

Câu 1.(5,0 điểm)

1) Cho hàm số $y = x^2 + x - 1$ có đồ thị (P) . Tìm m để đường thẳng $d: y = -2x - m$ cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O (với O là gốc tọa độ).

2) Tìm tất cả các giá trị của tham số m ($m \in \mathbb{R}$) để phương trình $x^4 - (3m+1)x^2 + 6m - 2 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt đều lớn hơn -4 .

Câu 2.(5,0 điểm)

1) Giải bất phương trình: $(2x - 5 - \sqrt{x^2 - x + 25})\sqrt{x^2 - 5x + 6} \leq 0$.

2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3\sqrt{2x+y} + \sqrt{x-2y+1} = 5 \\ 2\sqrt{x-2y+1} - 5x = 10y + 9 \end{cases}$$

Câu 3.(2,0 điểm)

Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $BA = c$ và diện tích là S . Biết $S = b^2 - (a-c)^2$. Tính $\tan B$.

Câu 4.(3,0 điểm)

Cho tam giác ABC có $AB = c$, $AC = b$ và $BAC = 60^\circ$. Các điểm M, N được xác định bởi $\overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{NA} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{NB}$. Tìm hệ thức liên hệ giữa b và c để AM và CN vuông góc với nhau.

Câu 5.(3,0 điểm)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $A(1;2), B(3;-4)$. Tìm tọa độ điểm C sao cho $\triangle ABC$ vuông tại C và có góc $B = 60^\circ$.

Câu 6. (2,0 điểm) Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{2\sqrt{x}}{x^3 + y^2} + \frac{2\sqrt{y}}{y^3 + z^2} + \frac{2\sqrt{z}}{z^3 + x^2} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$$

----- **Hết** -----

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Câu 1.1 (3,0 đ)

1) Cho hàm số $y = x^2 + x - 1$ có đồ thị (P) . Tìm m để đường thẳng $d: y = -2x - m$ cắt đồ thị (P) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O (O là gốc tọa độ).

PT hoành độ giao điểm: $x^2 + 3x - 1 + m = 0$. (1) Đề d cắt (P) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ PT (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 13 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{13}{4}. (*)$	1,0
Giả sử $A(x_1; -2x_1 - m); B(x_2; -2x_2 - m)$. Theo hệ thức Vi-et: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -3 \\ x_1 \cdot x_2 = m - 1 \end{cases}$	0,5
Ta có ΔOAB vuông tại O $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow 5x_1x_2 + 2m(x_1 + x_2) + m^2 = 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 5 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$	1,0
Đối chiếu đk $(*)$ có 2 giá trị của m là $m = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$	0,5

Câu 1.2(2,0 điểm)

2) Tìm tất cả các giá trị m để phương trình $x^4 - (3m+1)x^2 + 6m - 2 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt đều lớn hơn -4.

Đặt $t = x^2 \geq 0$, thay vào phương trình ta được $t^2 - (3m+1)t + 6m - 2 = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 3m - 1 \end{cases}$ phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt khi	0,5
$\Leftrightarrow \begin{cases} 3m - 1 > 0 \\ 3m - 1 \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{3} \\ m \neq 1 \end{cases}$. Khi đó pt đã cho có 4 nghiệm là $\pm\sqrt{2}; \pm\sqrt{3m-1}$	0,5
Để các nghiệm đều lớn hơn -4 thì $-\sqrt{3m-1} > -4 \Leftrightarrow \sqrt{3m-1} < 4 \Leftrightarrow m < \frac{17}{3}$.	0,5
Vậy các giá trị của m là $m \in \left(\frac{1}{3}; \frac{17}{3}\right) \setminus \{1\}$	0,5

Câu 2.1(3,0 điểm) Giải bất phương trình: $(2x - 5 - \sqrt{x^2 - x + 25})\sqrt{x^2 - 5x + 6} \leq 0$

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 2 \end{cases}$	0,5
*) Nếu $x = 3$ hoặc $x = 2$ thì bất phương trình nghiệm đúng.	0,5
*) Nếu $\begin{cases} x > 3 \\ x < 2 \end{cases}$ thì bất PT đã cho $\Leftrightarrow 2x - 5 - \sqrt{x^2 - x + 25} \leq 0$ (a)	0,5
(a) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + 25} \geq 2x - 5 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5 < 0 \text{ (Do } x^2 - x + 25 > 0) \text{ (1)} \\ \begin{cases} 2x - 5 \geq 0 \\ x^2 - x + 25 \geq 4x^2 - 20x + 25 \end{cases} \text{ (2)} \end{cases}$	0,5

+) Giải (1) và kết hợp đk $\Rightarrow x \in (-\infty; 2)$.	
+) Giải (2): $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{5}{2} \\ 3x^2 - 19x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{5}{2} \\ 0 \leq x \leq \frac{19}{3} \end{cases}$ Kết hợp đk $\Rightarrow x \in \left[3; \frac{19}{3}\right]$	0,5
Tập nghiệm $S = (-\infty; 2] \cup \left[3; \frac{19}{3}\right]$	0,5

Câu 2.2(2,0 điểm) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3\sqrt{2x+y} + \sqrt{x-2y+1} = 5 \\ 2\sqrt{x-2y+1} - 5x = 10y + 9 \end{cases}$$

ĐK: $2x+y \geq 0, x-2y+1 \geq 0$. Đặt $u = \sqrt{2x+y}, (u \geq 0)$ và $v = \sqrt{x-2y+1}, (v \geq 0)$. Ta được hệ phương trình: $\begin{cases} 3u + v = 5 \\ 4u^2 - 3v^2 - 2v + 12 = 0 \end{cases}$	0,5
$\Leftrightarrow \begin{cases} v = 5 - 3u \\ 23u^2 - 96u + 73 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 5 - 3u \\ u = 1 \\ u = \frac{73}{23} \end{cases}$	0,5
Với $u = 1 \Rightarrow v = 2 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+y} = 1 \\ \sqrt{x-2y+1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y = 1 \\ x-2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \text{ (t/m)}$	0,5
Với $u = \frac{73}{23} \Rightarrow v = -\frac{104}{23}$, (loại vì đk $v \geq 0$). Vậy hệ phương trình có nghiệm: $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$	0,5

Câu 3.(2,0 điểm) Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, BA = c$ và diện tích là S . Biết $S = b^2 - (a-c)^2$. Tính $\tan B$.

Ta có: $S = b^2 - (a-c)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}ac \sin B = a^2 + c^2 - 2ac \cos B - a^2 - c^2 + 2ac$	0,5
$\Leftrightarrow \frac{1}{2}ac \sin B = 2ac(1 - \cos B) \Leftrightarrow \sin B = 4(1 - \cos B) \Leftrightarrow \cos B = 1 - \frac{1}{4}\sin B (*)$	0,5
Mặt khác $\sin^2 B + \cos^2 B = 1 \Leftrightarrow \sin^2 B + \left(1 - \frac{1}{4}\sin B\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{17}{16}\sin^2 B - \frac{1}{2}\sin B = 0$ $\Leftrightarrow \sin B = \frac{8}{17} \text{ (do } \sin B > 0 \text{)}$	0,5
Kết hợp với (*) ta được: $\cos B = \frac{15}{17} \Rightarrow \tan B = \frac{8}{15}$.	0,5

Câu 4.1(3,0 điểm) Cho tam giác ABC có $AB = c, AC = b$ và $BAC = 60^\circ$. Các điểm M, N được xác định bởi $\overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{NA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{NB}$. Tìm hệ thức liên hệ giữa b và c để AM và CN vuông góc với nhau.

Ta có: $\overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM} = -2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}) \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$	0,75
Tương tự ta cũng có: $3\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$	0,75

Vậy: $AM \perp CN \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CN} = 0 \Leftrightarrow (2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = 0$	0,5
$\Leftrightarrow (2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}) = 0 \Leftrightarrow 2AB^2 - 3AC^2 - 5\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$	0,5
$\Leftrightarrow 2c^2 - 3b^2 - \frac{5bc}{2} = 0 \Leftrightarrow 4c^2 - 6b^2 - 5bc = 0$	0,5

Câu 5. (3,0 điểm) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $A(1;2), B(3;-4)$. Tìm tọa độ điểm C sao cho ΔABC vuông tại C và có góc $B = 60^\circ$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; -6)$, Giả sử $C(x; y) \Rightarrow \overrightarrow{AC} = (x-1; y-2); \overrightarrow{BC} = (x-3; y+4)$.	0,5
ΔABC vuông tại C và có góc $B = 60^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} AC \perp BC \\ BC = \frac{1}{2}AB \end{cases}$	0,5
$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ BC^2 = \frac{AB^2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1) \cdot (x-3) + (y-2)(y+4) = 0 \\ (x-3)^2 + (y+4)^2 = 10 \end{cases}$	0,5
$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 2y - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x + 8y + 25 = 10 \end{cases}$	0,5
$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 2y - 5 = 0 \\ 2x - 6y - 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 2y - 5 = 0 \\ x = 3y + 10 \end{cases}$	0,5
$\Leftrightarrow \begin{cases} 9y^2 + 60y + 100 + y^2 - 12y - 40 + 2y - 5 = 0 \\ x = 3y + 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y + 10 \\ 10y^2 + 50y + 55 = 0 \end{cases}$	0,5
$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5-3\sqrt{3}}{2}, y = \frac{-5-\sqrt{3}}{2} \\ x = \frac{5+3\sqrt{3}}{2}, y = \frac{-5+\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ . KL : ...}$	0,5

Câu 6. (2,0 điểm) Cho $x, y, z > 0$. CMR: $\frac{2\sqrt{x}}{x^3+y^2} + \frac{2\sqrt{y}}{y^3+z^2} + \frac{2\sqrt{z}}{z^3+x^2} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$

Áp dụng BĐT côsi cho các số dương x, y, z ta có $x^3 + y^2 \geq 2\sqrt{x^3 y^2}; y^3 + z^2 \geq 2\sqrt{y^3 z^2}; z^3 + x^2 \geq 2\sqrt{z^3 x^2}$	0,5
$\Rightarrow \frac{2\sqrt{x}}{x^3+y^2} + \frac{2\sqrt{y}}{y^3+z^2} + \frac{2\sqrt{z}}{z^3+x^2} \leq \frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x^3 y^2}} + \frac{2\sqrt{y}}{2\sqrt{y^3 z^2}} + \frac{2\sqrt{z}}{2\sqrt{z^3 x^2}} \quad (1)$ $\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}}{x^3+y^2} + \frac{2\sqrt{y}}{y^3+z^2} + \frac{2\sqrt{z}}{z^3+x^2} \leq \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}$	0,5
Mặt khác, ta có: $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \geq \frac{2}{xy}; \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \geq \frac{2}{yz}; \frac{1}{z^2} + \frac{1}{x^2} \geq \frac{2}{zx}$ $\Rightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \geq \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \quad (2)$	0,5
Từ (1), (2) ta có $\frac{2\sqrt{x}}{x^3+y^2} + \frac{2\sqrt{y}}{y^3+z^2} + \frac{2\sqrt{z}}{z^3+x^2} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$ Dấu "=" xảy ra $x = y = z = 1$	0,5

Chú ý: Các cách giải khác đúng cho điểm tương tự.