BÀI 3: MẶT CẦU – KHỐI CẦU

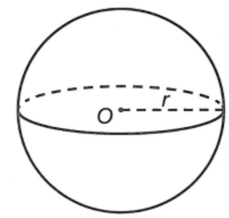
A. LÍ THUYẾT TRỌNG TÂM

Định nghĩa

- Tập hợp các điểm trong không gian cách điểm O cố định một khoảng R không đổi gọi là mặt cầu tâm O, bán kính R, kí hiệu là: $S(O;R)$. Khi đó $S(O;R)=\{M \mid OM=R\}$.

- Khối cầu hay hình cầu $S(O;R)$ là tập hợp tất cả các điểm M sao cho $OM \le R$.

Ta thường vẽ hay biểu diễn một mặt cầu hay khối cầu như hình sau:



Vị trí tương đối giữa mặt cầu và một điểm

Cho mặt cầu $S(O;R)$ và một điểm A. Nếu:

+) $OA=R$ thì điểm A nằm trên mặt cầu $S(O;R)$.

+) $OA>R$ thì ta nói điểm A nằm ngoài mặt cầu $S(O;R)$.

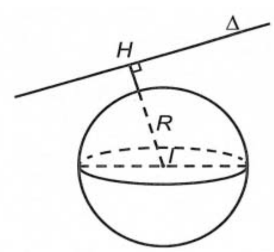
+) $OA<R$ thì ta nói điểm A nằm trong mặt cầu $S(O;R)$.

Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng

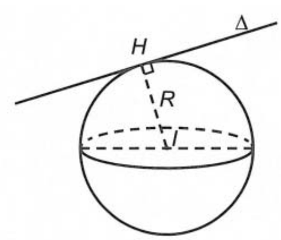
Cho mặt cầu $S(I;R)$ và đường thẳng Δ. Gọi H là hình chiếu của I lên Δ hay $d(I;\Delta)=IH$.

Nếu:

+) $IH>R:\Delta$ không cắt mặt cầu hay mặt cầu $S(I;R)$ và đường thẳng Δ không có điểm chung.

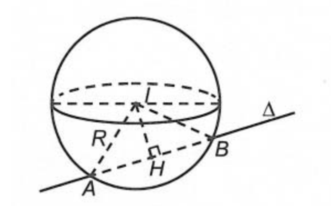


+) $IH=R$ thì Δ với mặt cầu $S(I;R)$ có một điểm chung duy nhất là H. Ta nói Δ là một tiếp tuyến của mặt cầu $S(I;R)$ và H là tiếp điểm.



+) $IH<R:\Delta$ cắt mặt cầu $S(I;R)$ tại hai điểm phân biệt.

Nhận xét:



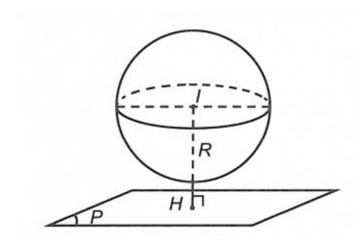
+) ΔIAB cân tại I, điểm H là trung điểm của AB và

$$R^2 = IH^2 + AH^2 = IH^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2.$$

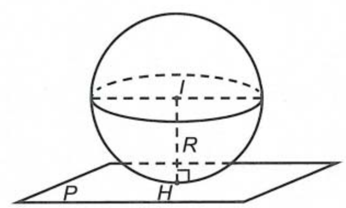
Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng

Cho mặt cầu $S(I;R)$ và mặt phẳng (P). Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên (P) hay $d(I;(P)) = IH$. Nếu:

+) $IH > R$: Mặt cầu $S(I;R)$ và mặt phẳng (P) không có điểm chung.



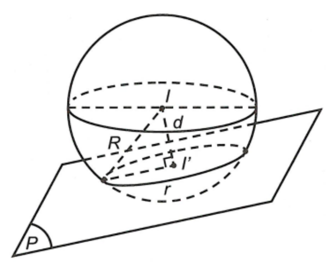
+) Nếu $IH = R$: Mặt phẳng (P) tiếp xúc mặt cầu $S(I;R)$. Lúc này ta nói mặt phẳng (P) là mặt phẳng tiếp diện của mặt cầu và H là tiếp điểm.



Lưu ý: $IH \perp (P)$

+) Nếu $IH < R$: Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu theo thiết diện là đường tròn có tâm $I'(I' \equiv H)$ và bán kính

$r = \sqrt{R^2 - IH^2} = \sqrt{R^2 - I'I^2}$.



Nhận xét: Đường tròn giao tuyến có diện tích lớn nhất khi mặt phẳng (P) đi qua tâm I của mặt cầu $S(I;R)$. Đường tròn này ta gọi là đường tròn lớn.

Công thức cần nhớ

Cho mặt cầu $S(I;R)$.

- Diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2$.

- Thể tích khối cầu $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. Mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện

Các khái niệm cần lưu ý:

- Mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện: là mặt cầu mà nó đi qua tất cả các đỉnh của hình đa diện. Tâm của mặt cầu ngoại tiếp cách đều tất cả các đỉnh của hình đa diện.

- Trục của đa giác: là đường thẳng đi qua tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác và vuông góc với mặt phẳng chứa đa giác. Mọi điểm nằm trên trục thì cách đều các đỉnh của đa giác và ngược lại.

- Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng: Là mặt phẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng và vuông góc với đoạn thẳng đó. Mọi điểm nằm trên mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng thì cách đều hai điểm mút của đoạn thẳng và ngược lại.

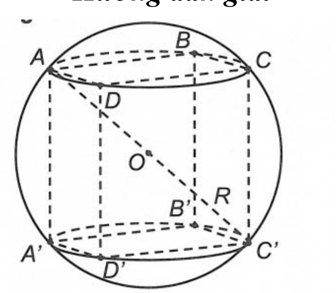
Phương pháp giải

Đối với bài toán mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện thì mấu chốt của vấn đề là phải xác định được tâm của mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện đó. Khi xác định được tâm của mặt cầu ngoại tiếp thì ta có thể tính được các yếu tố còn lại như bán kính, diện tích mặt cầu, thể tích của khối cầu...

Bài tập: Cho hình hộp chữ nhật có ba kích thước là $2a, 4a, 4a,$ với $0 < a \in R$. Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật đã cho bằng

A. $6a$. **B.** $4a$. **C.** $3a$. **D.** $2a$.

Hướng dẫn giải



Giả sử hình hộp chữ nhật là *ABCD.A'B'C'D'*. Dễ thấy điểm *O* là trung điểm của *AC’* là tâm mặt cầu ngoại tiếp của hình hộp chữ nhật.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật là $R = OA$.

$$R = \frac{1}{2}AC' = \frac{1}{2}\sqrt{(A'A)^2 + (A'C')^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(A'A)^2 + (A'D')^2 + (D'C')^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(2a)^2 + (4a)^2 + (4a)^2} = 3a.$$

Chọn C.

Bài tập mẫu

Cách 1. Tìm một điểm cách đều các đỉnh của khối đa diện theo định nghĩa mặt cầu

Bài tập 1. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình chữ nhật, *SA* vuông góc với mặt phẳng (*ABCD*). Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABCD* là điểm *I* với

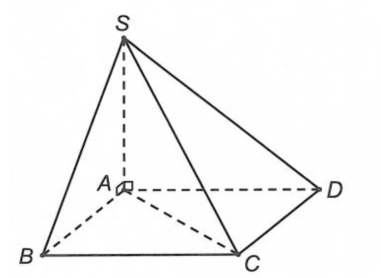
A. *I* là trung điểm của đoạn thẳng *SD*.

B. *I* là trung điểm của đoạn thẳng *AC*.

C. *I* là trung điểm của đoạn thẳng *SC*.

D. *I* là trung điểm của đoạn thẳng *SB*.

Hướng dẫn giải



Từ giả thiết ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$

$\Rightarrow \widehat{SBC} = 90^o \quad (1).$

Chứng minh tương tự ta cũng có

$CD \perp SD \Rightarrow \widehat{SDC} = 90^o \qquad (2).$

Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AC \Rightarrow \widehat{SAC} = 90^o \qquad (3).$

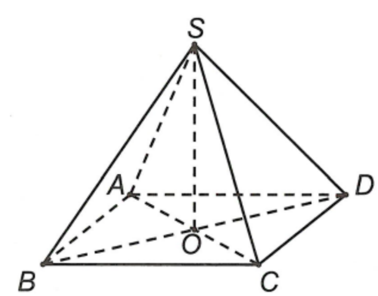
Từ (1), (2) và (3) suy ra mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABCD* là mặt cầu đường kính *SC* nên tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABCD* là trung điểm *I* của đoạn thẳng *SC*.

Chọn C.

Bài tập 2. Cho khối chóp đều *S.ABCD* có tất cả các cạnh đều bằng $a\sqrt{3}$. Thể tích *V* của khối cầu ngoại tiếp hình chóp là

A. $V = 3\pi a^3\sqrt{6}.$ **B.** $V = \pi a^3\sqrt{6}.$ **C.** $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{6}}{8}.$ **D.** $V = \dfrac{3\pi a^3\sqrt{6}}{8}.$

Hướng dẫn giải



Vì *S.ABCD* là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$.

Ta có $OD = \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{1}{2}.a\sqrt{6} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2},$

$SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}.$

Vậy $OS = OA = OD = OB = OC,$ nên O là tâm mặt cầu ngoại tiếp S.ABCD.

Vậy thể tích khối cầu cần tìm là $V = \dfrac{4}{3}\pi.SO^3 = \pi a^3\sqrt{6}$ (đvtt)

Chọn B.

Lưu ý:

Công thức tính nhanh bán kính mặt cầu ngoại tiếp chóp đều:

$$R = \frac{a^2}{2h}$$

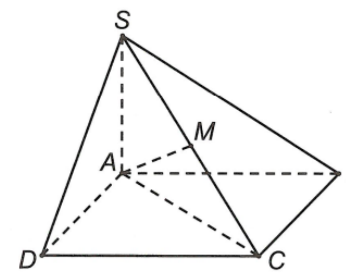
với a: độ dài cạnh bên, h: chiều cao hình chóp.

Bài tập 3: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = AB = a$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABCD* là

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. **D.** $a\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chứng minh tương tự như Bài tập 2 ta được kết quả



$\Rightarrow$ Ba đỉnh *A*, *B*, *D* đều nhìn cạnh *SC* dưới một góc vuông.

$\Rightarrow$ Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABCD* là trung điểm *SC* và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABCD* là $R = \frac{SC}{2}$.

Ta có *ABCD* là hình vuông cạnh $a \Rightarrow AC = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác *SAC* vuông tại *A* có $SC = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}$.

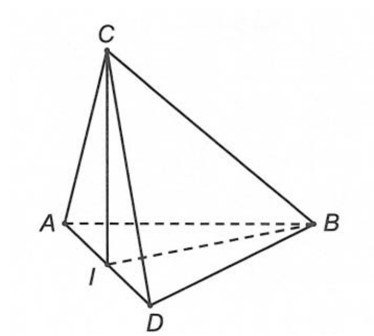
Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABCD* là $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Chọn B.

Bài tập 4. Cho tứ diện *ABCD* có các mặt *ABC* và *BCD* là các tam giác đều cạnh bằng 2, hai mặt phẳng (*ABD*) và (*ACD*) vuông góc với nhau. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện *ABCD* bằng

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Hướng dẫn giải



Ta có ΔABC, ΔBCD đều cạnh bằng 2 nên $AC = CD = 2 \Rightarrow \Delta ACD$ cân tại *C*.

Gọi *I* là trung điểm $AD \Rightarrow CI \perp AD$.

Lại có $\begin{cases} (ACD) \perp (ADB) \\ (ACD) \cap (ADB) = AD \Rightarrow CI \perp (ABD) \\ IC \perp AD \end{cases}$

$\Rightarrow CI \perp IB \left(do\ IB \subset (ABD) \right)$ (1)

Ta có $\Delta ACD = \Delta ABD (c.c.c) \Rightarrow CI = IB$ (2).

Từ (1) và (2) ta có *ACB* vuông cân tại $I \Rightarrow CB = IB\sqrt{2} \Rightarrow IB = \frac{CB}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = IC$.

ΔDIB vuông tại $I \Rightarrow ID = \sqrt{BD^2 - IB^2} = \sqrt{2} \Rightarrow AD = 2ID = 2\sqrt{2}$.

Xét ΔADB có $AB = DB = 2; AD = 2\sqrt{2} \Rightarrow \Delta ABD$ vuông tại *B*.

$\Rightarrow \widehat{ABD} = 90^o \Rightarrow \widehat{ACD} = 90^o$.

Suy ra mặt cầu ngoại tiếp tứ diện *ABCD* có đường kính là *AD* nên bán kính là $R = ID = \sqrt{2}$.

Chọn B.

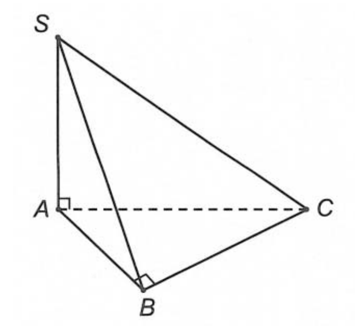
Bài tập 5. Cho hình chóp *S.ABC* có $SA\perp(ABC)$, tam giác *ABC* vuông tại *B*. Biết $SA=4a, AB=2a, BC=4a.$ Bán kính *R* của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là

A. $3a$. **B.** $2a$. **C.** a. **D.** $6a$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\begin{cases} BC\perp AB \\ BC\perp SA\left(do\, SA\perp(ABC)\right) \end{cases} \Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp SB.$

$SA\perp(ABC)\Rightarrow SA\perp AC$



Suy ra hai điểm *A*, *B* cùng nhìn *SC* dưới một góc vuông. Vậy tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABC* là trung điểm *SC*, bán kính mặt cầu là $R=\dfrac{SC}{2}$.

Ta có $AC^2=AB^2+BC^2=4a^2+16a^2=20a^2$

$\Rightarrow SC=\sqrt{SA^2+AC^2}=\sqrt{16a^2+20a^2}=6a$

$\begin{cases} (\alpha)//BD \\ (SBD)\cap(\alpha)=EF \end{cases} \Rightarrow BD//EF$. Vậy $R=3a$.

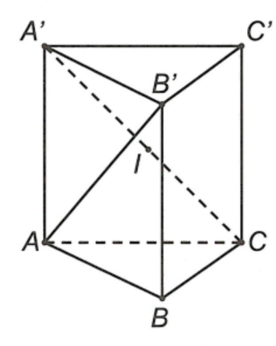
Chọn A.

Bài tập 6: Cho lăng trụ đứng *ABC.A'B'C'* có đáy *ABC* là tam giác vuông tại B, $AC=a\sqrt{3}, \widehat{ACB}=30^o.$ Góc giữa đường thẳng *AB'* và mặt phẳng (*ABC*) bằng 60°. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện *A'ABC* bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{21}}{4}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{2}$. **C.** $\dfrac{3a}{4}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{8}$.

Hướng dẫn giải

Trong tam giác vuông *ABC* có $AB=AC.\sin 30^o=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Vì $AB'\cap(ABC)=\{A\}$ và hình chiếu của *B* lên mặt phẳng (*ABC*) là *B* nên góc giữa đường thẳng *AB'* và mặt phẳng (*ABC*) bằng góc giữa hai đường thẳng *AB'* và *AB*, và bằng góc $\widehat{B'AB}$ (vì tam giác *AB'B* vuông tại *B*). Do đó $\widehat{B'AB}=60^o$.

Trong tam giác vuông *AB'B* có

$BB'=AB.\tan 60^o=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\tan 60^o=\dfrac{3a}{2}.$

Trong tam giác vuông *AA'C* có

$A'C=\sqrt{AA'^2+AC^2}=\sqrt{\left(\dfrac{3a}{2}\right)^2+\left(\sqrt{3}a\right)^2}=\dfrac{\sqrt{21}}{2}a.$

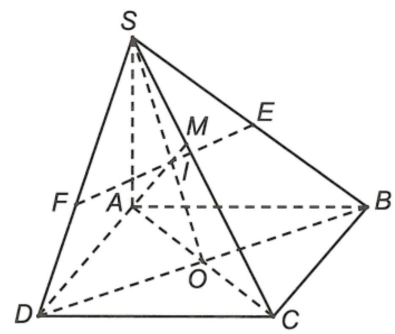
Ta có $BC\perp AB$ và $BC\perp AA'$ nên $BC\perp(ABB'A')$, suy ra $BC\perp A'B$ hay $\widehat{A'BC}=90^o$. Mà $\widehat{A'AC}=90^o$, suy ra hai điểm *A*, *B* cùng nhìn *A'C* dưới một góc vuông.

Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $A'ABC$ bằng $R=\dfrac{A'C}{2}=\dfrac{\sqrt{21}}{4}a.$

Chọn A.

Bài tập 7. Cho hình chóp *S.ABC* có đáy là hình vuông cạnh $a, SA=a\sqrt{2}$ và vuông góc với mặt phẳng (*ABCD*). Gọi *M* là trung điểm cạnh *SC*. Mặt phẳng (α) qua *A* và *M* đồng thời song song với đường thẳng *BD* cắt *SB*, *SD* lần lượt tại *E*, *F*. Bán kính mặt cầu đi qua 5 điểm *S*, *A*, *E*, *M*, *F* nhận giá trị nào sau đây?

A. a. **B.** $\dfrac{a}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $a\sqrt{2}$.



Hướng dẫn giải

Gọi *I* là giao điểm của *AM* và *SO*.

Dễ thấy *I* là trọng tâm tam giác *SAC* và *I*, *E*, *F* thẳng hàng.

Lại có $\dfrac{SF}{SD}=\dfrac{SI}{SO}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow SF=\dfrac{2}{3}SD$

$\Rightarrow SF.SD=\dfrac{2}{3}SD^2=\dfrac{2}{3}\left(SA^2+AD^2\right)=2a^2$

$\Rightarrow SF.SD=SA^2.$

Xét tam giác vuông *SAD* có $SF.SD=SA^2\Rightarrow AF$ là đường cao tam giác $AF\perp SF$.

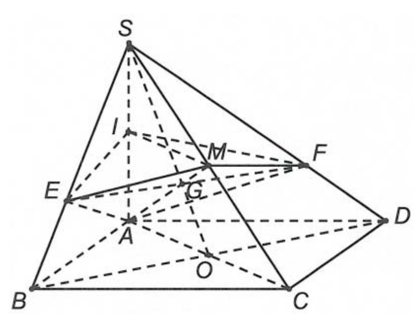
Chứng minh tương tự ta có $AE\perp SB$.

Tam giác $SA=AC=a\sqrt{2}$ nên *AM* vừa là trung tuyến vừa là đường cao tam giác $AM\perp SC$.

Ta có $\begin{cases} AM\perp SM \\ AF\perp SF \\ AE\perp SE \end{cases}$ nên mặt cầu đi qua 5 điểm *S*, *A*, *E*, *M*, *F* có tâm là trung điểm *SA* và bán kính bằng $\dfrac{SA}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.$

Chọn C.

Chú ý: Ta có thể làm như sau



Do $EF=(\alpha)\cap(SBD)$ và $(\alpha)//BD$ nên $EF//BD$.

Ta có $BD\perp AC, BD\perp SA\Rightarrow BD\perp(SAC)\Rightarrow EF\perp(SAC)\Rightarrow EF\perp SC.$

Tam giác *SAC* có $SA=AC=a\sqrt{2}$ nên $AM\perp SC$.

Do đó $SC \perp (AMEF) \Rightarrow SC \perp AE \quad (1).$

Lại có $BC \perp AB, BC \perp SA$ nên $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AE \qquad (2).$

Từ (1) và (2) suy ra $AE \perp (SBC) \Rightarrow AE \perp SB.$

Chứng minh tương tự, ta được $AF \perp SD.$ Từ đây, suy ra kết quả như cách bên.

Cách 2. Tâm mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện là giao điểm của trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy và mặt phẳng trung trực của một cạnh bên

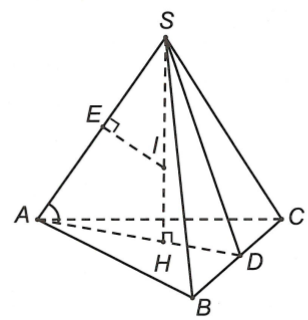
Chú ý: Trong khuôn khổ bài tập thường xoay quanh hình chóp, hình lăng trụ nên đa giác đáy ta nói đến ở đây là đáy của hình chóp hay hình lăng trụ.

Bài tập 1. Cho hình chóp đều *S.ABC* có cạnh đáy bằng *a*, cạnh bên hợp với mặt đáy một góc 60°. Gọi (*S*) là mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABC*. Thể tích của khối cầu tạo nên bởi mặt cầu (*S*) bằng

A. $\frac{32\pi a^3}{81}$. **B.** $\frac{32\pi a^3}{77}$. **C.** $\frac{64\pi a^3}{77}$. **D.** $\frac{72\pi a^3}{39}$.

Hướng dẫn giải

Gọi *H* là tâm của tam giác *ABC*, *SH* là trục của đường tròn ngoại tiếp *ABC*, mặt phẳng trung trực của *SA* qua *E* là trung điểm của *SA* và cắt *SH* tại *I*. Khi đó *I* là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABC*.



Xét trong tam giác *SAH* ta có

$$\text{SH} = \text{AH}.\tan 60^o = \frac{a\sqrt{3}}{3}.\tan 60^o = a; SA = \frac{SH}{\sin 60^o} = \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

Xét hai tam giác đồng dạng ΔSEI và ΔSHA

Ta có $\frac{SI}{SA} = \frac{SE}{SH} \Rightarrow SI = \frac{SA.SE}{SH} = \frac{\frac{2a}{\sqrt{3}}.\frac{2a}{2\sqrt{3}}}{a} = \frac{2a}{3}$

$\Rightarrow R = \frac{2a}{3}.$

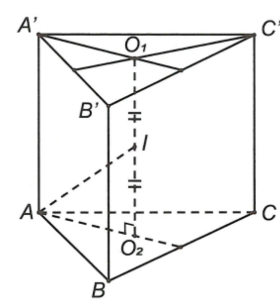
Suy ra thể tích của khối cầu tạo nên bởi mặt cầu (*S*) bằng $\frac{4}{3}\pi\left(\frac{2a}{3}\right)^3 = \frac{32\pi a^3}{81}.$

Chọn A.

Bài tập 2. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đều có tất cả các cạnh đều bằng *a*.

A. $\frac{7\pi a^2}{5}$. **B.** $\frac{7\pi a^2}{3}$. **C.** $\frac{7\pi a^2}{6}$. **D.** $\frac{3\pi a^2}{}$

Hướng dẫn giải



Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp hai đáy lăng trụ $\Rightarrow$ O_1O_2 là trục đường tròn ngoại tiếp hai đa giác đáy.

Gọi *I* là trung điểm của $O_1O_2 \Rightarrow IA = IB = IC = IA' = IB' = IC'.$

Suy ra trung điểm *I* của O_1O_2 là tâm mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ.

Bán kính

$$R = IA = \sqrt{AO_2^2 + IO_2^2} = \sqrt{AO_2^2 + \left(\frac{O_1O_2}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a.\sqrt{\frac{7}{12}}.$$

Do đó diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đều có tất cả các cạnh đều bằng a là

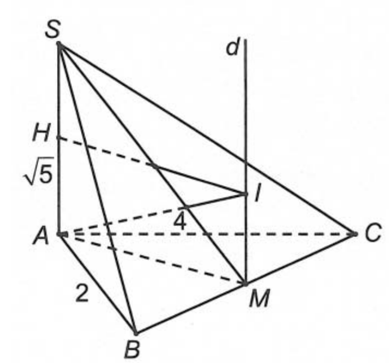
$$S = 4\pi.R^2 = 4\pi.\left(a.\sqrt{\frac{7}{12}}\right)^2 = \frac{7\pi a^3}{3}.$$

Chọn B.

Lưu ý:
Mặt phẳng trung trực của một cạnh bên cắt O_1O_2 tại I là trung điểm của O_1O_2.

Bài tập 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $AB = 2, AC = 4, SA = \sqrt{5}.$ Mặt cầu đi qua các đỉnh của hình chóp $S.ABC$ có bán kính là

A. $R = \frac{25}{2}.$ **B.** $R = \frac{5}{2}.$ **C.** $R = 5.$



Hướng dẫn giải

Gọi M, H lần lượt là trung điểm của BC, SA

Ta có tam giác ABC vuông tại A suy ra A là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Qua M kẻ đường thẳng d sao cho $d \perp (ABC) \Rightarrow d$ là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Trong mặt phẳng kẻ đường trung trực Δ của đoạn SA, cắt d tại I

$$\Rightarrow \begin{cases} IA = IB = IC \\ IA = IS \end{cases} \Rightarrow IA = IB = IC = IS$$

$\Rightarrow$ I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$. Dễ thấy tứ giác $HAMI$ là hình chữ nhật.

Ta có

$$AM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{5},$$

$$IM = \frac{1}{2}SA = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

$$R = AI = \sqrt{AM^2 + IM^2} = \sqrt{5 + \frac{5}{4}} = \frac{5}{2}.$$

Chọn B.

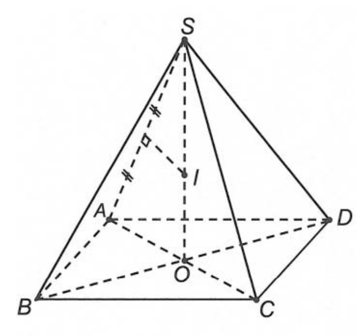
Lưu ý: có thể thay mặt phẳng trung trực của SA bằng đường trung trực của SA xét trong mặt phẳng (SAM).

Bài tập 4. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là

A. $a\sqrt{2}.$ **B.** $a.$ **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}.$ **D.** $2a.$

Hướng dẫn giải

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$



Vậy SO là trục của đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$

Trong (SAC) gọi (d) là trung trực của SA và I là giao điểm của (d) với SO

$$\Rightarrow \begin{cases} I \in (SO) \\ I \in (d) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} IA = IB = IC = ID \\ IA = IS \end{cases}$$

$\Rightarrow IA = IB = IC = ID = IS.$

Vậy I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Bán kính mặt cầu là $R = \dfrac{SA^2}{2SO} = \dfrac{SA^2}{2\sqrt{SA^2 - AO^2}} = \dfrac{a^2}{2\sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}.$

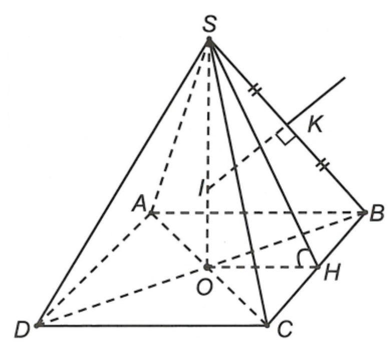
Chọn C.

Bài tập 5. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, các mặt bên tạo với đáy một góc 60°. Diện tích S_{mc} của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là

A. $S_{mc} = \dfrac{25\pi a^2}{3}$. **B.** $S_{mc} = \dfrac{32\pi a^2}{3}$. **C.** $S_{mc} = \dfrac{8\pi a^2}{3}$. **D.** $S_{mc} = \dfrac{a^2}{12}$.

Hướng dẫn giải

Trục của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy là SO. Mặt phẳng trung trực của SB cắt SO tại I, cắt SB tại K thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.



Gọi H là trung điểm BC thì $\widehat{SHO} = 60^o$.

Xét tam giác vuông SHO, ta có

$\tan 60^o = \dfrac{SO}{OH} \Rightarrow SO = a\sqrt{3}.$

Từ đó suy ra

$SB = \sqrt{SO^2 + OB^2} = \sqrt{3a^2 + 2a^2} = a\sqrt{5}.$

Ta có $\Delta SKI \backsim \Delta SOB\,(g.g)$.

$$\Rightarrow \frac{SK}{SO} = \frac{SI}{SB} \Rightarrow SI = \frac{SK.SB}{SO} \Rightarrow SI = \frac{a\sqrt{5}.\dfrac{a\sqrt{5}}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{5a}{2\sqrt{3}} = \frac{5a\sqrt{3}}{6}.$$

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

$S_{mc} = 4\pi R^2 = 4\pi \dfrac{75a^2}{36} = \dfrac{25\pi a^2}{3}.$

Chọn A.

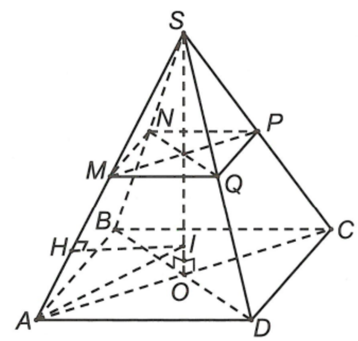
Bài tập 6. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy $a\sqrt{2}$, cạnh bên $2a$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện $ABCDMNPQ$.

A. $R = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $R = a$. **C.** $R = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. **D.** $R = \dfrac{a\sqrt{10}}{4}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $(ABCD)//(MNPQ)$. Gọi $\{O\} = AC \cap BD$.

Mà *S.ABCD* là hình chóp tứ giác đều nên $SO \perp (ABCD)$. Nên *SO* là trục của hai đáy (*ABCD*) và (*MNPQ*).



Trong mặt phẳng *(SAO*) kẻ đường trung trực d của đoạn thẳng *AM* cắt *SA, SO* tại *H, I*.

Khi đó *I* là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện *ABCDMNPQ* và bán kính là *IA*.

Ta có $SA = SB = SC = SD = 2a$

$AB = BC = CD = DA = a\sqrt{2}$.

Lại có $SH = \frac{3}{4}SA = \frac{3}{4}.2a = \frac{3a}{2} \Rightarrow HA = \frac{1}{4}SA = \frac{a}{2}$.

$\Rightarrow AC = AB\sqrt{2} = 2a \Rightarrow AO = a \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = a\sqrt{3}$.

Mặt khác $\Delta SHI \backsim \Delta SOA(g.g) \Rightarrow \frac{HI}{OA} = \frac{SH}{SO} \Rightarrow HI = \frac{OA.SH}{SO} = \frac{a.\frac{3a}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}a}{2}$.

Bán kính mặt cầu cần tìm là $R = AI = \sqrt{HI^2 + HA^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a$.

Chọn B.

Cách 3. Dựa vào trục của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy và trục của đường tròn ngoại tiếp một mặt bên

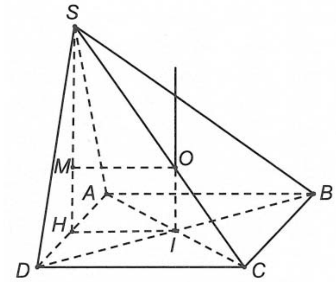
Bài tập 1. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình chữ nhật, $AB = 2a, BC = a$, hình chiếu của *S* lên mặt phẳng (*ABCD*) là trung điểm *H* của $AD, SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABCD* bằng bao nhiêu?

A. $\frac{16\pi a^2}{3}$. **B.** $\frac{16\pi a^2}{9}$. **C.** $\frac{4\pi a^3}{3}$. **D.** $\frac{4\pi a^2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Gọi *I* là giao điểm của *AC* và *BC*, qua *I* dựng đương thẳng *d* song song với $SH \Rightarrow d \perp (ABCD)$.

Gọi *M* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *SAD*, qua *M* kẻ đường thẳng *d'* vuông góc với *mp*(*SAD*), *d'* cắt *d* tại $O \Rightarrow O$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABCD* và bán kính bằng $R = OS = \sqrt{MO^2 + MS^2}$.



Với $OM = IH = \frac{AB}{2} = a, MS = r$ (*r* là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác *SAB*).

Lại có, ΔSAD cân tại *A*, cạnh $AD = a$, đường cao $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ suy ra tam giác *SAD* đều $r = AM = \dfrac{2}{3}SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow R^2 = \dfrac{4a^2}{3}$ (*R* là bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABCD*).

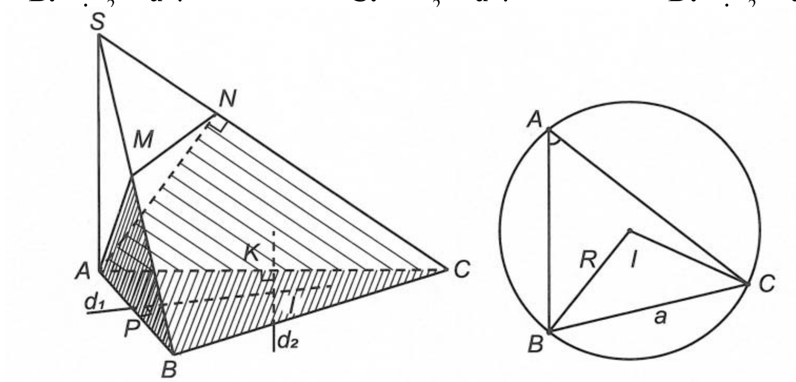
Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABCD* bằng $S = 4\pi R^2 = \dfrac{16\pi a^2}{3}$.

Chọn A.

Bài tập 2. Cho hình chóp *S.ABC* có $SA \perp (ABC)$. Gọi *M*, *N* lần lượt là hình chiếu của *A* trên *SB*, *SC*. Biết $\widehat{BAC} = \alpha, BC = a.$ Diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện *ABCMN* là

A. $\dfrac{\pi}{\cos^2\alpha}a^2$. **B.** $\dfrac{\pi}{\text{[illegible]}}a^2$. **C.** $\dfrac{4\pi}{\text{[illegible]}}a^2$. **D.** $\dfrac{4\pi}{\text{[illegible]}}a^2$.

Hướng dẫn giải



+) Gọi *K*, *P* lần lượt là trung điểm của *AC* và *AB*.

ΔACN vuông tại $N \Rightarrow K$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔACN.

ΔABM vuông tại $M \Rightarrow P$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABM.

+) Hai mặt phẳng (*SAB*), (*ABC*) vuông góc và cắt nhau theo giao tuyến *AB* nên gọi d_1 là trục của đường tròn ngoại tiếp ΔABM thì d_1 qua P, $d_1 \subset (ABC)$ và $d_1 \perp AB$. Tương tự, gọi d_2 là trục của đường tròn ngoại tiếp ΔACN thì d_2 qua $K, d_2 \subset (ABC)$ và $d_2 \perp AC$.

+) Rõ ràng, trong mặt phẳng (*ABC*) thì d_1d_2 lần lượt là đường trung trực của các cạch *AB*, *AC* nên hai đường này cắt nhau tại tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Do đó, tâm mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện *ABCMN* cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC, bán kính *R* của mặt cầu này cũng chính là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

+) Áp dụng định lí sin cho ΔABC ta được $R = \dfrac{BC}{2\sin A} = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$.

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện *ABCMN* là $S = 4\pi R^2 = \dfrac{\pi a^2}{\sin^2\alpha}$.

Chọn B.

Lưu ý:

Cách 2: Vẽ đường kính *AE* của đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*. Khi đó *A, M, N, B, C* cùng nhìn *AE* góc 90°.

Áp dụng định lí sin cho ΔABC ta được

$$R = \frac{BC}{2\sin A} = \frac{a}{2\sin\alpha}.$$

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện *ABCMN* là

$$S = 4\pi R^2 = \frac{\pi a^2}{\sin^2\alpha}.$$

Dạng 2. Mặt cầu nội tiếp khối đa diện

Mặt cầu nội tiếp khối đa diện là mặt cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của khối đa diện.

Phương pháp giải

Xác định được và hiểu rõ khoảng cách từ tâm của mặt cầu nội tiếp khối đa diện tới các mặt của khối đa diện chính là bán kính của mặt cầu nội tiếp khối đa diện. Từ đó có thể tính được bán kính, diện tích xung quanh của mặt cầu, thể tích của khối cầu và giải được các bài toán liên quan.

Ví dụ: Thể tích khối cầu nội tiếp hình lập phương có cạnh bằng 1 là

A. $\frac{\pi}{12}$. **B.** $\frac{\pi}{3}$. **C.** $\frac{2\pi}{3}$. **D.** $\frac{\pi}{6}$.

Hướng dẫn giải

Khối cầu nội tiếp hình lập phương có tâm trùng với tâm của hình lập phương và tiếp xúc với các mặt của hình lập phương tại tâm của các hình vuông là các mặt của hình lập phương.

Suy ra bán kính $R = \frac{1}{2}$.

Thể tích khối cầu nội tiếp hình lập phương là $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{\pi}{6}$.

Chọn D.

Bài tập mẫu

Bài tập 1. Cho hình lập phương có thể tích bằng $64a^3$. Thể tích của khối cầu nội tiếp của hình lập phương đó bằng

A. $V = \frac{64\pi a^3}{3}$. **B.** $V = \frac{8\pi a^3}{3}$. **C.** $V = \frac{32\pi a^3}{3}$. **D.** $V = \frac{16\pi a^3}{3}$.

Hướng dẫn giải

Hình lập phương có thể tích bằng $64a^3$, suy ra cạnh hình lập phương là 4a.

Khối cầu nội tiếp hình lập phương có bán kính bằng $\frac{1}{2}$ cạnh hình lập phương $\Rightarrow R = 2a$.

Vậy $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{32\pi a^3}{3}$.

Chọn C.

Bài tập 2. Cho hình chóp *S.ABC* có đáy là tam giác vuông tại $B, AB = 8, BC = 6$. Biết $SA = 6$ và *SA* vuông góc với *mp*(*ABC*). Tính thể tích khối cầu có tâm thuộc phần không gian bên trong của hình chóp và tiếp xúc với tất cả các mặt của hình chóp *S.ABC*.

A. $\frac{16}{9}\pi.$ **B.** $\frac{625}{81}\pi.$ **C.** $\frac{256}{81}\pi.$ **D.** $\frac{25}{9}\pi.$

Hướng dẫn giải

Gọi I và r lần lượt là tâm và bán kính của hình cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của hình chóp $S.ABC$.

Khi đó

$$V_{S.ABC} = V_{I.ABC} + V_{I.SBC} + V_{I.SAB} + V_{I.SAC} = \frac{1}{3}r\left(S_{\Delta ABC} + S_{\Delta SAB} + S_{\Delta SBC} + S_{\Delta SAC}\right) = \frac{r.S_{TP}}{3}$$

$$\Rightarrow r = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{TP}}.$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.6.\frac{1}{2}.8.6 = 48;$$

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta SAB} = 24; S_{\Delta SBC} = S_{\Delta SAC} = 30 \Rightarrow S_{TP} = 108.$$

Vậy $r = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{TP}} = \frac{3.48}{108} = \frac{4}{3} \Rightarrow V_{mc} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{256}{81}\pi.$

Chọn C.

Dạng 3. Bài toán cực trị

1. Phương pháp giải

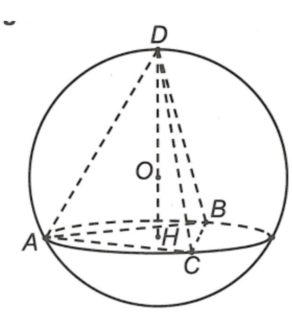
Tương tự như bài toán cực trị về hình nón, hình trụ ta thường đánh giá trực tiếp dựa vào hình hoặc biểu diễn hay quy đại lượng cần tìm cực trị phụ thuộc vào một yếu tố sau đó đánh giá tìm ra đáp án.

Ví dụ: Cho mặt cầu bán kính $R = 5cm.$ Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có chu vi bằng 8πcm. Bốn điểm A, B, C, D thay đổi sao cho A, B, C thuộc đường tròn (C), điểm D thuộc $(S)\left(D \notin (C)\right)$ và tam giác ABC đều. Thể tích lớn nhất của tứ diện $ABCD$ bằng

A. $20\sqrt{3}cm^3.$ **B.** $32\sqrt{3}cm^3.$ **C.** $60\sqrt{3}cm^3.$ **D.** $96\sqrt{3}cm^3.$

Hướng dẫn giải

Gọi H là hình chiếu của D trên mặt phẳng (P). Đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC có chu vi bằng 8πcm.



Suy ra bán kính đường tròn $R = \frac{8\pi}{2\pi} = 4(cm).$

Suy ra cạnh của tam giác ABC bằng $4\sqrt{3}(cm)$

Suy ra $S_{\Delta ABC} = \frac{\left(4\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}\left(cm^2\right)$ không đổi

Do đó thể tích khối tứ diện $ABCD$ lớn nhất khi $d\left(D,(ABC)\right)$ lớn nhất

$\Leftrightarrow$ D và O nằm cùng phía SO với mặt phẳng (P) và D, O, H thẳng hàng

$$\Leftrightarrow DH = DO + OH = DO + \sqrt{OA^2 - AH^2}$$

$$= 5 + \sqrt{25 - 16} = 8.$$

Khi đó $V_{\max}=\frac{1}{3}.12\sqrt{3}.8=32\sqrt{3}\left(cm^3\right)$.

Chọn B.

2. Bài tập mẫu

Bài tập 1. Cho hai mặt cầu $(S_1),(S_2)$ có cùng tâm *I* và bán kính lần lượt là 2 và $\sqrt{10}$. Các điểm *A*, *B* thay đổi thuộc (S_1) còn *C*, *D* thay đổi thuộc (S_2) sao cho có tứ diện *ABCD*. Khi thể tích khối tứ diện *ABCD* đạt giá trị lớn nhất thì khoảng cách giữa hai đường thẳng *AB* và *CD* bằng

A. $\sqrt{10}$. **B.** 3. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Để có tứ diện *ABCD* thì *AB* và *CD* không đồng phẳng.

Gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính của các mặt cầu (S_1) và $(S_2)\Rightarrow R_1=2;R_2=\sqrt{10}$.

Gọi *K* là trung điểm của *CD* và *h* là khoảng cách giữa hai đường thẳng *AB* và *CD*.

Ta $CD=2CK, AB\le 2R_1=4, \sin\left(AB,CD\right)\le 1$.

Thể tích khối tứ diện *ABCD* là

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}AB.CD.\sin\left(AB,CD\right).d\left(AB,CD\right)\le\frac{1}{6}.4.CD.h$$

$$\overset{Co-si}{\le}\frac{4}{3}\sqrt{h^2+CK^2}\le\frac{4}{3}\sqrt{IK^2+CK^2}.$$

Xét ΔICK vuông tại *K* có $IK^2+CK^2=CI^2=R_2^2$.

Khi đó $V_{ABCD}\le\frac{4}{3}R_2=\frac{4}{3}\sqrt{10}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}AB\perp CD\\AB=4\\h=IK=CK=\sqrt{5}\end{cases}$

Chọn C.

Bài tập 2: Cho tam giác *ABC* đều cạnh *a*, đường thẳng *d* đi qua *A* và vuông góc với mặt phẳng (*ABC*). Gọi *S* là điểm thay đổi trên đường thẳng *d*, *H* là trực tâm tam giác *SBC*. Biết rằng khi *S* thay đổi trên đường thẳng *d* thì điểm *H* nằm trên đường (*C*). Trong số các mặt cầu chứa đường (*C*), bán kính mặt cầu nhỏ nhất là

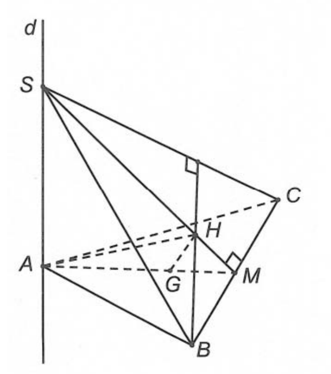
A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** a. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Hướng dẫn giải

Gọi *M* là trung điểm *BC* suy ra $AM\perp BC;SM\perp BC$.

Gọi *G* là trọng tâm tam giác *ABC*, vì tam giác *ABC* đều cạnh a nên $AM=\frac{a\sqrt{3}}{2};MG=\frac{1}{3}MA=\frac{a\sqrt{3}}{6}$ suy ra $MG.MA=\frac{a^2}{4}$.

Mặt khác H trực tâm tam giác SBC nên tam giác BMH và tam giác SMC là hai tam giác đồng dạng nên



$$\frac{BM}{SM}=\frac{MH}{MC}\Leftrightarrow MH.MS=BM.MC=\frac{a^2}{4}.$$

Do đó $MH.MS=MG.MA$ hay $\frac{MH}{MG}=\frac{MA}{MS}$ nên tam giác MHG và tam giác MAS đồng dạng suy ra $GH\perp SM$.

Vì H thuộc (SAM) cố định khi S thay đổi trên d và $GH\perp SM$ nên (C) là một phần của đường tròn đường kính GM do đó trong các mặt cầu chứa (C), mặt cầu có bán kính nhỏ nhất là mặt cầu nhận GM làm đường kính nên bán kính mặt cầu $R=\frac{GM}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{12}$.

Chọn C.

Dạng 4. Bài toán thực tế

1. Phương pháp giải

Nắm vững kiến thức các dạng toán trên để giải bài toán thực tế liên quan đến mặt cầu.

$$\mathrm{E}V_0=\frac{4}{3}\pi 3^3=36\pi\left(cm^3\right)$$

Bài tập: Người ta thả một viên bi có dạng hình cầu với bán kính bằng 3cm vào một cái ly dạng hình trụ đang chứa nước. Người ta thấy viên bi chìm xuống đáy ly và chiều cao của mực nước dâng lên thêm 1cm. Biết rằng chiều cao của mực nước ban đầu trong ly bằng 7,5cm. Tính thể tích V của khối nước ban đầu trong ly (kết quả lấy xấp xỉ).

A. $V=282,74cm^3$. **B.** $V=848,23cm^3$.

C. $V=636,17cm^3$. **D.** $V=1272,35cm^3$.

Hướng dẫn giải

Gọi V_0 là thể tích của viên bi.

Gọi R là bán kính của cái ly (không tính vỏ).

Theo bài ra ta có thể tích của cột nước dâng lên 1cm bằng thể tích viên bi nên ta có $\pi R^2.1=36\pi\Rightarrow R=6\left(cm\right)$

Suy ra thể tích V của khối nước ban đầu trong ly $\pi R^2.h=\pi.36.7,5=848,23\left(cm^3\right)$

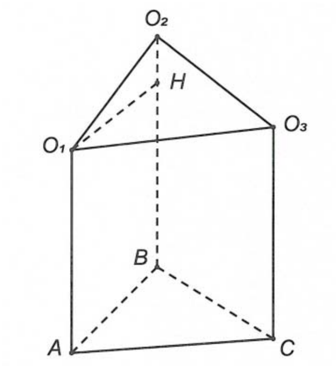
Chọn B.

2. Bài tập mẫu

Bài tập 1: Cho ba hình cầu tiếp xúc ngoài với nhau từng đôi một và cùng tiếp xúc với một mặt phẳng. Các tiếp điểm của các hình cầu trên mặt phẳng lập thành tam giác có các cạnh là 4, 2 và 3. Tích bán kính của ba hình cầu trên là

A. 12. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 9.

Hướng dẫn giải



Gọi $\left(O_1, r_1\right), \left(O_2, r_2\right), \left(O_3, r_3\right)$ lần lượt là 3 hình cầu thỏa mãn. Gọi *A*, *B*, *C* lần lượt là hình chiếu của O_1; O_2; O_3 trên mặt phẳng. Giả sử $AB = 4, BC = 2, AC = 3$.

Ta có $O_1A = r_1; O_2B = r_2; O_3C = r_3; O_1O_2 = r_1 + r_2; O_2O_3 = r_2 + r_3; O_3O_1 = r_3 + r_1$.

Kẻ $O_1H \perp BO_2 \left(H \in BO_2\right) \Rightarrow BH = r_1; O_2H = r_2 - r_1$.

Theo định lý Py-ta-go ta có

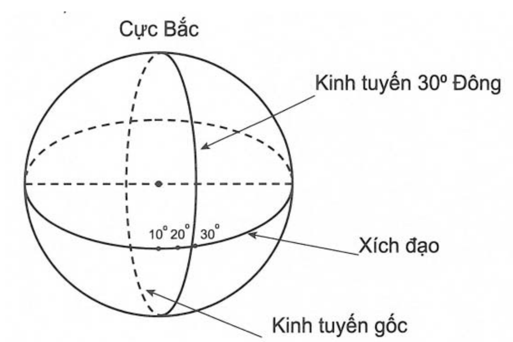
$$O_1O_2{}^2 = O_1H^2 + O_2H^2 \Leftrightarrow \left(r_1 + r_2\right)^2 = AB^2 + \left(r_2 - r_1\right)^2 \Leftrightarrow r_1r_2 = \frac{AB^2}{4}.$$

Tương tự ta có $r_2r_3 = \dfrac{BC^2}{4}; r_3r_1 = \dfrac{AC^2}{4}$.

Vậy $r_1r_2r_3 = \sqrt{\dfrac{AB^2BC^2CA^2}{64}} = 3$.

Chọn B

Bài tập 2. Cho quả địa cầu có độ dài đường kinh tuyến 30° Đông là 40πcm (tham khảo hình vẽ).



Độ dài đường xích đạo là:

A. $40\sqrt{3}\pi\, cm$. B. $40\pi\, cm$. C. $80\pi\, cm$. D. $\dfrac{80\pi}{\sqrt{3}}cm$.

Hướng dẫn giải

Đường xích đạo là đường vĩ tuyến lớn nhất. Độ dài đường xích đạo gấp hai lần đường kinh tuyến 30° Đông.

Vậy độ dài đường xích đạo là: $2.40\pi = 80\pi\left(cm\right)$.

Chọn C.

Bài tập 3. Quả bóng đá được dùng thi đấu tại các giải bóng đá Việt Nam tổ chức có chu vi của thiết diện qua tâm là 68,5cm. Quả bóng được ghép nối bởi các miếng da hình lục giác đều màu trắng và đen, mỗi miếng có diện tích 49,83cm^2. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu miếng da để làm quả bóng trên?

A. ≈ 40 (miếng da). **B.** ≈ 20 (miếng da).

C. ≈ 35 (miếng da). **D.** ≈ 30 (miếng da).

Hướng dẫn giải

Vì thiết diện qua tâm là đường tròn có chu vi là 68,5cm, nên giả sử bán kính mặt cầu là R ta có

$2\pi R = 68,5 \Rightarrow R = \dfrac{68,5}{2\pi}$.

Diện tích mặt cầu: $S_{xq} = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\dfrac{68,5}{2\pi}\right)^2 \approx 1493,59\left(cm^2\right)$.

Vì mỗi miếng da có diện tích 49,83cm^2 nên để phủ kín được mặt của quả bóng thì số miếng da cần là $\dfrac{1493,59}{49,83} \approx 29,97.$ Vậy phải cần ≈ 30 miếng da.

Chọn D.

Dạng 5. Dạng toán tổng hợp

1. Phương pháp giải

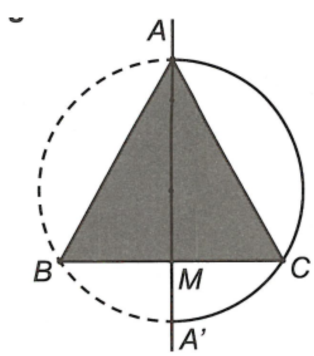
Sử dụng kiến thức về hình nón, hình trụ, hình cầu ở các dạng toán trên để giải bài toán tổng hợp.

Ví dụ: Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm I đường kính AA', M là trung điểm của BC. Khi quay tam giác ABM cùng với nửa hình tròn đường kính AA' xung quanh đường thẳng AM, ta được khối nón và khối cầu có thể tích lần lượt là V_1 và V_2. Tỷ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\dfrac{9}{4}$. **B.** 49 **C.** $\dfrac{27}{32}$. **D.** $\dfrac{9}{32}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.



Gọi a là cạnh ΔABC đều, suy ra $BM = \dfrac{a}{2}; AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}; IA = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Ta có $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{\frac{1}{3}\pi BM^2.AM}{\frac{4}{3}.\pi.IA^3}=\dfrac{1}{4}.\dfrac{\left(\frac{a}{2}\right)^2.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^3}=\dfrac{9}{32}.$

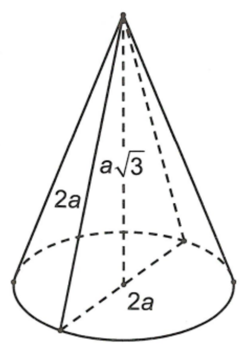
2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hình nón có thiết diện qua trục là một tam giác đều cạnh là 2a, có thể tích V_1 và hình cầu có đường kính bằng chiều cao hình nón, có thể tích V_2. Khi đó tỉ số thể tích $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{1}{3}.$ **B.** $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{2}{3}.$ **C.** $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{1}{2}.$ **D.** $\dfrac{V_1}{V_2}=1.$

Hướng dẫn giải

Chọn B.



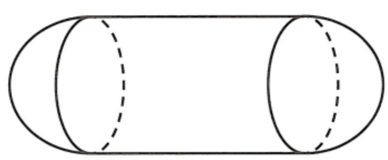
Cho hình nón có thiết diện qua trục là một tam giác đều cạnh là $2a$

$\Rightarrow I=2a, R=a, h=a\sqrt{3}\Rightarrow V_1=\dfrac{1}{3}a\sqrt{3}\pi a^2=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi a^3;$

$V_2=\dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi a^3.$

Vậy $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{2}{3}.$

Bài tập 2. Một cái bồn chứa nước gồm hai nửa hình cầu và một hình trụ (như hình vẽ).



Đường sinh của hình trụ bằng hai lần đường kính của hình cầu. Biết thể tích của bồn chứa nước là $\dfrac{128\pi}{3}m^3$. Tính diện tích xung quanh của cái bồn chứa nước theo đơn vị m^2.

A. $48\pi\ m^2$. **B.** $50\pi\ m^2$. **C.** $40\pi\ m^2$. **D.** $64\pi\ m^2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi x là bán kính hình cầu.

Ta có $l_t = 2d_c = 4R_c = 4R_t = 4x.$

Thể tích của bể nước là

$$V = V_t + V_c = \pi R_t^2 l_t + \frac{4}{3}\pi R_c^3 = \pi x^2.4x + \frac{4}{3}\pi x^3 = \frac{128\pi}{3}$$

$\Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2.$

Diện tích xung quanh của bể nước là

$$S = 2\pi R_t.l_t + 4\pi R_c^2 = 2.2\pi.8 + 4\pi.2^2 = 48\pi\left(m^2\right).$$