GIẢI ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TỈNH THỪA THIÊN HUẾ NĂM HỌC 2018 - 2019.

(Lời giải gồm 05 trang)

Câu 1: **(4,0 điểm)**

Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi I là giao điểm hai đường tiệm cận của đồ thị (C). Tiếp tuyến tại M của đồ thị (C) cắt hai đường tiệm cận của đồ thị (C) lần lượt tại hai điểm A và B.

a) Chứng minh M là trung điểm của đoạn thẳng AB.

b) Xác định tọa độ điểm M để chu vi tam giác IAB nhỏ nhất.

Giải:

a) Ta có $y'=-\dfrac{1}{(x-1)^2}$. Gọi $M\left(a;\dfrac{2a-1}{a-1}\right)$ $(a\neq 1)$ là tiếp điểm.

Phương trình tiếp tuyến d của đồ thị (C) tại điểm M là: $y=-\dfrac{1}{(a-1)^2}(x-a)+\dfrac{2a-1}{a-1}$.

Giả sử A,B lần lượt là giao điểm của d với đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang.

Suy ra: $A\left(1;\dfrac{2a}{a-1}\right)$, $B(2a-1;2)$

Khi đó: $\begin{cases} x_A+x_B=1+(2a-1)=2a=2x_M \\ y_A+y_B=\dfrac{2a}{a-1}+2=\dfrac{4a-2}{a-1}=2y_M \end{cases}$ $\Rightarrow M$ là trung điểm của đoạn thẳng AB.

b) Ta có $IA=\dfrac{2}{|a-1|}$; $IB=2|a-1|\Rightarrow IA.IB=4$

Tam giác IAB vuông tại I nên:

$$IA+IB+AB=IA+IB+\sqrt{IA^2+IB^2}\geq 2\sqrt{IA.IB}+\sqrt{2IA.IB}=4+2\sqrt{2}$$

Vậy chu vi tam giác IAB nhỏ nhất bằng $4+2\sqrt{2}$ khi và chỉ khi:

$$IA=IB\Leftrightarrow \frac{2}{|a-1|}=2|a-1|\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0\Rightarrow M(0;1) \\ a=2\Rightarrow M(2;3) \end{array}\right.$$

Câu 2: **(4,0 điểm)**

a) Giải phương trình $2\sqrt{2}\cos 2x-\sin 2x\cos\left(x+\dfrac{3\pi}{4}\right)-4\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0$ $\quad (x\in\mathbb{R})$.

b) Giải phương trình $2x+3+(x+1)\sqrt{x^2+6}+(x+2)\sqrt{x^2+2x+9}=0$ $\quad (x\in\mathbb{R})$.

Giải:

a) Phương trình tương đương với:

$$2\sqrt{2}(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)-\sin 2x\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right)-4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 4(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)+\sin 2x(\cos x+\sin x)-4(\sin x+\cos x)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos x+\sin x=0 & (1) \\ 4(\cos x-\sin x)+\sin 2x-4=0 & (2) \end{array}\right.$$

*Ta có $(1) \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

*Giải (2): Đặt $t = \cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \in \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right] \Rightarrow \sin 2x = 1 - t^2$

Phương trình trở thành: $4t + 1 - t^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 3 \quad (loai) \end{array}\right.$

Với $t = 1$ ta có $\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$

Vậy phương trình ban đầu có 3 họ nghiệm là $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi;\ x = k2\pi;\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

b) Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x^2 + 2x + 9} > 0 \\ v = \sqrt{x^2 + 6} > 0 \end{cases} \Rightarrow u^2 - v^2 = 2x + 3 \Leftrightarrow x = \frac{u^2 - v^2 - 3}{2}$

Phương trình đã cho trở thành: $u^2 - v^2 + v.\left(\frac{u^2 - v^2 - 1}{2}\right) + u.\left(\frac{u^2 - v^2 + 1}{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow 2\left(u^2 - v^2\right) + (u + v)\left(u^2 - v^2\right) + (u - v) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u - v = 0 \\ 2(u + v) + (u + v)^2 + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v \\ u + v = -1 \quad (vn) \end{array}\right.$

Với $u = v$ ta có $\sqrt{x^2 + 6} = \sqrt{x^2 + 2x + 9} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$.

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm là $x = -\frac{3}{2}$.

Câu 3: (4,0 điểm)

a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 - y^3 - 3x^2 + 4x - y - 2 = 0 \\ \sqrt{2x + y + 5} - \sqrt{3 - x - y} = x^3 - 3x^2 - 10y - 10 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$.

b) Cho tập $A = \{0;1;2;3;4;5;6\}$. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau được chọn từ các phần tử của tập A. Chọn ngẫu nhiên 1 số từ tập S. Tính xác suất để số được chọn chia hết cho 15.

Giải:

a) Điều kiện $\begin{cases} 2x + y + 5 \geq 0 \\ 3 - x - y \geq 0 \end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương: $(x - 1)^3 + (x - 1) = y^3 + y$

$\Leftrightarrow (x - y - 1)\left[(x - 1)^2 + y(x - 1) + y^2 + 1\right] = 0$

$\Leftrightarrow y = x - 1$

Thay $y = x - 1$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được phương trình:

$$\sqrt{3x + 4} - \sqrt{4 - 2x} = x^3 - 3x^2 - 10x$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x}{\sqrt{3x + 4} + \sqrt{4 - 2x}} = x(x - 5)(x + 2)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ (x - 5)(x + 2)\left(\sqrt{3x + 4} + \sqrt{4 - 2x}\right) = 5 \quad (*) \end{array}\right.$$

Do $-\frac{4}{3} \le x \le 2$ nên $VT(*) < 0$ nên phương trình (*) vô nghiệm.

b) Gọi $n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ là số tự nhiên cần tìm, trong đó các chữ số lấy từ tập A.
*Số phần tử của tập S là số các số tự nhiên có 5 chữ số với các chữ số khác nhau lấy từ tập A.
Ta có $n(S) = 6A_6^4 = 2160$

*Do n chia hết cho 15 nên n chia hết cho 3 và 5. Suy ra: $a_5 = 0$ hoặc $a_5 = 5$.

TH1: $a_5 = 0 \Rightarrow n = \overline{a_1a_2a_3a_40}$ trong đó 4 số a_1, a_2, a_3, a_4 lấy từ tập $\{1;2;3;4;5;6\}$

Khi đó để n chia hết cho 3 thì $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \vdots 3$

Do 4 số a_1, a_2, a_3, a_4 lấy từ tập $\{1;2;3;4;5;6\}$ nên xảy ra 2TH sau:

i) Trong 4 số đó gồm: hai số chia hết cho 3, một số chia 3 dư 1, một số chia 3 dư 2
Có tất cả: $A_4^2.2.2.2 = 96$ số.

ii) Trong 4 số đó gồm: hai số chia 3 dư 1, hai số chia 3 dư 2
Có tất cả: $A_4^2.2.2 = 48$ số.

TH2: $a_5 = 5 \Rightarrow n = \overline{a_1a_2a_3a_45}$ trong đó 4 số a_1, a_2, a_3, a_4 lấy từ tập $\{0;1;2;3;4;6\}$

Khi đó để n chia hết cho 3 thì $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$ chia 3 dư 1.

Do 4 số a_1, a_2, a_3, a_4 lấy từ tập $\{0;1;2;3;4;6\}$ nên xảy ra 2TH sau:

iii) Trong 4 số đó gồm: ba số chia hết cho 3, một số chia 3 dư 1
*Nếu $a_1 = 3$ thì a_2, a_3, a_4 là các số trong bộ ba số $\{0;6;1\}, \{0;6;4\}$ nên có $3! + 3! = 12$ số
*Nếu $a_1 = 6$ thì a_2, a_3, a_4 là các số trong bộ ba số $\{0;3;1\}, \{0;3;4\}$ nên có $3! + 3! = 12$ số
*Nếu $a_1 = 1$ hoặc $a_1 = 4$ thì a_2, a_3, a_4 là các số trong bộ ba số $\{0;3;6\}$ nên có $3! + 3! = 12$ số
Có tất cả: 36 số.

iv) Trong 4 số đó gồm: một số chia hết cho 3, hai số chia 3 dư 1, một số chia 3 dư 2
*Nếu $a_1 = 3$ hoặc $a_1 = 6$ thì a_2, a_3, a_4 là các số trong bộ ba số $\{1;2;4\}$ nên có $3! + 3! = 12$ số
*Nếu $a_1 = 1$ thì a_2, a_3, a_4 là các số trong bộ ba số $\{2;4;6\}, \{2;4;3\}, \{2;4;0\}$ nên có $3.3! = 18$ số
*Nếu $a_1 = 2$ hoặc $a_1 = 4$ thì tương tự đều có 18 số thỏa mãn.
Có tất cả: $12 + 18.3 = 66$ số.

Vậy xác suất cần tính là: $\frac{96 + 48 + 36 + 66}{2160} = \frac{41}{360}$.

Bài 4: **(3,0 điểm)**

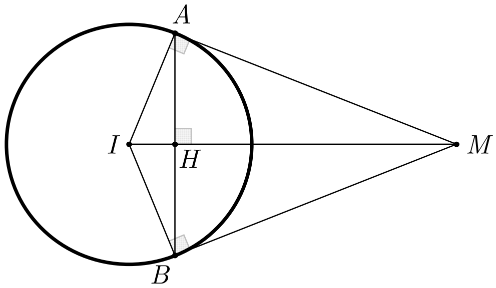
Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta: 5x - 2y - 19 = 0$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$. Từ một điểm M nằm trên đường thẳng Δ kẻ hai tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (C) với A, B là hai tiếp điểm. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác AMB biết $AB = \sqrt{10}$.

Giải:

*Các tam giác IAM, IBM là các tam giác vuông nên đường tròn đường kính IM đi qua hai điểm A, B nên đường tròn ngoại tiếp tam giác AMB là đường tròn đường kính IM.

*Đường tròn (C) có tâm $I(2;1)$ bán kính $R = \sqrt{5}$

Ta có $IH = \sqrt{IA^2 - AH^2} = \sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2} \Rightarrow IM = \frac{IA^2}{IH} = \sqrt{10}$



Gọi $M\left(a;\frac{5a-19}{2}\right) \in \Delta$. Ta có $IM^2 = 10 \Leftrightarrow (a-2)^2 + \left(\frac{5a-19}{2} - 1\right)^2 = 10$

Giải ra được $\left[\begin{array}{l} a = 3 \\ a = \frac{139}{29} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M(3;-2) \\ M\left(\frac{139}{29};\frac{72}{29}\right) \end{array}\right.$

*Với $M(3;-2)$ thì trung điểm IM là $\left(\frac{5}{2};-\frac{1}{2}\right)$, phương trình đường tròn đường kính IM là:

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$$

*Với $M\left(\frac{139}{29};\frac{72}{29}\right)$ thì trung điểm IM là $\left(\frac{197}{58};\frac{37}{26}\right)$, phương trình đường tròn đường kính IM là: $\left(x - \frac{197}{58}\right)^2 + \left(y - \frac{37}{26}\right)^2 = \frac{5}{2}$.

Bài 5: **(3,0 điểm)**

Cho tam giác đều OAB có $AB = a$. Trên đường thẳng (d) đi qua O vuông góc với mặt phẳng (OAB) lấy một điểm M sao cho $OM = x$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên MB và OB. Đường thẳng EF cắt đường thẳng (d) tại N.

a) Chứng minh rằng $AN \perp BM$.

b) Xác định x theo a để thể tích khối tứ diện $ABMN$ nhỏ nhất và tính giá trị nhỏ nhất đó.

Giải:

a) Ta có $\begin{cases} AF \perp OB \\ AF \perp OM \end{cases} \Rightarrow AF \perp MB$

Mà $AE \perp MB$ nên $BM \perp (AEF)$

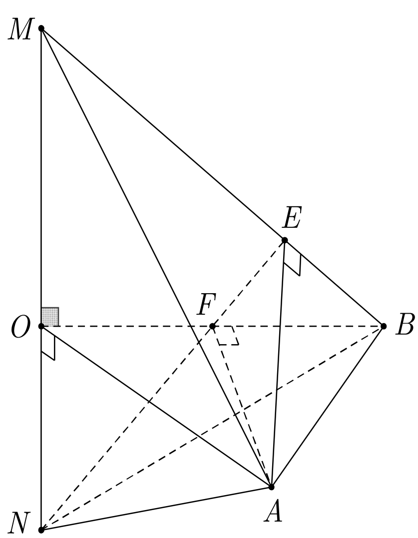
Do $AN \subset (AEF)$ nên $AN \perp BM$.

b) Theo câu a) ta có:

$\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OA}\right)\left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB}\right) = 0$

$\Leftrightarrow -OM.ON + OA.OB.\cos 60° = 0$

$\Leftrightarrow ON = \frac{OA.OB.\cos 60°}{OM} = \frac{a^2}{2x}$



Do $MN \perp (OAB)$ nên $V_{ABMN} = \frac{1}{3}.MN.S_{OAB} = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(x+\frac{a^2}{2x}\right) = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}\left(x+\frac{a^2}{2x}\right)$

Theo bất đẳng thức Cô-si thì: $x+\frac{a^2}{2x} \ge 2\sqrt{x.\frac{a^2}{2x}} = \sqrt{2}a$

Suy ra: $V_{ABMN} \ge \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Vậy thể tích lớn nhất của khối tứ diện $ABMN$ là $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$ khi $x=\frac{a^2}{2x} \Leftrightarrow x=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Bài 6: **(2,0 điểm)**

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2018$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}+\frac{3029}{2}$.

Giải:

*Xét bất đẳng thức phụ: $\frac{1}{a+b} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ với mọi $a,b>0$.

*Dùng bất đẳng thức ở trên ta có:

$$\frac{1}{2x+y+z}=\frac{1}{(x+y)+(x+z)} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}\right) \le \frac{1}{16}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

Tương tự ta có: $\frac{1}{x+2y+z} \le \frac{1}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{z}\right)$; $\frac{1}{x+y+2z} \le \frac{1}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{z}\right)$

Suy ra: $P \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\frac{3029}{2}=\frac{2018}{4}+\frac{3029}{2}=2019$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 2019 đạt được khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{3}{2018}$.

--- HẾT ---