tại P . Tính thể tích của khối đa diện $MBPA'B'N$.

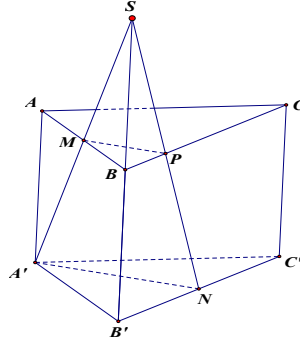
A. $-\frac{7\sqrt{3}a^3}{96}$.

B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{24}$.

C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

D. $\frac{7\sqrt{3}a^3}{32}$.

Hướng dẫn giải



Khối chóp $S.A'B'N$ có diện tích đáy $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$ và chiều cao $h = 2a$ nên $V_{SAB'N} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. Ta có:

$$V_{SMBP} = \frac{1}{8}V_{SAB'N} = \frac{a^3\sqrt{3}}{96}.$$

$$\text{Vậy: } V_{MBPA'B'N} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12} - \frac{a^3\sqrt{3}}{96} = \frac{7\sqrt{3}a^3}{96}.$$

Câu 38. Cho tứ diện $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B với $AB = 3a, BC = 4a, SA \perp (ABC)$ và cạnh bên SC tạo với đáy góc 60° . Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp $SABC$.

A. $V = \frac{500\pi a^3}{3}$. **B.** $V = \frac{5\pi a^3}{3}$. **C.** $V = \frac{50\pi a^3}{3}$. **D.** $V = \frac{\pi a^3}{3}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\triangle SAC$ vuông tại S (*).

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow \triangle SBC \text{ vuông tại } B (**)$$

Từ (*) và (**) $\Rightarrow$ Tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$ là trung điểm đoạn SC .

$$\text{Ta có: } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5a. \text{ Mà } \frac{AC}{SC} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow SC = 2AC = 10a$$

$$\Rightarrow R = \frac{SC}{2} = 5a$$

$$\text{Vậy } V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{500\pi a^3}{3}.$$

Câu 39. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng $(P): 2x - y - z + 5 = 0$ tiếp xúc với mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 24$ tại điểm $M(a; b; c)$. Tính giá trị biểu thức $T = a + b + c$.

A. $T = 2$. **B.** $T = -2$. **C.** $T = 10$. **D.** $T = -4$.

Hướng dẫn giải

Gọi Δ là đường thẳng qua tâm $I(3; 1; -2)$ của mặt cầu và vuông góc $mp(P)$.

$$\text{Ta được } \Delta: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = -2 - t \end{cases}. M \text{ là giao điểm của } \Delta \text{ và } mp(P).$$

$$\text{Xét: } 2(3 + 2t) - (1 - t) - (-2 - t) + 5 = 0 \Rightarrow t = -2$$

$$\text{Vậy: } M(-1; 3; 0) \Rightarrow T = 2.$$

Câu 40. Trên giá sách có 4 quyển sách Toán, 3 quyển sách Lí và 2 quyển sách Hóa. Lấy ngẫu nhiên 3 quyển sách. Tính xác suất sao cho ba quyển lấy ra có ít nhất một quyển sách Toán.

A. $-\frac{37}{42}$.

B. $\frac{5}{42}$.

C. $\frac{10}{21}$.

D. $\frac{42}{37}$.

Hướng dẫn giải

Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = C_9^3 = 84$.

Gọi A là biến cố sao cho ba quyển lấy ra có ít nhất một quyển sách Toán

$\Rightarrow \bar{A}$ là biến cố sao cho ba quyển lấy ra không có sách Toán $\Rightarrow n(\bar{A}) = C_5^3 = 10$.

$$\Rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{10}{84} = \frac{37}{42}.$$

Câu 41. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 + mx^2 + 7x + 3$ vuông góc với đường thẳng $y = \frac{9}{8}x + 1$.

A. $m = \pm 5$.

B. $m = \pm 6$.

C. $m = \pm 12$.

D. $m = \pm 10$.

Hướng dẫn giải

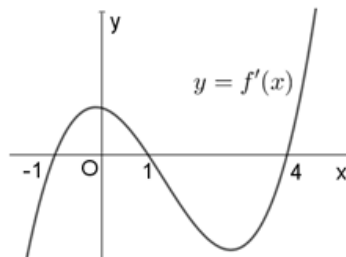
Đạo hàm $y' = 3x^2 + 2mx + 7$. Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 21 > 0.$$

Hệ số góc đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là $k = -\frac{2}{9}m^2 + \frac{14}{3} = \frac{2}{9}(21 - m^2)$.

$$\text{Ycbt} \Leftrightarrow \frac{2}{9}(21 - m^2) \cdot \frac{9}{8} = -1 \Leftrightarrow m^2 = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ m = -5 \end{cases}.$$

Câu 42. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(3 - x)$ đồng biến trên khoảng nào?



A. $(-1; 2)$.

B. $(-2; -1)$.

C. $(2; +\infty)$.

D. $(-\infty; -1)$.

Hướng dẫn giải

Đặt $g(x) = f(3 - x)$ ta có $g'(x) = -f'(3 - x)$

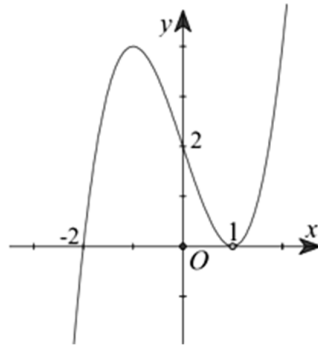
Xét $x \in (-2; -1) \Rightarrow 3 - x \in (4; 5) \Rightarrow f'(3 - x) > 0 \Rightarrow g'(x) < 0$

$\Rightarrow$ hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên $(-2; -1)$

Xét $x \in (-1; 2) \Rightarrow 3 - x \in (1; 4) \Rightarrow f'(3 - x) < 0 \Leftrightarrow g'(x) > 0$

$\Rightarrow$ hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên $(-1; 2)$

Câu 43. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 3)$.



A. -3.

B. 1.

C. 5.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Quan sát đồ thị ta có $y = f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương qua $x = -2$ nên hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực trị là $x = -2$.

$$\text{Ta có } y' = [f(x^2 - 3)]' = 2x \cdot f'(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3 = -2 \\ x^2 - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

Mà $x = \pm 2$ là nghiệm kép, còn các nghiệm còn lại là nghiệm đơn nên hàm số $y = f(x^2 - 3)$ có ba cực trị.

Câu 44. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 + (2m - 3)x^2 - m - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác đều.

A. $m = \frac{3}{2} - \sqrt[3]{3}$.

B. $m = \frac{3}{2} + \sqrt[3]{3}$.

C. $m = -\frac{3}{2} - \sqrt[3]{3}$.

D. $m = -\frac{3}{2} + \sqrt[3]{3}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } y' = 4x^3 + 2(2m - 3)x. \quad y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \frac{3 - 2m}{2} \end{cases}$$

$$\text{Để hàm số có 3 điểm cực trị thì } \frac{3 - 2m}{2} > 0 \Leftrightarrow m < \frac{3}{2}.$$

$\Rightarrow$ Điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

$$A(0; -m - 1), B\left(\sqrt{\frac{3 - 2m}{2}}; \frac{-4m^2 + 8m - 13}{4}\right), C\left(-\sqrt{\frac{3 - 2m}{2}}; \frac{-4m^2 + 8m - 13}{4}\right)$$

$$\text{Ta thấy } AB = AC \text{ nên để } \triangle ABC \text{ đều thì } AB = BC \Leftrightarrow \left(\frac{12m - 9 - 4m^2}{4}\right)^2 = 4 \cdot \frac{3 - 2m}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(3 - 2m)^4}{16} = 3 \cdot \frac{3 - 2m}{2} \Leftrightarrow 3 - 2m = 2\sqrt[3]{3} \Leftrightarrow m = \frac{3}{2} - \sqrt[3]{3}.$$

Câu 45. Một hình trụ có thể tích $16\pi \text{ cm}^3$. Khi đó bán kính đáy R bằng bao nhiêu để diện tích toàn phần của hình trụ nhỏ nhất?

A. $R = 2 \text{ cm}$.

B. $R = 1,6 \text{ cm}$.

C. $R = \pi \text{ cm}$.

D. $R = \frac{16}{\pi} \text{ cm}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } V = \pi R^2 h = 16\pi \Rightarrow h = \frac{16}{R^2}.$$

Để ít tổn nguyên liệu nhất thì diện tích toàn phần của lọ phải nhỏ nhất. Ta có:

$$S_{\text{tp}} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh = 2\pi R^2 + \frac{32\pi}{R^2} = 2\pi R^2 + \frac{16\pi}{R} + \frac{16\pi}{R} \geq 3\sqrt[3]{2\pi R^2 \cdot \frac{16\pi}{R} \cdot \frac{16\pi}{R}} = 24\pi.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra} \Leftrightarrow 2\pi R^2 = \frac{16\pi}{R} \Leftrightarrow R = 2(\text{cm}).$$

Câu 46. Khi xây dựng nhà, chủ nhà cần làm một bể nước (không nắp) bằng gạch có dạng hình hộp có đáy là hình chữ nhật chiều dài $d(m)$ và chiều rộng $r(m)$ với $d = 2r$. Chiều cao bể nước là $h(m)$ và thể tích bể là $2(m^3)$. Hỏi chiều cao bể nước bằng bao nhiêu thì chi phí xây dựng là thấp nhất?

A. $\sqrt[3]{\frac{4}{9}}(m).$

B. $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}(m).$

C. $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}(m).$

D. $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}(m).$

Hướng dẫn giải

Gọi $x(x > 0)$ là chiều rộng của đáy suy ra thể tích bể nước là $V = 2x^2 \cdot h = 2 \Leftrightarrow h = \frac{1}{x^2}$

Diện tích xung quanh hồ và đáy bể là: $S = 6x \cdot h + 2x^2 = \frac{6}{x} + 2x^2 (x > 0)$

Xét hàm số $f(x) = \frac{6}{x} + 2x^2$ với $x > 0$. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}.$

Vậy chiều cao cần xây là $h = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{4}{9}}(m).$

Câu 47. Một người mỗi đầu tháng đều đặn gửi vào ngân hàng một khoản tiền T theo hình thức lãi kép với lãi suất $0,6\%$ mỗi tháng. Biết đến cuối tháng thứ 15 thì người đó có số tiền là 10 triệu đồng. Hỏi số tiền T gần với số tiền nào nhất trong các số sau?

A. 635000.

B. 535000.

C. 613000.

D. 643000.

Hướng dẫn giải

Bài toán tổng quát “Một người, hàng tháng gửi vào ngân hàng số tiền là a đồng, biết lãi suất hàng tháng là m . Sau n tháng, người tiền mà người ấy có là $T_n = \frac{a}{m} \cdot \left[(1+m)^n - 1 \right] \cdot (1+m)$ ”.

Áp dụng công thức với $\begin{cases} n = 15; m = 0,6\% \\ T_n = 10000000 \end{cases}$

$$\Rightarrow a = \frac{10000000 \cdot 0,6\%}{\left[(1+0,6\%)^{15} - 1 \right] (1+0,6\%)} \approx 635000 \text{ đồng}$$

Câu 48. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng 1. Gọi E, F lần lượt là trung điểm AA' và BB' , đường thẳng CE cắt đường thẳng $C'A'$ tại E' , đường thẳng CF cắt đường thẳng $C'B'$ tại F' . Thể tích khối đa diện $EFB'A'E'F'$ bằng

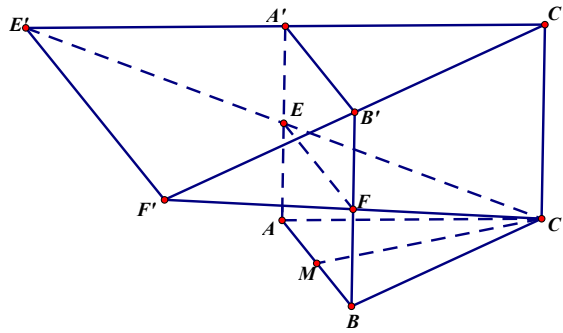
A. $\frac{\sqrt{3}}{6}.$

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}.$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}.$

D. $\frac{\sqrt{3}}{12}.$

Hướng dẫn giải



Thể tích khối lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ là

$$V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Gọi M là trung điểm $AB \Rightarrow CM \perp (ABB'A')$ và $CM = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Do đó, thể tích khối chóp $C.ABFE$

$$\text{là: } V_{C.ABFE} = \frac{1}{3} S_{C.ABFE} \cdot CH = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{12}.$$

Thể tích khối đa diện $A'B'C'EFC$ là:

$$V_{A'B'C'EFC} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{C.ABFE} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Do A' là trung điểm $C'E'$ nên:

$$d(E', (BCC'B')) = 2d(A', (BCC'B')) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

$$S_{CC'F'} = S_{F'B'F} + S_{F'B'C'C} = S_{FBC} + S_{FB'C'C} = S_{BCC'B'} = 1.$$

Thể tích khối chóp $E'.CC'F'$ là

$$V_{E'.CC'F'} = \frac{1}{3} S_{CC'F'} \cdot d(E', (BCC'B')) = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Thể tích khối đa diện $EFA'B'E'F'$ bằng

$$V_{EFA'B'E'F'} = V_{E'.CC'F'} - V_{A'B'C'EFC} = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm $A(0; 0; -3)$, $B(2; 0; -1)$ và mặt phẳng $(P): 3x - 8y + 7z - 1 = 0$. Tìm $M(a; b; c) \in (P)$ thỏa mãn $MA^2 + 2MB^2$ nhỏ nhất, tính $T = a + b + c$.

A. $T = -\frac{35}{183}.$

B. $T = -\frac{131}{61}.$

C. $T = \frac{85}{61}.$

D. $T = \frac{311}{183}.$

Hướng dẫn giải

Gọi I sao cho $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = 0 \Rightarrow I\left(\frac{4}{3}; 0; -\frac{5}{3}\right)$

$$MA^2 = \overrightarrow{MA}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 = MI^2 + IA^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA}$$

$$MB^2 = \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = MI^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB}$$

$$MA^2 + 2MB^2 = 3MI^2 + IA^2 + 2IB^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) = 3MI^2 + IA^2 + 2IB^2$$

Suy ra $(MA^2 + 2MB^2)_{\min}$ khi MI bé nhất hay M là hình chiếu của I trên (P) .

Tìm được tọa độ $M\left(\frac{283}{183}; \frac{-104}{183}; \frac{-214}{183}\right) \Rightarrow T = -\frac{35}{183}$.

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1; 0; 0)$, $B(2; -1; 2)$, $C(-1; 1; -3)$. Viết phương trình mặt cầu có tâm thuộc trục Oy , đi qua A và cắt mặt phẳng (ABC) theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất.

A. $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{5}{4}$.

B. $x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{5}{4}$.

C. $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{9}{4}$.

D. $x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{9}{4}$.

Hướng dẫn giải

Mặt phẳng (ABC) có phương trình: $x - y - z - 1 = 0$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm $I \in Oy$ và cắt (ABC) theo một đường tròn bán kính r nhỏ nhất.

Vì $I \in Oy$ nên $I(0; t; 0)$, gọi H là hình chiếu của I lên (ABC) khi đó là có bán kính đường tròn giao của (ABC) và (S) là $r = AH = \sqrt{IA^2 - IH^2}$.

Ta có: $IA^2 = t^2 + 1$, $IH = d(I, (ABC)) = \frac{|t+1|}{\sqrt{3}} \Rightarrow r = \sqrt{t^2 + 1 - \frac{t^2 + 2t + 1}{3}} = \sqrt{\frac{2t^2 - 2t + 2}{3}}$.

Do đó, r nhỏ nhất khi và chỉ khi $t = \frac{1}{2}$. Khi đó $I\left(0; \frac{1}{2}; 0\right)$, $IA^2 = \frac{5}{4}$.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là: $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{5}{4}$.

----- HẾT -----