

ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ ĐA THỨC

Lê Phúc Lữ (ĐH KHTN TPHCM),

Trần Nguyễn Thanh Danh (PTNK TPHCM)

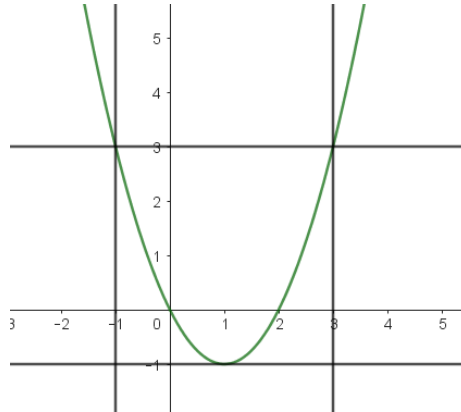
Ta bắt đầu từ câu hỏi: tại sao phần mềm Geogebra có chức năng  Conic through 5 Points (dựng đường conic đi qua 5 điểm) và đồ thị conic sẽ luôn dựng được nếu trong 5 điểm đã xét, không có 3 điểm thẳng hàng? Mong rằng qua bài viết này, bạn đọc có thể tự trả lời được câu hỏi đó.

Ta xuất phát từ bài toán nhẹ nhàng như sau:

Bài toán 1. Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2x$, tìm điều kiện của tham số m để $\underbrace{f(f(\dots(x)\dots))}_{2022} = m$ có

2^{2022} nghiệm thực phân biệt.

Lời giải. Ta vẽ đồ thị C của $f(x)$ như bên dưới và đi biện luận từ $f(x) = m$ (*). Để phương trình này có hai nghiệm phân biệt thì đường thẳng nằm ngang $y = m$ phải cắt đồ thị C tại hai điểm, dựa vào C thì dễ thấy $m > -1$. Ta đặt hai nghiệm tương ứng là x_1, x_2 .



Lại xét tiếp $f(f(x)) = m$, để phương trình này có $2^2 = 4$ nghiệm thì trước đó, (*) phải có 2 nghiệm phân biệt, đặt là x_1, x_2 như trên. Ta viết lại

$$f(f(x)) = m \Leftrightarrow (f(x) - x_1)(f(x) - x_2) = 0.$$

Mỗi phương trình $f(x) - x_i = 0$, $\forall i = 1, 2$ lại phải có 2 nghiệm phân biệt nên ta coi các số x_i này có vai trò như tham số m ở trên và điều kiện cho các số này là $x_i > -1$. Tiếp tục dựa vào đồ thị, ta thấy (*) có hai nghiệm phân biệt $x_i > -1$ khi $-1 < m < 3$.

Nếu xét tiếp $f(f(f(x))) = m$ có $2^3 = 8$ nghiệm thì tương tự trên, cần tìm m để (*) có hai nghiệm x_i phân biệt thỏa mãn $-1 < x_i < 3$. Đây là điểm mấu chốt của bài toán, ta quan sát đồ thị và thấy rằng, đường thẳng $y = 3$ cắt C tại $(-1; 3)$ và $(3; 3)$. Vì thế với điều kiện $-1 < m < 3$ thì (*) cũng sẽ có hai nghiệm phân biệt x_i cũng thỏa mãn $-1 < x_i < 3$. Với sự “may mắn” này, điều kiện cho các phương trình chứa hàm hợp nhiều lần hơn sẽ không thay đổi. Vì thế nên để

$$\underbrace{f(f(\dots(x)\dots))}_k = m, \quad k \geq 3 \text{ có } 2^k \text{ nghiệm phân biệt}$$

thì điều kiện là $-1 < m < 3$.

✱ Có một câu hỏi đặt ra là với điều kiện nào của a, b, c thì tam thức $ax^2 + bx + c$ có đặc điểm tương tự trên? Tiếp theo, ta xét một bài toán khác cũng rất thú vị về tam thức bậc hai.

Bài toán 2. Cho tam thức bậc hai hệ số thực $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$.

- a) Biết rằng $f(f(x)) = x$ có nghiệm thực duy nhất $x = x_0$. Tính giá trị của $f'(x_0)$.
- b) Giả sử rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $x = f(y)$ cắt nhau tại bốn điểm phân biệt tạo thành tứ giác $ABCD$. Chứng minh rằng $AC \perp BD$ và $ABCD$ không phải là hình thang.

Lời giải.

a) Dưới đây, ta xét ba cách giải cho bài toán này:

Cách 1. Theo đề bài, $f(x) = x$ phải có nghiệm duy nhất vì:

* Nếu $f(x) = x$ vô nghiệm thì phải có $f(x) > x, \forall x$ hoặc $f(x) < x, \forall x$. Trường hợp thứ nhất sẽ kéo theo $f(f(x)) > f(x) > x, \forall x$ dẫn đến phương trình ban đầu vô nghiệm. Trường hợp sau cũng tương tự.

* Nếu $f(x) = x$ có 2 nghiệm phân biệt là x_1, x_2 thì $f(f(x_1)) = f(x_1) = x_1$ và $f(f(x_2)) = x_2$ nên $f(f(x)) = x$ có ít nhất hai nghiệm, cũng không thỏa mãn.

Do đó, $f(x) = x$ có nghiệm duy nhất, tức là nghiệm kép, cũng chính là nghiệm x_0 ban đầu. Suy ra $f(x) - x = a(x - x_0)^2$. Đạo hàm hai vế được $f'(x) - 1 = 2a(x - x_0)$ nên có ngay $f'(x_0) = 1$.

Cách 2. Ta có kết quả tổng quát hơn: nếu đa thức $P(x)$ bậc chẵn có nghiệm duy nhất x_0 thì đó cũng là nghiệm của $P'(x)$. Thật vậy, theo định lý Bezout thì $P(x) = (x - x_0)Q(x)$ với $Q(x)$ là đa thức bậc lẻ. Khi đó, $Q(x)$ phải còn nghiệm nữa, và nghiệm đó phải trùng với x_0 nên ta đặt tiếp $P(x) = (x - x_0)^2 H(x)$. Từ đây đạo hàm hai vế được $P'(x) = (x - x_0)^2 H'(x) + 2(x - x_0)H(x)$ nên tiếp tục có nghiệm $x = x_0$.

Cách 3. Gọi (C) là đồ thị của $y = f(x)$ và ta chia nó làm hai phần $(C_1), (C_2)$ lần lượt nằm bên trái - phải của trục đối xứng. Khi đó, đồ thị (C') của $x = f(y)$ sẽ gồm hai phần $(C'_1), (C'_2)$ lần lượt là đối xứng của $(C_1), (C_2)$ qua đường thẳng $(d): y = x$.

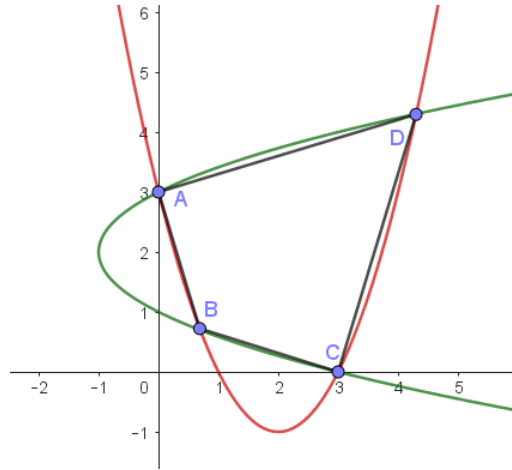
Để $f(f(x)) = x$ có nghiệm duy nhất thì $(C), (C')$ phải tiếp xúc nhau tại một điểm I nào đó. Do tính đối xứng trục thì $I \in (d)$ nên (d) là tiếp tuyến chung của $(C), (C')$. Cuối cùng, ta biết rằng để tìm hệ số góc của tiếp tuyến, ta xét đạo hàm tại điểm đó, vì thế nên $f'(x_0)$ chính là hệ số góc của tiếp tuyến (d) , cũng chính là 1.

b) Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a > 0$. Ta biểu diễn như hình vẽ bên dưới, trong đó

$$A = (C_1) \cap (C'_2), B = (C_1) \cap (C'_1), C = (C_2) \cap (C'_1), D = (C_2) \cap (C'_2).$$

Khi đó, do tính đối xứng trục (d) thì A, C đối xứng nhau qua (d) nên $AC \perp d$. Ngoài ra, cũng có $B, D \in d$ nên ta có ngay $AC \perp BD$.

Tiếp theo, vì $A, B \in (C_1)$ là nhánh nghịch biến của đồ thị nên hệ số góc của AB là âm; tương tự hệ số góc của CD là dương nên AB, CD không thể song song nhau. Do BC, AD đối xứng với AB, CD qua trục (d) nên hai đường này cũng không song song.



Vậy nên ta luôn có $AC \perp BD$ và tứ giác $ABCD$ này không phải là hình thang.

✱ Bài toán tiếp theo được tổng quát từ đề thi IMO Shortlist cách đây nhiều năm. Vai trò của đồ thị trong bài toán này là khá nhiều, tuy đó không phải là đồ thị của đa thức mà là phân thức.

Bài toán 3. Cho đa thức hệ số thực $P(x)$ bậc $n \geq 2$ có n nghiệm thực phân biệt $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.

Với số $k > 0$ cho trước, gọi D là tổng độ dài khoảng nghiệm của $\frac{P'(x)}{P(x)} \geq k$. Chứng minh $D = \frac{n}{k}$.

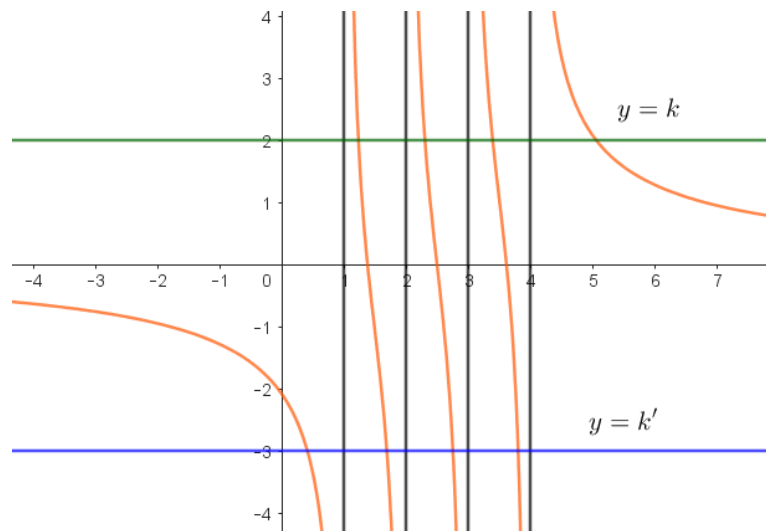
Lời giải.

Theo định lý Bezout thì ta có thể viết $P(x) = a(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$, khi đó

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{1}{x - a_1} + \frac{1}{x - a_2} + \dots + \frac{1}{x - a_n}, \text{ đặt là } f(x).$$

Ta quy về xét bất phương trình $f(x) \geq k$.

Ta có $f'(x) = -\sum_{i=1}^n \frac{1}{(x - a_i)^2} < 0$ nên hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định. Ta có thể vẽ bảng biến thiên hoặc đồ thị của hàm số như hình bên dưới:



Không mất tính tổng quát, giả sử $k > 0$ (trường hợp $k < 0$ thực hiện tương tự). Khi đó, trên mỗi khoảng $(a_i, a_{i+1}), i = 1, 2, \dots, n-1$ và $(a_n, +\infty)$ thì $f(x) = k$ có đúng một nghiệm. Đặt các

nghiệm đó theo thứ tự là $b_1, b_2, \dots, b_n$. Khi đó, các khoảng nghiệm là (a_i, b_i) với $1 \leq i \leq n$ và tổng độ dài các khoảng nghiệm là

$$D = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) = \sum_{i=1}^n b_i - \sum_{i=1}^n a_i.$$

Các nghiệm b_i , $1 \leq i \leq n$ ở trên cũng đều là nghiệm của $\frac{P'(x)}{P(x)} = k \Leftrightarrow kP(x) - P'(x) = 0$.

Đặt $P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$ thì $P'(x) = c_n n x^{n-1} + c_{n-1} (n-1) x^{n-2} + \dots + c_1$ thay vào:

$$c_n n \cdot x^{n-1} + c_{n-1} (n-1) x^{n-2} + \dots + c_1 = k(c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0) \text{ hay}$$

$$kc_n x^n + (kc_{n-1} - c_n n) x^{n-1} + \dots + (kc_1 - 2c_2) x + kc_0 = 0.$$

Theo định lý Viete thì

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n = -\frac{kc_{n-1} - c_n n}{kc_n} = \frac{n}{k} - \frac{c_{n-1}}{c_n} = \frac{n}{k} + (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

Từ đó ta có ngay $D = \frac{n}{k}$.

✱ Tiếp theo, ta xét bài toán rất thú vị và thử thách trong đề kiểm tra trường Đông 2022:

Bài toán 4. (trường Đông Vinh 2022) Với n nguyên dương, xét đa thức hệ số thực $P(x)$ bậc n , monic sao cho tồn tại các số thực r, s, t phân biệt có tổng là -2023 thỏa mãn

$$P(k) \in \{r, s, t\} \text{ với mọi } k = 1, 2, 3, \dots, 3n-1, 3n.$$

a) Với $n = 2$, tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn đề bài.

b) Hỏi có tồn tại hay không số $n \geq 3$ để có đa thức $P(x)$ thỏa mãn đề bài? Vì sao?

Lời giải.

a) Ứng với $n = 2$, ta có $P(k) \in \{r, s, t\}$ với $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Do $\deg P = 2$ nên có không quá 2 số k để $P(k) = r$. Tương tự với $P(k) = s$, $P(k) = t$. Từ đó suy ra mỗi phương trình trên phải có đúng 2 nghiệm.

Chú ý rằng cả ba phương trình đều có chung hệ số x^2 và x nên tổng các nghiệm của các phương trình là bằng nhau. Mặt khác, tất cả các nghiệm của chúng là $1, 2, 3, 4, 5, 6$ có tổng bằng 21, từ đó suy ra mỗi phương trình sẽ có tổng các nghiệm là 7. Khi đó, 6 nghiệm ở trên sẽ chia theo các cặp $(1, 6), (2, 5), (3, 4)$. Ta có thể giả sử

$$\begin{cases} P(x) - r = (x-1)(x-6) \\ P(x) - s = (x-2)(x-5), \\ P(x) - t = (x-3)(x-4) \end{cases}$$

từ đó suy ra $3P(x) - (r + s + t) = (x-1)(x-6) + (x-2)(x-5) + (x-3)(x-4)$ hay

$$3P(x) + 2023 = 3x^2 - 21x + 28.$$

Từ đó tìm được $P(x) = x^2 - 7x - 665$ và r, s, t lần lượt là $-671, -675, -677$.

b) Giả sử tồn tại $P(x)$ bậc $n \geq 3$ thỏa mãn đề bài, không mất tính tổng quát giả sử $r < s < t$. Theo lập luận ở trên, mỗi phương trình

$$P(x) - r, P(x) - s, P(x) - t$$

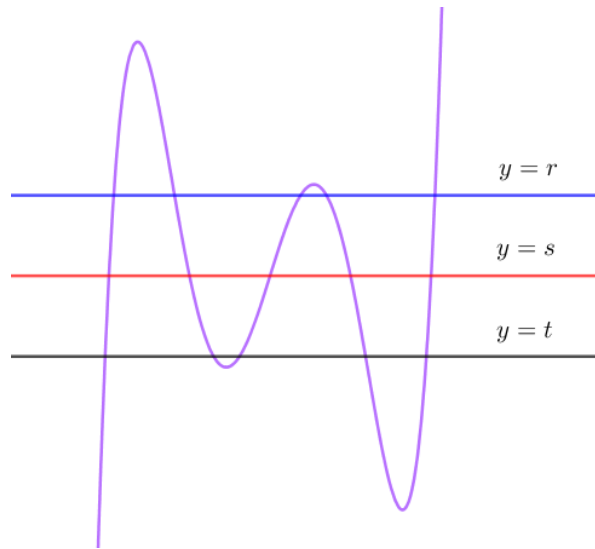
sẽ có đúng n nghiệm phân biệt lấy từ $\{1, 2, 3, \dots, 3n\}$. Ngoài ra, theo định lý Viète thì do mỗi phương trình đều chung nhau ít nhất là ba hệ số đầu tiên tổng các nghiệm và tổng bình phương các nghiệm của chúng phải đều bằng nhau.

Xét hàm số $f(x) = P(x) - r$ có n nghiệm phân biệt nên theo định lý Rolle thì $f'(x) = P'(x)$ phải có $n - 1$ nghiệm phân biệt, ký hiệu là $c_1 < c_2 < \dots < c_{n-1}$. Phương trình $P(x) = r$ sẽ có nghiệm duy nhất trên từng khoảng $(-\infty; c_1), (c_1, c_2), \dots, (c_{n-1}, +\infty)$. Tương tự với $P(x) = s, P(x) = t$.

Ta có hai trường hợp sau:

(1) Nếu n lẻ thì dễ thấy ở khoảng đầu tiên, $P(x)$ đồng biến nên $P(x) = r, P(x) = s, P(x) = t$ sẽ lần lượt nhận các nghiệm 1, 2, 3. Ở khoảng tiếp theo, hàm số nghịch biến nên chúng sẽ lần lượt nhận các nghiệm 6, 5, 4, và cứ như thế, đến khoảng cuối cùng sẽ là $3n - 2, 3n - 1, 3n$.

Khi đó, dễ thấy tổng các nghiệm của ba phương trình trong $n - 1$ khoảng đầu là bằng nhau, riêng khoảng cuối thì mỗi phương trình nhận một nghiệm khác nhau nên tổng các nghiệm của chúng là khác nhau, không thỏa mãn.



(2) Nếu n chẵn, đặt $n = 2m$ thì ba phương trình sẽ có các nghiệm là $1, 2, 3, \dots, 6m$ và tương tự lập luận trên, $P(x) = r$ sẽ có các nghiệm là

$$\{1, 6, 7, 12, \dots, 6m - 5, 6m\}.$$

Tổng bình phương các số này sẽ là

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m (6k - 5)^2 + (6k)^2 &= \sum_{k=1}^m (72k^2 - 60k + 25) \\ &= 72 \cdot \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} - 60 \cdot \frac{m(m+1)}{2} + 25m \\ &= 12m(m+1)(2m+1) - 30m(m+1) + 25m = m(24m^2 + 6m + 7). \end{aligned}$$

Mặt khác, tổng bình phương tất cả $6m$ số là

$$\frac{6m(6m+1)(12m+1)}{6} = m(6m+1)(12m+1)$$

nên mỗi phương trình phải có tổng bình phương các nghiệm là $\frac{1}{3}$ giá trị này. Suy ra

$$3m(24m^2 + 6m + 7) = m(6m+1)(12m+1)$$

hay $72m^2 + 18m + 21 = 72m^2 + 18m + 1$, vô lý. Điều này cho thấy trong mọi trường hợp, ta không thể có đa thức $P(x)$ thỏa mãn đề bài.

✱ Bài toán trên có thể nói là kết hợp của các bài toán sau đây:

1) Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ bậc ba monic sao cho

$$|P(1)| = |P(2)| = |P(3)| = |P(5)| = |P(6)| = |P(7)|.$$

2) Xét các số nguyên dương m, n và giả sử tồn tại $P(x)$ hệ số nguyên sao cho

$$P(x_1) = P(x_2) = \dots = P(x_m) = 61 \text{ và } P(y_1) = P(y_2) = \dots = P(y_n) = 2020,$$

với $x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n$ là các số nguyên đôi một phân biệt. Tìm giá trị lớn nhất của mn .

3) Tìm tất cả các đa thức $P(x), Q(x)$ hệ số nguyên sao cho

$$P(Q(x)) = (x-1)(x-2)\dots(x-9) \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

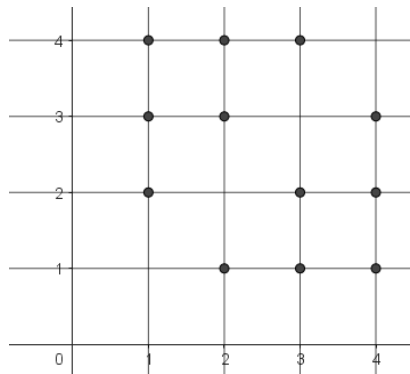
Ở câu b) của bài toán, việc dùng đồ thị để minh họa rõ thứ tự sắp xếp của các nghiệm là rất quan trọng, giúp ta có thể chỉ rõ được các nghiệm ban đầu được phân hoạch ra như thế nào và từ đó dùng định lý Bezout, Viète.

Bài toán 5. (Arab Saudi TST 2015) Cho tập hợp $S = \{(a, b) \mid a \neq b, 1 \leq a \leq 4, 1 \leq b \leq 4\}$ là các cặp số nguyên. Xét đa thức hai biến $f(x, y)$ hệ số nguyên sao cho $f(a, b) = 0, \forall (a, b) \in S$.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của bậc của đa thức này.

b) Giả sử $f_0(x, y)$ là một đa thức có bậc nhỏ nhất. Chứng minh rằng $f_0\left(\frac{3}{2}; \frac{5+\sqrt{6}}{2}\right) = 0$.

Lời giải. Bài toán này có nét tương tự đa thức nguyên tối thiểu, nếu lập luận theo hướng đại số trực tiếp thì vẫn được nhưng khá rắc rối. Trong phần này, ta sẽ biểu diễn các điểm lên mặt phẳng tọa độ, quy việc tìm đa thức về việc xác định đồ thị đi qua được tất cả các điểm này.



Trước hết, ta thấy rằng nếu chỉ dùng đường thẳng thì cần ít nhất 4 đường mới đi qua hết 12 điểm này, nếu chỉ có 1, 2, hoặc 3 đường thì không đủ. Ta xét các trường hợp sau:

(1) Nếu $\deg f(x, y) = 1$ thì ta có đường thẳng dạng $ax + by + c = 0$ nên không thỏa mãn.

(2) Nếu $\deg f(x, y) = 2$ thì loại trường hợp tích của hai đa thức bậc nhất, nếu đây là đa thức bậc hai thì phương trình sẽ có dạng $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + g$.

Ta sẽ chứng minh conic dạng này sẽ không đi qua ba điểm thẳng hàng. Giả sử rằng nó đi qua được ba điểm P, Q, R cùng thuộc đường thẳng $mx + ny + p = 0$. Giả sử $m \neq 0$, ta coi đây là đa thức bậc nhất theo biến x và coi $f(x, y)$ là đa thức bậc hai theo biến x thì thực hiện phép chia

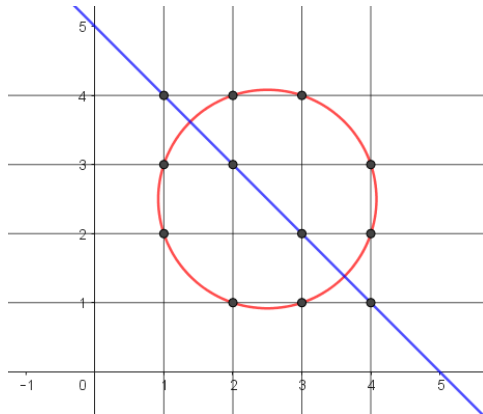
$$f(x, y) = (mx + ny + p)g(x, y) + Ay^2 + By + C$$

Vì $f(x_P, y_P) = f(x_Q, y_Q) = f(x_R, y_R) = 0$ nên y_P, y_Q, y_R là ba nghiệm phân biệt của $Ay^2 + By + C$ nên rõ ràng phải có $A = B = C = 0$. Điều này kéo theo $f(x, y)$ có thể phân tích thành tích của hai hàm số bậc nhất theo biến x, y , không thể là đường conic không suy biến được.

Trở lại bài toán, ta thấy trong 12 điểm đã cho, có nhiều bộ ba điểm thẳng hàng nên không thể có conic không suy biến cùng lúc đi qua tất cả các điểm đó.

(3) Nếu $\deg f(x, y) = 3$, ta chỉ xét trường hợp một đường thẳng và một conic bậc hai. Quan sát đồ thị, ta thấy rằng: đường thẳng qua được tối đa 4 điểm; còn theo phần (2) ở trên thì ở mỗi tung độ $y = 1, 2, 3, 4$, đường conic sẽ qua tối đa 2 điểm nên tổng cộng qua được tối đa 8 điểm.

Do đó, tổng cộng đồ thị qua tối đa 12 điểm và dấu bằng phải xảy ra. Ta vẽ được duy nhất mô hình gồm một đường thẳng và một đường tròn như bên dưới:



Khi đó ta có được $f_0(x, y) = k(x + y - 5)(x^2 + y^2 - 5x - 5y + 10)$ và có ngay $f\left(\frac{3}{2}; \frac{5 + \sqrt{6}}{2}\right) = 0$.

✱ Cuối cùng, ta xét hai bài toán rất thú vị về ý nghĩa hình học của các bài toán về đa thức, bài đầu tiên trong đề chọn đội tuyển của Iran, còn bài sau chúng tôi tương tự hóa lại từ bài này.

Bài toán 6. Cho $P(x)$ là đa thức hệ số thực khác hằng thỏa mãn: tồn tại vô số cặp số nguyên m, n sao cho $P(m) + P(n) = 0$. Chứng minh rằng đồ thị của hàm số $y = P(x)$ có tâm đối xứng.

Lời giải. Ta biết rằng $P(x)$ có tâm đối xứng là (x_0, y_0) nếu như

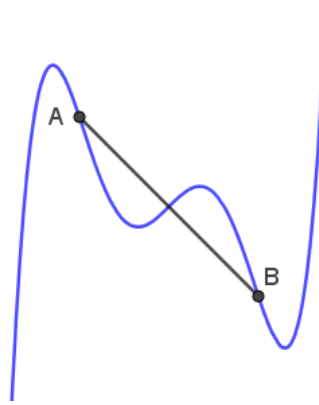
$$P(x + x_0) + P(-x + x_0) = 2y_0 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Nói cách khác, nếu đặt $Q(x) = P(x + x_0) - y_0$ thì $Q(x) + Q(-x) = 0$ hay Q là hàm số lẻ. Như thế, mấu chốt của bài toán này là chỉ ra trong vô số cặp số nguyên đã cho, phải có vô số cặp số nguyên có tổng là hằng số nào đó.

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng $P(x)$ monic, vì nếu $P(x)$ thỏa mãn thì $P(x)/c$ cũng thỏa mãn.

Nếu như $\deg P(x)$ chẵn thì với x có giá trị tuyệt đối đủ lớn, $P(x) > 0$. Cụ thể là tồn tại các số thực p, q sao cho $p < 0 < q$ mà $P(x) > 0, \forall x \notin [p; q]$. Xét $S = \{s \in \mathbb{Z} \mid s \in [p; q]\}$ thì rõ ràng S hữu hạn. Xét cặp số nguyên (m, n) sao cho $P(m) + P(n) = 0$ thì giả sử $P(n) \leq 0$, kéo theo $n \in S$. Như thế, với mọi cặp số nguyên (m, n) thỏa mãn đề bài thì có ít nhất một số sẽ thuộc S . Vì tính hữu hạn của S nên phải có một số $s_0 \in S$ ứng với vô số cặp (m, s_0) mà $P(m) = -P(s_0)$, kéo theo $P(x)$ là đa thức hằng, không thỏa mãn. Như vậy, $\deg P(x)$ lẻ.

Bây giờ chú ý rằng kể từ một số x đủ lớn nào đó thì $P(x)$ đơn điệu tăng khi $x \rightarrow +\infty$ (ta chỉ cần chọn x lớn hơn điểm cực trị lớn nhất của $P(x)$ là xong). Hơn nữa, với mỗi số nguyên n , tồn tại hữu hạn các số nguyên m sao cho $P(m) = -P(n)$ (vì đa thức chỉ có thể nhận một giá trị nào đó ở hữu hạn điểm, không vượt quá bậc của nó).



Từ đó, ta thấy rằng với mọi số thực C đủ lớn, tồn tại cặp số $m, n \in \mathbb{Z}$ sao cho $P(m) + P(n) = 0$, trong đó m và n khác dấu và có trị tuyệt đối lớn hơn C . (*)

Giả sử rằng $\deg P(x) = k$ lẻ và đặt $P(x) = x^k + ax^{k-1} + H(x)$ với $\deg H < k-1$. Tiếp theo, dễ dàng chọn được số thực d sao cho $P(x-d)$ khuyết hệ số của bậc $k-1$. Thật vậy,

$$P(x-d) = (x-d)^k + a(x-d)^{k-1} + H(x-d) = x^k - kdx^{k-1} + ax^{k-1} + H(x-d)$$

và như thế, ta chỉ cần chọn $d = \frac{a}{k}$. Bây giờ ta chứng minh rằng điểm $(d; 0)$ chính là tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y = P(x)$.

Đặt $P(x-d) = Q(x)$, ta quy về chứng minh rằng $Q(x) = -Q(-x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Như thế, $Q(x) = x^k + bx^{k-2} + H(x-d)$ và tồn tại vô hạn cặp số m, n sao cho $Q(m) + Q(n) = 0$ và $m-d, n-d$ là số nguyên. Theo (*), ta chọn nghiệm có giá trị tuyệt đối đủ lớn với $m > 0, n < 0$.

Bây giờ giả sử $|m| < |n|$, giả sử $n = -m-c$ với $c \in \mathbb{Z}^+$. Khi đó

$$\begin{aligned} Q(m) + Q(n) &= Q(m) + Q(-m-c) \\ &= m^k + bm^{k-2} + H(m) + (-m-c)^k + b(-m-c)^{k-2} + H(-m-c) \\ &= -kc \cdot m^{k-1} + R(m), \end{aligned}$$

trong đó $\deg R(x) \leq k-2$. Nếu m đủ lớn, số $kc \cdot m^{k-1}$ sẽ lớn hơn nhiều so với $|R(m)|$ và như vậy tổng $-kc \cdot m^{k-1} + R(m)$ sẽ nhỏ hơn 0. Tương tự, không thể có $|m| > |n|$ với $|m|, |n|$ đủ lớn.

Do đó, tồn tại vô số các số m sao cho $Q(m) + Q(-m) = 0$, tức là đa thức $Q(x) + Q(-x)$ có vô số nghiệm. Điều này có thể xảy ra khi $Q(x) + Q(-x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và như thế, đa thức $Q(x)$ là hàm số lẻ và có đồ thị đối xứng qua điểm $(0; 0)$.

Vậy đồ thị $y = P(x)$ đối xứng qua điểm $(d; 0)$.

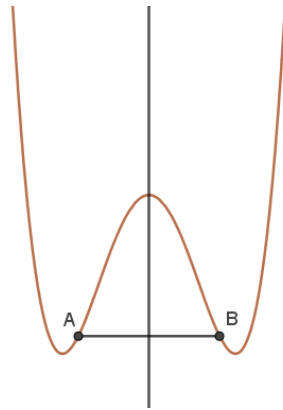
Bài toán 7. Cho $P(x)$ là đa thức hệ số thực khác hằng thỏa mãn: tồn tại vô số cặp số nguyên $m \neq n$ sao cho $P(m) = P(n)$. Chứng minh rằng đồ thị của hàm số $y = P(x)$ có trục đối xứng.

Lời giải. Bài toán này nói chung giống bài trên, trong lời giải, ta chỉ cần đổi dấu cho $P(x)$ tại một số vị trí thích hợp. Ta biết rằng $P(x)$ có trục đối xứng là $x = x_0$ nếu như

$$P(x + x_0) = P(-x + x_0) \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Nói cách khác, nếu đặt $Q(x) = P(x + x_0)$ thì $Q(x) = Q(-x)$ hay Q là hàm số chẵn. Không mất tính tổng quát, ta cũng giả sử $P(x)$ monic.

Nếu $\deg P(x)$ lẻ thì rõ ràng $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty$. Như thế, có thể chọn x_0 đủ lớn thì $P(x)$ sẽ đồng biến trên $(x_0; +\infty)$ và $P(x) = y_0$ luôn có nghiệm duy nhất với mọi $y_0 > P(x_0)$. Do đó, không thể tồn tại cặp số $m \neq n$ như đề bài. Do đó $\deg P(x)$ chẵn.



Xét $\deg P(x)$ chẵn thì tương tự trên, với mọi số thực C đủ lớn, tồn tại cặp số $m, n \in \mathbb{Z}$ sao cho $P(m) = P(n)$ trong đó m và n khác dấu và có trị tuyệt đối lớn hơn C . (*)

Đặt $P(x) = x^k + ax^{k-1} + H(x)$ với k chẵn, $\deg H < k-1$. Chọn d để $P(x-d)$ khuyết bậc $k-1$. Ta chứng minh rằng đường thẳng $x = d$ chính là trục đối xứng của đồ thị hàm số $y = P(x)$.

Đặt $P(x-d) = Q(x)$ thì $Q(x) = x^k + bx^{k-2} + H(x-d)$ và tồn tại vô hạn m, n sao cho $Q(m) = Q(n)$ và $m-d, n-d$ đều nguyên. Theo (*), ta chọn nghiệm có giá trị tuyệt đối đủ lớn với $m > 0, n < 0$.

Ta cũng sẽ đi chứng minh $m = -n$. Bây giờ giả sử $|m| < |n|$, giả sử $n = -m - c$ với $c \in \mathbb{Z}^+$. Khi đó

$$\begin{aligned} Q(m) - Q(n) &= Q(m) - Q(-m - c) \\ &= m^k + bm^{k-2} + H(m) - (-m - c)^k - b(-m - c)^{k-2} - H(-m - c) \\ &= -kc \cdot m^{k-1} + R(m), \end{aligned}$$

trong đó $\deg R(x) \leq k - 2$. Đến đây sẽ có vô lý. Tương tự nếu $|m| > |n|$ cũng có vô lý, và vì thế nên $m + n = 0$.

Vậy nên $Q(x) = Q(-x)$ với vô số x nguyên, kéo theo $Q(x) = Q(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nên $Q(x)$ có trục đối xứng là $x = 0$, và $P(x)$ có trục đối xứng là đường thẳng $x = d$.

Bài tập rèn luyện.

1) (VMO 2018) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho C là đồ thị của hàm số $y = \sqrt[3]{x^2}$. Một đường thẳng (d) thay đổi và cắt C tại ba điểm có hoành độ phân biệt lần lượt là x_1, x_2, x_3 .

a. Chứng minh rằng đại lượng $\sqrt[3]{\frac{x_1 x_2}{x_3^2}} + \sqrt[3]{\frac{x_2 x_3}{x_1^2}} + \sqrt[3]{\frac{x_3 x_1}{x_2^2}}$ là hằng số.

b. Chứng minh rằng $\sqrt[3]{\frac{x_1^2}{x_2 x_3}} + \sqrt[3]{\frac{x_2^2}{x_3 x_1}} + \sqrt[3]{\frac{x_3^2}{x_1 x_2}} < -\frac{15}{4}$.

2) (Bài toán friendly circles) Cho các số thực a, b, c đôi một phân biệt và khác 0. Chứng minh rằng ba đường tròn sau khi vẽ trong mặt phẳng tọa độ Oxy thì luôn có ít nhất hai điểm chung

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2$$

$$(x - b)^2 + (y - c)^2 = a^2$$

$$(x - c)^2 + (y - a)^2 = b^2$$

(điểm chung ở đây được hiểu là giao điểm của ít nhất hai trong ba đường tròn trên).

3) (AIME 2022) Cho a, b, x, y là các số thực (trong đó $a > 4, b > 1$) thỏa mãn

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - 16} = \frac{(x - 20)^2}{b^2 - 1} + \frac{(y - 11)^2}{b^2} = 1.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = a + b$.

4) (Đề THPT QG 2019) Tìm điều kiện của m để phương trình sau có bốn nghiệm phân biệt

$$\frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} = |x+1| - x - m.$$

Tài liệu tham khảo.

- 1) Nguyễn Mạc Nam Trung, Tài liệu chọn lọc trường Đông Toán học miền Nam, 2020.
- 2) IMO Booklet của Arab Saudi 2015.
- 3) Phùng Hồ Hải, Bài giảng ở Trường Đông Titan miền Nam, 2022.
- 4) <https://mathscope.org/showthread.php?t=35623>.
- 5) <https://artofproblemsolving.com/community/c5h2782937p24447217>.
- 6) https://en.wikipedia.org/wiki/Five_points_determine_a_conic.