

Phương trình tổng quát của đường thẳng

Nguyễn Tăng Vũ^{a)}

(Dated: Ngày 11 tháng 4 năm 2020)

I. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Định nghĩa 1. Vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ có giá vuông góc với đường thẳng Δ gọi là vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ .

Tính chất 1. Ta có các tính chất sau:

- Các vectơ pháp tuyến của cùng một đường thẳng thì cùng phương.
- Hai đường thẳng song song thì vectơ pháp tuyến cùng phương.
- Hai đường thẳng vuông góc thì vectơ pháp tuyến vuông góc.

Định lý 1. Trong mặt phẳng tọa độ cho điểm $I(x_0; y_0)$, vectơ $\vec{n}$. Đường thẳng qua I nhận $\vec{n} = (a; b)$ là vectơ pháp tuyến có phương trình:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

Định lý 2. Trong mặt phẳng tọa độ, mọi đường thẳng đều có phương trình tổng quát dạng

$$ax + by + c = 0$$

với $a^2 + b^2 \neq 0$.

Trong đó $\vec{n} = (a; b)$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng.

Định lý 3. (Phương trình đoạn chắn) Phương trình đường thẳng qua điểm $A(a; 0)$ và $B(0; b)$ ($a, b \neq 0$) là

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Định nghĩa 2. Xét đường thẳng $\Delta : y = kx + m$ cắt Ox tại M . Tia Mt phía trên trục hoành. Gọi α là góc tạo bởi tia Mt và tia Ox . Khi đó $\tan \alpha$ được gọi là hệ số góc của Δ và $k = \tan \alpha$.

Ví dụ I.1

Cho đường thẳng $a : 3x + 4y + 1 = 0$.

- Tìm một vectơ pháp tuyến của a .
- Trong các điểm sau, điểm nào thuộc a : $A(-1; 0), B(1; -1), C(0; 1)$.
- Tìm điểm thuộc a mà hoành độ bằng hai lần tung độ.
- Điểm $M(3; 2)$ có thuộc a không? Nếu M không thuộc a , hãy viết phương trình đường thẳng qua M song song với a .

Lời giải

- Một vectơ pháp tuyến của (a) là: $\vec{n} = (3; 4)$.
- Thay tọa độ điểm A, B, C vào đường thẳng (a) ta có:
Điểm A : $3 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 + 1 = -2 \neq 0$ nên A không thuộc (a) .
Điểm B : $3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + 1 = 0$ nên B thuộc (a) .
Điểm C : $3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 1 = 5 \neq 0$ nên C không thuộc (a) .
- Gọi D là điểm thuộc (a) mà hoành độ bằng hai lần tung độ. Khi đó ta có: $x_D = 2y_D$. Thay tọa độ điểm D vào ta có:
 $3y_D + 4y_D + 1 = 0 \Leftrightarrow 7y_D + 1 = 0 \Leftrightarrow y_D = -\frac{1}{7}$
Với $y_D = -\frac{1}{7} \Rightarrow x_D = -\frac{2}{7}$
Vậy tọa độ điểm D là $D(-\frac{2}{7}; -\frac{1}{7})$
- Thay tọa độ điểm M vào phương trình đường thẳng (a) ta có: $3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 1 = 18 \neq 0$ nên M không thuộc đường thẳng a
Gọi (b) là đường thẳng đi qua M và song song với (a)
Ta có: $\vec{n}_b = \vec{n}_a = (3; 4)$
Phương trình đường thẳng (b) là:
 $3(x - 3) + 4(y - 2) = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y - 17 = 0$

Ví dụ I.2

Cho đường thẳng $(d) : ax + 2y + c = 0$.

- Tìm a biết vectơ pháp tuyến của d cùng phương với $\vec{n} = (2; 1)$.
- Tìm c biết đường thẳng qua điểm $M(-1; 5)$.

Lời giải

- Vectơ pháp tuyến của đường thẳng (d) là:
 $\vec{n}_d = (a; 2)$
Do vectơ pháp tuyến của (d) cùng phương với $\vec{n} = (2; 1)$ nên ta có:
 $\frac{a}{2} = \frac{2}{1} \Rightarrow a = 4$
- Điểm M thuộc vào đường thẳng (d) nên thay tọa độ điểm M vào phương trình đường thẳng (d) ta có:
 $4 \cdot (-1) + 2 \cdot 5 + c = 0 \Leftrightarrow c = -6$

Ví dụ I.3

Cho tam giác ABC có $A(-1; 1), B(2, -1), C(0, 4)$.

- Viết phương trình đường cao AH .

(b) Viết phương trình đường trung trực của BC .

(c) Viết phương trình đường thẳng AB .

Lời giải

(a) Ta có: $\overrightarrow{BC} = (-2, 5)$

Mà $BC \perp AH$ nên $\overrightarrow{n_{AH}} = \overrightarrow{BC} = (-2; 5)$

Đường thẳng AH đi qua điểm A và nhận $\overrightarrow{BC}$ làm vectơ pháp tuyến.

Phương trình đường thẳng AH là:

$$-2(x+1) + 5(y-1) = 0 \Leftrightarrow -2x + 5y - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 5y + 7 = 0$$

(b) Gọi I là trung điểm của B, C . Khi đó tọa độ điểm I là:

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_B + x_C}{2} \\ y_I = \frac{y_B + y_C}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = 1 \\ y_I = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Đường trung trực của BC là đường thẳng đi qua I nhận $\overrightarrow{BC}$ làm vectơ pháp tuyến. Phương trình đường trung trực của BC là:

$$-2(x-1) + 5(y - \frac{3}{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x + 5y - \frac{11}{2} = 0 \Leftrightarrow 4x - 10y + 11 = 0$$

(c) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (3, -2)$ khi đó ta có: $\overrightarrow{n_{AB}} = (2; 3)$.

Phương trình đường thẳng AB là:

$$2(x+1) + 3(y-1) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y - 1 = 0$$

Khi đó: $\vec{d} = \vec{a} = (2; -3)$

Phương trình đường thẳng (d) :

$$2(x-1) - 3(y-2) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y + 4 = 0$$

(b) Đường thẳng (b) vuông góc với đường thẳng (a) nên $\vec{b} = (3; 2)$. Vậy phương trình đường thẳng (b) là:

$$3(x-1) + 2(y-2) = 0 \Leftrightarrow 3x + 2y - 7 = 0$$

Tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 1 = 0 \\ 3x + 2y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{19}{13} \\ y = \frac{17}{13} \end{cases}$$

Vậy tọa độ giao điểm là: $(\frac{19}{13}; \frac{17}{13})$.

III. BÀI TẬP

1. Cho tam giác ABC có $A(1; 2), B(-1; -2)$ và $C(-1; 3)$.

a) Viết phương trình tổng quát của đường cao hạ từ A (Đ/s: $y = 2$)

b) Viết phương trình tổng quát của đường thẳng BC (Đ/s: $x = -1$)

c) Viết phương trình đường trung trực của đoạn thẳng AB . (Đ/s: $x + 2y = 0$)

2. Cho tam giác $A(-1; 3), B(1; 5)$ và $C(3; -1)$.

a) Viết phương trình đường trung trực của AB và BC . (Đ/s: $AB: x + y - 1 = 0, BC: x - 3y + 4 = 0$)

b) Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . (Đ/s: Tâm đường tròn ngoại tiếp $(\frac{-1}{4}; \frac{5}{4})$)

3. Cho đường thẳng $d_1: 3x - 2y - 1 = 0$ và $d_2: x + y - 2 = 0$.

a) Chứng minh $A(0; 2)$ thuộc d_2 và không thuộc d_1 . (Đ/s: Thay tọa độ điểm A vào phương trình đường thẳng d_2 và d_1 : $3 \cdot 0 - 2 \cdot 2 - 1 = -5 \neq 0 \Rightarrow A$ không thuộc vào đường thẳng d_1 $0 + 2 - 2 = 0 \Rightarrow A$ thuộc vào đường thẳng d_2)

b) Chứng minh d_1 và d_2 cắt nhau. Tìm tọa độ giao điểm của d_1 và d_2 . (Đ/s: $\frac{3}{1} \neq \frac{-2}{1}$ nên hai đường thẳng cắt nhau. Tọa độ giao điểm là: $(1; 1)$)

c) Viết phương trình đường thẳng qua A và vuông góc với d_2 . (Đ/s: $x - y + 2 = 0$)

d) Viết phương trình đường thẳng qua A và song song với d_1 . (Đ/s: $3x - 2y + 4 = 0$)

II. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Tính chất 2. Cho hai đường thẳng $\Delta_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0; \Delta: a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Khi đó

• Δ_1, Δ_2 cắt nhau $\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$; Khi đó tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

• $\Delta_1 \parallel \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

• $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

Ví dụ II.1

Cho đường thẳng $a: 2x - 3y + 1 = 0$ và điểm $A(1; 2)$.

(a) Viết phương trình đường thẳng qua A song song với a .

(b) Viết phương trình đường thẳng b qua A vuông góc với a . Tìm tọa độ giao điểm của a và b .

Lời giải

(a) Gọi (d) là đường thẳng đi qua A và song song với a .

4. Cho tam giác ABC có phương trình 3 cạnh lần lượt là $(AB) : x+4y-7=0$, $(AC) : x+y-3=0$, $(BC) : 3x+8y+1=0$.

a) Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác.

(Đ/s: $A(\frac{5}{3}; \frac{4}{3}), B(-15; \frac{11}{2}), C(5; -2)$)

b) Tìm tọa độ điểm đối xứng của A qua BC .

(Đ/s: Tọa độ điểm đối xứng với A qua BC là: $(\frac{65}{219}; -\frac{508}{219})$)

5. Cho đường thẳng $d_1 : 2x + 3y - 5 = 0$ và điểm $A(4; 5)$.
Tìm tọa độ điểm $B \in d_1$ sao cho $AB = 5$.

(Đ/s: $B(1; 1), B(\frac{19}{13}; \frac{9}{13})$)

6. Cho đường thẳng $(d) : 3x - 2y + 3 = 0$ và điểm $A(2; 3)$.

a) Viết phương trình tổng quát của đường thẳng qua A song song với d . (Đ/s: $3x - 2y = 0$)

b) Viết phương trình tổng quát của đường thẳng qua A vuông góc với d . (Đ/s: $2x + 3y - 13 = 0$)

7. Cho tam giác ABC có $A(1; 2)$, $B(-3; 4)$ và $C(2; 0)$.

a) Viết phương trình đường trung tuyến AM .

(Đ/s: $y = 2$)

b) Viết phương trình đường cao BK .

(Đ/s: $x - 2y + 11 = 0$)

c) Viết phương trình đường trung trực của AB .

(Đ/s: $2x - y + 5 = 0$)

8. Cho tam giác ABC có $A(0; 1)$, $B(-2; 3)$ và $C(2; 0)$.

a) Viết phương trình đường cao AD, BE và tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC .

(Đ/s: $AD : 4x - 3y + 3 = 0, BE : 2x - y + 7 = 0, H(-9; -11)$)

b) Viết phương trình trung trực của cạnh AB, AC và tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC .

(Đ/s: Đường trung trực của cạnh $AB: x - y + 3 = 0$

Đường trung trực của cạnh $AC; 2x - y - \frac{3}{2} = 0$

Tọa độ điểm $I(\frac{9}{2}; \frac{15}{2})$)

c) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC và chứng minh H, I, G thẳng hàng.

(Đ/s: $G(0; \frac{4}{3})$)

$\overrightarrow{GH} = (-9; -\frac{37}{3}); \overrightarrow{HI} = (\frac{27}{2}; \frac{37}{2})$

$\frac{-37}{27}$

Ta có: $\frac{-9}{\frac{27}{2}} = \frac{-\frac{37}{3}}{\frac{37}{2}}$ suy ra 3 điểm thẳng hàng)

Phương trình tham số của đường thẳng

Nguyễn Tăng Vũ^{a)}

(Dated: Ngày 21 tháng 4 năm 2020)

I. LÝ THUYẾT

Định nghĩa 1. Vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$ có giá song song hoặc trùng với Δ gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ .

Tính chất 1. Vectơ chỉ phương có các tính chất sau:

- Các vectơ chỉ phương của một đường thẳng thì cùng phương với nhau và vuông góc với vectơ pháp tuyến.
- Hai đường thẳng song song thì vectơ chỉ phương của đường này là vectơ chỉ phương của đường thẳng kia.
- Hai đường thẳng vuông góc thì vectơ chỉ phương của đường thẳng này là vectơ pháp tuyến của đường thẳng kia.

Định lý 1. Trong mặt phẳng tọa độ cho điểm $I(x_0; y_0)$, vectơ $\vec{u}$. Đường thẳng qua I nhận $\vec{u} = (a; b)$ là vectơ chỉ phương có phương trình tham số:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$$

Ghi chú. Khi khử tham số t thì phương trình trên được viết lại dưới dạng

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}, (a, b \neq 0).$$

Phương trình này được gọi là phương trình chính tắc của đường thẳng (trong trường hợp $ab \neq 0$ thì đường thẳng không có phương trình chính tắc).

Ghi chú. Phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua hai điểm $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ có dạng

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}.$$

(Trong trường hợp trên ta cần có $x_B \neq x_A, y_B \neq y_A$).

II. VÍ DỤ

Ví dụ II.1

Cho đường thẳng d có phương trình tham số

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 + 4t \end{cases}$$

- Tìm một vectơ chỉ phương của d .
- Tìm điểm thuộc đường thẳng có hoành độ bằng 5.
- Tìm điểm thuộc đường thẳng có hoành độ bằng 3 tung độ.
- Viết phương trình tham số của đường thẳng qua $A(-1; 1)$ song song với d .

Lời giải

- Một vectơ chỉ phương của d là: $\vec{u} = (2; 4)$
- Gọi M là điểm thuộc đường thẳng d có hoành độ bằng 5, khi đó tọa độ điểm M có dạng $M(5, y_M)$. Thay tọa độ điểm M vào phương trình đường thẳng d ta có:

$$\begin{cases} 5 = 3 + 2t \\ y_M = -1 + 4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ y_M = 3 \end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm M là $M(5; 3)$

- Gọi $N(x_N, y_N)$ là điểm thuộc đường thẳng d có hoành độ bằng ba lần tung độ, khi đó ta có: $x_N = 3y_N$. Thay tọa độ điểm N vào phương trình đường thẳng d ta có:

$$\begin{cases} 3y_N = 3 + 2t \\ y_N = -1 + 4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{5} \\ y_N = \frac{7}{5} \end{cases}$$

$$\text{Với } y_N = \frac{7}{5} \Rightarrow x_N = \frac{21}{5}$$

Vậy tọa độ điểm N là $N(\frac{21}{5}; \frac{7}{5})$

- Gọi d_1 là đường thẳng đi qua A và song song với d . Khi đó ta có: $\vec{u}_{d_1} = \vec{u}_d = (2; 4)$
Phương trình tham số đường thẳng d_1 là:

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + 4t \end{cases}$$

Ví dụ II.2

Cho tam giác ABC có 3 đỉnh là $A(1; 2), B(-1; 4), C(-2; 0)$.

- Viết phương trình tham số của đường thẳng AB .
- Viết phương trình tham số của đường thẳng qua A song song với BC .
- Tìm điểm D thuộc BC sao cho AD vuông góc với BC .

Lời giải

- (a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-2; 2)$
 Vectơ chỉ phương của đường thẳng AB là:
 $\overrightarrow{u_{AB}} = (1; -1)$
 Phương trình tham số của đường thẳng AB là:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \end{cases}$$

- (b) Ta có: $\overrightarrow{BC} = (-1; -4)$ Gọi d là đường thẳng đi qua A và song song với BC .
 Khi đó: $\overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{BC} = (-1; -4)$
 Phương trình tham số của đường thẳng BC là:

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - 4t \end{cases}$$

- (c) Phương trình đường thẳng BC là:

$$\begin{cases} x = -2 - t \\ y = -4t \end{cases}$$

Ta có: $AD \perp BC$. Khi đó: $\overrightarrow{u_{AD}} = (4; -1)$.
 Phương trình tham số của đường thẳng AD là:

$$\begin{cases} x = 1 + 4t_1 \\ y = 2 - t_1 \end{cases}$$

$$D = AD \cap BC. \text{ Khi đó: } \begin{cases} -2 - t = 1 + 4t_1 \\ -4t = 2 - t_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t_1 = -2 \end{cases}$$

Với $t = -1$ vậy tọa độ điểm D là $D(-1; 4)$

René Descartes Sinh tại La Haye, Touraine (trước đây là một tỉnh, nay gọi là một vùng của Pháp), Descartes là con của một gia đình quý tộc nhỏ, có truyền thống khoa bảng và là tín hữu Công giáo Rôma. Lên tám tuổi, ông được gửi theo học tại trường học của dòng Tên tại La Flèche ở Anjou, ông học ở đây suốt 8 năm. Bên cạnh những môn học cổ điển, Descartes còn học toán ở các thầy theo trường phái Kinh viện, một học phái chủ trương dùng lý luận của loài người để hiểu lý thuyết Kitô giáo. Thiên Chúa giáo La Mã có ảnh hưởng mạnh mẽ đến suốt cuộc đời Descartes. Sau khi ra trường, ông theo học luật tại Đại học Poitiers, tốt nghiệp năm 1616. Tuy vậy, ông chưa hề hành nghề luật; năm 1618 ông phục vụ cho Hoàng tử Maurice de Nassau, nhà lãnh đạo của Liên hiệp các tỉnh Hà Lan, với ý định theo đuổi một cuộc đời binh nghiệp. Những năm tiếp theo, Descartes phục vụ các quân đội khác, nhưng ông đã bắt đầu tập trung vào toán học và triết học. Ông hành hương sang đất Ý từ năm 1623 đến 1624, sau đó từ 1624 đến 1628, ông ở Pháp. Trong thời gian ở Pháp, Descartes chuyên tâm nghiên cứu triết học và làm các thí nghiệm về quang học. Năm 1628, sau khi bán hết tài sản ở Pháp, ông chuyển sang sống ở Hà Lan, và sống hầu hết quãng đời còn lại ở xứ hoa tulip. Descartes sống ở nhiều thành phố khác nhau của Hà Lan, như Amsterdam, Deventer, Utrecht, và Leiden. Đường như trong năm đầu tiên ở Hà Lan, Descartes đã viết tác phẩm lớn đầu tiên, *Essais philosophiques* (Các tiểu luận triết học), xuất bản năm 1637. Tác phẩm gồm bốn phần: một tiểu luận về hình học, một về quang học, phần thứ ba về sao băng, và *Discours de la méthode* (Bàn luận về phương pháp), trong đó ông trình bày các nghiên cứu triết học của mình. Sau đó lần lượt ra đời các tác phẩm khác, có thể kể ra *Meditationes de Prima Philosophia* (Suy ngẫm về Triết học Tiên khởi, năm 1641, viết lại năm 1642) và *Principia Philosophiae* (Các nguyên lý triết học, năm 1644). Cuốn sau này ông dành tặng cho Công chúa Elizabeth Stuart xứ Bohemia, một người bạn thân thiết của ông ở Hà Lan. Năm 1649 Nữ hoàng Christina nước Thụy Điển mời Descartes đến giảng dạy cho bà về triết học tại triều đình ở Stockholm. Cái lạnh khắc nghiệt của xứ Bắc Âu đã làm ông mắc bệnh viêm phổi và qua đời năm 1650.

III. BÀI TẬP

1. Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 - 3t \end{cases}$

- Tìm điểm thuộc đường thẳng có tung độ bằng 5. (Đ/s: $(\frac{-7}{9}; 5)$)
- Tìm điểm thuộc đường thẳng có tung độ bằng 3 lần hoành độ. (Đ/s: $(\frac{-7}{9}; \frac{10}{9})$)
- Cho điểm $A(-1; 0)$. A có thuộc d không? Tìm điểm B thuộc d sao cho $AB = \sqrt{5}$.
 (Đ/s: A không thuộc vào d
 Tọa độ điểm B là $B(-3; 1)$ hoặc $B(\frac{-11}{13}; \frac{-29}{13})$)

2. Cho $\vec{u} = (1; -2)$. Viết phương trình tham số của đường thẳng

(a) Qua $A(-1; 0)$ nhận $\vec{u}$ làm vectơ chỉ phương.

(Đ/s: Phương trình tham số là: $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -2t \end{cases}$)

(b) Viết phương trình tham số của đường thẳng qua O nhận $\vec{u}$ là vectơ pháp tuyến.

(Đ/s: Phương trình tham số là: $\begin{cases} x = 2t \\ y = t \end{cases}$)

3. Cho tam giác ABC có $A(-2; 3), B(0; 1), C(2; 5)$.

(a) Viết phương trình tham số của đường thẳng AB, BC .

(Đ/s: $AB : \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \end{cases}, BC : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$)

(b) Viết phương trình tham số của đường thẳng qua A song song với BC .

(Đ/s: Phương trình tham số là: $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$)

4. Cho đường thẳng $d : \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$ và điểm $A(-1; 1)$.

a) Điểm A có thuộc đường thẳng d không? Tại sao?

(Đ/s: $A \in d$)

b) Viết phương trình tổng quát của đường thẳng d . (Đ/s: $2x + 3y - 1 = 0$)

c) Viết phương trình tham số của đường thẳng qua A vuông với d .

(Đ/s: $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$)

5. Cho đường thẳng $d : x + 2y - 3 = 0$ và điểm $A(0, 1)$.

a) Viết phương trình tham số của d .

(Đ/s: $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -t \end{cases}$)

b) Tìm điểm M thuộc d sao cho $AM = 1$.

(Đ/s: $M(1; 1)$ hoặc $M(\frac{-3}{5}; \frac{9}{5})$)

6. Cho hai điểm $A(1; 3)$ và $B(3; 7)$.

a) Viết phương trình tham số của đường thẳng d là trung

trục đoạn thẳng AB . (Đ/s: $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 5 - t \end{cases}$)

b) Tìm trên d điểm M sao cho tam giác AMB vuông cân.

(Đ/s: $M(4; 4)$ hoặc $M(0; 6)$)

7. Cho đường thẳng $d : \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + -3t \end{cases}$ Tìm điểm M trên d

sao cho OM nhỏ nhất trong đó là O là gốc tọa độ.

(Đ/s: $M(\frac{-3}{2}; \frac{-1}{2})$)

8. Cho tam giác ABC có $A(-2; 4), B(0, 2), C(8, 6)$.

(a) Viết phương trình tham số các đường trung tuyến BM và CN .

(Đ/s: $BM : \begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \end{cases}; CN : \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 3 + t \end{cases}$)

(b) Cho điểm $K(t; 2t - 1)$. Tìm t sao cho trung điểm của BK thuộc đường thẳng CN .

(Đ/s: $t = \frac{17}{5}$)

Khoảng cách- Góc

Nguyễn Tăng Vũ^{a)}

(Dated: Ngày 21 tháng 4 năm 2020)

I. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN ĐƯỜNG THẲNG

Định lý 1. Cho đường thẳng $\Delta : ax + by + c = 0$ và điểm $A(x_0; y_0)$. Khi đó khoảng cách từ A đến Δ là:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Ví dụ I.1

Cho đường thẳng $d : 3x + 4y - 1 = 0$ và điểm $A(-1; 2)$ và $B(0; -2)$.

- Tính khoảng cách từ A và B đến d .
- Viết phương trình đường thẳng AB và tính khoảng cách từ $O(0; 0)$ đến AB .

Lời giải

- Khoảng cách từ A, B đến d là:
$$d(A, d) = \frac{|3 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{4}{5}$$
$$d(B, d) = \frac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot (-2) - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{9}{5}$$
- Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1; -4)$, khi đó vectơ pháp tuyến của đường thẳng AB là: $\vec{n}_{AB} = (4; 1)$.
Phương trình đường thẳng AB là:
 $4(x - 0) + 1(y + 2) = 0 \Leftrightarrow 4x + y + 2 = 0$
Khoảng cách từ O đến AB là:
$$d(O; AB) = \frac{|4 \cdot 0 + 0 + 2|}{\sqrt{4^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{17}} = \frac{2\sqrt{17}}{17}$$

Ví dụ I.2

Cho hai đường thẳng $a : 2x - y = 1$ và $b : 2x - y - 4 = 0$. Chứng minh $a \parallel b$ và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng a và b .

Lời giải Ta có: $\frac{2}{2} = \frac{-1}{-1} \neq \frac{-4}{-4}$ nên hai đường thẳng a, b song song với nhau.
Lấy $A(1; 1) \in a$ nên
$$d(a, b) = d(A, b) = \frac{|2 \cdot 1 - 1 - 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng là: $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

Ví dụ I.3

Cho đường thẳng $a : 5x + 12y - 13 = 0$. Viết phương trình đường thẳng song song với a và cách a một khoảng cách bằng 13.

Lời giải Gọi d là đường thẳng song song với a khi đó ta có: $\vec{n}_d = \vec{n}_a = (5; 12)$

Phương trình đường thẳng d có dạng: $5x + 12y + m = 0$

Lấy $A(1, \frac{2}{3}) \in a$, khi đó:

$$d(a, d) = d(A, d) = \frac{|5 \cdot 1 + 12 \cdot \frac{2}{3} + m|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = 13$$

$$\Leftrightarrow \frac{|13 + m|}{13} = 13 \Leftrightarrow |13 + m| = 169$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 13 + m = 169 \\ 13 + m = -169 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 156 \\ m = -182 \end{cases}$$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là:

$5x + 12y + 156 = 0$ hoặc $5x + 12y - 182 = 0$

Tính chất 1. Cho đường thẳng $\Delta : ax + by + c = 0$ và hai điểm $M(x_M; y_M), N(x_N; y_N)$. Khi đó

- M, N nằm cùng phía đối với Δ khi và chỉ khi $(ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) > 0$
- M, N nằm khác phía đối với Δ khi và chỉ khi $(ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) < 0$

Tính chất 2. (Phương trình đường phân giác). Cho hai đường thẳng cắt nhau

$$d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0, d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

Khi đó phương trình hai đường phân giác của các góc tạo bởi d_1 và d_2 là:

$$\frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{|a_2x + b_2y + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

Ví dụ I.4

Cho hai đường thẳng $a : 3x + 4y - 7 = 0, b : 5x + 12y - 17 = 0$. Chứng minh a và b cắt nhau và viết phương trình phân giác tạo bởi hai đường thẳng a và b .

Lời giải Ta có: $\frac{3}{5} \neq \frac{4}{12}$ nên hai đường thẳng cắt nhau.

Phương trình đường phân giác tạo bởi hai đường thẳng a, b là:

$$\frac{|3x + 4y - 7|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \pm \frac{|5x + 12y - 17|}{\sqrt{5^2 + 12^2}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{|3x + 4y - 7|}{5} = \pm \frac{|5x + 12y - 17|}{13}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 13(3x + 4y - 7) = 5(5x + 12y - 17) \\ 13(3x + 4y - 7) = -5(5x + 12y - 17) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 14x - 8y - 6 = 0 \\ 64x + 112y - 176 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x - 4y - 3 = 0 \\ 4x + 7y - 11 = 0 \end{cases}$$

Vậy phương trình đường phân giác tạo bởi hai đường thẳng a, b là: $7x - 4y - 3 = 0; 4x + 7y - 11 = 0$

II. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Định nghĩa 1. Cho hai đường thẳng a, b cắt nhau tạo thành 4 góc, khi đó góc nhỏ nhất trong 4 góc được gọi là góc của hai đường thẳng a và b .

Nếu hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau thì ta quy ước góc giữa chúng bằng 0° . Kí hiệu (a, b) hoặc (a, b) . Ta có $0^\circ \leq (a, b) \leq 90^\circ$.

Tính chất 3. Nếu $\vec{u}, \vec{v}$ lần lượt là vectơ chỉ phương (hoặc vectơ pháp tuyến) của hai đường thẳng a, b . Đặt $\alpha = (\vec{u}, \vec{v})$. Khi đó

- $(a, b) = \alpha$ nếu $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$.
- $(a, b) = 180^\circ - \alpha$ nếu $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$.
- $\cos(a, b) = |\cos \alpha|$

Ví dụ II.1

Cho hai đường thẳng $a : x + y - 1 = 0, b : 3x + 4y - 2 = 0$.

- Tính góc tạo bởi a và b với trục hoành.
- Tính $\cos$ góc giữa hai đường thẳng a và b .

Lời giải

- Phương trình trục hoành là $Ox : y = 0$
Vectơ pháp tuyến của đường thẳng a, b, Ox lần lượt là:
 $\vec{n}_a = (1; 1), \vec{n}_b = (3; 4); \vec{n}_{Ox} = (0; 1)$
Góc tạo bởi đường thẳng a, b với trục hoành là:
 $\cos(a, Ox) = \frac{|1 \cdot 0 + 1 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $\Rightarrow (a, Ox) = 45^\circ$
 $\cos(b, Ox) = \frac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2} \cdot \sqrt{0^2 + 1^2}} = \frac{4}{5}$
 $\Rightarrow (b, Ox) = \arccos(\frac{4}{5})$
- Góc giữa hai đường thẳng a và b là:
 $\cos(a, b) = \frac{|1 \cdot 3 + 1 \cdot 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{7}{5\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$
 $\Rightarrow (a, b) = \arccos(\frac{7\sqrt{2}}{10})$

Ví dụ II.2

Cho đường thẳng $a : x - y = 0$. Viết phương trình đường thẳng b qua điểm $M(1; 2)$ sao cho góc giữa a và b là 45° .

Lời giải Gọi $\vec{n}_b = (m, n)$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng b .

Khi đó, phương trình đường thẳng b là:

$$m(x - 1) + n(y - 2) = 0$$

Ta có: VTPT của đường thẳng a là: $\vec{n}_a = (1; -1)$.
Góc giữa a, b là 45° nên ta có:

$$\begin{aligned} \cos(a, b) &= \frac{|1 \cdot m - 1 \cdot n|}{\sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{|m - n|}{\sqrt{m^2 + n^2}} &= 1 \Leftrightarrow |m - n| = \sqrt{m^2 + n^2} \\ \Leftrightarrow 2mn &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ n = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Với $m = 0$ chọn $n = 1$ khi đó ta có phương trình đường thẳng b là $y = 2$

Với $m = 0$ chọn $n = 1$ khi đó ta có phương trình đường thẳng b là: $x = 1$

III. BÀI TẬP

1. Cho hai đường thẳng $d_1 : 2x + 3y - 1$ và $d_2 : -3x + y = 0$ và điểm $A(1; 2)$.

- Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến d_1 và d_2 . (Đ/s:

$$d(O, d_1) = \frac{\sqrt{13}}{13}, d(O, d_2) = 0$$

- Tính góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2 .

$$(\text{Đ/s: } (d_1, d_2) = \arccos(\frac{3\sqrt{130}}{130}))$$

2. Cho tam giác ABC có $A(-1; 1), B(0, 3), C(2; -1)$.

- Viết phương trình đường thẳng BC .

$$(\text{Đ/s: } BC : 2x + y - 3 = 0)$$

- Tính độ dài đường cao hạ từ A và diện tích tam giác ABC . (Đ/s: $S_{ABC} = 4$)

3. Cho đường thẳng $d_1 : 3x + 4y - 5 = 0$.

- Tìm điểm A thuộc Ox sao cho khoảng cách từ A đến d_1 bằng 2. ($A(5; 0), A(-\frac{5}{3}; 0)$)

- Tìm điểm B thuộc Oy sao cho khoảng cách từ B đến d_1 bằng 3. (Đ/s: $B(0; 5), B(0; -\frac{5}{2})$)

- Viết phương trình đường thẳng song song với d_1 và cách d_1 một khoảng bằng 1.
(Đ/s: $3x + 4y = 0; 3x + 4y - 10 = 0$)

4. Cho đường thẳng $d : x - y - 1 = 0$.

- (a) Viết phương trình đường thẳng qua O và tạo với d một góc 45° . (Đ/s: $x = 0, y = 0$)
- (b) Cho hai điểm $A(1; 0)$ và $B(-2; 1)$. Xét vị trí tương đối của A và B đối với d .
(Đ/s: A thuộc d , B không thuộc d)

5. Cho điểm $A(-1; 2)$ và $B(4; 1)$. Viết phương trình đường thẳng d qua A sao cho khoảng cách từ B đến d bằng $\sqrt{13}$.
(Đ/s: $3x + 2y - 1 = 0, 2x - 3y + 8 = 0$)

Phương trình đường tròn

Nguyễn Tăng Vũ^{a)}

(Dated: Ngày 21 tháng 4 năm 2020)

I. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

Định lý 1. Đường tròn tâm $I(a, b)$ có bán kính R có phương trình

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

Định lý 2. Phương trình dạng $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ là phương trình của một đường tròn khi và chỉ khi $a^2 + b^2 > c$. Khi đó tâm $I(-a; -b)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$

Ví dụ I.1

Cho điểm $I(1; 2)$ và $A(-1; 4)$.

- Viết phương trình đường tròn tâm I bán kính $R = 3$.
- Viết phương trình đường tròn tâm I bán kính IA .
- Xét vị trí tương đối của $B(3; 1)$ với đường tròn tâm I bán kính IA .

Lời giải

- Phương trình đường tròn tâm I bán kính $R = 3$ là:
 $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 3^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$
- Ta có: $\overrightarrow{IA} = (-2; 2) \Rightarrow IA = 2\sqrt{2}$
Phương trình đường tròn tâm I bán kính IA là:
 $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3 = 0$
- Ta có: $\overrightarrow{IB} = (2; -1) \Rightarrow IB = \sqrt{5}$
 $IA > IB$ ($2\sqrt{2} > \sqrt{5}$) nên B nằm trong đường tròn tâm I bán kính IA .

Ví dụ I.2

Cho phương trình $x^2 - 2(m - 1)x + y^2 - 4my + 5m^2 = 0$. (*)

- Khi $m = 0$, (*) có phải là phương trình đường tròn không? Tìm tọa độ tâm và tính bán kính.
- Tìm tất cả m để (*) là phương trình của một đường tròn.
- Khi (*) là phương trình đường tròn, chứng minh tâm I luôn thuộc một đường thẳng cố định.

Lời giải

- Khi $m = 0$ thay vào (*) ta có:
 $x^2 + 2x + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + y^2 = 1$
Khi đó: (*) là phương trình đường tròn.

Tâm: $(-1; 0)$, bán kính là: 1.

- Đề (*) là phương trình của một đường tròn:

$$\begin{aligned} &(-(m - 1))^2 + (-2m)^2 > 5m^2 \\ &\Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 + 4m^2 > 5m^2 \\ &\Leftrightarrow -2m + 1 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- Tâm I của đường tròn (*) là: $I(m - 1, 2m)$

Ta có: $x_I = m - 1(1), y_I = 2m(2)$ khi đó:

$m = x_I + 1$ thay vào (2) ta có:

$$y_I = 2(x_I + 1) \Leftrightarrow 2x_I - y_I + 2 = 0.$$

Vậy điểm I luôn thuộc vào đường thẳng :

$$2x - y + 2 = 0$$

II. PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN

Cho đường tròn tâm $I(a, b)$ bán kính R . Khi đó phương trình tiếp tuyến tại điểm $A(x_o, y_o)$ là:

$$(x - x_o)(x_o - a) + (y - y_o)(y_o - b) = 0$$

Ví dụ II.1

Cho đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$.

- Tìm tọa độ tâm và tính bán kính của (C) .
- Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại $A(2; 0)$.

Lời giải

- Tọa độ tâm, bán kính của đường tròn (C) là:
Tâm $I(1; -2)$
Bán kính $R = \sqrt{1^2 + 2^2 - 0} = \sqrt{5}$
- Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $A(2; 0)$ là:
 $(x - 2)(2 - 1) + (y - 0)(0 - (-2)) = 0$
 $\Leftrightarrow x - 2 + 2y = 0$

Ghi chú. Tiếp tuyến của đường tròn tâm I bán kính R là đường thẳng cách I một khoảng cách bằng R . Ta sử dụng tính chất này để viết phương trình tiếp tuyến trong một số trường hợp khác.

Ví dụ II.2

Cho đường tròn $(C) : (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$

- Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $4x + 3y = 0$.
- Viết phương trình tiếp tuyến (C) biết tiếp tuyến vuông góc với $3x + 4y + 1 = 0$.

Lời giải

- Phương trình tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $4x + 3y = 0$ nên có dạng: $d : 4x +$

$$3y + m = 0 (m \neq 0).$$

Tâm và bán kính đường tròn (C) là $I(1; 3)$, $R = 5$
Do d là tiếp tuyến của đường tròn (C) nên ta có:

$$d(I, d) = R \Leftrightarrow \frac{|4.1 + 3.3 + m|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 5$$

$$\Leftrightarrow |13 + m| = 25$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 13 + m = 25 \\ 13 + m = -25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 12(N) \\ m = -38(N) \end{cases}$$

Với $m = 12$ phương trình tiếp tuyến là:

$$4x + 3y + 12 = 0$$

Với $m = -38$ phương trình tiếp tuyến là:

$$4x + 3y - 38 = 0.$$

III. BÀI TẬP

Bài 1. Trong mặt phẳng Oxy cho $A(3; 4)$, $B(2; -1)$. Viết phương trình đường tròn trong các trường hợp sau:

- Tâm A bán kính $R = 4$. (Đ/s: $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 16$)
- Tâm B bán kính $R = 5$. (Đ/s: $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$)
- Tâm $O(0; 0)$ bán kính OA . (Đ/s: $x^2 + y^2 = 25$)
- Đường tròn đường kính AB .
(Đ/s: $(x - \frac{5}{2})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{13}{2}$)

Bài 2. Cho tam giác ABC có $A(-1; 0)$, $B(2; 2)$, $C(2; -6)$.
Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
(Đ/s: $(x - \frac{5}{2})^2 + (y + 2)^2 = \frac{65}{4}$)

Bài 3. Cho đường thẳng $d: 4x - 3y - 1 = 0$ và điểm $A(2; 1)$.

- Viết phương trình đường tròn tâm A và tiếp xúc với d .
(Đ/s: $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = \frac{16}{25}$)
- Cho d cắt Ox tại B . Viết phương trình đường tròn tâm B tiếp xúc với Oy .
(Đ/s: $(x - \frac{1}{4})^2 + y^2 = \frac{1}{16}$)

Bài 4. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$.

- Tìm tọa độ tâm và tính bán kính đường tròn.
(Đ/s: Tâm $I(2; -1)$, bán kính $R = \sqrt{5}$)
- Chứng minh $A(4; -2)$ thuộc (C) và viết phương trình tiếp tuyến tại A của (C) .
(Đ/s: $2x - y - 9 = 0$)

Bài 5. Cho đường tròn $(C): (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 5$. Viết phương trình tiếp của (C) biết tiếp tuyến.

- Song song với đường thẳng $2x + y - 1 = 0$.
(Đ/s: $2x + y + 6 = 0$; $2x + y - 4 = 0$)
- Vuông góc với đường thẳng $4x - y + 1 = 0$.
(Đ/s: $x + 4y + \sqrt{85} + 11 = 0$; $x + 4y - \sqrt{85} + 11 = 0$)

Bài 6. Cho đường tròn $(C): (x - \frac{5}{2})^2 + (y + 2)^2 = \frac{49}{4}$ và đường thẳng $d: 2x + y + 4 = 0$.

- Tìm tọa độ giao điểm A, B của d và (C) .
(Đ/s: $A(\frac{2}{5}, -\frac{24}{5}), B(-1; -3)$
hoặc $A(-1; -3), B(\frac{2}{5}, -\frac{24}{5})$)
- Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại A và B . Tìm tọa độ giao điểm của hai tiếp tuyến.
(Phương trình hai tiếp tuyến là:
 $7x + 2y + 13 = 0, 3x + 4y + 9 = 0$,
tọa độ giao điểm là: $(-\frac{17}{11}; -\frac{12}{11})$)

Bài 7. Lập phương trình đường tròn trong các trường hợp sau:

- Tâm $I(-1, 2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $d: x - 2y - 2 = 0$. (Đ/s: $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = \frac{49}{5}$)
- Tâm thuộc đường thẳng $x + y - 3 = 0$, bán kính bằng 1 và tiếp xúc Ox .
(Đ/s: $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$; $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 1$)
- Đi qua hai điểm $A(0, 1), B(2, -3)$ và bán kính $R = 5$.
(Đ/s: $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 25, (x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 25$)
- Đi qua hai điểm $A(1, 2), B(3, 4)$ và tiếp xúc với đường thẳng $d: 3x + y - 3 = 0$.
(Đ/s: $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 10, (x - \frac{3}{2})^2 + (y - \frac{7}{2})^2 = \frac{5}{2}$)
- Đi qua gốc tọa độ, có bán kính $R = \sqrt{5}$ và có tâm nằm trên đường thẳng $x + y - 1 = 0$.
(Đ/s: $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5, (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$)
- Có bán kính $R = \sqrt{5}$, đi qua gốc tọa độ và tiếp xúc đường thẳng $2x - y + 5 = 0$
(Đ/s: $(x + 2 - 2\sqrt{2})^2 + (y - 1 - 4\sqrt{2})^2 = 5$,
 $(x + 2 + 2\sqrt{2})^2 + (y - 1 + 4\sqrt{2})^2 = 5$)
- Tiếp xúc với $d_1: x - 3y - 2 = 0, d_2: x - 3y + 18 = 0$ và đi qua điểm $A(4, -2)$.
(Đ/s: $(x - 10)^2 + (y - 6)^2 = 100, (x + \frac{28}{5})^2 + (y - \frac{4}{5})^2 = 100$)
- Tiếp xúc với $d_1: 2x + y - 1 = 0, d_2: 2x - y + 2 = 0$ và có tâm thuộc đường thẳng $d_3: x - y - 1 = 0$.
(Đ/s: $(x - \frac{5}{2})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{121}{10}$,
 $(x + \frac{1}{4})^2 + (y + \frac{5}{4})^2 = \frac{121}{10}$)
- Tiếp xúc với $d: x - y - 2 = 0$ tại $M(1, -1)$ và có bán kính bằng 3.
(Đ/s: $(x - \frac{2 + 3\sqrt{2}}{2})^2 + (y + \frac{2 + 3\sqrt{2}}{2})^2 = 9$,
 $(x - \frac{2 - 3\sqrt{2}}{2})^2 + (y + \frac{2 - 3\sqrt{2}}{2})^2 = 9$)
- Ngoại tiếp tam giác ABC biết $A(-2, 4), B(6, -2), C(5, 5)$.
(Đ/s: $(x - \frac{50}{31})^2 + (y - \frac{15}{31})^2 = \frac{24425}{961}$)

Phương trình chính tắc của Elip

Nguyễn Tăng Vũ^{a)}

(Dated: Ngày 21 tháng 4 năm 2020)

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Định nghĩa 1 (Ellipse). *Ellipse* là tập hợp tất cả các điểm có tổng khoảng cách đến hai điểm cố định cho trước một khoảng không đổi.

Cho hai điểm cố định F_1, F_2 với $F_1F_2 = 2c$ ($c > 0$) và số $2a$ ($a > c$). Ellipse (E) là tập hợp các điểm M sao cho $MF_1 + MF_2 = 2a$.

$$(E) = \{M : MF_1 + MF_2 = 2a\}$$

F_1, F_2 gọi là các tiêu điểm, khoảng cách $F_1F_2 = 2c$ gọi là tiêu cự của (E).

Định lý 1 (Phương trình chính tắc). Nếu chọn hệ trục có Oxy sao cho $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ thì (E) có phương trình chính tắc

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

với $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

Tính chất 1. Nếu elip có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) thì

- Tính đối xứng: (E) có trục đối xứng là Ox, Oy , tâm đối xứng là gốc tọa độ.
- Trục lớn $A_1A_2 = 2a$ nằm trên Ox , trục bé $B_1B_2 = 2b$ nằm trên Oy .
- Các đỉnh $A_1(-a, 0), A_2(a, 0), B_1(0, -b), B_2(0, b)$.
- Hai tiêu điểm $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$.
- Phương trình các cạnh hình chữ nhật cơ sở: $x = \pm a, y = \pm b$.
- Tâm sai $e = \frac{c}{a}$, $0 < e < 1$. Vì $\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}$ nên e càng gần 0 ellipse càng "tròn", e càng gần 1 ellipse càng "dẹt".
- Bán kính qua tiêu của điểm $M(x_0, y_0)$ trên (E)

$$MF_1 = a + ex_0; MF_2 = a - ex_0$$

Ví dụ I.1

Vẽ các ellipse sau. Xác định tâm đối xứng, trục đối xứng, phương trình đường chuẩn, tiêu cự, tiêu điểm, tâm sai.

(a) $\frac{x^2}{16} + y^2 = 1$. (b) $9x^2 + 4y^2 = 36$

Lời giải

- (a) Tâm đối xứng $O(0; 0)$
Trục đối xứng là $x = 0; y = 0$
Phương trình đường chuẩn là: $x = \pm 4, y = \pm 1$
Tiêu cự $F_1F_2 = 2\sqrt{15}$
Tiêu điểm: $F_1(-\sqrt{15}; 0), F_2(\sqrt{15}; 0)$ Tâm sai: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{15}}{4}$
- (b) $9x^2 + 4y^2 = 36 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$
Do $a < b$ ($2 < 3$) nên (1) không phải là phương trình chính tắc của elip.

Ví dụ I.2

Tìm phương trình chính tắc elip biết rằng hai tiêu điểm là $(\sqrt{3}, 0)$ and $(-\sqrt{3}, 0)$ và đi qua điểm $A(0, 3)$.

Lời giải Gọi phương trình chính tắc elip cần tìm có dạng:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

thỏa mãn $a^2 - b^2 = c^2, a > b > 0$
Elip có hai tiêu điểm là $(\sqrt{3}; 0), (-\sqrt{3}; 0)$ nên $c = \sqrt{3}$.
Khi đó ta có: $a^2 - b^2 = c^2 = 3$ (1)
Elip đi qua $A(0, 3)$ nên: $\frac{9}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2 = 9$
Thay $b^2 = 9$ vào (1) ta có: $a^2 - 9 = 3 \Leftrightarrow a^2 = 12$
Vậy phương trình elip cần tìm là:

$$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Ví dụ I.3

Cho elip có phương trình (E): $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$.

- (a) Tìm tọa độ hai tiêu điểm F_1, F_2 của elip.
(b) Tìm điểm M thuộc elip sao cho $MF_1 = 2MF_2$.
(c) Tìm điểm M thuộc elip sao cho $\angle F_1MF_2 = 90^\circ$.

Lời giải

- (a) Ta có: $a^2 = 6, b^2 = 3$ khi đó:
 $c^2 = a^2 - b^2 = 6 - 3 = 3$
Vậy tọa độ hai tiêu điểm là:
 $F_1 = (-\sqrt{3}; 0), F_2 = (\sqrt{3}; 0)$
- (b) Gọi $M(x_M, y_M)$. Do $M \in (E)$ nên:
 $\frac{x_M^2}{6} + \frac{y_M^2}{3} = 1 \Leftrightarrow 3x_M^2 + 6y_M^2 = 18$ (1)

Mặt khác ta có: $MF_1 = 2MF_2 \Leftrightarrow MF_1^2 = 4MF_2^2$
 $\Leftrightarrow (-\sqrt{3} - x_M)^2 + y_M^2 = 4[(\sqrt{3} - x)^2 + y_M^2]$
 $\Leftrightarrow 3 + 2\sqrt{3}x_M + x_M^2 + y_M^2 = 4(3 - 2\sqrt{3}x_M + x_M^2 + y_M^2)$
 $\Leftrightarrow 3x_M^2 + 3y_M^2 - 10\sqrt{3}x_M = -9(2)$
 Lấy $2 * (2) - (1)$ ta có:

$$3x_M^2 - 20\sqrt{3}x_M + 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 6\sqrt{3} \\ x_M = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Với $x_M = 6\sqrt{3}$ thay vào (1) ta có: $y_M^2 = -51(L)$

Với $x_M = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ thay vào (1) ta có: $y_M = \pm \frac{\sqrt{21}}{3}$

Vậy tọa độ điểm M là:
 $M(\frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{21}}{3}), M(\frac{2\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{21}}{3})$

(c) Gọi $M(m, n)$. Do $M \in (E)$ nên ta có:

$$\frac{m^2}{6} + \frac{n^2}{3} = 1 \Leftrightarrow m^2 + 2n^2 = 6(3)$$

Góc $F_1MF_2 = 90^\circ$ nên ta có:

$$MF_1 \perp MF_2 \Leftrightarrow \vec{F_1M} \cdot \vec{F_2M} = 0$$

$$\Leftrightarrow (m + \sqrt{3})(m - \sqrt{3}) + y.y = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 3 + n^2 = 0(4)$$

Từ (3), (4) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} m^2 + 2n^2 = 6 \\ m^2 + n^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 0 \\ n^2 = 3 \end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm M là $M(0; \sqrt{3}), M(0; -\sqrt{3})$

II. BÀI TẬP

Bài 1. (Nội thất) Phía trên của một cửa sổ là nửa trên của một elip. Phương trình chính tắc của elip biết gốc tọa độ là trung điểm cạnh trên của cửa sổ (hình 1).

Bài 2. NHÀ TRẮNG. Có một vùng đất phía nam Nhà Trắng, gọi là công viên tổng thống, như hình vẽ. Viết phương trình elip lấy gốc tọa độ là tâm của elip. (hình ??).

Bài 3. THIÊN VĂN HỌC. Quỹ đạo của một hành tinh quay quanh mặt trời là một đường elip với mặt trời là một tiêu điểm của quỹ đạo. Khoảng cách của mặt trời so với tâm elip là 21.24 triệu km, khi gần nhất hành tinh cách mặt trời một khoảng là 206.75 (xấp xỉ), khoảng cách gần nhất của hành tinh cách tâm elip khoảng 226.94 tr km. Viết phương trình elip và vẽ mô tả elip đó.

Bài 4. THIÊN VĂN HỌC Khi gần nhất, Trái đất cách mặt trời 91.4 tr km và xa nhất là 94.5 tr km. Giả sử tâm quỹ đạo là gốc, mặt trời thuộc trục hoành và bán kính mặt trời là 400,000 dặm. Viết phương trình quỹ đạo của trái đất. (hình 4).

Bài 5. Đấu trường Colosseum ở Rome là một hình elip với độ dài trục lớn là 190m và trục nhỏ là 155m. Viết phương trình chính tắc của đấu trường.

Bài 6. Cho $(E) : \frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{4} = 1$. Tìm điểm M trên (E) sao cho:

(a) $MF_1 = 2MF_2$ (Đ/s: $M(\frac{7\sqrt{3}}{9}; \frac{4\sqrt{15}}{9}), (\frac{7\sqrt{3}}{9}; -\frac{4\sqrt{15}}{9})$)

(b) M nhìn hai tiêu điểm dưới một góc 60° .
 (Đ/s: $(\pm \frac{35}{3}; \pm \frac{4}{3})$)

Bài 7. Cho $ABCD$ là hình thoi có các đỉnh trùng với các đỉnh của elip. Bán kính đường tròn nội tiếp của hình thoi là $\sqrt{2}$. Viết phương trình chính tắc của elip biết tâm sai là $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Bài toán có thể giải được không nếu ta chỉ biết 4 đỉnh của hình thoi nằm trên elip?

$$(\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1)$$

Bài 8. Cho $(E) : \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ và đường thẳng $d : x - y\sqrt{2} + 2 = 0$.

(a) Chứng minh d luôn cắt (E) tại hai điểm A, B . Tính AB . ($AB = 3\sqrt{2}$)

(b) Tìm điểm C trên (E) sao cho diện tích tam giác ABC lớn nhất.
 ($C(2, -\sqrt{2})$ hoặc $C(-2; \sqrt{2})$)

Bài 9. Tìm trên $(E) : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{13} = 1$ hai điểm M, N sao cho tam giác F_1MN đều.

$$(M(\frac{8\sqrt{3}}{5}; \frac{13}{5}), N(\frac{8\sqrt{3}}{5}; -\frac{13}{5})) \quad \text{hoặc} \quad (M(-\frac{24\sqrt{3}}{11}; \frac{13}{11}), N(-\frac{24\sqrt{3}}{11}; -\frac{13}{11}))$$

Bài 10. Cho $(E) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$. Tìm A, B thuộc (E) có hoành độ dương sao cho tam giác OAB cân tại O và có diện tích lớn nhất.

$$(A(\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}), B(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}))$$

Bài 11. Cho $(E) : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$. Tìm điểm M trên (E) sao cho:

(a) $2MF_1 = 3MF_2$ ($M(\frac{16}{15}; \pm \frac{\sqrt{1463}}{15})$)

(b) $\frac{1}{MF_1} + \frac{1}{MF_2} = \frac{6}{F_1F_2}$ ($M(\pm \frac{2\sqrt{2}}{3}; \pm \frac{\sqrt{238}}{6})$)

(c) $MF_1^3 + MF_2^3 = 182$ ($M(\pm 2; \pm \frac{\sqrt{21}}{2})$)

Bài 12. Cho $(E) : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ và điểm $M(2, 1)$.

(a) Chứng minh M nằm trong (E)

(b) Viết phương trình đường thẳng đi qua M và cắt (E) tại hai điểm A, B sao cho M là trung điểm AB .
 ($8x + 9y - 25 = 0$)

(c) Tính khoảng cách từ các tiêu điểm đến đường thẳng AB . ($d(F_1, AB) = \frac{8\sqrt{5} + 25}{\sqrt{145}}, d(F_2, AB) = \frac{-8\sqrt{5} + 25}{\sqrt{145}}$)

Bài 13. Cho $(E) : x^2 + 2y^2 = 2$ và đường thẳng $d : x + y + m = 0$. Tìm m để:

- Đường thẳng (d) cắt (E) tại hai điểm phân biệt. Khi đó:
 - Tìm tập hợp trung điểm của AB .
 - Tìm m để độ dài AB lớn nhất.
 - Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ đến AB bằng nửa độ dài đoạn AB .
- Đường thẳng (d) có một điểm chung duy nhất với (E) . ($M = \pm 1$)

Bài 14. Cho $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b > 0$.

- Gọi A, B là hai điểm trên (E) sao cho OA vuông góc OB . Chứng minh rằng $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.
- Chứng minh rằng đường thẳng AB luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Bài 15. Cho $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b > 0$. Gọi F_1, F_2 là hai tiêu điểm và A_1, A_2 là hai đỉnh trên trục lớn. M là một điểm tùy ý trên (E) có hình chiếu trên Ox là H . Chứng minh rằng:

- $MF_1 \cdot MF_2 + OM^2 = a^2 + b^2$
- $(MF_1 - MF_2)^2 = 4(OM^2 - b^2)$
- $MH^2 = -\frac{b^2}{a^2} \overline{HA_1} \cdot \overline{HA_2}$

Bài 16. Cho $(E) : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$. Gọi A, B là hai điểm trên (E) sao cho OA vuông OB . Xác định vị trí của AB sao cho tam giác OAB có diện tích lớn nhất. (OA, OB nằm trên hai trục tọa độ)

Bài 17. Cho $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b > 0$ và đường thẳng $d : Ax + By + C = 0$.

- Tìm điều kiện của a, b, A, B, C để (E) và d có duy nhất một điểm chung, không có điểm chung.
- Khi (E) và d không có điểm chung. Tìm những điểm M thuộc (E) sao cho khoảng cách từ M đến d đạt GTLN, GTNN.

Bài 18. Cho $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b > 0$ và điểm $M(x_0, y_0)$ nằm trên (E) .

- Chứng minh $a \leq OM \leq b$
- Chứng minh $|x_0 + y_0| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$
- Tìm những điểm thuộc (E) sao cho khoảng cách từ điểm đó đến tiêu điểm phải lớn nhất, nhỏ nhất.

Quỹ đạo của Trái Đất là đường đi của Trái Đất xung quanh Mặt trời. Trái Đất quay trên quỹ đạo quanh Mặt Trời với khoảng cách trung bình 150 triệu km hết 365,2564 ngày Mặt Trời trung bình (1 năm thiên văn, số liệu đo được đến năm 2006) Quỹ đạo của Trái Đất xung quanh Mặt Trời gọi là đường hoàng đạo. Trên đường hoàng đạo có các điểm đặc biệt là : điểm cận nhật, điểm viễn nhật, điểm xuân phân, điểm hạ chí, điểm thu phân, điểm đông chí. Góc giữa điểm cận nhật và điểm xuân phân hiện nay khoảng 77° (mỗi năm góc này giảm khoảng $1'02''$). Quan sát từ Trái Đất, chuyển động biểu kiến của Mặt Trời thể hiện bằng sự thay đổi vị trí tương đối so với các ngôi sao, với vận tốc góc khoảng $1^\circ/\text{ngày}$, hay một khoảng cách bằng đường kính góc của Mặt Trăng hay Mặt Trời cứ sau mỗi 12 giờ về phía đông. Vì chuyển động này, trung bình nó mất 24 giờ - một ngày Mặt Trời - để Trái Đất hoàn thành một vòng tự quay quanh trục sao cho Mặt Trời lại trở lại đường Tý Ngọ (kinh tuyến thiên cầu).

Bài tập tổng hợp

Nguyễn Tăng Vũ^{a)}

(Dated: Ngày 21 tháng 4 năm 2020)

I. BÀI TẬP VỀ TAM GIÁC - TỨ GIÁC

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có $A(0;3)$. Xác định tọa độ B, C biết:

- (a) Phương trình hai đường trung tuyến từ B, C là $4x - 9y - 1 = 0$ và $x + 3y - 2 = 0$.
- (b) Có hai đường cao từ B và C là $x - y + 1 = 0$ và $2x + y - 3 = 0$.

Lời giải

- (a) G là trọng tâm tam giác ABC , khi đó ta có tọa độ điểm G là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x - 9y - 1 = 0 \\ x + 3y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } G(1; \frac{1}{3}) \Rightarrow \overrightarrow{AG} = (1; \frac{-8}{3})$$

Gọi $M(x_M; y_M)$ là trung điểm BC , khi đó ta có $\overrightarrow{AM} = (x_M; y_M - 3)$.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}x_M = 1 \\ \frac{2}{3}(y_M - 3) = -\frac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{3}{2} \\ y_M = -1 \end{cases}$$

C thuộc đường trung tuyến từ đỉnh C nên tọa độ điểm C có dạng $C(2 - 3a; a)$ khi đó tọa độ điểm B có dạng $B(1 + 3a, -2 - a)$. Điểm B thuộc vào đường trung tuyến từ đỉnh B :

$$4(1 + 3a) - 9(-2 - a) - 1 = 0 \Leftrightarrow a = -1$$

Với $a = -1$ tọa độ điểm $B(-2; -1), C(5; -1)$

- (b) Gọi $H(x_H, y_H)$ là trực tâm của tam giác ABC . Tọa độ điểm H là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow H(\frac{2}{3}; \frac{5}{3})$$

$$\text{Gọi } B(b, b + 1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (b, b - 2)$$

$\overrightarrow{CH} = (2; 1)$. Ta có $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CH}$ cùng phương nên ta có:

$$\frac{b}{2} = \frac{b - 2}{1} \Leftrightarrow b = 4$$

$$\Rightarrow B(4; 5)$$

Ta có: $\overrightarrow{AH} = (\frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$. Mà $AH \perp BC \Rightarrow \overrightarrow{BC} = (1; -2)$

Phương trình đường thẳng BC là:

$$1.(x - 4) - 2.(y - 5) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 6 = 0$$

Tọa độ điểm C là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 2y + 6 = 0 \\ 2x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y + 6 = 0 \\ 2x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có $A(-1;2)$, đường cao CD : $x + 2y + 2 = 0$ và trung tuyến BM : $x - 3y - 3 = 0$.

- (a) Viết phương trình đường thẳng AB . Tìm tọa độ điểm B .
- (b) Tìm tọa độ điểm C .

Lời giải

- (a) Vectơ pháp tuyến của đường thẳng CD là $\overrightarrow{n_{CD}} = (1; 2)$. Khi đó vectơ chỉ phương của đường thẳng CD là $\overrightarrow{u_{CD}} = (2; -1)$.

$AB \perp CD$ khi đó vectơ pháp tuyến của đường thẳng AB là $\overrightarrow{n_{AB}} = \overrightarrow{CD} = (2; -1)$

Phương trình đường thẳng AB là:

$$2(x + 1) - 1(y - 2) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 4 = 0$$

- (b) $M \in BM$. Gọi tọa độ điểm M là $M(3b + 3, b)$. M là trung điểm của đoạn AC khi đó tọa độ điểm C là $C(6b + 7, 2b - 2)$.

$C \in CD$ thay tọa độ điểm C vào đường thẳng CD ta có:

$$6b + 7 + 2(2b - 2) + 2 = 0 \Leftrightarrow 10b + 5 = 0 \Leftrightarrow b = -\frac{1}{2}$$

Với $b = -\frac{1}{2}$ tọa độ điểm $C(4; -3)$

Ví dụ 3. Lập phương trình các cạnh của $\triangle ABC$ biết $B(-2, 1)$, đường cao và đường trung tuyến xuất phát từ một đỉnh có phương trình lần lượt là $d_1 : 5x + 4y - 1 = 0, d_2 : 8x + y - 7 = 0$.

Lời giải

Thay tọa độ điểm B vào d_1 ta có:

$$5.(-2) + 4.1 - 1 = -7 \neq 0.$$

Khi đó B không thuộc vào d_1 .

Giả sử d_1, d_2 là đường cao, đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh A .

Khi đó tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình là:

$$\begin{cases} 5x + 4y - 1 = 0 \\ 8x + y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow A(1; -1)$$

Ta có: $\overrightarrow{BA} = (3; -2)$. Khi đó vectơ pháp tuyến của đường thẳng AB là $\overrightarrow{n_{AB}} = (2; 3)$.

Phương trình đường thẳng AB là

$$2(x + 2) + 3(y - 1) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y + 1 = 0$$

Vectơ pháp tuyến của đường thẳng d_1 là $\overrightarrow{n_{d_1}} = (5; 4)$ nên vectơ chỉ phương của đường thẳng d_1 là $\overrightarrow{u_{d_1}} = (4; -5)$

Ta có: $d_1 \perp BC$. Khi đó vectơ pháp tuyến của đường thẳng BC là $\overrightarrow{n_{BC}} = \overrightarrow{u_{d_1}} = (4; -5)$

Phương trình đường thẳng BC là:

$$4(x + 2) - 5(y - 1) = 0 \Leftrightarrow 4x - 5y + 13 = 0$$

$d_2 \cap BC = M$. Tọa độ điểm M là nghiệm của phương trình:

$$\begin{cases} 4x - 5y + 13 = 0 \\ 8x + y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow M(\frac{1}{2}; 3)$$

M là trung điểm của BC suy ra tọa độ điểm C là: $C(3; 5)$

$\overrightarrow{AC} = (2; 6)$. Vectơ pháp tuyến của đường thẳng AC là: $\overrightarrow{n_{AC}} = (3; -1)$

Phương trình đường thẳng AC là:

$$3(x - 1) - 1(y + 1) = 0 \Leftrightarrow 3x - y - 4 = 0$$

Ví dụ 4. Cho hình vuông $ABCD$ có đỉnh $B(4, 1)$ và phương trình đường chéo $AC : x + 3y - 11 = 0$. Hãy tìm tọa độ các đỉnh còn lại.

Lời giải

Vectơ pháp tuyến của đường thẳng AC là: $\overrightarrow{n_{AC}} = (1; 3)$ nên vectơ chỉ phương của đường thẳng AC là: $\overrightarrow{u_{AC}} = (3; -1)$.

Do $ABCD$ là hình vuông nên ta có: $AC \perp BD$. Vậy vectơ pháp tuyến của đường thẳng BD là: $\overrightarrow{n_{BD}} = \overrightarrow{u_{AC}} = (3; -1)$

Phương trình đường thẳng BD là:

$$3(x - 4) - 1(y - 1) = 0 \Leftrightarrow 3x - y - 11 = 0$$

Gọi I là giao điểm hai đường chéo. Khi đó tọa độ điểm I là

nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x - y - 11 = 0 \\ x + 3y - 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{22}{5} \\ y = \frac{11}{5} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{22}{5}; \frac{11}{5}\right)$$

I là trung điểm BD nên tọa độ điểm D là $D\left(\frac{24}{5}; \frac{17}{5}\right)$

Gọi vectơ pháp tuyến của đường thẳng AB là: $\vec{n}_{AB} = (a, b)$.

Ta có góc giữa hai đường thẳng AB và BD là 45° nên:

$$\begin{aligned} \frac{|\vec{n}_{AB} \cdot \vec{n}_{BD}|}{|\vec{n}_{AB}| \cdot |\vec{n}_{BD}|} &= \cos(45) \\ \Leftrightarrow \frac{|3a - b|}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow |3a - b| = \sqrt{5(a^2 + b^2)} \\ \Leftrightarrow 9a^2 - 6ab + b^2 &= 5a^2 + 5b^2 \Leftrightarrow 4a^2 - 6ab - 4b^2 = 0 \\ \Leftrightarrow (a - 2b)(2a + b) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ 2a = -b \end{cases} \end{aligned}$$

• Với $a = 2b$ chọn $b = 1 \Rightarrow a = 2$. Khi đó phương trình đường thẳng AB là:

$$2(x - 4) + 1(y - 1) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 9 = 0.$$

$A = AC \cap AB$. Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + y - 9 = 0 \\ x + 3y - 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{16}{5} \\ y = \frac{13}{5} \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{16}{5}; \frac{13}{5}\right)$$

I là trung điểm của AC nên tọa độ điểm C là: $C\left(\frac{28}{5}; \frac{9}{5}\right)$

• Với $2a = -b$ chọn $a = 1, b = -2$. Phương trình đường thẳng AB là:

$$1(x - 4) - 2(y - 1) = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 2 = 0$$

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 2y - 2 = 0 \\ x + 3y - 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{28}{5} \\ y = \frac{9}{5} \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{28}{5}; \frac{9}{5}\right)$$

I là trung điểm của AC nên $C\left(\frac{16}{5}; \frac{13}{5}\right)$

Vậy tọa độ các đỉnh còn lại của hình vuông là:

$$D\left(\frac{24}{5}; \frac{17}{5}\right), A\left(\frac{16}{5}; \frac{13}{5}\right), C\left(\frac{28}{5}; \frac{9}{5}\right)$$

$$\text{hoặc } D\left(\frac{24}{5}; \frac{17}{5}\right), A\left(\frac{28}{5}; \frac{9}{5}\right), C\left(\frac{16}{5}; \frac{13}{5}\right)$$

II. BÀI TẬP ĐƯỜNG TRÒN

Ví dụ 5. Cho đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$. Lập phương trình đường tròn (C_2) biết

- (C_2) đối xứng với (C_1) qua $I(3, 4)$. Khi đó tìm giao điểm của hai đường tròn nếu có.
- (C_2) đối xứng với (C_1) qua đường thẳng $d: x - y - 1 = 0$. Khi đó tìm giao điểm của hai đường tròn nếu có.

Lời giải

$$(C_1): x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4.$$

Khi đó tâm và bán kính đường tròn (C_1) là: $O_1(1; 2), R_1 = 2$.

Gọi O_2, R_2 lần lượt là tâm và bán kính đường tròn (C_2) .

- (C_2) đối xứng với (C_1) qua điểm I nên ta có I là trung điểm của O_1O_2 và $R_1 = R_2 = 2$. Khi đó tọa độ (O_2) là $O_2 = (5; 6)$.
Phương trình đường tròn (C_2) là:

$$(x - 5)^2 + (y - 6)^2 = 4$$

Ta có: $O_1O_2 = 4\sqrt{2} > R_1 + R_2$ nên hai đường tròn không có giao điểm chung.

- (C_2) đối xứng với (C_1) qua đường thẳng d nên d là đường trung trực của đoạn thẳng O_1O_2 .

Vectơ pháp tuyến của d là $\vec{n}_d = (1, -1)$, nên vectơ chỉ phương của đường thẳng d là: $\vec{u}_d = (1; 1)$.

$d \perp O_1O_2$ nên vectơ pháp tuyến của đường thẳng O_1O_2 là: $\vec{n}_{O_1O_2} = \vec{u}_d = (1; 1)$

Phương trình O_1O_2 là:

$$1(x - 1) + 1(y - 2) = 0 \Leftrightarrow x + y - 3 = 0$$

Gọi M là giao điểm của d với O_1O_2 , khi đó M là trung điểm của O_1O_2 .

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow M(2; 1).$$

$M(2; 1)$ nên tọa độ điểm O_2 là: $O_2(3; 0)$

Mặt khác ta lại có: $R_2 = R_1 = 2$, khi đó phương trình đường tròn (C_2) là:

$$(x - 3)^2 + y^2 = 4$$

Ví dụ 6. Cho hai đường tròn $(C_1): (x - 4)^2 + (y - 6)^2 = 25$, $(C_2): (x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 5$ và điểm $A(4, 1)$.

- Chứng tỏ A là điểm chung của hai đường tròn.
- Viết phương trình đường thẳng đi qua A và cắt hai đường tròn theo hai dây cung có độ dài bằng nhau.

Lời giải

- Thay tọa độ điểm A vào phương trình hai đường trong ta có:

$$\begin{cases} (4 - 4)^2 + (1 - 6)^2 = 5^2 = 25 \\ (4 - 5)^2 + (1 + 1)^2 = 1 + 4 = 5 \end{cases}$$

nên A là điểm thuộc hai đường tròn hay A là điểm chung của hai đường tròn.

- Tâm và bán kính đường tròn $(C_1), (C_2)$ lần lượt là: $O_1 = (4; 6), R_1 = 5, O_2 = (5; -1), R_2 = \sqrt{5}$

Gọi d là đường thẳng d đi qua A và cắt hai đường tròn theo hai dây cung có độ dài bằng nhau.

Gọi I là trung điểm O_1O_2 suy ra tọa độ điểm I là: $I\left(\frac{9}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

Từ O_1, O_2 lần lượt kẻ O_1M, O_2N vuông góc với d .

Khi đó M, N lần lượt là trung điểm của hai cung nên $AM = AN$.

Xét O_1O_2NM có:

$O_1M \parallel O_2N$ (cùng vuông góc với d).

$\Rightarrow$ Tứ giác O_1O_2NM là hình thang.

Xét:

$$\begin{cases} AM = AN \\ O_1I = O_2I \end{cases} \Rightarrow AI \text{ là đường trung bình hình thang } O_1O_2NM.$$

Suy ra: $AI \perp d$.

$$\text{Ta có: } \vec{IA} = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right).$$

Vectơ pháp tuyến đường thẳng d là: $\vec{n}_d = (1; 3)$.

Phương trình đường thẳng d là:

$$1(x - 4) + 3(y - 1) = 0 \Leftrightarrow x + 3y - 7 = 0$$

Ví dụ 7. Cho đường tròn $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ và điểm $M(1, -1)$.

- Viết phương trình đường thẳng d đi qua M và cắt đường tròn tại hai điểm A, B sao cho M là trung điểm AB .
- Viết phương trình đường thẳng d đi qua M và cắt đường tròn tại hai điểm A, B sao cho diện tích tam giác IAB lớn nhất với I là tâm đường tròn.

Lời giải

- (a) $(C) : x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$
 Tọa độ tâm và bán kính đường tròn (C) là: $I(1; -2), R = 3$.

Ta có: $IM = 1 < R$ nên M nằm phía trong đường tròn.
 M là trung điểm AB nên ta có: $IM \perp AB$ (mối quan hệ giữa dây cung và đường kính)

$\overrightarrow{IM} = (0; 1)$. Vectơ pháp tuyến của đường thẳng d là:
 $\overrightarrow{n_d} = \overrightarrow{IM} = (0; 1)$.

Phương trình đường thẳng d là:

$$0(x-1) + 1(y+1) = 0 \Leftrightarrow y+1 = 0$$

(b)

III. BÀI TẬP

Bài 1. Cho hình bình hành ABCD có phương trình cạnh $AB : 2x - y = 0, AD : 4x - 3y = 0$ và tâm $I(2, 2)$. Lập phương trình cạnh CB, CD .

$$(BC : 2x - y - 4 = 0; CD : 4x - 3y - 4 = 0)$$

Bài 2. Cho hình vuông ABCD có đỉnh $B(4, 1)$ và phương trình đường chéo $AC : x + 3y - 11 = 0$. Hãy tìm tọa độ các đỉnh còn lại.

$$\left(A\left(\frac{16}{5}; \frac{13}{5}\right), C\left(\frac{28}{5}; \frac{9}{5}\right), D\left(\frac{2}{5}; \frac{17}{5}\right)\right) \quad \text{hoặc} \quad \left(C\left(\frac{16}{5}; \frac{13}{5}\right), A\left(\frac{28}{5}; \frac{9}{5}\right), D\left(\frac{2}{5}; \frac{17}{5}\right)\right)$$

Bài 3. Cho tam giác ABC có trọng tâm $G(-2, 0)$. Biết phương trình $AB : 4x + y + 14 = 0, AC : 2x + 5y - 2 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh tam giác. ($B(-3; -2), C(1; 0)$)

Bài 4. Lập phương trình đường thẳng đi qua $P(2, -1)$ sao cho đường thẳng đó cũng với hai đường thẳng $d_1 : 2x - y + 5 = 0, d_2 : 3x + 6y - 1 = 0$ tạo thành một tam giác cân có đỉnh là giao điểm của d_1, d_2 .

$$(3x + y - 5 = 0 \text{ hoặc } x - 3y - 5 = 0)$$

Bài 5. Cho tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{1}{2}$ và có tọa độ $A(2, -3), B(3, -2)$. Trọng tâm G của tam giác thuộc đường thẳng $3x - y - 8 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh C . ($C(1; 15)$ hoặc $C(4; 16)$)

Bài 6. Cho 3 đường thẳng $d_1 : x + y = 0, d_2 : x + 2y = 0, d_3 : x - 2y + 1 = 0$. Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC biết A là giao điểm của $d_1, d_2; B, C \in d_3$ và tam giác ABC vuông cân tại A .

$$\left(B\left(\frac{-1}{7}; \frac{3}{7}\right), C(-3; -1) \text{ hoặc } B(-3; -1), C\left(\frac{-1}{7}; \frac{3}{7}\right)\right)$$

Bài 7. Trong mặt phẳng tọa độ cho hai đường thẳng $d_1 : x - y = 0, d_2 : 2x + y - 1 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh hình vuông ABCD biết đỉnh $A \in d_1, C \in d_2$ và $B, D \in Ox$.

$$(A(1; 1), C(1; -1), B(0; 0), D(2; 0)) \quad \text{hoặc} \quad (A(1; 1), C(1; -1), B(2; 0), D(0; 0))$$

Bài 8. Cho đường thẳng $d : x - 2y + 2 = 0$ và điểm $A(0, 2)$. Tìm trên d hai điểm B, C sao cho tam giác ABC vuông tại B và $AB = 2BC$. ($B(\frac{2}{5}; \frac{6}{5}), C(\frac{4}{5}; \frac{7}{5})$)

Bài 9. Cho hình chữ nhật ABCD có tâm $I(\frac{1}{2}, 0)$, phương trình đường thẳng AB là $x - 2y + 2 = 0$ và $AB = 2AD$. Tìm tọa độ các đỉnh hình chữ nhật biết đỉnh A có hoành độ âm. ($A(-2; 0), B(2; 2), C(3; 0), D(-1; -2)$)

Bài 10. Cho đường tròn $(C) : (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ và đường thẳng $d : x - 4y + 1 = 0$. Tìm điểm P nằm trên đường thẳng d sao cho có thể vẽ được hai tiếp tuyến PA, PB đến đường tròn mà:

- (a) Tam giác PAB đều.

$$\left(P\left(\frac{7+64\sqrt{2}}{17}; \frac{6+16\sqrt{2}}{17}\right)\right) \quad \text{hoặc} \quad \left(P\left(\frac{7-64\sqrt{2}}{17}; \frac{6-16\sqrt{2}}{17}\right)\right)$$

- (b) Tam giác PAB vuông tại P .

$$\left(P\left(\frac{7+4\sqrt{206}}{17}; \frac{6+\sqrt{206}}{17}\right)\right) \quad \text{hoặc} \quad \left(P\left(\frac{7-4\sqrt{206}}{17}; \frac{6-\sqrt{206}}{17}\right)\right)$$

Bài 11. Cho đường tròn $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ và đường thẳng $d : 3x - 4y + m = 0$. Tìm m để trên d có duy nhất một điểm P mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến PA, PB đến đường tròn sao cho tam giác PAB đều. ($m = 25; m = -35$)

Bài 12. Cho đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ và điểm $M(3, 1)$. Gọi T_1, T_2 lần lượt là các tiếp điểm của tiếp tuyến kẻ từ M đến (C) . Viết phương trình đường thẳng T_1T_2 . ($T_1T_2 : x - y = 0$)

Bài 13. Cho đường tròn (C) có phương trình $(x-5)^2 + (y-4)^2 = 25$ và $P(m, 0)$ là một điểm thay đổi trên trục hoành.

- (a) Tìm m để từ P kẻ được hai tiếp tuyến đến đường tròn. ($m > 8$ hoặc $m < 2$)

- (b) Với điều kiện của câu a , giả sử hai tiếp tuyến là PA, PB . Chứng minh AB luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển trên trục hoành, tìm tọa độ điểm cố định đó.
 (Tọa độ điểm cố định là $(5; -\frac{9}{4})$)

Bài 14. Cho đường tròn có phương trình $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$ và đường thẳng $d : y = k(x+4) + 3$.

- (a) Chứng minh d luôn đi qua một điểm cố định. (Tọa độ điểm cố định là $(-4; 3)$)

- (b) Tìm k để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt.

$$\left(m > \frac{-12+5\sqrt{15}}{11} \text{ hoặc } m < \frac{-12-5\sqrt{15}}{11}\right)$$

- (c) Khi đường thẳng d cắt đường tròn tại A, B . Chứng minh trung điểm I của AB luôn thuộc một đường tròn cố định, viết phương trình đường thẳng đó. (Phương trình đường tròn là: $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 10$)

Bài 15. Cho đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ và đường thẳng $d : x + y + 2 = 0$. Gọi I là tâm của (C) , M là điểm thuộc d . Qua M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB đến (C) . Tìm tọa độ điểm M biết tứ giác MAIB có diện tích bằng 10. ($M(2; -4)$ hoặc $M(-3; 1)$)

Bài 16. Cho đường tròn $(C) : x^2 + y^2 + 4x + 4y + 6 = 0$ và đường thẳng $d : x + my - 2m + 3 = 0$. Gọi I là tâm đường tròn. Tìm m để d cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho diện tích tam giác IAB lớn nhất.
 ($m = 0$ hoặc $m = \frac{8}{15}$)

Bài 17. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường tròn $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 12 = 0$ sao cho khoảng cách MA đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất. Biết:

- (a) A(-5,1) (Đ/s: MA đạt GTLN khi $M(3; 5)$, GTNN khi $M(-1; 3)$)
- (b) A(-1,5) (Đ/s: MA đạt giá trị lớn nhất $M(1; 13)$, MA đạt GTNN khi $M \equiv A$)