

CHUYÊN ĐỀ:

**PHƯƠNG PHÁP LUYỆN TẬP
THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN**

I. Ôn tập kiến thức cơ bản:

ÔN TẬP 1. KIẾN THỨC CƠ BẢN HÌNH HỌC LỚP 9 - 10

1. Hệ thức lượng trong tam giác vuông : cho $\triangle ABC$ vuông ở A ta có :

a) Định lý Pitago : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

b) $BA^2 = BH.BC$; $CA^2 = CH.CB$

c) $AB.AC = BC.AH$

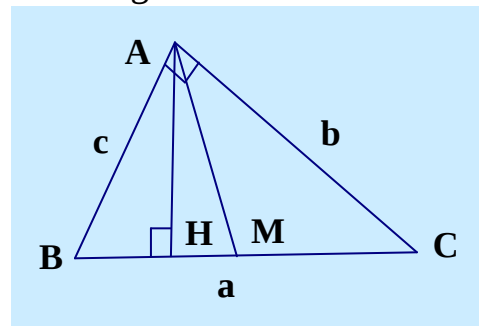
d) $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$

e) $BC = 2AM$

f) $\sin B = \frac{b}{a}$, $\cos B = \frac{c}{a}$, $\tan B = \frac{b}{c}$, $\cot B = \frac{c}{b}$

g) $b = a. \sin B = a. \cos C$, $c = a. \sin C = a. \cos B$, $a = \frac{b}{\sin B} = \frac{b}{\cos C}$,

$b = c. \tan B = c. \cot C$



2. Hệ thức lượng trong tam giác thường:

* Định lý hàm số Côsin: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$

* Định lý hàm số Sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

3. Các công thức tính diện tích.

a/ Công thức tính diện tích tam giác:

$$S = \frac{1}{2} a.h_a = \frac{1}{2} a.b \sin C = \frac{a.b.c}{4R} = p.r = \sqrt{p.(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ với } p = \frac{a+b+c}{2}$$

Đặc biệt : * $\triangle ABC$ vuông ở A : $S = \frac{1}{2} AB.AC$, * $\triangle ABC$ đều cạnh a: $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$

b/ Diện tích hình vuông : $S = \text{cạnh} \times \text{cạnh}$

c/ Diện tích hình chữ nhật : $S = \text{dài} \times \text{rộng}$

d/ Diện tích hình thoi : $S = \frac{1}{2} (\text{chéo dài} \times \text{chéo ngắn})$

d/ Diện tích hình thang : $S = \frac{1}{2} (\text{đáy lớn} + \text{đáy nhỏ}) \times \text{chiều cao}$

e/ Diện tích hình bình hành : $S = \text{đáy} \times \text{chiều cao}$

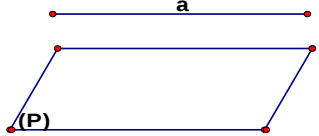
f/ Diện tích hình tròn : $S = \pi.R^2$

ÔN TẬP 2 KIẾN THỨC CƠ BẢN HÌNH HỌC LỚP 11

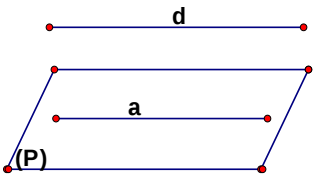
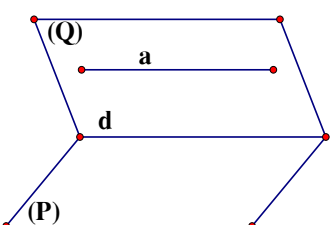
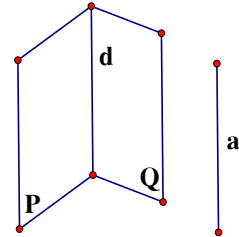
A. QUAN HỆ SONG SONG

§1. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG SONG SONG

I. Định nghĩa:

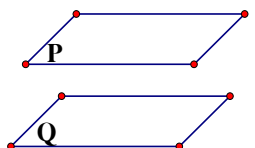
Đường thẳng và mặt phẳng gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm nào chung.	$a // (P) \Leftrightarrow a \cap (P) = \emptyset$	
---	---	---

II. Các định lý:

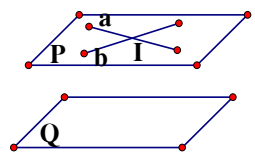
ĐL1: Nếu đường thẳng d không nằm trên $mp(P)$ và song song với đường thẳng a nằm trên $mp(P)$ thì đường thẳng d song song với $mp(P)$	$\begin{cases} d \not\subset (P) \\ d // a \Rightarrow d // (P) \\ a \subset (P) \end{cases}$	
ĐL2: Nếu đường thẳng a song song với $mp(P)$ thì mọi $mp(Q)$ chứa a mà cắt $mp(P)$ thì cắt theo giao tuyến song song với a .	$\begin{cases} a // (P) \\ a \subset (Q) \Rightarrow d // a \\ (P) \cap (Q) = d \end{cases}$	
ĐL3: Nếu hai mặt phẳng cắt nhau cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng song song với đường thẳng đó.	$\begin{cases} (P) \cap (Q) = d \\ (P) // a \Rightarrow d // a \\ (Q) // a \end{cases}$	

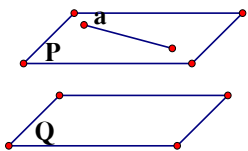
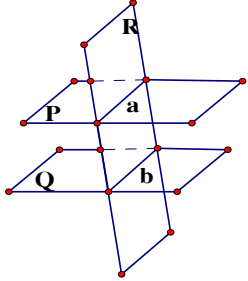
§2. HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

I. Định nghĩa:

Hai mặt phẳng được gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm nào chung.	$(P) // (Q) \Leftrightarrow (P) \cap (Q) = \emptyset$	
---	---	---

II. Các định lý:

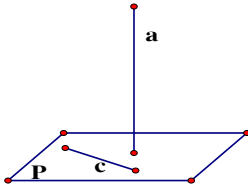
ĐL1: Nếu $mp(P)$ chứa hai đường thẳng a, b cắt nhau và cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) và (Q) song song với nhau.	$\begin{cases} a, b \subset (P) \\ a \cap b = I \Rightarrow (P) // (Q) \\ a // (Q), b // (Q) \end{cases}$	
---	---	---

DL2: Nếu một đường thẳng nằm một trong hai mặt phẳng song song thì song song với mặt phẳng kia.	$\begin{cases} (P) // (Q) \\ a \subset (P) \end{cases} \Rightarrow a // (Q)$	
DL3: Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song thì mọi mặt phẳng (R) đã cắt (P) thì phải cắt (Q) và các giao tuyến của chúng song song.	$\begin{cases} (P) // (Q) \\ (R) \cap (P) = a \\ (R) \cap (Q) = b \end{cases} \Rightarrow a // b$	

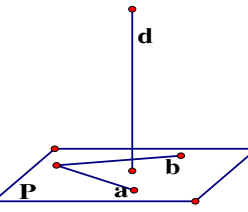
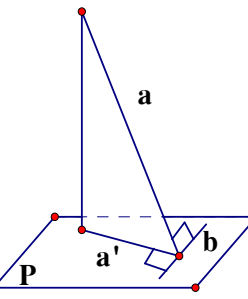
B. QUAN HỆ VUÔNG GÓC

§1. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẪNG

I. Định nghĩa:

Một đường thẳng được gọi là vuông góc với một mặt phẳng nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng đó.	$a \perp mp(P) \Leftrightarrow a \perp c, \forall c \subset (P)$	
---	--	--

II. Các định lý:

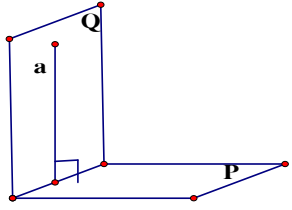
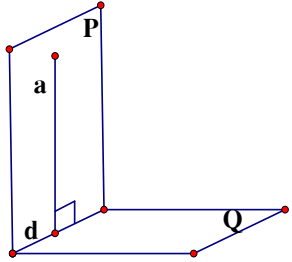
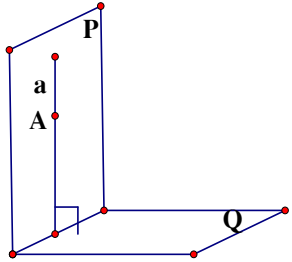
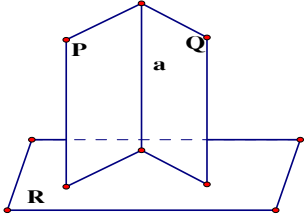
DL1: Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng nằm trong mp(P) thì đường thẳng d vuông góc với mp(P).	$\begin{cases} d \perp a, d \perp b \\ a, b \subset mp(P) \\ a, b \text{ cắt nhau} \end{cases} \Rightarrow d \perp mp(P)$	
DL2: (Ba đường vuông góc) Cho đường thẳng a không vuông góc với mp(P) và đường thẳng b nằm trong (P). Khi đó, điều kiện cần và đủ để b vuông góc với a là b vuông góc với hình chiếu a' của a trên (P).	$\begin{aligned} &a \not\perp mp(P), b \subset mp(P) \\ &b \perp a \Leftrightarrow b \perp a' \end{aligned}$	

§2. HAI MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC

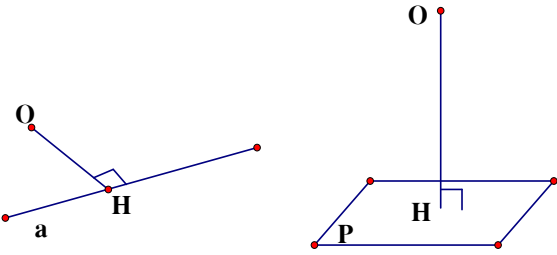
I. Định nghĩa:

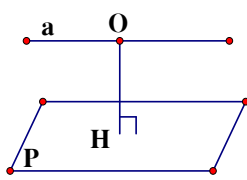
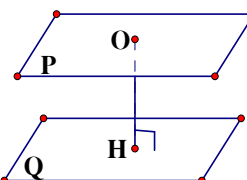
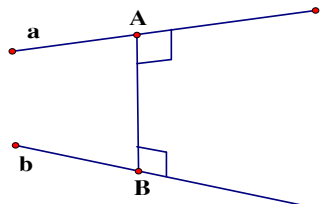
Hai mặt phẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90° .

II. Các định lý:

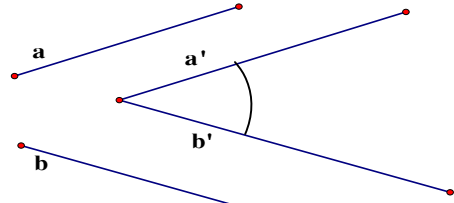
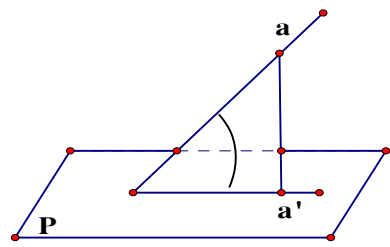
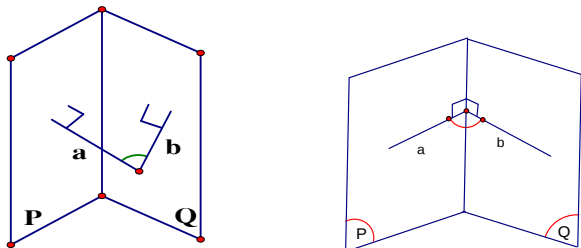
DL1: Nếu một mặt phẳng chứa một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng khác thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau.	$\begin{cases} a \perp mp(P) \\ a \subset mp(Q) \end{cases} \Rightarrow mp(Q) \perp mp(P)$	
DL2: Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng a nào nằm trong (P), vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q) đều vuông góc với mặt phẳng (Q).	$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ (P) \cap (Q) = d \\ a \subset (P), a \perp d \end{cases} \Rightarrow a \perp (Q)$	
DL3: Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và A là một điểm trong (P) thì đường thẳng a đi qua điểm A và vuông góc với (Q) sẽ nằm trong (P).	$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ A \in (P) \\ A \in a \\ a \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow a \subset (P)$	
DL4: Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.	$\begin{cases} (P) \cap (Q) = a \\ (P) \perp (R) \\ (Q) \perp (R) \end{cases} \Rightarrow a \perp (R)$	

§3. KHOẢNG CÁCH

1. Khoảng cách từ 1 điểm tới 1 đường thẳng, đến 1 mặt phẳng: Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng a (hoặc đến mặt phẳng (P)) là khoảng cách giữa hai điểm M và H, trong đó H là hình chiếu của điểm M trên đường thẳng a (hoặc trên mp(P)) $d(O; a) = OH; d(O; (P)) = OH$	
---	--

2. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song: Khoảng cách giữa đường thẳng a và $mp(P)$ song song với a là khoảng cách từ một điểm nào đó của a đến $mp(P)$. $d(a;(P)) = OH$	
3. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song: là khoảng cách từ một điểm bất kỳ trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia. $d((P);(Q)) = OH$	
4. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau: là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó. $d(a;b) = AB$	

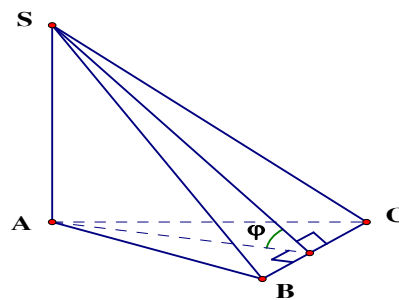
§4. GÓC

1. Góc giữa hai đường thẳng a và b là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt cùng phương với a và b.	
2. Góc giữa đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) là góc giữa a và hình chiếu a' của nó trên $mp(P)$. Đặc biệt: Nếu a vuông góc với mặt phẳng (P) thì ta nói rằng góc giữa đường thẳng a và $mp(P)$ là 90°.	
3. Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó. Hoặc là góc giữa 2 đường thẳng nằm trong 2 mặt phẳng cùng vuông góc với giao tuyến tại 1 điểm	

4. Diện tích hình chiếu: Gọi S là diện tích của đa giác (H) trong $mp(P)$ và S' là diện tích hình chiếu (H') của (H) trên $mp(P')$ thì

$$S' = S \cos \varphi$$

trong đó φ là góc giữa hai mặt phẳng $(P), (P')$.



ÔN TẬP 3 **KIẾN THỨC CƠ BẢN HÌNH HỌC LỚP 12**

A. THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

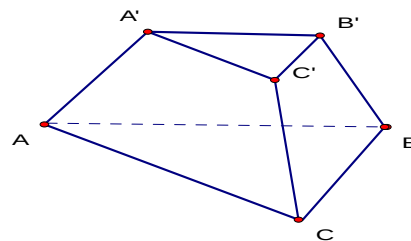
I/ Các công thức thể tích của khối đa diện:

1. THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ: $V = B \cdot h$ với $\begin{cases} B : \text{diện tích đáy} \\ h : \text{chiều cao} \end{cases}$	
a) Thể tích khối hộp chữ nhật: $V = a \cdot b \cdot c$ với a, b, c là ba kích thước b) Thể tích khối lập phương: $V = a^3$ với a là độ dài cạnh	
2. THỂ TÍCH KHỐI CHÓP: $V = \frac{1}{3} B h$ với $\begin{cases} B : \text{diện tích đáy} \\ h : \text{chiều cao} \end{cases}$	
3. TỈ SỐ THỂ TÍCH TỨ DIỆN: Cho khối tứ diện $SABC$ và A', B', C' là các điểm tùy ý lần lượt thuộc SA, SB, SC ta có: $\frac{V_{SABC}}{V_{SA'B'C'}} = \frac{SA}{SA'} \cdot \frac{SB}{SB'} \cdot \frac{SC}{SC'}$	

4. THỂ TÍCH KHỐI CHÓP CỤT:

$$V = \frac{h}{3} (B + B' + \sqrt{BB'})$$

với $\begin{cases} B, B' : \text{diện tích hai đáy} \\ h : \text{chiều cao} \end{cases}$



Chú ý:

- 1/ Đường chéo của hình vuông cạnh a là $d = a\sqrt{2}$,
Đường chéo của hình lập phương cạnh a là $d = a\sqrt{3}$,
Đường chéo của hình hộp chữ nhật có 3 kích thước a, b, c là $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$,
- 2/ Đường cao của tam giác đều cạnh a là $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$
- 3/ Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên đều bằng nhau (hoặc có đáy là đa giác đều, hình chiếu của đỉnh trùng với tâm của đáy).
- 4/ Lăng trụ đều là lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

II/ Bài tập:

Nội dung chính

LOẠI 1:

THỂ TÍCH LĂNG TRỤ

1) Dạng 1: Khối lăng trụ đứng có chiều cao hay cạnh đáy

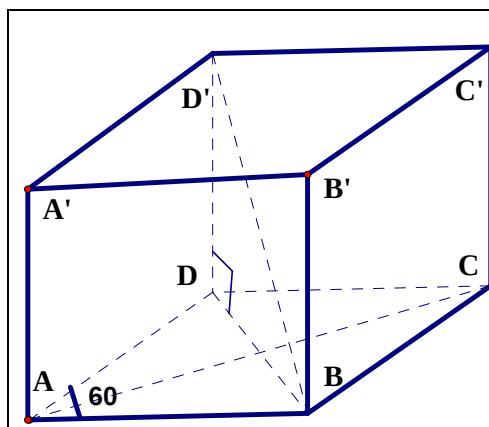
Ví dụ 1: Đáy của lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ là tam giác ABC vuông cân tại A có cạnh $BC = a\sqrt{2}$ và biết $A'B = 3a$. Tính thể tích khối lăng trụ.

$a\sqrt{2}$	<u>Lời giải:</u> Ta có $\triangle ABC$ vuông cân tại A nên $AB = AC = a$ $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng $\Rightarrow AA' \perp AB$ $\triangle AA'B \Rightarrow AA'^2 = A'B^2 - AB^2 = 8a^2$ $\Rightarrow AA' = 2a\sqrt{2}$ Vậy $V = B.h = S_{ABC} .AA' = a^3\sqrt{2}$
-------------	---

Ví dụ 2: Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bên bằng $4a$ và đường chéo $5a$. Tính thể tích khối lăng trụ này.

?

60° Đường chéo lớn của đáy bằng đường chéo nhỏ của lăng trụ.
Tính thể tích hình hộp.



Lời giải:

Ta có tam giác ABD đều nên : $BD = a$

$$\text{và } S_{ABCD} = 2S_{ABD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Theo đề bài } BD' = AC = 2\frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$$

$$\triangle DD'B \Rightarrow DD' = \sqrt{BD'^2 - BD^2} = a\sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } V = S_{ABCD} \cdot DD' = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$$

Bài tập tương tự:

Bài 1: Cho lăng trụ đứng có đáy là tam giác đều biết rằng tất cả các cạnh của lăng trụ bằng a . Tính thể tích và tổng diện tích các mặt bên của lăng trụ.

$$\text{Đs: } V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}; S = 3a^2$$

Bài 2: Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là tứ giác đều cạnh a biết rằng $BD' = a\sqrt{6}$. Tính thể tích của lăng trụ.

$$\text{Đs: } V = 2a^3$$

Bài 3: Cho lăng trụ đứng tứ giác có đáy là hình thoi mà các đường chéo là 6cm và 8cm biết rằng chu vi đáy bằng 2 lần chiều cao lăng trụ. Tính thể tích và tổng diện tích các mặt của lăng trụ.

$$\text{Đs: } V = 240\text{cm}^3 \text{ và } S = 248\text{cm}^2$$

Bài 4: Cho lăng trụ đứng tam giác có độ dài các cạnh đáy là 37cm ; 13cm ; 30cm và biết tổng diện tích các mặt bên là 480 cm^2 . Tính thể tích lăng trụ.

$$\text{Đs: } V = 1080\text{ cm}^3$$

Bài 5: Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , biết rằng chiều cao lăng trụ là $3a$ và mặt bên $AA'B'B$ có đường chéo là $5a$. Tính thể tích lăng trụ.

$$\text{Đs: } V = 24a^3$$

Bài 6: Cho lăng trụ đứng tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng nhau và biết tổng diện tích các mặt của lăng trụ bằng 96 cm^2 . Tính thể tích lăng trụ.

$$\text{Đs: } V = 64\text{ cm}^3$$

Bài 7: Cho lăng trụ đứng tam giác có các cạnh đáy là 19, 20, 37 và chiều cao của khối lăng trụ bằng trung bình cộng các cạnh đáy. Tính thể tích của lăng trụ.

$$\text{Đs: } V = 2888$$

Bài 8: Cho khối lập phương có tổng diện tích các mặt bằng 24 m^2 . Tính thể tích khối lập phương

$$\text{Đs: } V = 8\text{ m}^3$$

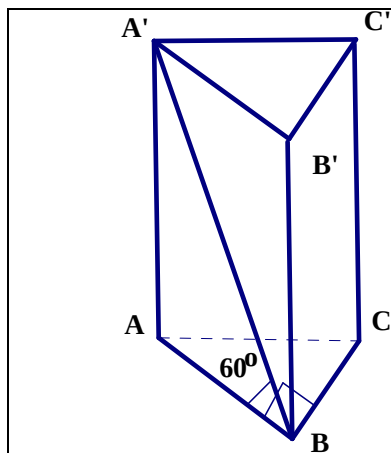
Bài 9: Cho hình hộp chữ nhật có 3 kích thước tỉ lệ thuận với 3, 4, 5 biết rằng độ dài một đường chéo của hình hộp là 1 m. Tính thể tích khối hộp chữ nhật.

$$\text{Đs: } V = 0,4\text{ m}^3$$

Bài 10: Cho hình hộp chữ nhật biết rằng các đường chéo của các mặt lần lượt là $\sqrt{5}; \sqrt{10}; \sqrt{13}$. Tính thể tích khối hộp này. Đs: $V = 6$

2) **Dạng 2:** **Lăng trụ đứng có góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.**

Ví dụ 1: Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với $BA = BC = a$, biết $A'B$ hợp với đáy ABC một góc 60° . Tính thể tích lăng trụ.



Lời giải:

Ta có $A'A \perp (ABC) \Rightarrow A'A \perp AB$ & AB là hình chiếu của $A'B$ trên đáy ABC .

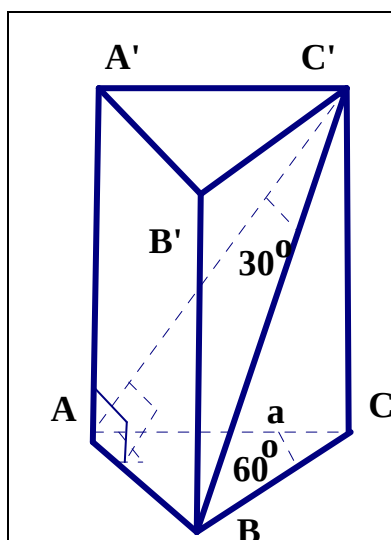
Vậy $\text{góc}[A'B, (ABC)] = \widehat{ABA'} = 60^\circ$

$$\triangle ABA' \Rightarrow AA' = AB \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC = \frac{a^2}{2}$$

$$\text{Vậy } V = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{a^3 \sqrt{3}}{2}$$

Ví dụ 2: Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AC = a$, $\widehat{ACB} = 60^\circ$ biết BC' hợp với $(AA'C'C)$ một góc 30° . Tính AC' và thể tích lăng trụ.



Lời giải: $\triangle ABC \Rightarrow AB = AC \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Ta có:

$AB \perp AC; AB \perp AA' \Rightarrow AB \perp (AA'C'C)$ nên AC' là hình chiếu của BC' trên $(AA'C'C)$.

Vậy $\text{góc}[BC', (AA'C'C)] = \widehat{BC'A} = 30^\circ$

$$\triangle AC'B \Rightarrow AC' = \frac{AB}{\tan 30^\circ} = 3a$$

$$V = B \cdot h = S_{ABC} \cdot AA'$$

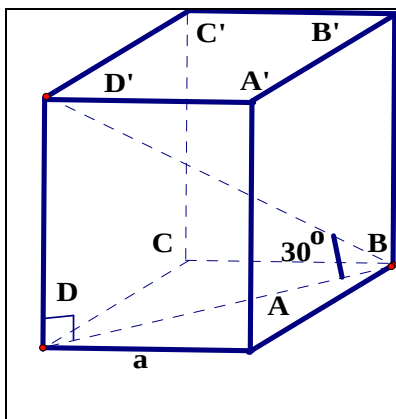
$$\triangle AA'C' \Rightarrow AA' = \sqrt{AC'^2 - A'C'^2} = 2a\sqrt{2}$$

$$\triangle ABC \text{ là nửa tam giác đều nên } S_{ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Vậy } V = a^3 \sqrt{6}$$

Ví dụ 3: Cho lăng trụ đứng $ABCD A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a

và đường chéo BD' của lăng trụ hợp với đáy $ABCD$ một góc 30° .
 Tính thể tích và tổng diện tích của các mặt bên của lăng trụ.



Giải:

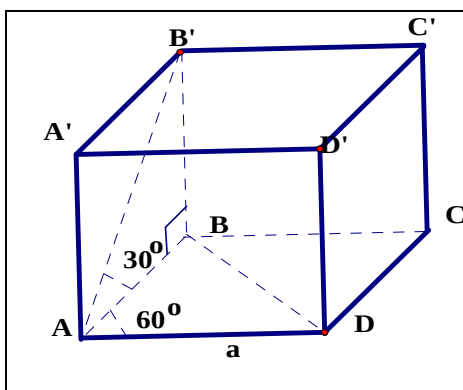
Ta có $ABCD A'B'C'D'$ là lăng trụ đứng nên ta có: $DD' \perp (ABCD) \Rightarrow DD' \perp BD$ và BD là hình chiếu của BD' trên $ABCD$.

Vậy góc $[BD'; (ABCD)] = \widehat{DBD'} = 30^\circ$

$$\triangle BDD' \Rightarrow DD' = BD \cdot \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{Vậy } V = S_{ABCD} \cdot DD' = \frac{a^3\sqrt{6}}{3} \quad S = 4S_{ADD'A'} = \frac{4a^2\sqrt{6}}{3}$$

Ví dụ 4: Cho hình hộp đứng $ABCD A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $\widehat{BAD} = 60^\circ$ biết AB' hợp với đáy $(ABCD)$ một góc 30° .
 Tính thể tích của hình hộp.



Giải

$$\triangle ABD \text{ đều cạnh } a \Rightarrow S_{ABD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = 2S_{ABD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$\triangle ABB' \text{ vuông tại } B \Rightarrow BB' = AB \tan 30^\circ = a\sqrt{3}$$

$$\text{Vậy } V = B \cdot h = S_{ABCD} \cdot BB' = \frac{3a^3}{2}$$

Bài tập tương tự:

Bài 1: Cho lăng trụ đứng $ABC A'B'C'$ có đáy ABC vuông cân tại B biết $A'C = a$ và $A'C$ hợp với mặt bên $(AA'B'B)$ một góc 30° . Tính thể tích lăng trụ

$$\text{ĐS: } V = \frac{a^3\sqrt{2}}{16}$$

Bài 2: Cho lăng trụ đứng $ABC A'B'C'$ có đáy ABC vuông tại B biết $BB' = AB = a$ và $B'C$ hợp với đáy (ABC) một góc 30° . Tính thể tích lăng trụ.

$$\text{ĐS: } V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$$

Bài 3: Cho lăng trụ đứng $ABC A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a biết AB' hợp với mặt bên $(BCC'B')$ một góc 30° .

Tính độ dài AB' và thể tích lăng trụ.

$$\text{ĐS: } AB' = a\sqrt{3}; V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$$

Bài 4: Cho lăng trụ đứng $ABC A'B'C'$ có đáy ABC vuông tại A biết

$AC = a$ và $\widehat{ACB} = 60^\circ$ biết BC' hợp với mặt bên $(AA'C'C)$ một góc 30° .

Tính thể tích lăng trụ và diện tích tam giác ABC' . ĐS: $V = a^3\sqrt{6}$, $S = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

Bài 5: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC A'B'C'$ có khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng a và AA' hợp với mặt phẳng $(A'BC)$ một góc 30° .

Tính thể tích lăng trụ ĐS: $V = \frac{32a^3}{9}$

Bài 6: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD A'B'C'D'$ có đường chéo $A'C = a$ và biết rằng $A'C$ hợp với $(ABCD)$ một góc 30° và hợp với $(ABB'A')$ một góc 45° .

Tính thể tích của khối hộp chữ nhật. ĐS: $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{8}$

Bài 7: Cho hình hộp đứng $ABCD A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Gọi O là tâm của $ABCD$ và $OA' = a$. Tính thể tích của khối hộp khi:

- 1) $ABCD A'B'C'D'$ là khối lập phương.
- 2) OA' hợp với đáy $ABCD$ một góc 60° .
- 3) $A'B$ hợp với $(AA'CC')$ một góc 30° .

$$\text{Đs: 1) } V = \frac{2a^3\sqrt{6}}{9}; 2) V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}; 3) V = \frac{4a^3\sqrt{3}}{9}$$

Bài 8: Cho lăng trụ đứng $ABCD A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $BD' = a$. Tính thể tích lăng trụ trong các trường hợp sau đây:

- 1) BD' hợp với đáy $ABCD$ một góc 60° .

$$2) BD' \text{ hợp với mặt bên } (AA'D'D) \text{ một góc } 30^\circ. \text{ Đs: 1) } V = \frac{a^3\sqrt{3}}{16} \quad 2) V = \frac{a^3\sqrt{2}}{8}$$

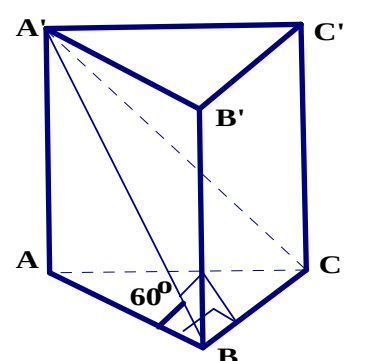
Bài 9: Chiều cao của lăng trụ tứ giác đều bằng a và góc của 2 đường chéo phát xuất từ một đỉnh của 2 mặt bên kề nhau là 60° . Tính thể tích lăng trụ và tổng diện tích các mặt của lăng trụ. Đs: $V = a^3$ và $S = 6a^2$

Bài 10 : Cho hình hộp chữ nhật $ABCD A'B'C'D'$ có $AB = a$; $AD = b$; $AA' = c$ và $BD' = AC' = CA' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

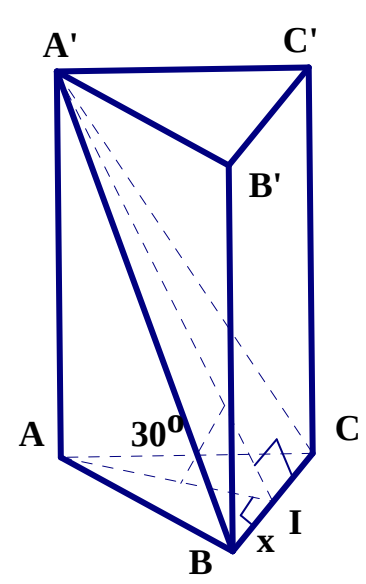
- 1) Chứng minh $ABCD A'B'C'D'$ là hộp chữ nhật.
- 2) Gọi x, y, z là góc hợp bởi một đường chéo và 3 mặt cùng đi qua một đỉnh thuộc đường chéo. Chứng minh rằng $\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z = 1$.

3) Dạng 3: Lăng trụ đứng có góc giữa 2 mặt phẳng

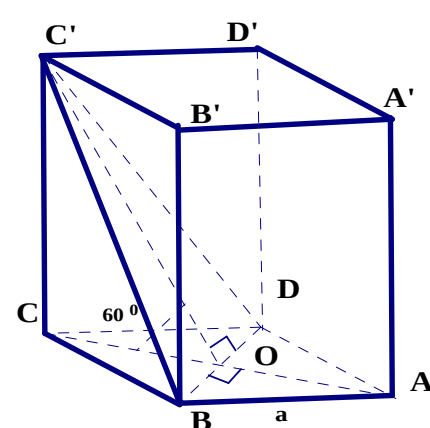
Ví dụ 1: Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với $BA = BC = a$, biết $(A'BC)$ hợp với đáy (ABC) một góc 60° . Tính thể tích lăng trụ.

	<u>Lời giải:</u> Ta có $A'A \perp (ABC)$ & $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp A'B$ Vậy góc $[(A'BC), (ABC)] = \widehat{ABA'} = 60^\circ$ $\triangle ABA' \Rightarrow AA' = AB \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$ $S_{ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC = \frac{a^2}{2}$ Vậy $V = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$
---	---

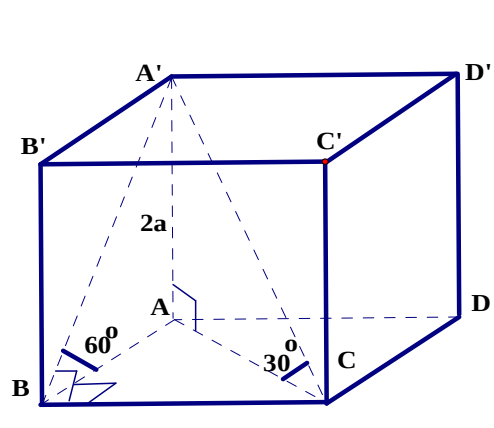
Ví dụ 2: Đáy của lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ là tam giác đều. Mặt $(A'BC)$ tạo với đáy một góc 30° và diện tích tam giác $A'BC$ bằng 8. Tính thể tích khối lăng trụ.

	<u>Giải:</u> $\triangle ABC$ đều $\Rightarrow AI \perp BC$ mà $AA' \perp (ABC)$ nên $A'I \perp BC$ (đl 3 $\perp$). Vậy góc $[(A'BC), (ABC)] = \widehat{A'IA} = 30^\circ$ Giả sử $BI = x \Rightarrow AI = \frac{2x\sqrt{3}}{2} = x\sqrt{3}$. Ta có $\triangle A'AI : A'I = AI : \cos 30^\circ = \frac{2AI}{\sqrt{3}} = \frac{2x\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2x$ $A'A = AI \cdot \tan 30^\circ = x\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = x$ Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = CI \cdot AI \cdot A'A = x^3 \sqrt{3}$ Mà $S_{A'BC} = BI \cdot A'I = x \cdot 2x = 8 \Rightarrow x = 2$ Do đó $V_{ABC.A'B'C'} = 8\sqrt{3}$
--	--

Ví dụ 3: Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy a và mặt phẳng (BDC') hợp với đáy $(ABCD)$ một góc 60° . Tính thể tích khối hộp chữ nhật.

	Gọi O là tâm của ABCD . Ta có ABCD là hình vuông nên $OC \perp BD$ $CC' \perp (ABCD)$ nên $OC' \perp BD$ (đl 3 ⊥). Vậy $\text{góc}[(BDC'); (ABCD)] = \widehat{COC'} = 60^\circ$ Ta có $V = B.h = S_{ABCD} \cdot CC'$ ABCD là hình vuông nên $S_{ABCD} = a^2$ $\triangle OCC'$ vuông nên $CC' = OC \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ Vậy $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$
---	--

Ví dụ 4: Cho hình hộp chữ nhật ABCD A'B'C'D' có $AA' = 2a$; mặt phẳng (A'BC) hợp với đáy (ABCD) một góc 60° và A'C hợp với đáy (ABCD) một góc 30° .Tính thể tích khối hộp chữ nhật.

	Ta có $AA' \perp (ABCD) \Rightarrow AC$ là hình chiếu của A'C trên (ABCD) . Vậy $\text{góc}[A'C, (ABCD)] = \widehat{A'CA} = 30^\circ$ $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp A'B$ (đl 3 ⊥) . Vậy $\text{góc}[(A'BC), (ABCD)] = \widehat{A'BA} = 60^\circ$ $\triangle A'AC \Rightarrow AC = AA' \cdot \cot 30^\circ = 2a\sqrt{3}$ $\triangle A'AB \Rightarrow AB = AA' \cdot \cot 60^\circ = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$ $\triangle ABC \Rightarrow BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \frac{4a\sqrt{6}}{3}$ Vậy $V = AB \cdot BC \cdot AA' = \frac{16a^3\sqrt{2}}{3}$
--	---

Bài tập tương tự:

Bài 1: Cho hộp chữ nhật ABCD A'B'C'D' có $AA' = a$ biết đường chéo A'C hợp với đáy ABCD một góc 30° và mặt (A'BC) hợp với đáy ABCD một góc 60° .

Tính thể tích hộp chữ nhật.

$$\text{Đs: } V = \frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$$

Bài 2: Cho lăng trụ đứng ABCD A'B'C'D' có đáy ABCD là hình vuông và cạnh bên bằng a biết rằng mặt (ABC'D') hợp với đáy một góc 30° .Tính thể tích khối lăng trụ.

$$\text{Đs: } V = 3a^3$$

Bài 3: Cho lăng trụ đứng ABCA'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = 2a$ biết rằng (A'BC) hợp với đáy ABC một góc 45° . Tính thể tích lăng trụ.

$$\text{Đs: } V = a^3\sqrt{2}$$

Bài 4: Cho lăng trụ đứng ABCA'B'C' có đáy ABC là tam giác cân tại A với $AB = AC = a$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$ biết rằng (A'BC) hợp với đáy ABC một góc 45° .

Tính thể tích lăng trụ.

$$\text{Đs: } V = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$$

Bài 5: Cho lăng trụ đứng $ABCA'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $BB' = AB = h$ biết rằng $(B'AC)$ hợp với đáy ABC một góc 60° . Tính thể tích lăng trụ.

$$\text{Đs: } V = \frac{h^3\sqrt{2}}{4}$$

Bài 6: Cho lăng trụ đứng $ABC A'B'C'$ có đáy ABC đều biết cạnh bên $AA' = a$. Tính thể tích lăng trụ trong các trường hợp sau đây:

- 1) Mặt phẳng $(A'BC)$ hợp với đáy ABC một góc 60° .
- 2) $A'B$ hợp với đáy ABC một góc 45° .
- 3) Chiều cao kẻ từ A' của tam giác $A'BC$ bằng độ dài cạnh đáy của lăng trụ.

$$\text{Đs: 1) } V = a^3\sqrt{3} ; 2) V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4} ; V = a^3\sqrt{3}$$

Bài 7: Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD A'B'C'D'$ có cạnh bên $AA' = 2a$. Tính thể tích lăng trụ trong các trường hợp sau đây:

- 1) Mặt (ACD') hợp với đáy $ABCD$ một góc 45° .
- 2) BD' hợp với đáy $ABCD$ một góc 60° .
- 3) Khoảng cách từ D đến mặt (ACD') bằng a .

$$\text{Đs: 1) } V = 16a^3 . 2) V = 12a^3 . 3) V = \frac{16a^3}{3}$$

Bài 8: Cho lăng trụ đứng $ABCD A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Tính thể tích lăng trụ trong các trường hợp sau đây:

- 1) Mặt phẳng (BDC') hợp với đáy $ABCD$ một góc 60° .
- 2) Tam giác BDC' là tam giác đều.
- 3) AC' hợp với đáy $ABCD$ một góc 45°

$$\text{Đs: 1) } V = \frac{a^3\sqrt{6}}{2} ; 2) V = a^3 ; V = a^3\sqrt{2}$$

Bài 9: Cho lăng trụ đứng $ABCD A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và góc nhọn $A = 60^\circ$. Tính thể tích lăng trụ trong các trường hợp sau đây:

- 1) Mặt phẳng (BDC') hợp với đáy $ABCD$ một góc 60° .
- 2) Khoảng cách từ C đến (BDC') bằng $\frac{a}{2}$
- 3) AC' hợp với đáy $ABCD$ một góc 45°

$$\text{Đs: 1) } V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{4} ; 2) V = \frac{3a^3\sqrt{2}}{8} ; V = \frac{3a^3}{2}$$

Bài 10: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD A'B'C'D'$ có $BD' = 5a$, $BD = 3a$. Tính thể tích khối hộp trong các trường hợp sau đây:

- 1) $AB = a$
- 2) BD' hợp với $AA'D'D$ một góc 30°
- 3) (ABD') hợp với đáy $ABCD$ một góc 30°

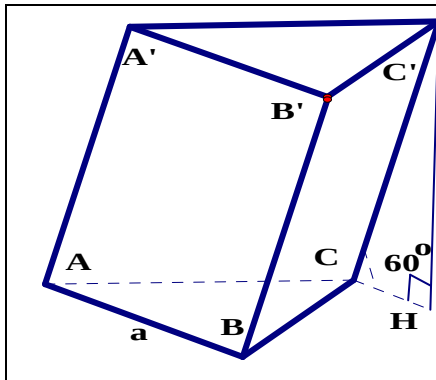
$$\text{Đs: 1) } V = 8a^3\sqrt{2} ; 2) V = 5a^3\sqrt{11} ; V = 16a^3$$

4) **Dạng 4:**

Khối lăng trụ xiên

Ví dụ 1: Cho lăng trụ xiên tam giác $ABC A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác

đều cạnh a , biết cạnh bên là $a\sqrt{3}$ và hợp với đáy ABC một góc 60° .
 Tính thể tích lăng trụ.



Lời giải:

Ta có $C'H \perp (ABC) \Rightarrow CH$ là hình chiếu của CC' trên (ABC)

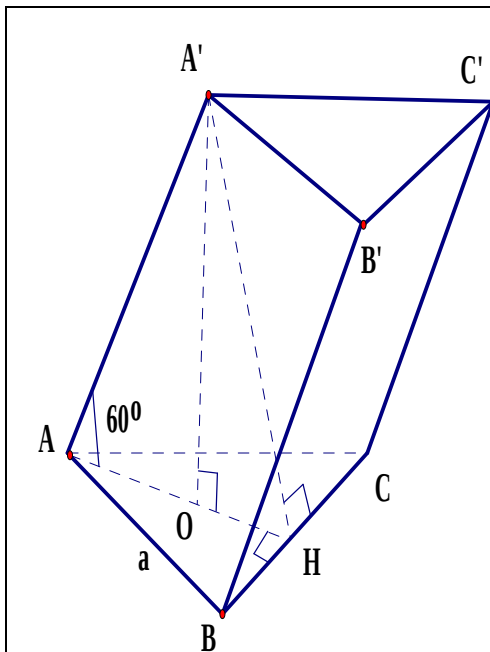
Vậy $\text{góc}[CC', (ABC)] = \widehat{C'CH} = 60^\circ$

$$\triangle CHC' \Rightarrow C'H = CC' \cdot \sin 60^\circ = \frac{3a}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}. \text{ Vậy } V = S_{ABC} \cdot C'H = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$$

Ví dụ 2: Cho lăng trụ xiên tam giác $ABC A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu của A' xuống (ABC) là tâm O đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết AA' hợp với đáy ABC một góc 60° .

- 1) Chứng minh rằng $BB'C'C$ là hình chữ nhật.
- 2) Tính thể tích lăng trụ.



Lời giải:

1) Ta có $A'O \perp (ABC) \Rightarrow OA$ là hình chiếu của AA' trên (ABC)

Vậy $\text{góc}[AA', (ABC)] = \widehat{OAA'} = 60^\circ$

Ta có $BB'CC'$ là hình bình hành (vì mặt bên của lăng trụ)

$AO \perp BC$ tại trung điểm H của BC nên $BC \perp A'H$ (đl 3 $\perp$)

$\Rightarrow BC \perp (AA'H) \Rightarrow BC \perp AA'$ mà $AA' \parallel BB'$ nên $BC \perp BB'$. Vậy $BB'CC'$ là hình chữ nhật.

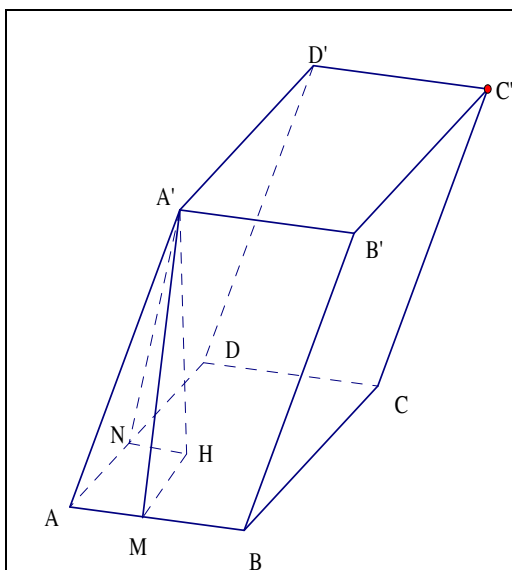
$$2) \triangle ABC \text{ đều nên } AO = \frac{2}{3} AH = \frac{2}{3} \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\triangle AOA' \Rightarrow A'O = AO \tan 60^\circ = a$$

$$\text{Vậy } V = S_{ABC} \cdot A'O = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$$

Ví dụ 3: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình chữ nhật với

$AB = \sqrt{3}$ $AD = \sqrt{7}$. Hai mặt bên $(ABB'A')$ và $(ADD'A')$ lần lượt tạo với đáy những góc 45° và 60° . Tính thể tích khối hộp nếu biết cạnh bên bằng 1.



Lời giải:

Kẻ $A'H \perp (ABCD)$, $HM \perp AB$, $HN \perp AD$
 $\Rightarrow A'M \perp AB$, $A'N \perp AD$ (đl 3 $\perp$)

$\Rightarrow \widehat{A'MH} = 45^\circ$, $\widehat{A'NH} = 60^\circ$

Đặt $A'H = x$. Khi đó

$$A'N = x : \sin 60^\circ = \frac{2x}{\sqrt{3}}$$

$$AN = \sqrt{AA'^2 - A'N^2} = \sqrt{\frac{3 - 4x^2}{3}} = HM$$

$$\text{Mà } HM = x \cdot \cot 45^\circ = x$$

$$\text{Nghĩa là } x = \sqrt{\frac{3 - 4x^2}{3}} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{3}{7}}$$

$$\text{Vậy } V_{ABCD.A'B'C'D'} = AB \cdot AD \cdot x$$

$$= \sqrt{3} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{\frac{3}{7}} = 3$$

Bài tập tương tự:

Bài 1: Cho lăng trụ $ABC A'B'C'$ có các cạnh đáy là 13;14;15 và biết cạnh bên bằng 2a hợp với đáy $ABCD$ một góc 45° . Tính thể tích lăng trụ. Đs: $V = a^3\sqrt{2}$

Bài 2: Cho lăng trụ $ABCD A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và biết cạnh bên bằng 8 hợp với đáy ABC một góc 30° . Tính thể tích lăng trụ. Đs: $V = 336$

Bài 3: Cho hình hộp $ABCD A'B'C'D'$ có $AB = a$; $AD = b$; $AA' = c$ và $\widehat{BAD} = 30^\circ$ và biết cạnh bên AA' hợp với đáy ABC một góc 60° . Tính thể tích lăng trụ.

Bài 4 : Cho lăng trụ tam giác $ABC A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và điểm A' cách đều A, B, C biết $AA' = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$. Tính thể tích lăng trụ. Đs: $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

Bài 5: Cho lăng trụ $ABC A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, đỉnh A' có hình chiếu trên (ABC) nằm trên đường cao AH của tam giác ABC biết mặt bên $BB'C'C$ hợp với đáy ABC một góc 60° .

1) Chứng minh rằng $BB'C'C$ là hình chữ nhật.

2) Tính thể tích lăng trụ $ABC A'B'C'$. Đs: $V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$

Bài 6: Cho lăng trụ $ABC A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều với tâm O . Cạnh BC' $CC' = a$ hợp với đáy ABC 1 góc 60° và C' có hình chiếu trên ABC trùng với O .

1) Chứng minh rằng $AA'B'B$ là hình chữ nhật. Tính diện tích $AA'B'B$.

2) Tính thể tích lăng trụ $ABCA'B'C'$. Đs: 1) $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ 2) $V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$

Bài 7: Cho lăng trụ ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh a biết chân đường vuông góc hạ từ A' trên ABC trùng với trung điểm của BC và AA' = a.

1) Tìm góc hợp bởi cạnh bên với đáy lăng trụ.

2) Tính thể tích lăng trụ.

Đs: 1) 30° 2) $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$

Bài 8: Cho lăng trụ xiên ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều với tâm O. Hình chiếu của C' trên (ABC) là O. Tính thể tích của lăng trụ biết rằng khoảng cách từ O đến CC' là a và 2 mặt bên AA'C'C và BB'C'C hợp với nhau một góc 90°

Đs: $V = \frac{27a^3}{4\sqrt{2}}$

Bài 9: Cho hình hộp ABCD A'B'C'D' có 6 mặt là hình thoi cạnh a, hình chiếu vuông góc của A' trên (ABCD) nằm trong hình thoi, các cạnh xuất phát từ A của hộp đôi một tạo với nhau một góc 60° .

1) Chứng minh rằng H nằm trên đường chéo AC của ABCD.

2) Tính diện tích các mặt chéo ACC'A' và BDD'B'.

3) Tính thể tích của hộp. Đs: 2) $S_{ACC'A'} = a^2\sqrt{2}$; $S_{BDD'B'} = a^2$. 3) $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$

Bài 10: Cho hình hộp ABCD A'B'C'D' có đáy ABCD là hình thoi cạnh a và góc A = 60° chân đường vuông góc hạ từ B' xuống ABCD trùng với giao điểm 2 đường chéo đáy biết BB' = a.

1) Tìm góc hợp bởi cạnh bên và đáy.

2) Tính thể tích và tổng diện tích các mặt bên của hình hộp.

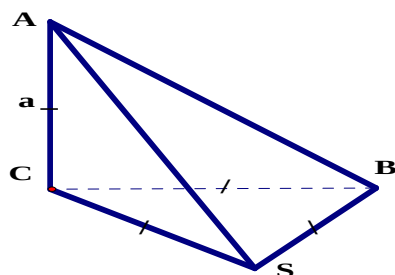
Đs: 1) 60° 2) $V = \frac{3a^3}{4}$ & $S = a^2\sqrt{15}$

LOẠI 2:

THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

1) **Dạng 1:** **Khối chóp có cạnh bên vuông góc với đáy**

Ví dụ 1: Cho hình chóp SABC có SB = SC = BC = CA = a. Hai mặt (ABC) và (ASC) cùng vuông góc với (SBC). Tính thể tích hình chóp.



Lời giải:

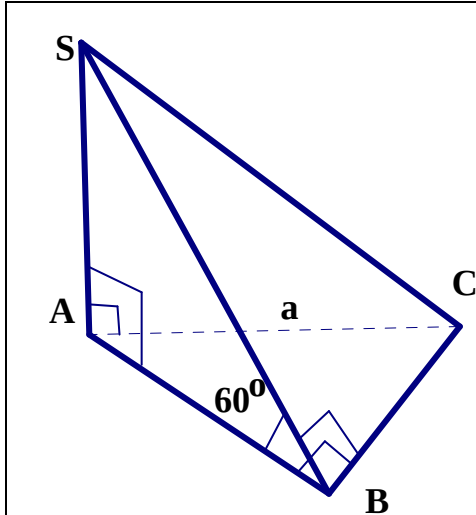
Ta có

$$\begin{cases} (ABC) \perp (SBC) \\ (ASC) \perp (SBC) \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBC)$$

$$\text{Do đó } V = \frac{1}{3} S_{SBC} \cdot AC = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$$

Ví dụ 2: Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với $AC = a$ biết SA vuông góc với đáy ABC và SB hợp với đáy một góc 60° .

- 1) Chứng minh các mặt bên là tam giác vuông.
- 2) Tính thể tích hình chóp.



Lời giải:

- 1) $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AB \text{ \& } SA \perp AC$
mà $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp SB$ (đl 3 $\perp$).
Vậy các mặt bên chóp là tam giác vuông.
- 2) Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow AB$ là hình chiếu của SB trên (ABC).

Vậy góc $[SB, (ABC)] = \widehat{SAB} = 60^\circ$.

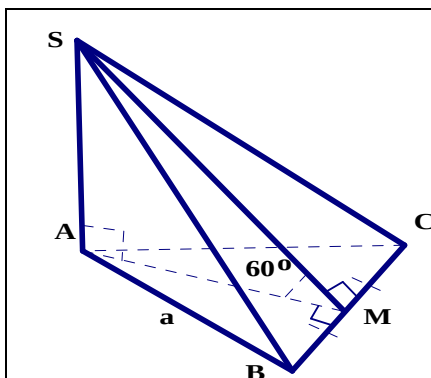
ΔABC vuông cân nên $BA = BC = \frac{a}{\sqrt{2}}$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC = \frac{a^2}{4}$$

$$\Delta SAB \Rightarrow SA = AB \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \frac{a^2}{4} \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{24}$$

Ví dụ 3: Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a biết SA vuông góc với đáy ABC và (SBC) hợp với đáy (ABC) một góc 60° .
Tính thể tích hình chóp.



Lời giải: M là trung điểm của BC, vì tam giác ABC đều nên $AM \perp BC \Rightarrow SA \perp BC$ (đl 3 $\perp$).

Vậy góc $[(SBC); (ABC)] = \widehat{SMA} = 60^\circ$.

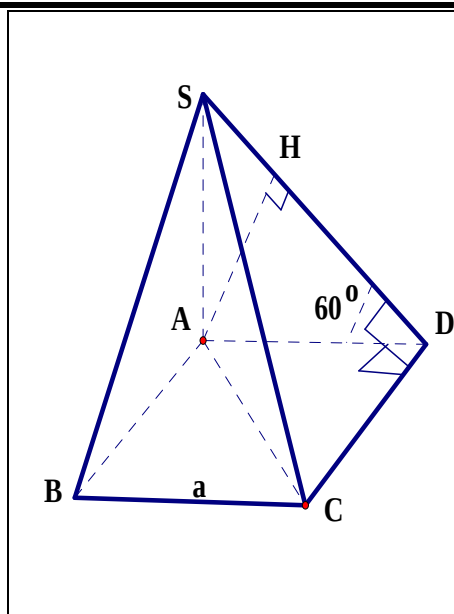
$$\text{Ta có } V = \frac{1}{3} B \cdot h = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SA$$

$$\Delta SAM \Rightarrow SA = AM \tan 60^\circ = \frac{3a}{2}$$

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3} B \cdot h = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SA = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$$

Ví dụ 4: Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông có cạnh a và SA vuông góc với đáy ABCD và mặt bên (SCD) hợp với đáy một góc 60° .

- 1) Tính thể tích hình chóp SABCD.
- 2) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD).



Lời giải: 1) Ta có $SA \perp (ABC)$ và $CD \perp AD \Rightarrow CD \perp SD$ (đl 3 $\perp$). (1)
 Vậy góc $[(SCD), (ABCD)] = \widehat{SDA} = 60^\circ$.
 $\triangle SAD$ vuông nên $SA = AD \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$
 Vậy $V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3} a^2 a\sqrt{3} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{3}$
 2) Ta dựng $AH \perp SD$, vì $CD \perp (SAD)$ (do (1)) nên $CD \perp AH \Rightarrow AH \perp (SCD)$
 Vậy AH là khoảng cách từ A đến (SCD) .
 $\triangle SAD \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2}$
 Vậy $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Bài tập tương tự:

Bài 1: Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với $BA=BC=a$ biết SA vuông góc với đáy ABC và SB hợp với (SAB) một góc 30° .

Tính thể tích hình chóp. Đs: $V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{6}$

Bài 2: Cho hình chóp $SABC$ có SA vuông góc với đáy (ABC) và $SA = h$, biết rằng tam giác ABC đều và mặt (SBC) hợp với đáy ABC một góc 30° . Tính thể tích khối chóp $SABC$. Đs: $V = \frac{h^3 \sqrt{3}}{3}$

Bài 3: Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC vuông tại A và SB vuông góc với đáy ABC biết $SB = a$, SC hợp với (SAB) một góc 30° và (SAC) hợp với (ABC) một góc 60° . Chứng minh rằng $SC^2 = SB^2 + AB^2 + AC^2$ Tính thể tích hình chóp.

Đs: $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{27}$

Bài 4: Cho tứ diện $ABCD$ có $AD \perp (ABC)$ biết $AC = AD = 4$ cm, $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm.

1) Tính thể tích $ABCD$. Đs: $V = 8$ cm³

2) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) . Đs: $d = \frac{12}{\sqrt{34}}$

Bài 5: Cho khối chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A với $BC = 2a$, góc $\widehat{BAC} = 120^\circ$, biết $SA \perp (ABC)$ và mặt (SBC) hợp với đáy một góc 45° .

Tính thể tích khối chóp $SABC$. Đs: $V = \frac{a^3}{9}$

Bài 6: Cho khối chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông biết $SA \perp (ABCD)$, $SC = a$ và SC hợp với đáy một góc 60° Tính thể tích khối chóp.

Đs: $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{48}$

Bài 7: Cho khối chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật biết rằng

$SA \perp (ABCD)$, SC hợp với đáy một góc 45° và $AB = 3a$, $BC = 4a$

Tính thể tích khối chóp.

Đs: $V = 20a^3$

Bài 8: Cho khối chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và góc nhọn A bằng 60° và $SA \perp (ABCD)$, biết rằng khoảng cách từ A đến cạnh $SC = a$.

Tính thể tích khối chóp $SABCD$.

Đs: $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$

Bài 9: Cho khối chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B biết $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$ và (SCD) hợp với đáy một góc 60°

Tính thể tích khối chóp $SABCD$.

Đs: $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$

Bài 10 : Cho khối chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp trong nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$ biết mặt (SBC) hợp với đáy $ABCD$ một góc 45° . Tính thể tích khối chóp $SABCD$.

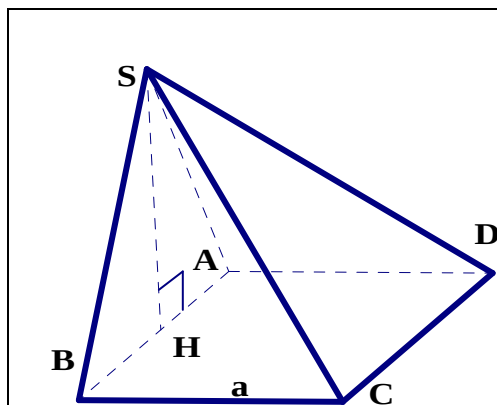
Đs: $V = \frac{3R^3}{4}$

2) Dạng 2: **Khối chóp có một mặt bên vuông góc với đáy**

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có cạnh a

Mặt bên SAB là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $ABCD$,

- 1) Chứng minh rằng chân đường cao khối chóp trùng với trung điểm cạnh AB .
- 2) Tính thể tích khối chóp $SABCD$.



Lời giải:

1) Gọi H là trung điểm của AB .

$\triangle SAB$ đều $\Rightarrow SH \perp AB$

mà $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

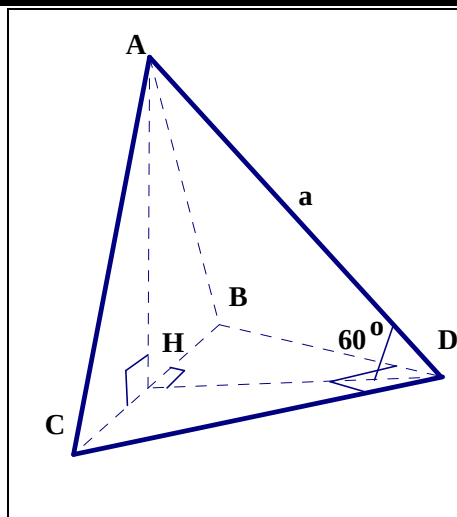
Vậy H là chân đường cao của khối chóp.

2) Ta có tam giác SAB đều nên $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

suy ra $V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

Ví dụ 2: Cho tứ diện $ABCD$ có ABC là tam giác đều, BCD là tam giác vuông cân tại D , $(ABC) \perp (BCD)$ và AD hợp với (BCD) một góc 60° .

Tính thể tích tứ diện $ABCD$.



Lời giải:

Gọi H là trung điểm của BC.
Ta có tam giác ABC đều nên $AH \perp (BCD)$,
mà $(ABC) \perp (BCD) \Rightarrow AH \perp (BCD)$.

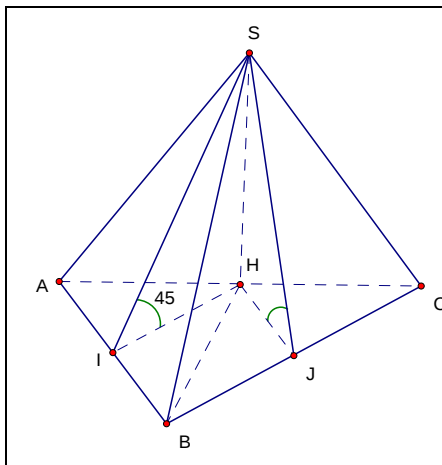
Ta có $AH \perp HD \Rightarrow AH = AD \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$
& $HD = AD \cdot \cot 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$\triangle BCD \Rightarrow BC = 2HD = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$ suy ra

$$V = \frac{1}{3} S_{BCD} \cdot AH = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} BC \cdot HD \cdot AH = \frac{a^3 \sqrt{3}}{9}$$

Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, có $BC = a$. Mặt bên SAC vuông góc với đáy, các mặt bên còn lại đều tạo với mặt đáy một góc 45° .

- Chứng minh rằng chân đường cao khối chóp trùng với trung điểm cạnh AC.
- Tính thể tích khối chóp SABC.



Lời giải:

a) Kẻ $SH \perp BC$ vì $mp(SAC) \perp mp(ABC)$ nên $SH \perp mp(ABC)$.

Gọi I, J là hình chiếu của H trên AB và BC $\Rightarrow SI \perp AB, SJ \perp BC$, theo giả thiết $\widehat{SIH} = \widehat{SJH} = 45^\circ$

Ta có: $\triangle SHI = \triangle SHJ \Rightarrow HI = HJ$ nên BH là đường phân giác của $\triangle ABC$ từ đó suy ra H là trung điểm của AC.

b) $HI = HJ = SH = \frac{a}{2} \Rightarrow V_{SABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SH = \frac{a^3}{12}$

Bài tập tương tự:

Bài 1: Cho hình chóp SABC có đáy ABC đều cạnh a, tam giác SBC cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC).

1) Chứng minh chân đường cao của chóp là trung điểm của BC.

2) Tính thể tích khối chóp SABC.

Đs: $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{24}$

Bài 2: Cho hình chóp SABC có đáy ABC vuông cân tại A với $AB = AC = a$ biết tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC), mặt phẳng (SAC) hợp với (ABC) một góc 45° . Tính thể tích của SABC.

Đs: $V = \frac{a^3}{12}$

Bài 3: Cho hình chóp SABC có $\widehat{BAC} = 90^\circ$; $\widehat{ABC} = 30^\circ$; SBC là tam giác đều cạnh a và $(SAB) \perp (ABC)$. Tính thể tích khối chóp SABC. Đs: $V = \frac{a^2\sqrt{2}}{24}$

Bài 4: Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác đều; tam giác SBC có đường cao SH = h và $(SBC) \perp (ABC)$. Cho biết SB hợp với mặt (ABC) một góc 30° . Tính thể tích hình chóp SABC. Đs: $V = \frac{4h^3\sqrt{3}}{9}$

Bài 5: Tứ diện ABCD có ABC và BCD là hai tam giác đều lần lượt nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau biết $AD = a$. Tính thể tích tứ diện. Đs: $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{36}$

Bài 6: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông. Mặt bên SAB là tam giác đều có đường cao SH = h, nằm trong mặt phẳng vuông góc với ABCD,
1) Chứng minh rằng chân đường cao khối chóp trùng với trung điểm cạnh AB.
2) Tính thể tích khối chóp SABCD. Đs: $V = \frac{4h^3}{9}$

Bài 7: Cho hình chóp SABCD có ABCD là hình chữ nhật, tam giác SAB đều cạnh a nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABCD) biết (SAC) hợp với (ABCD) một góc 30° . Tính thể tích hình chóp SABCD. Đs: $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

Bài 8: Cho hình chóp SABCD có ABCD là hình chữ nhật có $AB = 2a$, $BC = 4a$, $SAB \perp (ABCD)$, hai mặt bên (SBC) và (SAD) cùng hợp với đáy ABCD một góc 30° . Tính thể tích hình chóp SABCD. Đs: $V = \frac{8a^3\sqrt{3}}{9}$

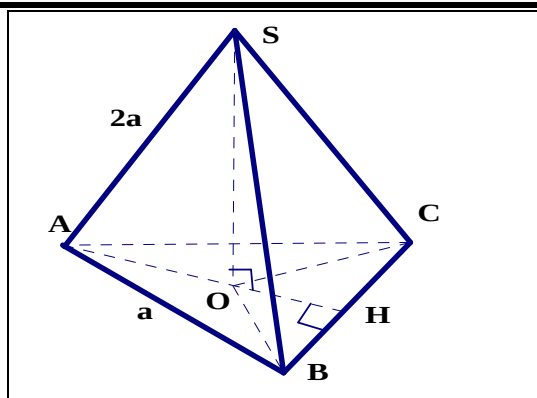
Bài 9: Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thoi với $AC = 2BD = 2a$ và tam giác SAD vuông cân tại S, nằm trong mặt phẳng vuông góc với ABCD. Tính thể tích hình chóp SABCD. Đs: $V = \frac{a^3\sqrt{5}}{12}$

Bài 10: Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D; $AD = CD = a$; $AB = 2a$ biết tam giác SAB đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABCD). Tính thể tích khối chóp SABCD. Đs: $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

3) Dạng 3: **Khối chóp đều**

Ví dụ 1: Cho chóp tam giác đều SABC cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng 2a. Chứng minh rằng chân đường cao kẻ từ S của hình chóp là tâm của tam giác đều ABC. Tính thể tích chóp đều SABC.

	<u>Lời giải:</u> Dựng $SO \perp (ABC)$ Ta có $SA = SB = SC$ suy ra $OA = OB = OC$ Vậy O là tâm của tam giác đều ABC. Ta có tam giác ABC đều nên
--	---



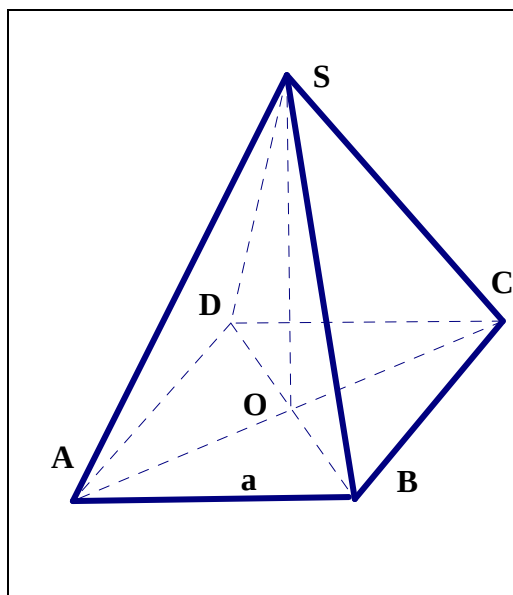
$$AO = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\triangle SAO \Rightarrow SO^2 = SA^2 - OA^2 = \frac{11a^2}{3}$$

$$\Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{11}}{\sqrt{3}}. \text{ Vậy } V = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot SO = \frac{a^3\sqrt{11}}{12}$$

Ví dụ 2: Cho khối chóp tứ giác SABCD có tất cả các cạnh có độ dài bằng a.

- 1) Chứng minh rằng SABCD là chóp tứ giác đều.
- 2) Tính thể tích khối chóp SABCD.



Lời giải:

Dựng $SO \perp (ABCD)$

Ta có $SA = SB = SC = SD$ nên
 $OA = OB = OC = OD \Rightarrow ABCD$ là hình thoi có đường tròn ngoại tiếp nên $ABCD$ là hình vuông.

Ta có $SA^2 + SB^2 = AB^2 + BC^2 = AC^2$

nên $\triangle ASC$ vuông tại $S \Rightarrow OS = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$$

$$\text{Vậy } V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$$

Ví dụ 3: Cho khối tứ diện đều ABCD cạnh bằng a, M là trung điểm DC.

- a) Tính thể tích khối tứ diện đều ABCD.
- b) Tính khoảng cách từ M đến mp(ABC). Suy ra thể tích hình chóp MABC.

Lời giải:

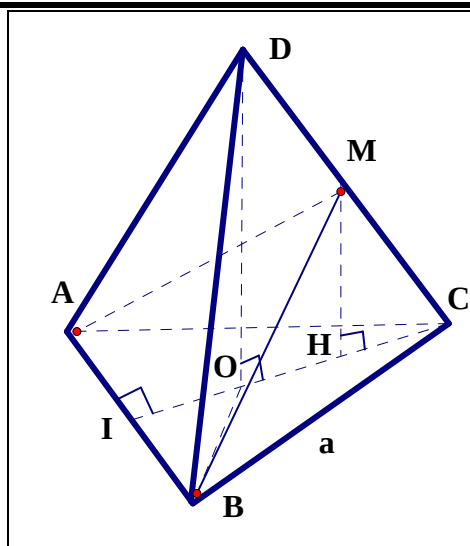
a) Gọi O là tâm của $\triangle ABC \Rightarrow DO \perp (ABC)$

$$V = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot DO$$

$$S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \quad OC = \frac{2}{3}CI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\triangle DOC \text{ vuông có : } DO = \sqrt{DC^2 - OC^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$



b) Kẻ $MH \parallel DO$, khoảng cách từ M đến $mp(ABC)$ là MH

$$MH = \frac{1}{2} DO = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

$$\Rightarrow V_{MABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot MH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$$

$$\text{Vậy } V = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$$

Bài tập tương tự:

Bài 1: Cho hình chóp đều $SABC$ có cạnh bên bằng a hợp với đáy ABC một góc 60° . Tính thể tích hình chóp.

$$\text{Đs: } V = \frac{3a^3}{16}$$

Bài 2: Cho hình chóp tam giác đều $SABC$ có cạnh bên a , góc ở đáy của mặt bên là 45° .

1) Tính độ dài chiều cao SH của chóp $SABC$.

$$\text{Đs: } SH = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

2) Tính thể tích hình chóp $SABC$.

$$\text{Đs: } V = \frac{a^3}{6}$$

Bài 3: Cho hình chóp tam giác đều $SABC$ có cạnh đáy a và mặt bên hợp với đáy một góc 60° . Tính thể tích hình chóp $SABC$.

$$\text{Đs: } V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$$

Bài 4: Cho chóp tam giác đều có đường cao h hợp với một mặt bên một góc 30° . Tính thể tích hình chóp.

$$\text{Đs: } V = \frac{h^3\sqrt{3}}{3}$$

Bài 5: Cho hình chóp tam giác đều có đường cao h và mặt bên có góc ở đỉnh bằng 60° . Tính thể tích hình chóp.

$$\text{Đs: } V = \frac{h^3\sqrt{3}}{8}$$

Bài 6: Cho hình chóp tứ giác đều $SABCD$ có cạnh đáy a và $\widehat{ASB} = 60^\circ$.

1) Tính tổng diện tích các mặt bên của hình chóp đều.

$$\text{Đs: } S = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$$

2) Tính thể tích hình chóp.

$$\text{Đs: } V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$$

Bài 7: Cho hình chóp tứ giác đều $SABCD$ có chiều cao h , góc ở đỉnh của mặt bên bằng 60° . Tính thể tích hình chóp.

$$\text{Đs: } V = \frac{2h^3}{3}$$

Bài 8: Cho hình chóp tứ giác đều có mặt bên hợp với đáy một góc 45° và khoảng cách từ chân đường cao của chóp đến mặt bên bằng a .

Tính thể tích hình chóp .

$$\text{Đs: } V = \frac{8a^3\sqrt{3}}{3}$$

Bài 9: Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh bên bằng a hợp với đáy một góc 60° .

Tính thể tích hình chóp.

$$\text{Đs: } V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$$

Bài 10: Cho hình chóp SABCD có tất cả các cạnh bằng nhau. Chứng minh rằng SABCD là chóp tứ giác đều. Tính cạnh của hình chóp này khi thể tích của nó bằng $V = \frac{9a^3\sqrt{2}}{2}$.

$$\text{Đs: } AB = 3a$$

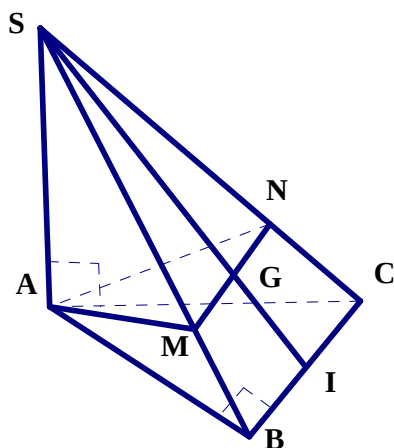
4) **Dạng 4 :**

Khối chóp & phương pháp tỷ số thể tích

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABC có tam giác ABC vuông cân ở B, $AC = a\sqrt{2}$, SA vuông góc với đáy ABC, $SA = a$

1) Tính thể tích của khối chóp S.ABC.

2) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, mặt phẳng (α) qua AG và song song với BC cắt SC, SB lần lượt tại M, N. Tính thể tích của khối chóp S.AMN



Lời giải:

a) Ta có: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SA$ và $SA = a$

+ ΔABC cân có: $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow AB = a$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} a^2 \text{ Vậy: } V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a^2 \cdot a = \frac{a^3}{6}$$

b) Gọi I là trung điểm BC.

G là trọng tâm, ta có: $\frac{SG}{SI} = \frac{2}{3}$

$$\alpha // BC \Rightarrow MN // BC \Rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SC} = \frac{SG}{SI} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{SAMN}}{V_{SABC}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{4}{9}$$

$$\text{Vậy: } V_{SAMN} = \frac{4}{9} V_{SABC} = \frac{2a^3}{27}$$

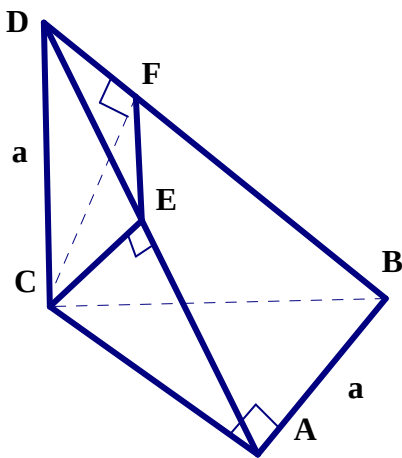
Ví dụ 2: Cho tam giác ABC vuông cân ở A và $AB = a$. Trên đường thẳng qua C và vuông góc với mặt phẳng (ABC) lấy điểm D sao cho $CD = a$. Mặt phẳng qua C vuông góc với BD, cắt BD tại F và cắt AD tại E.

a) Tính thể tích khối tứ diện ABCD.

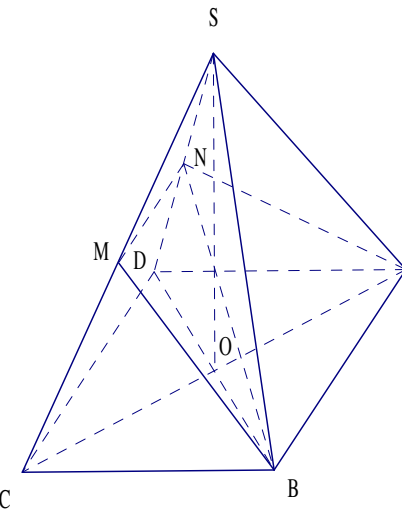
b) Chứng minh $CE \perp (ABD)$

c) Tính thể tích khối tứ diện CDEF.

?

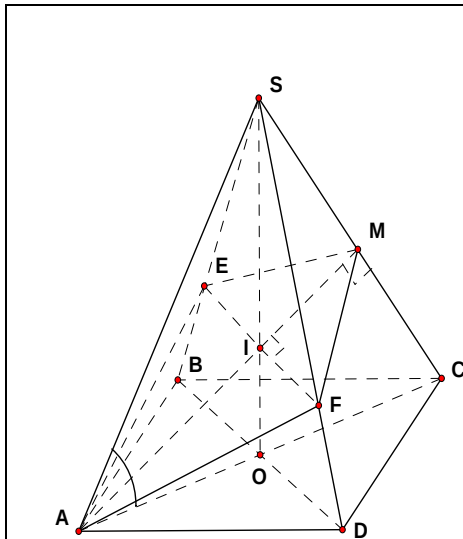
	<u>Lời giải:</u> a) <u>Tính</u> V_{ABCD} : $V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot CD = \frac{a^3}{6}$ b) <u>Tacó:</u> $AB \perp AC, AB \perp CD \Rightarrow AB \perp (ACD) \Rightarrow AB \perp EC$ Ta có: $DB \perp EC \Rightarrow EC \perp (ABD)$ c) <u>Tính</u> V_{DCEF} : Ta có: $\frac{V_{DCEF}}{V_{DABC}} = \frac{DE}{DA} \cdot \frac{DF}{DB} (*)$ Mà $DE \cdot DA = DC^2$, chia cho DA^2 $\Rightarrow \frac{DE}{DA} = \frac{DC^2}{DA^2} = \frac{a^2}{2a^2} = \frac{1}{2}$ Tương tự: $\frac{DF}{DB} = \frac{DC^2}{DB^2} = \frac{a^2}{DC^2 + CB^2} = \frac{1}{3}$ Từ (*) $\Rightarrow \frac{V_{DCEF}}{V_{DABC}} = \frac{1}{6}$. Vậy $V_{DCEF} = \frac{1}{6} V_{ABCD} = \frac{a^3}{36}$
---	--

Ví dụ 3: Cho khối chóp tứ giác đều SABCD. Một mặt phẳng (α) qua A, B và trung điểm M của SC. Tính tỉ số thể tích của hai phần khối chóp bị phân chia bởi mặt phẳng đó.

	<u>Lời giải:</u> Kẻ $MN \parallel CD$ ($N \in SD$) thì hình thang ABMN là thiết diện của khối chóp khi cắt bởi mặt phẳng (ABM). $+ \frac{V_{SAND}}{V_{SADB}} = \frac{SN}{SD} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{SANB} = \frac{1}{2} V_{SADB} = \frac{1}{4} V_{SABCD}$ $\frac{V_{SBMN}}{V_{SBCD}} = \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SN}{SD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{SBMN} = \frac{1}{4} V_{SBCD} = \frac{1}{8} V_{SABCD}$ Mà $V_{SABMN} = V_{SANB} + V_{SBMN} = \frac{3}{8} V_{SABCD}$. Suy ra $V_{ABMN.ABCD} = \frac{5}{8} V_{SABCD}$ Do đó : $\frac{V_{SABMN}}{V_{ABMN.ABCD}} = \frac{3}{5}$
---	--

Ví dụ 4: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên tạo với đáy góc 60° . Gọi M là trung điểm SC. Mặt phẳng đi qua AM và song song với BD, cắt SB tại E và cắt SD tại F.

- Hãy xác định mp(AEMF)
- Tính thể tích khối chóp S.ABCD
- Tính thể tích khối chóp S.AEMF



Lời giải:

a) Gọi $I = SO \cap AM$. Ta có $(AEMF) \parallel BD \Rightarrow EF \parallel BD$

$$b) V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO \text{ với } S_{ABCD} = a^2$$

$$+ \triangle SOA \text{ có : } SO = AO \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{Vậy : } V_{S.ABCD} = \frac{a^3 \sqrt{6}}{6}$$

c) Phân chia chóp tứ giác ta có

$$V_{S.AEMF} = V_{SAMF} + V_{SAME} = 2V_{SAMF}$$

$$V_{S.ABCD} = 2V_{SACD} = 2V_{SABC}$$

Xét khối chóp S.AMF và S.ACD

$$\text{Ta có : } \Rightarrow \frac{SM}{SC} = \frac{1}{2}$$

$\triangle SAC$ có trọng tâm I, $EF \parallel BD$ nên:

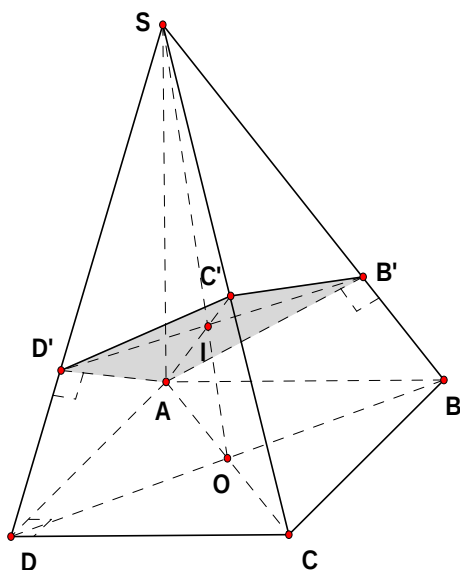
$$\Rightarrow \frac{SI}{SO} = \frac{SF}{SD} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{V_{SAMF}}{V_{SACD}} = \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SF}{SD} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow V_{SAMF} = \frac{1}{3} V_{SACD} = \frac{1}{6} V_{SACD} = \frac{a^3 \sqrt{6}}{36}$$

$$\Rightarrow V_{S.AEMF} = 2 \frac{a^3 \sqrt{6}}{36} = \frac{a^3 \sqrt{6}}{18}$$

Ví dụ 5: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc đáy, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi B', D' là hình chiếu của A lần lượt lên SB, SD. Mặt phẳng $(AB'D')$ cắt SC tại C'.

- Tính thể tích khối chóp S.ABCD.
- Chứng minh $SC \perp (AB'D')$
- Tính thể tích khối chóp S.AB'C'D'



Lời giải:

a) Ta có: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} . SA = \frac{a^3 \sqrt{2}}{3}$

b) Ta có $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AB'$
 & $SB \perp AB'$ Suy ra: $AB' \perp (SBC)$
 nên $AB' \perp SC$. Tương tự $AD' \perp SC$.
 Vậy $SC \perp (AB'D')$

c) Tính $V_{S.AB'C'D'}$

+Tính $V_{S.AB'C'}$: Ta có: $\frac{V_{SAB'C'}}{V_{SABC}} = \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} (*)$

$$\Delta SAC \text{ vuông cân nên } \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Ta có: } \frac{SB'}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{2a^2}{SA^2 + AB^2} = \frac{2a^2}{3a^2} = \frac{2}{3}$$

$$T_{\text{ür}}(*) \Rightarrow \frac{V_{SAB'C'}}{V_{SABC}} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow V_{SAB'C'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^3 \sqrt{2}}{3} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{9}$$

$$+ V_{S,AB'C'D'} = 2V_{S,AB'C'} = \frac{2a^3\sqrt{2}}{9}$$

Bài tập tương tự:

Bài 1: Cho tứ diện ABCD. Gọi B' và C' lần lượt là trung điểm của AB và AC. Tính tỉ số thể tích của khối tứ diện AB'C'D và khối tứ diện ABCD. Đs: $k = \frac{1}{4}$

Bài 2: Cho tứ diện ABCD có thể tích 9 m^3 , trên AB, AC, AD lần lượt lấy các điểm B', C', D' sao cho $AB = 2AB'$; $2AC = 3AD'$; $AD = 3AD'$. Tính thể tích tứ diện AB'C'D'.

Đs: $V = 2\text{ m}^3$

Bài 3: Cho tứ diện đều ABCD có cạnh a. Lấy các điểm B';C' trên AB và AC sao cho $AB = \frac{a}{2}$; $AC' = \frac{2a}{3}$. Tính thể tích tứ diện AB'C'D. Đs: $V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{36}$

Bài 4: Cho tứ diện ABCD có thể tích 12 m^3 . Gọi M, P là trung điểm của AB và CD và lấy N trên AD sao cho $DA = 3NA$. Tính thể tích tứ diện BMNP. Đs: $V = 1 \text{ m}^3$

Bài 5: Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh $a\sqrt{3}$, đường cao SA = a. Mặt phẳng qua A và vuông góc với SB tại H và cắt SC tại K. Tính thể tích hình chóp SAHK.

Đs: $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{40}$

Bài 6: Cho hình chóp SABCD có thể tích bằng 27m^3 . Lấy A' trên SA sao cho $SA = 3SA'$. Mặt phẳng qua A' và song song với đáy hình chóp cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'. Tính thể tích hình chóp SA'B'C'D'.

Bài 7: Cho hình chóp SABCD có thể tích bằng $9m^3$, ABCD là hình bình hành, lấy M trên SA sao cho $2SA = 3SM$. Mặt phẳng (MBC) cắt SD tại N. Tính thể tích khối đa diện ABCDMN. Đs: $V = 4m^3$

Bài 8: Cho hình chóp SABCD có đáy là hình vuông cạnh a, chiều cao SA = h. Gọi N là trung điểm SC. Mặt phẳng chứa AN và song song với BD lần lượt cắt

SB, SDF tại M và P. Tính thể tích khối chóp SAMNP. Đs: $V = \frac{a^2h}{9}$

Bài 9: Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình bình hành và I là trung điểm của SC. Mặt phẳng qua AI và song song với BD chia hình chóp thành 2 phần. Tính tỉ số thể tích 2 phần này. Đs: $k = \frac{1}{2}$

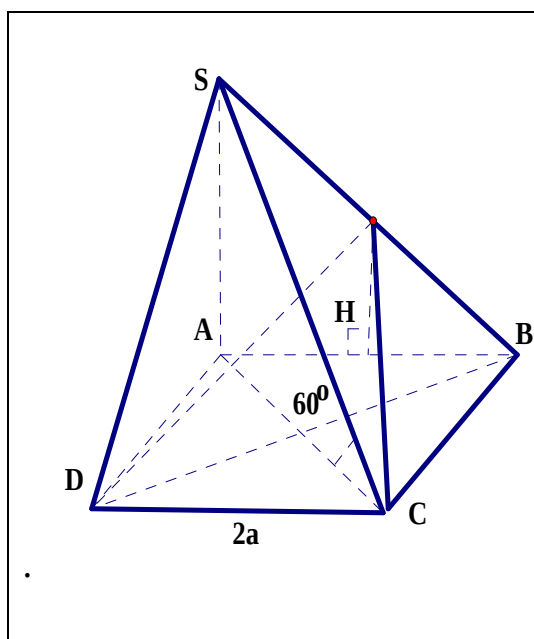
Bài 10: Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình bình hành và lấy M trên SA sao cho $\frac{SM}{SA} = x$ Tìm x để mặt phẳng (MBC) chia hình chóp thành 2 phần có thể

tích bằng nhau. Đs: $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

5) Dạng 5: Ôn tập khối chóp và lăng trụ

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông cạnh 2a, SA vuông góc đáy. Góc giữa SC và đáy bằng 60° và M là trung điểm của SB.

- 1) Tính thể tích của khối chóp S.ABCD.
- 2) Tính thể tích của khối chóp MBCD.



Lời giải:

a) Ta có $V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA$

+ $S_{ABCD} = (2a)^2 = 4a^2$

+ ΔSAC có: $SA = AC \tan C = 2a\sqrt{6}$

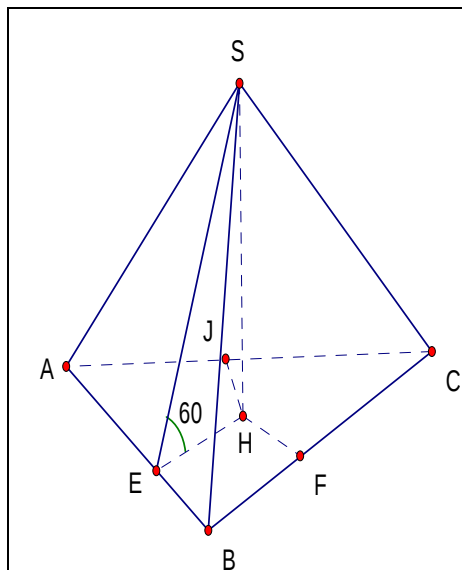
$\Rightarrow V = \frac{1}{3} 4a^2 \cdot 2a\sqrt{6} = \frac{8a^3\sqrt{6}}{3}$

b) Kẻ $MH \parallel SA \Rightarrow MH \perp (DBC)$

Ta có: $MH = \frac{1}{2} SA$, $S_{BCD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$

$\Rightarrow V_{MBCD} = \frac{1}{4} V = \frac{2a^3\sqrt{6}}{3}$

Ví dụ 2: Cho hình chóp tam giác S.ABC có $AB = 5a$, $BC = 6a$, $CA = 7a$. Các mặt bên SAB, SBC, SCA tạo với đáy một góc 60° . Tính thể tích khối chóp.



Lời giải:

Hạ $SH \perp (ABC)$, kẻ $HE \perp AB$, $HF \perp BC$, $HJ \perp AC$
suy ra $SE \perp AB$, $SF \perp BC$, $SJ \perp AC$. Ta có

$$\widehat{SEH} = \widehat{SFH} = \widehat{SJH} = 60^\circ \Rightarrow$$

$\Delta SAH = \Delta SFH = \Delta SJH$ nên $HE = HF = HJ = r$
(r là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC)

$$\text{Ta có } S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\text{với } p = \frac{a+b+c}{2} = 9a \text{ Nên } S_{ABC} = \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} a^2$$

$$\text{Mặt khác } S_{ABC} = p \cdot r \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{2\sqrt{6} a}{3}$$

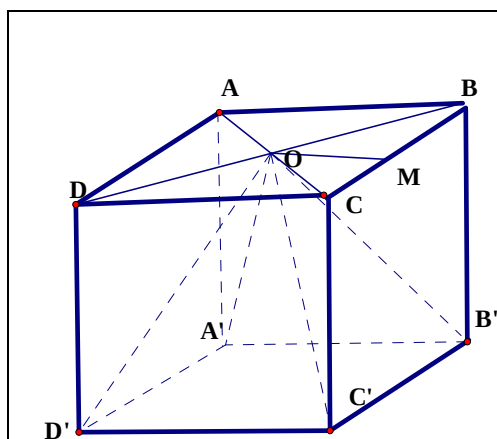
Tam giác vuông SHE:

$$SH = r \cdot \tan 60^\circ = \frac{2\sqrt{6} a}{3} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{2} a$$

$$\text{Vậy } V_{SABC} = \frac{1}{3} 6\sqrt{6} a^2 \cdot 2\sqrt{2} a = 8\sqrt{3} a^3.$$

Ví dụ 3: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a\sqrt{3}$, $AD = a$, $AA' = a$, O là giao điểm của AC và BD .

- Tính thể tích khối hộp chữ nhật, khối chóp $OA'B'C'D'$
- Tính thể tích khối $OBB'C'$.
- Tính độ dài đường cao đỉnh C' của tứ diện $OBB'C'$.



Lời giải:

a) Gọi thể tích khối hộp chữ nhật là V .

$$\text{Ta có : } V = AB \cdot AD \cdot AA' = a\sqrt{3} \cdot a^2 = a^3 \sqrt{3}$$

$$\Delta ABD \text{ có : } DB = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2a$$

* Khối $OA'B'C'D'$ có đáy và đường cao

$$\text{giống khối hộp nên: } \Rightarrow V_{OA'B'C'D'} = \frac{1}{3} V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{3}$$

b) M là trung điểm $BC \Rightarrow OM \perp (BB'C')$

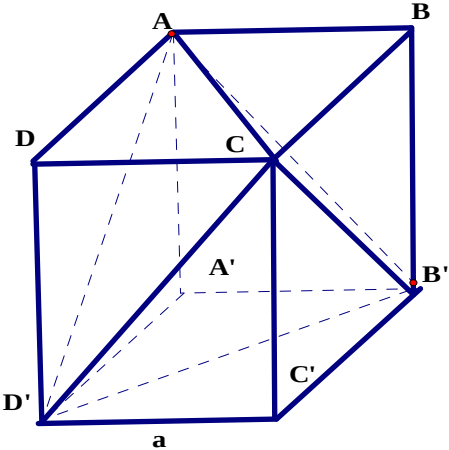
$$\Rightarrow V_{OBB'C'} = \frac{1}{3} S_{BB'C'} \cdot OM = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12}$$

c) Gọi $C'H$ là đường cao đỉnh C' của tứ

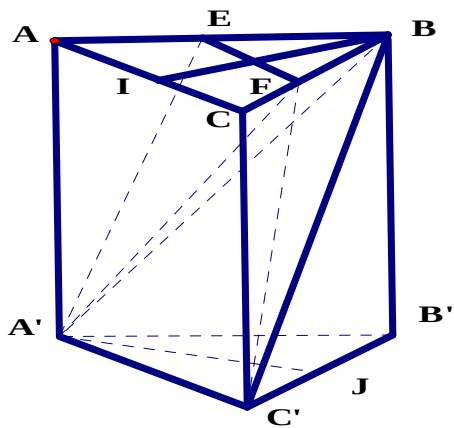
$$\text{diện } OBB'C'. \text{ Ta có : } C'H = \frac{3V_{OBB'C'}}{S_{OBB'}}$$

	$\Delta ABD \text{ có : } DB = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2a$ $\Rightarrow S_{OBB'} = \frac{1}{2}a^2 \Rightarrow C'H = 2a\sqrt{3}$
--	--

Ví dụ 4: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a.
Tính thể tích khối tứ diện ACB'D'.

	<u>Lời giải:</u> Hình lập phương được chia thành: khối ACB'D' và bốn khối CB'D'C', BB'AC, D'ACD, AB'A'D'. + Các khối CB'D'C', BB'AC, D'ACD, AB'A'D' có diện tích đáy và chiều cao bằng nhau nên có cùng thể tích. Khối CB'D'C' có $V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a^2 \cdot a = \frac{1}{6}a^3$ + Khối lập phương có thể tích: $V_2 = a^3$ $\Rightarrow V_{ACB'D'} = a^3 - 4 \cdot \frac{1}{6}a^3 = \frac{1}{3}a^3$
--	---

Ví dụ 5: Cho hình lăng trụ đứng tam giác có các cạnh bằng a.
a) Tính thể tích khối tứ diện A'B'BC.
b) E là trung điểm cạnh AC, mp(A'B'E) cắt BC tại F. Tính thể tích khối CA'B'FE.

	<u>Lời giải:</u> a) Khối A'B'BC: Gọi I là trung điểm AB, $V_{A'B'BC} = \frac{1}{3}S_{A'B'B} \cdot CI = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ b) Khối CA'B'FE: phân ra hai khối CEFA' và CFA'B'. + Khối A'CEF có đáy là CEF, đường cao A'A nên $V_{A'CEF} = \frac{1}{3}S_{CEF} \cdot A'A$ $S_{CEF} = \frac{1}{4}S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16} \Rightarrow V_{A'CEF} = \frac{a^3\sqrt{3}}{48}$
---	--

	+Gọi J là trung điểm B'C'. Ta có khối A'B'CF có đáy là CFB', đường cao JA' nên $V_{A'B'CF} = \frac{1}{3} S_{CFB'} \cdot A'J$ $S_{CFB'} = \frac{1}{2} S_{CBB'} = \frac{a^2}{4}$ $\Rightarrow V_{A'B'CF} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$ + Vậy : $V_{CAB'FE} = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}$
--	---

Bài tập tương tự:

Bài 1: Cho lăng trụ đứng ABCA₁B₁C₁ có ABC vuông. AB = AC = a; AA₁ = a√2.

M là trung điểm AA₁. Tính thể tích lăng trụ MA₁BC₁ Đs: $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Bài 2: Hình chóp SABCD có ΔABC vuông tại B, SA ⊥ (ABC). $\widehat{ACB} = 60^\circ$,

BC = a, SA = a√3, M là trung điểm SB. Tính thể tích MABC. Đs: $V_{MABC} = \frac{1}{4} a^3$

Bài 3: SABCD có đáy ABCD là hình thang với đáy lớn AB = 2, $\widehat{ACB} = 90^\circ$. ΔSAC và ΔSBD là các tam giác đều có cạnh bằng √3. Tính thể tích khối chóp

SABCD. Đs: $V_{SABCD} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

Bài 4: Tính thể tích hình chóp tam giác đều SABC trong các trường hợp sau:

a) Cạnh đáy bằng 1, góc $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Đs: $V = \frac{\sqrt{2}}{12}$

b) AB = 1, SA = 2. Đs: $V = \frac{\sqrt{11}}{12}$

Bài 5. Cho lăng trụ ABCA'B'C' có độ dài cạnh bên = 2a, ΔABC vuông tại A, AB = a, AC = a√3. Hình chiếu vuông góc của A' trên (ABC) là trung điểm BC.

Tính V_{A'ABC} theo a? Đs: $V = \frac{a^3}{2}$

Bài 6: Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình bình hành và S_{ABCD} = √3 và góc giữa 2 đường chéo bằng 60°, các cạnh bên nghiêng đều với đáy 1 góc 45°.

Tính V_{SABCD}. Đs: $V = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Bài 7: Cho hình chóp SABCD có SA = SB = SC = a. $\widehat{ASB} = 60^\circ$, $\widehat{BSC} = 90^\circ$,

$\widehat{CSA} = 120^\circ$. Chứng minh rằng ΔABC vuông. Tính V_{SABC}. Đs: $V = \frac{a\sqrt{2}}{12}$

Bài 8: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh $2a$, $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Tính theo a thể tích khối chóp S.BMDN

$$\text{Đs: } V_{S.BMDN} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$$

Bài 9: Cho lăng trụ đứng tam giác đều ABCA'B'C' có cạnh đáy và cạnh bên đều bằng a . M, N, E lần lượt là trung điểm của BC, CC', C'A'. Tính tỉ số thể tích hai phần lăng trụ do (MNE) tạo ra. Đs: $k = 1$

Bài 10: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a , mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, BC, CD. Chứng minh AM vuông góc với BP và tính thể tích của khối tứ diện CMNP.

$$\text{Đs: } V_{M.CNP} = \frac{a^3\sqrt{3}}{96}$$