TRƯỜNG THPT MINH CHÂU	ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG
TỔ TỰ NHIÊN	**NĂM HỌC 2020 - 2021**
	Môn: TOÁN - Lớp 11
ĐỀ CHÍNH THỨC	*Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian phát đề)*

Câu 1: (2 điểm)

a) Giải phương trình: $\sin 3x+\sqrt{3}\cos 3x=2\sin 2x$.

b) Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $\cos 2x+7\cos x-\sqrt{3}\left(\sin 2x-7\sin x\right)=8$ trên đoạn $\left[-2\pi;2\pi\right]$

Câu 2: (2 điểm)

a) Tìm số hạng chứa x^3 trong khai triển $\left(x+\frac{1}{2x}\right)^9$.

b) Đề thi THPT môn Toán gồm 50 câu trắc nghiệm khách quan, mỗi câu có 4 phương án trả lời và chỉ có 1 phương án đúng, mỗi câu trả lời đúng được cộng $0,2$ điểm, điểm tối đa là 10 điểm. Một học sinh có năng lực trung bình đã làm đúng được 25 câu(từ câu 1 đến câu 25), các câu còn lại học sinh đó không biết cách giải nên chọn phương án ngẫu nhiên cả 25 câu còn lại. Tính xác suất để điểm thi môn Toán của học sinh đó lớn hơn 6 điểm nhưng không vượt quá 8 điểm(làm tròn đến hàng phần nghìn).

Câu 3:(1 điểm) Tìm tất cả các số thực x để ba số $x,\ 2x,\ 4$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

Câu 4: (2 điểm) Tính các giới hạn sau:

a) $I=\lim\left(\sqrt{16^{n+1}+4^n}-\sqrt{16^{n+1}+3^n}\right)$ **b)** $J=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt[3]{7x+1}}{\sqrt{2}\left(x-1\right)}$

Câu 5: (1,5 điểm)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, mặt bên SAB là tam giác vuông tại A, $SA=a\sqrt{3}$, $SB=2a$. Điểm M nằm trên đoạn AD sao cho $AM=2MD$. Gọi $\left(P\right)$ là mặt phẳng qua M và song song với $\left(SAB\right)$.

a) Tính góc giữa hai đường thẳng SB và CD.

b) Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng $\left(P\right)$.

Câu 6: (1,5 điểm)

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+4+\sqrt{x^2+8x+17}=y+\sqrt{y^2+1} \\ x+\sqrt{y}+\sqrt{y+21}+1=2\sqrt{4y-3x} \end{cases}$.

b) Cho dãy số $\left(u_n\right)$ được xác định như sau $\begin{cases} u_1=4 \\ 9u_{n+1}=u_n+4+4\sqrt{1+2u_n} \end{cases}, n\in\mathbb{N}^*$.

Tìm công thức số hạng tổng quát của dãy số $\left(u_n\right)$ và tính $\lim u_n$

----------------- Hết ----------------

(*Giám thị coi thi không giải thích gì thêm*)

Họ và tên thí sinh:... *Chữ ký của giám thị:………………………*

Số báo danh:……………….. Phòng thi số:………

TRƯỜNG THPT MINH CHÂU	HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI
TỔ TỰ NHIÊN	NĂM HỌC 2020 - 2021
	Môn: TOÁN – Khối 11

Câu 1:

a) Giải phương trình sau $\sin 3x+\sqrt{3}\cos 3x=2\sin 2x$.

Ta có : $\sin 3x+\sqrt{3}\cos 3x=2\sin 2x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 3x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x=\sin 2x$ **(0.25)**

$\Leftrightarrow \sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x+\frac{\pi}{3}=2x+k2\pi \\ 3x+\frac{\pi}{3}=\pi-2x+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=\frac{2\pi}{15}+\frac{k2\pi}{5} \end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right)$ **(0.5)**

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\left\{-\frac{\pi}{3}+k2\pi;\ \frac{2\pi}{15}+\frac{k2\pi}{5}\middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$. **(0.25)**

b) Ta có:

$\cos 2x+7\cos x-\sqrt{3}\left(\sin 2x-7\sin x\right)=8 \Leftrightarrow \cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x+7\left(\cos x+\sqrt{3}\sin x\right)-8=0$

$\Leftrightarrow \cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+7\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-4=0 \Leftrightarrow -2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+7\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-3=0$ **(0.25)**

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2} \\ \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=3(VN) \end{array}\right.$ **(0.25)**

Ta có: $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right.$ **(0.25)**

Vì $x\in\left[-2\pi;2\pi\right] \Rightarrow x\in\left\{-2\pi;-\frac{4\pi}{3};0;\frac{2\pi}{3};2\pi\right\}$. **(0.25)**

Câu 2:

Câu 030.	Tìm số hạng chứa x^3 trong khai triển $\left(x+\frac{1}{2x}\right)^9$.
B1.X.T0	**Lời giải** Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có $\left(x+\frac{1}{2x}\right)^9=\sum_{k=0}^{9}C_9^k.x^{9-k}.\left(\frac{1}{2x}\right)^k$ 0.25 $=\sum_{k=0}^{9}C_9^k.\left(\frac{1}{2}\right)^k.x^{9-2k}$. 0.25 Hệ số của x^3 ứng với $9-2k=3 \Leftrightarrow k=3$ 0.25 Vậy số hạng cần tìm $\frac{1}{8}C_9^3x^3$. 0.25

b) Gọi x là số câu học sinh đó trả lời đúng trong 25 câu còn lại.

Số điểm học sinh đó đạt được là $5+0,2x$. **(0.25)**

Theo yêu cầu đề bài $6 < 5+0,2x \le 8 \Leftrightarrow 5 < x \le 15, x \in \mathbb{N}$.

Như vậy, để điểm của học sinh đó lớn hơn 6 điểm nhưng không vượt quá 8 điểm thì học sinh đó phải trả lời đúng từ 6 đến 15 câu và làm sai các câu còn lại.

Xác suất trả lời đúng 1 câu là 0,25; xác suất trả lời sai 1 câu là 0,75.

Xác suất trong mỗi trường hợp là $C_{25}^{x}(0.25)^{x}.(0.75)^{25-x}$ với $x \in \mathbb{N}$ và $6 \le x \le 15$ **(0.25)**

Suy ra xác suất cần tính là $\sum_{x=6}^{15} C_{25}^{x}(0.25)^{x}.(0.75)^{25-x} \approx 0,622$. **(0.25)**

$\approx 0,622$ **(0.25)**

Câu 3:

Ta có $(2x)^2 = x.4 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$. **(0.25)**

Với $x=0$ ta có $0; 0; 4$ không là cấp số nhân. **(0.25)**

Với $x=1$ ta có $1; 2; 4$ là cấp số nhân có công bội $q=2$. **(0.25)**

Vậy $x=1$. **(0.25)**

Câu 4:

a) Ta có $T = \lim\left(\sqrt{16^{n+1}+4^n} - \sqrt{16^{n+1}+3^n}\right) = \lim\left(\dfrac{4^n-3^n}{\sqrt{16^{n+1}+4^n}+\sqrt{16^{n+1}+3^n}}\right)$ **(0.5)**

$$= \lim\left(\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\sqrt{16+\left(\frac{1}{4}\right)^n}+\sqrt{16+\left(\frac{3}{16}\right)^n}}\right) = \frac{1}{8}.$$ **(0.5)**

b) **Lời giải**

Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt[3]{7x+1}}{\sqrt{2}(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-2+2-\sqrt[3]{7x+1}}{\sqrt{2}(x-1)}$ **(0.25)**

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{\sqrt{2}(x-1)} + \lim_{x\to 1}\frac{2-\sqrt[3]{7x+1}}{\sqrt{2}(x-1)} = I + J.$$

Tính $I = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{\sqrt{2}(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+2-4}{\sqrt{2}(x-1)\left(\sqrt{x^2+x+2}+2\right)}$

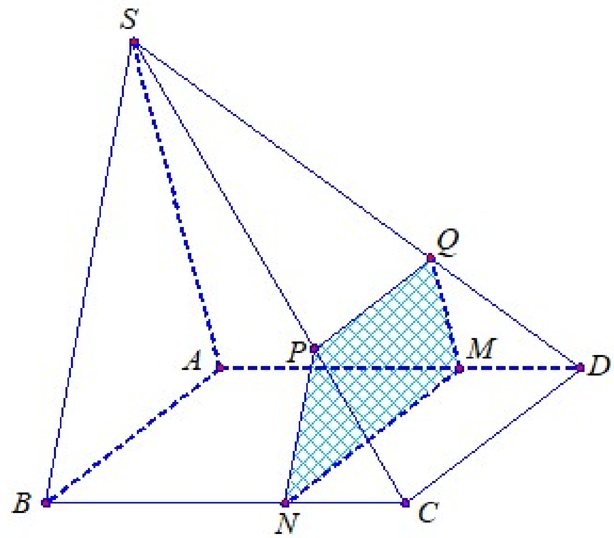
$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{\sqrt{2}(x-1)\left(\sqrt{x^2+x+2}+2\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{x+2}{\sqrt{2}\left(\sqrt{x^2+x+2}+2\right)} = \frac{3}{4\sqrt{2}}.$$ **(0.25)**

và $J = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-\sqrt[3]{7x+1}}{\sqrt{2}(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{8-7x-1}{\sqrt{2}(x-1)\left[4+2\sqrt[3]{7x+1}+\left(\sqrt[3]{7x+1}\right)^2\right]}$ **(0.25)**

$$= \lim_{x\to 1}\frac{-7}{\sqrt{2}\left[4+2\sqrt[3]{7x+1}+\left(\sqrt[3]{7x+1}\right)^2\right]} = \frac{-7}{12\sqrt{2}}.$$

Do đó $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt[3]{7x+1}}{\sqrt{2}(x-1)} = I + J = \dfrac{\sqrt{2}}{12}$ **(0.25)**

Câu 5:



a) Ta có : AB//CD nên *(SB,CD)=(SB,AB)* **(0.25)**

Do tam giác SAB vuông tại A theo gt nên $\left(SB,CD\right)=\widehat{SBA}$ **(0.25)**

Có : $\sin\widehat{SBA}=\dfrac{SA}{SB}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Suy ra: $\left(SB,CD\right)=60^0$ **(0.25)**

b) $\begin{cases}\left(P\right)//\left(SAB\right)\\ M\in AD, M\in\left(P\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left(P\right)\cap\left(ABCD\right)=MN\\ \left(P\right)\cap\left(SCD\right)=PQ\end{cases}$ và $MN//PQ//AB$ (1)

□ $\begin{cases}\left(P\right)//\left(SAB\right)\\ M\in AD, M\in\left(P\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left(P\right)\cap\left(SAD\right)=MQ\\ \left(P\right)\cap\left(SBC\right)=NP\end{cases}$ và $\begin{cases}MQ//SA\\ NP//SB\end{cases}$

Mà tam giác SAB vuông tại A nên $SA\perp AB$ $\Rightarrow MN\perp MQ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra thiết diện là hình thang vuông tại M và Q. **(0.25)**

$MQ//SA\ \Rightarrow\dfrac{MQ}{SA}=\dfrac{DM}{DA}=\dfrac{DQ}{DS}\ \Rightarrow MQ=\dfrac{1}{3}SA$ và $\dfrac{DQ}{DS}=\dfrac{1}{3}$.

□ $PQ//CD\ \Rightarrow\dfrac{PQ}{CD}=\dfrac{SQ}{SD}\ \Rightarrow PQ=\dfrac{2}{3}AB$, với $AB=\sqrt{SB^2-SA^2}=a$ **(0.25)**

Khi đó $S_{MNPQ}=\dfrac{1}{2}MQ.\left(PQ+MN\right)$

$$\Leftrightarrow S_{MNPQ}=\frac{1}{2}\frac{SA}{3}.\left(\frac{2AB}{3}+AB\right)\Leftrightarrow S_{MNPQ}=\frac{5a^2\sqrt{3}}{18}.$$ **(0.25)**

6. a) $\begin{cases}x+4+\sqrt{x^2+8x+17}=y+\sqrt{y^2+1}\ (1)\\ x+\sqrt{y}+\sqrt{y+21}+1=2\sqrt{4y-3x}\ (2)\end{cases}$

Điều kiện: $y\ge 0, 4y-3x\ge 0$.

$$\left(1\right)\Leftrightarrow\left(x-y+4\right)+\sqrt{x^2+8x+17}-\sqrt{y^2+1}=0\Leftrightarrow\left(x-y+4\right)+\frac{\left(x+4\right)^2-y^2}{\sqrt{x^2+8x+17}+\sqrt{y^2+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-y+4\right)+\frac{\left(x+4+y\right)\left(x+4-y\right)}{\sqrt{x^2+8x+17}+\sqrt{y^2+1}}=0\ \Leftrightarrow\left(x-y+4\right)\left(1+\frac{\left(x+4+y\right)}{\sqrt{x^2+8x+17}+\sqrt{y^2+1}}\right)=0$$ **(0.25)**

$\Leftrightarrow y=x+4$.

(Vì: $1+\dfrac{(x+4+y)}{\sqrt{x^2+8x+17}+\sqrt{y^2+1}}=\dfrac{\sqrt{(x+4)^2+1}+(x+4)+\sqrt{y^2+1}+y}{\sqrt{x^2+8x+17}=\sqrt{y^2+1}}>0 \quad \forall x,y$) **(0.25)**

Thay $y=x+4$ vào (2) ta được:

$(2)\Leftrightarrow x+\sqrt{x+4}+\sqrt{x+25}+1=2\sqrt{x+16}$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+4}-2\right)+\left(\sqrt{x+25}-5\right)+\left(x+8-2\sqrt{x+16}\right)=0$

$\Leftrightarrow x\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+4}+2}+\dfrac{1}{\sqrt{x+25}+5}+\dfrac{x+12}{x+8+2\sqrt{x+16}}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0\Rightarrow y=4 \ \text{(t/m)} \\ \dfrac{1}{\sqrt{x+4}+2}+\dfrac{1}{\sqrt{x+25}+5}+\dfrac{x+12}{x+8+2\sqrt{x+16}}=0\ (3) \end{array}\right.$. **(0.25)**

Do $x+4=y\geq 0\Rightarrow x\geq -4\Rightarrow x+8>0$ nên (3) vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)=(0;4)$. **(0.25)**

Chú ý: Ta có thể giải (1) như sau: $(1)\Leftrightarrow x+4+\sqrt{(x+4)+1}=y+\sqrt{y^2+1}$

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{t^2+1}$ có $f'(t)=1+\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}=\dfrac{\sqrt{t^2+1}+t}{\sqrt{t^2+1}}>0,\forall t\in\mathbb{R}$.

Do đó $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $(1)\Leftrightarrow f(x+4)=f(y)\Leftrightarrow x+4=y$.

6. b) (0.75đ)		Ta có $u_n>0,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ và $9u_{n+1}=u_n+4+4\sqrt{1+2u_n}$ $\Leftrightarrow 18u_{n+1}=2u_n+8+8\sqrt{1+2u_n}$ $\Leftrightarrow 9(1+2u_{n+1})=\left(\sqrt{1+2u_n}+4\right)^2$	0,25
		$\Leftrightarrow 3\sqrt{1+2u_{n+1}}=\sqrt{1+2u_n}+4$ $\Leftrightarrow 3\left(\sqrt{1+2u_{n+1}}-2\right)=\sqrt{1+2u_n}-2$	0,25
		Đặt $v_n=\sqrt{1+2u_n}-2,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ Ta có $\begin{cases} v_1=1 \\ v_{n+1}=\dfrac{1}{3}v_n \end{cases},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$	0,25
		$\Rightarrow$ dãy số (v_n) là một cấp số nhân có công bội $q=\dfrac{1}{3}$, số hạng đầu $v_1=1$.	
		$\Rightarrow v_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$	
		$\Rightarrow u_n=\dfrac{(v_n+2)^2-1}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3^{2n-2}}+\dfrac{4}{3^{n-1}}+3\right)$.	
		Kết luận $u_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3^{2n-2}}+\dfrac{4}{3^{n-1}}+3\right),\forall n\in\mathbb{N}^*$. Khi đó $\lim u_n=\lim\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3^{2n-2}}+\dfrac{4}{3^{n-1}}+3\right)=\dfrac{3}{2}$.	0,25

Hết